

Die Methode der natürlichen Deduktion für die Prädikatenlogik

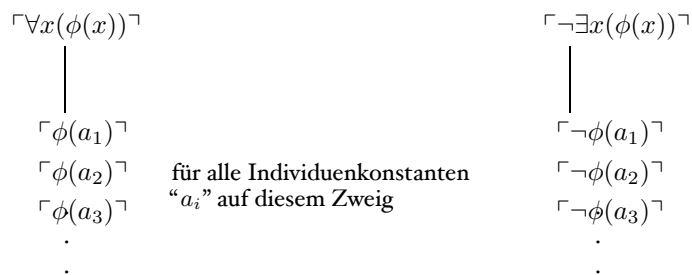
Einführungskurs Logik, Universität Bern, Frühlingssemester 2008

handout zur Sitzung vom 13.5.08

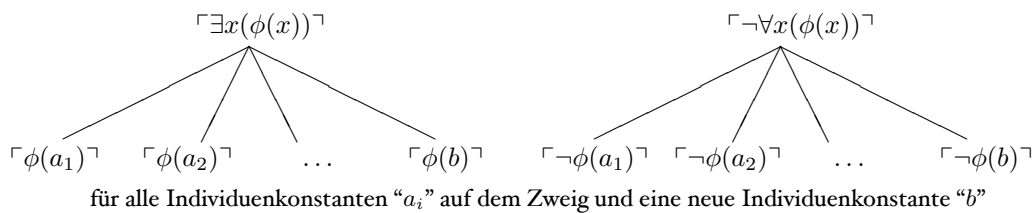
Philipp Keller
philipp.keller@lettres.unige.ch

Punkte vom letzten Kurs

1. In einer Struktur mit endlichem Individuenbereich ist eine Allquantifikation logisch äquivalent zur Konjunktion ihrer Instanzen; in einer solchen Struktur ist eine Existenzquantifikation logisch äquivalent zur Disjunktion ihrer Instanzen.
2. Wenn eine Allquantifikation $\lceil \forall x(\phi(x)) \rceil$ wahr ist, dann auch alle ihre Instanzen $\lceil \phi(a) \rceil$ (für alle Individuenkonstanten "a"). Wenn eine Existenzquantifikation $\lceil \exists x(\phi(x)) \rceil$ falsch ist, dann auch alle ihre Instanzen $\lceil \phi(a) \rceil$.
3. Wenn eine Allquantifikation $\lceil \forall x(\phi(x)) \rceil$ falsch ist, dann auch mindestens eine Instanz $\lceil \phi(a) \rceil$. Wenn eine Existenzquantifikation $\lceil \exists x(\phi(x)) \rceil$ wahr ist, dann auch mindestens eine Instanz $\lceil \phi(a) \rceil$.
4. Die Baumkonstruktionsregeln für den Allquantor und den negierten Existenzquantor:



5. Die Baumkonstruktionsregeln für den Existenzquantor und den negierten Allquantor:



6. Wir können die beiden letzten Regeln für $\lceil \exists x(\phi(x)) \rceil$ und $\lceil \neg \forall x(\phi(x)) \rceil$ vereinfachen und uns auf den Zweig mit der neuen Konstante beschränken.
7. Diese Vereinfachung ist erlaubt, weil eine Formel, die ein Modell mit n Individuen hat, auch ein Modell mit $n + 1$ Individuen hat.
8. Für jede gültige Formel der Prädikatenlogik erlaubt uns die Baummethode, einen Beweis zu finden: der Baum für die Negation der gültigen Formel schliesst sich.
9. Wir können allerdings daraus, dass wir eine Formel nicht beweisen können, nicht schliessen, dass die Formel nicht gültig ist: nicht jeder fehlgeschlagene Beweisversuch ist eine Widerlegung. Wenn sich der Baum für die Negation einer Formel nicht schliesst, können wir daraus nicht schliessen, dass die Formel nicht gültig (d.h. ihre Negation erfüllbar ist). Wir haben eine solche Garantie, für jede erfüllbare Formel ein Modell zu finden, nur für Formeln, die in endlichen

Individuenbereichen wahr sein können.

10. Diese Disanalogie zwischen der Prädikaten- und der Aussagenlogik entspricht einem wichtigen metalogischen Unterschied: die Aussagenlogik ist entscheidbar (d.h. es gibt ein mechanisches Verfahren zu testen, ob eine Formel gültig ist), während die Prädikatenlogik nur semientscheidbar ist. Gegenbeispiele lassen sich nicht auf mechanische Weise finden.

Die Einführungs- und Eliminationsregeln der Quantoren

Beispiel eines Schlusses, der einen Allquantor eliminiert:

Alle Menschen sind sterblich.	
Sokrates ist ein Mensch.	(1)
Sokrates ist sterblich.	

Die entsprechende Sequenz beweisen wir mit der Methode der natürlichen Deduktion wie folgt:

1	$Ha, \forall x(Hx \rightarrow Mx)$	$\vdash Ha$	Prämisse
2	$Ha, \forall x(Hx \rightarrow Mx)$	$\vdash \forall x(Hx \rightarrow Mx)$	Prämisse
3	$Ha, \forall x(Hx \rightarrow Mx)$	$\vdash Ha \rightarrow Ma$	aus (2) mit (US)
4	$Ha, \forall x(Hx \rightarrow Mx)$	$\vdash Ma$	aus (1) und (3) mit (MP)

Beispiel für die Anwendung der Einführungsregel für den Allquantor:

1	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	Prämisse
2	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Prämisse
3	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash Fa$	aus (1) mit (US)
4	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash Fa \rightarrow Ga$	aus (2) mit (US)
5	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash Ga$	aus (3) und (4) mit (MP)
6	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash \forall x(Gx)$	aus (5) mit (UG)

Aber Achtung, der folgende Schluss ist ungültig:

1	Fa	$\vdash Fa$	Prämisse
2	Fa	$\vdash \forall x(Fx)$	aus (1) mit (UG)

Wir können unsere Behauptung für a nicht verallgemeinern, weil a nicht 'beliebig' ist.

Beispiel für die Einführungsregel des Existenzquantors:

1	$\forall x(Fx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	Prämisse
2	$\forall x(Fx)$	$\vdash Fa$	aus (1) mit (US)
3	$\forall x(Fx)$	$\vdash \exists x(Fx)$	aus (2) mit (EG)

Beispiel für die Eliminationsregel des Existenzquantors:

1	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Prämisse
2	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash \exists x(Fx)$	Prämisse
3	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* Fa$	Annahme (des "typischen Disjunktts")
4	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* Fa \rightarrow Ga$	aus (1) mit (US)
5	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* Ga$	aus (3) und (4) mit (MP)
6	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* \exists x(Gx)$	aus (5) mit (EG)
7	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash \exists x(Gx)$	aus (2), (3) und (6) mit (ES)

Aber Achtung, der folgende Schluss ist ungültig:

1	$\exists x(Fx)$	$\vdash \exists x(Fx)$	Prämisse
2	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* Fa$	Annahme (des typischen Disjunks)
3	$\exists x(Fx)$	$\vdash Fa$	aus (1), (2) und (2) mit (ES)
4	$\exists x(Fx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	aus (3) mit (UG)

Eine Anwendung von (ES) ist nur dann korrekt, wenn die unter der Annahme des typischen Disjunks bewiesene Konklusion die im typischen Disjunkt vorkommende Individuenkonstante (hier "a") nicht enthält. Folgender Schluss ist ebenfalls ungültig:

1	$\exists x(Fx), Ga$	$\vdash \exists x(Fx)$	Prämisse
2	$\exists x(Fx), Ga$	$\vdash Ga$	Prämisse
3	$\exists x(Fx), Ga$	$Fa \vdash^* Fa$	Annahme
4	$\exists x(Fx), Ga$	$Fa \vdash^* Fa \wedge Ga$	aus (2) und (3) mit (\wedge I)
5	$\exists x(Fx), Ga$	$Fa \vdash^* \exists x(Fx \wedge Gx)$	aus (4) mit (EG)
6	$\exists x(Fx), Ga$	$\vdash \exists x(Fx \wedge Gx)$	aus (2), (3) und (5) mit (ES)

Nicht nur die Zwischenkonklusion selbst, sondern auch die Prämissen und Annahmen (ausser die des typischen Disjunks), von denen sie abhängt, dürfen die im typischen Disjunkt vorkommenden Individuenkonstanten nicht enthalten.

Die Regeln der natürlichen Deduktion für die Prädikatenlogik

Elimination des Allquantors und Einführung des Existenzquantors

Sei ϕ eine Formel von \mathcal{L}^+ , "x" eine Variable und t ein Term, der für "x" in ϕ frei ist.¹

Sei $\lceil \phi(x/t) \rceil$ das Resultat der (uniformen) Substitution von "t" für "x" in ϕ . Die Regel der "universellen Spezialisierung" (US), die Eliminationsregel für den Allquantor, erlaubt uns, aus $\lceil \forall x(\phi) \rceil$ auf $\lceil \phi(x/t) \rceil$ zu schliessen:

m	$\vdash \lceil \forall x(\phi) \rceil$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \lceil \phi(x/t) \rceil$	aus (m) mit (US)

Die Regel der "existentiellen Generalisierung" (EG), die Einführungsregel für den Existenzquantor, ist dual zu (US): sie erlaubt uns, aus $\lceil \phi(x/t) \rceil$ auf $\lceil \exists x(\phi) \rceil$ zu schliessen:

m	$\vdash \lceil \phi(x/t) \rceil$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \lceil \exists x(\phi) \rceil$	aus (m) mit (EG)

In beiden Fällen müssen Annahmen und Prämissen der Zeile (m) auf die Zeile (n) übertragen werden.

¹Ein Term ist frei für eine Variable in einer Formel gdw. eine Substitution der Variable mit dem Term nicht zur Folge hätte, dass ein freies Vorkommnis der Variable im Term von einem Quantor in der Formel gebunden würde. Falls der Term selbst eine Variable ist, dann ist er frei gdw. er in der resultierenden Formel nicht neu gebunden wird.

Einführung des Allquantors und Elimination des Existenzquantors

Sei $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ eine Formel von \mathcal{L}^+ , die die Individuenkonstante “ a ” enthält. Falls “ a ” in den Prämissen und Annahmen, von denen der Beweis von $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ abhängt, nicht vorkommt, erlaubt uns die Regel der “*universellen Generalisierung*” (UG), die Einführungsregel für den Allquantor, den Beweis von $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ zu einem Beweis von $\ulcorner \forall x \phi(a/x) \urcorner$ zu erweitern:

m	$\ulcorner \phi(a) \urcorner$	
.	.	
.	.	
n	$\ulcorner \forall x \phi(a/x) \urcorner$	aus (m) mit (UG)

Die Regel der “*existentiellen Spezialisierung*” (ES), die Eliminationsregel für den Existenzquantor, erlaubt es uns, jede Formel ψ , die wir unter der Annahme $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ beweisen können, direkt aus $\ulcorner \exists x \phi(a/x) \urcorner$ zu beweisen – wenn “ a ” weder in ψ noch in einer Annahme oder Prämisse, von der der Beweis von ψ abhängt, vorkommt:

m	$\ulcorner \exists x \phi(a/x) \urcorner$		
.	.		
.	.		
n	$\ulcorner \phi(a) \urcorner$	$\ulcorner \phi(a) \urcorner$	Annahme
.	.		
.	.		
o	$\ulcorner \phi(a) \urcorner$	$\ulcorner \psi \urcorner$	
.	.		
.	.		
p	$\ulcorner \psi \urcorner$		aus (m), (n) und (o) mit (ES)

Die Zeile (p) hängt von allen Prämissen und Annahmen der Zeile (m) ab, sowie von allen Annahmen, die für den Beweis von $\ulcorner \psi \urcorner$ aus $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ gemacht wurden (ausser natürlich $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ selbst).

Beispiele

1	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$\ulcorner \forall x(Gx \rightarrow Hx) \urcorner$	Prämisse
2	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$\ulcorner \exists x(Fx \wedge Gx) \urcorner$	Prämisse
3	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\ulcorner Fa \wedge Ga \urcorner$	Annahme
4	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\ulcorner Ga \rightarrow Ha \urcorner$	aus (1) mit (US)
5	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\ulcorner Ga \urcorner$	aus (3) mit (\wedge E)
6	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\ulcorner Ha \urcorner$	aus (4) und (5) mit (MP)
7	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\ulcorner Fa \urcorner$	aus (3) mit (\wedge E)
8	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\ulcorner Fa \wedge Ha \urcorner$	aus (6) und (7) mit (\wedge I)
9	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\ulcorner \exists x(Fx \wedge Hx) \urcorner$	aus (8) mit (EG)
10	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$\ulcorner \exists x(Fx \wedge Hx) \urcorner$	aus (2), (3) und (9) mit (ES)

1	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\ulcorner \forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx) \urcorner$	Prämisse
2	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\ulcorner \forall x(Fx) \urcorner$	aus (1) mit (\wedge E)
3	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\ulcorner Fa \urcorner$	aus (2) avec (US)
4	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\ulcorner \forall x(Gx) \urcorner$	aus (1) mit (\wedge E)
5	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\ulcorner Ga \urcorner$	aus (2) mit (US)
6	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\ulcorner Fa \wedge Ga \urcorner$	aus (3) und (5) mit (\wedge I)
7	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\ulcorner \forall x(Fx \wedge Gx) \urcorner$	aus (6) mit (UG)

1	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$\vdash \exists x(Fx \vee Gx)$	Prämisse
2	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga$	$\vdash^* Fa \vee Ga$	Annahme
3	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga, Fa$	$\vdash^* Fa$	Annahme
4	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga, Fa$	$\vdash^* \exists x(Fx)$	aus (3) mit (EG)
5	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga, Fa$	$\vdash^* \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	aus (4) mit ($\vee\mathbf{I}$)
6	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga, Ga$	$\vdash^* Ga$	Annahme
7	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga, Ga$	$\vdash^* \exists x(Gx)$	aus (6) mit (EG)
8	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga, Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	aus (7) mit ($\vee\mathbf{I}$)
9	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	aus (2, 3, 5, 6, 8) mit ($\vee\mathbf{E}$)
10	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$\vdash \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	aus (1), (2) und (9) mit (ES)

1	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$\vdash \exists x(Fa \rightarrow Fx)$	Prämisse	
2	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	Fa	$\vdash^* Fa$	Annahme
3	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$Fa, Fa \rightarrow Fb$	$\vdash^* Fa \rightarrow Fb$	Annahme
4	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$Fa, Fa \rightarrow Fb$	$\vdash^* Fb$	de (2) und (3) mit (MP)
5	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$Fa, Fa \rightarrow Fb$	$\vdash^* \exists x(Fx)$	aus (4) mit (EG)
6	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	Fa	$\vdash^* \exists x(Fx)$	aus (1), (3) und (5) mit (ES)
7	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$\vdash Fa \rightarrow \exists x(Fx)$	aus (2) und (6) mit (KB)	

1	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash \forall x\forall y(Rxy)$	Prämisse
2	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash \forall y(Ray)$	aus (1) mit (US)
3	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash Rab$	aus (2) mit (US)
4	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash \forall x(Rxb)$	aus (3) mit (UG)
5	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash \forall y\forall x(Rxy)$	aus (4) avec (UG)

Kürzen wir " $\exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow Rxy))$ " mit "**A**" und " $\forall x(Fx \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Rxy))$ " mit "**B**" ab.

1	A, B	$\vdash \exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow Rxy))$	Prämisse
2	A, B	$\vdash \forall x(Fx \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Rxy))$	Prämisse
3	A, B, $Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^* Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	Annahme
4	A, B, $Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^* Fa$	aus (3) avec (\wedge)
5	A, B, $Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^* \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	aus (3) mit (\wedge)
6	A, B, $Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^* Fa \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Ray)$	aus (2) mit (US)
7	A, B, $Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^* \forall y(By \rightarrow \neg Ray)$	aus (4) und (6) mit (MP)
8	A, B, $Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^* Gb$	Annahme
9	A, B, $Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^* Gb \rightarrow Rab$	aus (5) mit (US)
10	A, B, $Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^* Rab$	aus (8) und (9) mit (MP)
11	A, B, $Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^* Bb \rightarrow \neg Rab$	aus (7) mit (US)
12	A, B, $Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^* \neg \neg Rab$	aus (10) mit (DN)
13	A, B, $Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^* \neg Bb$	aus (12) und (11) mit (MT)
14	A, B, $Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^* Gb \rightarrow \neg Bb$	aus (8) und (13) mit (KB)
15	A, B, $Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^* \forall x(Gx \rightarrow \neg Bx)$	aus (14) mit (UG)
16	A, B	$\vdash \forall x(Gx \rightarrow \neg Bx)$	aus (1), (3) und (15) mit (ES)

Wir hätten in Zeile 8 auch " Ga " annehmen und in den Zeilen (9) und (11) mit " a " statt mit " b " instanzieren können.