Die Baummethode der Prädikatenlogik

Einführungskurs Logik, Universität Bern, Frühlingssemester 2008

handout zur Sitzung vom 6.5.08

Philipp Keller
philipp.keller@lettres.unige.ch

Punkte vom letzten Kurs

1. Das Alphabet einer prädikatenlogischen Sprache enthält (Satz- und Prädikaten-) Junktoren, das Identitätszeichen, Variablen, Quantoren, Relations-, Funktionszeichen und Individuenkonstanten. Die drei letzten Kategorien sind die nicht-logischen (= in einer Struktur interpretierbaren) Zeichen einer prädikatenlogischen Sprache.
2. Die Quantoren der (erststufigen) Prädikatenlogik gehören zur gleichen syntaktischen Kategorie wie die zweitstufigen Prädikate.
3. Eine Variable kommt in einer Formel frei vor, wenn sie sich nicht überall im Geltungsbereich eines Quantors befindet.
4. Eine Struktur für eine prädikatenlogische Sprache besteht aus einem Individuenbereich und einer Interpretation ihrer nicht-logischen Zeichen.
5. Die Interpretation einer Individuenkonstante weist ihr ein Element des Individuenbereichs zu; die Interpretation eines Relationszeichens eine Relation in diesem Individuenbereich; die Interpretation eines Funktionszeichens eine Funktion innerhalb des Individuenbereichs.
6. Eine Wertzuordnung ist eine Funktion, die jeder Variable der Sprache ein Element des Individuenbereichs zuordnet.
7. Der Schlüsselbegriff der Semantik der Prädikatenlogik ist der der Erfüllung eines Prädikats unter einer Wertzuordnung in einer Struktur. Wir nennen das Prädikat dann "wahr unter dieser Wertzuordnung (in dieser Struktur)".
8. Wir nennen eine Formel "wahr in einer Struktur" gdw. sie unter jeder Wertzuordnung in dieser Struktur wahr ist. Eine solche Struktur heisst dann "Modell" der Formel. Wir nennen eine Formel "gültig" gdw. sie in allen Strukturen wahr ist.
9. Die Substitution eines Terms für eine Variable ersetzt jedes Vorkommnis dieser Variable durch den Term. Damit die resultierende Formel eine Substitutionsinstanz ist, muss der Term für die Variable frei sein in der Formel, d.h. er darf keine Variable enthalten, die durch die Substitution gebunden wird..
10. Die Reihenfolge der Quantoren ist wichtig: "$\exists y \forall x\ (Rxy)$" impliziert formal "$\forall x \exists y\ (Rxy)$", aber nicht umgekehrt.

Quantifizierte Sätze

Theorem 1. *Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur mit einem endlichen Individuenbereich $|\mathcal{A}|$ und $\ulcorner \phi(x) \urcorner$ eine Formel, die ein freies Vorkommnis der Variable "x" enthält. Es gelten folgende Äquivalenzen:*

$$\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner \iff \ulcorner \phi(a_1) \wedge \phi(a_2) \wedge \cdots \wedge \phi(a_n) \urcorner$$
$$\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner \iff \ulcorner \phi(a_1) \vee \phi(a_2) \vee \cdots \vee \phi(a_n) \urcorner$$

wobei "a_1", "a_2", ..., 'a_n" Konstanten für alle Elemente von $|\mathcal{A}|$ sind.

Die Konstruktionsregeln der Bäume für die Prädikatenlogik sind durch folgende semantische Tatsachen motiviert:

F10 Wenn eine universelle Quantifikation $\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner$ wahr ist, dann sind alle ihre Substitutionsinstanzen $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ wahr (für jede Individuenkonstante "a").

F11 Wenn eine universelle Quantifikation $\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner$ falsch ist, dann ist mindestens eine Substitutionsinstanz $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ falsch.

F12 Wenn eine existentielle Quantifikation $\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$ wahr ist, ist mindestens eine Substitutionsinstanz $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ wahr.

F13 Wenn eine existentielle Quantifikation $\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$ falsch ist, sind alle Substitutionsinstanzen $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ falsch.

Die Baummethode für die Prädikatenlogik

$\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner$

$\ulcorner \phi(a_1) \urcorner$
$\ulcorner \phi(a_2) \urcorner$ für alle Individuenkonstanten “a_i” auf diesem Zweig
$\ulcorner \phi(a_3) \urcorner$
.
.

$\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$

$\ulcorner \phi(a_1) \urcorner$ $\ulcorner \phi(a_2) \urcorner$ $\ldots$ $\ulcorner \phi(b) \urcorner$

für alle Individuenkonstanten “a_i” auf diesem Zweig und eine neue Individuenkonstante “b”

$\ulcorner \neg\forall x(\phi(x)) \urcorner$

$\ulcorner \neg\phi(a_1) \urcorner$ $\ulcorner \neg\phi(a_2) \urcorner$ $\ldots$ $\ulcorner \neg\phi(b) \urcorner$

für alle Individuenkonstanten “a_i” auf diesem Zweig und eine neue Individuenkonstante “b”

$\ulcorner \neg\exists x(\phi(x)) \urcorner$

$\ulcorner \neg\phi(a_1) \urcorner$
$\ulcorner \neg\phi(a_2) \urcorner$ für alle Individuenkonstanten “a_i” auf diesem Zweig
$\ulcorner \neg\phi(a_3) \urcorner$
.
.

Tipp für die Reihenfolge der Anwendung der Regeln:
1. Junktoren
2. $\exists$, $\neg\forall$ – neue Zweige
3. $\forall$, $\neg\exists$ – Substitutionsinstanzen für alle Individuenkonstanten
4. Junktoren
5. $\exists$, $\neg\forall$
6. $\forall$, $\neg\exists$
7. ...

Einige Beispiele

$\checkmark \quad \exists x \forall y\ (Rxy) \wedge \exists x \forall y\ \neg(Rxy)$

$^{a}\checkmark\ \exists x \forall y\ (Rxy)$
$^{a,b}\checkmark\ \exists x \forall y\ \neg(Rxy)$

$^{a}\checkmark\ \forall y\ (Ray)\ ^{a,b}\checkmark$

$^{a}\checkmark\ \forall y \neg(Ray) \qquad \forall y \neg(Rby)\ ^{a,b}\checkmark$

$Raa \qquad Raa$
$ \qquad Rab$

$\neg Raa \qquad \neg Rba$
$\nabla \qquad \neg Rbb$

$^{a}\checkmark\ \neg \forall x\ (Rxx \rightarrow \exists y Rxy)$

$\neg(Raa \rightarrow \exists y Ray)$

Raa
$^{a}\checkmark \neg \exists y Ray$

$\neg Raa$
∇

$\checkmark \quad \forall x \exists y\ Rxy \wedge Ga$

$^{a}\checkmark\ \forall x \exists y\ Rxy$
Ga

$^{b}\checkmark\ \exists y Ray\ ^{a}\checkmark$

$Rab \qquad Raa$
$^{c}\checkmark \exists y Rby\ ^{b}\checkmark$

$Rbc \qquad Rbb$
$^{d}\checkmark \exists y Rcy\ ^{c}\checkmark$

$Rcd \qquad Rcc$
$\exists y Rdy$

Beliebige Individuen

Eine Abänderung unserer Konstruktionsregeln:

$$\begin{array}{l}
\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner \\
\quad | \\
\quad \ulcorner \phi(b) \urcorner \quad \text{für eine neue Individuenkonstante “}b\text{”}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\ulcorner \neg\forall x(\phi(x)) \urcorner \\
\quad | \\
\quad \ulcorner \neg\phi(b) \urcorner \quad \text{für eine neue Individuenkonstante “}b\text{”}
\end{array}$$

Ein unendlicher Baum:

$$\begin{array}{c}
{}^{b,c,d,e,\ldots}\checkmark\ \forall x \exists y\ (Rxy) \\
{}^{b}\checkmark\ \exists y Ray \\
| \\
Rab \\
{}^{c}\checkmark\ \exists y Rby \\
| \\
Rbc \\
{}^{d}\checkmark\ \exists y Rcy \\
| \\
Rcd \\
{}^{e}\checkmark\ \exists y Rdy \\
| \\
Rde \\
{}^{f}\checkmark\ \exists y Rey \\
| \\
\vdots
\end{array}$$

Begrenzungen der Baummethode

Wie das letzte Beispiel zeigt, können wir mit unseren Regeln unendliche Bäume konstruieren. Darin liegt ein wesentlicher Unterschied zwischen Aussagen- und Prädikatenlogik. Im Gegensatz zur Aussagenlogik (und zur unären Prädikatenlogik) ist die Prädikatenlogik nur semi-entscheidbar: Falls eine Formel eine Tautologie ist, werden wir das auch herausfinden (alle Zweige des Baumes werden sich schliessen). Falls aber eine Formel keine Tautologie ist, werden wir das nicht unbedingt herausfinden: entweder werden wir einen offenen Zweig (ein Modell) für die Negation finden, oder aber unser Baum wird unendlich werden.