Metalogische Eigenschaften der Prädikatenlogik

Einführungskurs Logik, Universität Bern, Frühlingssemester 2008

handout zur Sitzung vom 20.5.08

Philipp Keller
philipp.keller@lettres.unige.ch

Punkte vom letzten Kurs

1. Die Methode der natürlichen Deduktion für die Prädikatenlogik besteht aus den Einführungs- und Eliminationsregeln für die (jetzt prädikatenlogisch interpretierten) Junktioren und der Quantoren.
2. Die Regel (US), *"universelle Spezialisierung"* genannt, erlaubt uns, von einer Allquantifikation zu einer Instanz für einen beliebigen in der Allquantifikation frei vorkommenden Term überzugehen.
3. Ein Existenzquantor wird durch die Regel der *existentiellen Generalisierung* (EG) eingeführt.
4. Damit eine Anwendung der Regeln (US) und (EG) korrekt ist, muss der von einer Variable ersetzte Term in seiner Formel frei für diese Variable sein, d.h. er darf sich nicht im Geltungsbereich eines ihn bindenden Quantors befinden.
5. Um aus einer singulären Prämisse eine Allquantifikation zu beweisen, verwenden wir die Regel der *universellen Generalisierung* (UG). Dabei verlangen wir, dass die singuläre Prämisse auf ein beliebiges Individuum zutrifft (d.h. ein Individuum, das weder in der Prämisse noch in einer Annahme oder Prämisse vorkommt, von der der Beweis der singulären Prämisse abhängt).
6. Mit (UG) beweisen wir dann eine Allquantifikation, in der der arbiträre Term überall ("uniform") durch eine Variable ersetzt wurde.
7. Die Eliminierungsregel für den Existenzquantor (ES) entspricht der Eliminationsregel für die Disjunktion ($\vee$**E**) für ein sog. "typisches Disjunkt".
8. Eine Anwendung der Regel der existentiellen Spezialisierung (ES) hat vier Teilschritte:
   (a) der Beweis einer Existenzquantifikation aus bestimmten Prämissen und unter gewissen Annahmen;
   (b) die Annahme des typischen Disjunkts, d.h. einer Instanz der existenzquantifizierten Formel für eine neue Individuenkonstante;
   (c) der Beweis einer Formel unter der Annahme des typischen Disjunkts, in der die Individuenkonstante nicht vorkommt (sie darf ebensowenig in anderen Annahmen vorkommen, von denen dieser Beweis abhängt);
   (d) der Schritt zu dieser Formel, ohne Annahme des typischen Disjunkts, unter den gleichen Annahmen und aus den gleichen Prämissen wie der Beweis der Existenzq uantifikation.
9. Die Regel der existentiellen Spezialisierung (ES) unterliegt den gleichen Bedingungen wie die Regel der universellen Generalisierung:
   (a) die Konstante, die die Variable im typischen Disjunkt ersetzt, darf in keiner Prämisse oder Annahme vorkommen, von der die Existenzquantifikation abhängt;
   (b) sie darf ebensowenig in der Formel vorkommen, die wir beweisen wollen.
10. Die Anwendung dieser Regeln erlaubt es uns, sowohl Theoreme ("$\vdash \phi$") als auch Sequenzen ("$\phi \vdash \psi$") zu beweisen. Die Methode der natürlichen Deduktion ist korrekt und vollständig bzgl. der Semantik der Prädikatenlogik: jede gültige Formel ist ein Theorem und jedes Theorem ist gültig; jede ableitbare Sequenz entspricht einer logischen Folgebeziehung und jede logische Folgebeziehung kann als Sequenz abgeleitet werden.

Korrektheit und Vollständigkeit der Baummethode der Prädikatenlogik

Um die Vollständigkeit der Baummethode für die Prädikatenlogik zu beweisen, greifen wir auf einige Begriffe aus der siebten Lektion zurück. Wie zuvor, unterteilen wir die seieben Baumkonstruktionsregeln in zwei Kategorien: diejenigen für die sog. "α-Formeln" ($\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$, $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$), bei denen wir 'auf demselben Zweig bleiben', und diejenigen für die sog. "β-Formeln" ($\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$, $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$), bei denen wir 'verzweigen'. Hierzu fügen wir zwei neue Kategorien hinzu:

α	α_1	α_2
$\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	ϕ	ϕ
$\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\neg(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$	ϕ	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$

β	β_1	β_2
$\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	ψ

γ	$\gamma(a)$
$\ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$	$\phi(x/a)$
$\ulcorner\neg\exists x(\phi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi(x/a)\urcorner$

δ	$\delta(a)$
$\ulcorner\exists x(\phi)\urcorner$	$\phi(x/a)$
$\ulcorner\neg\forall x(\phi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi(x/a)\urcorner$

Wir passen unsere Definition eines Tableaus an, indem wir die Regeln (C, D) zu (A, B) hinzufügen:

Definition 1 (Tableaux). *Ein Tableau ist ein binärer Baum, dessen Knoten Formeln der prädikatenlogischen Sprache sind, die folgende Bedingung erfüllen: wenn wir ein Tableau $\mathcal{T}$ mit einem Endpunkt ζ schon konstruiert worden ist, wird $\mathcal{T}$ durch einen der folgenden Schritte erweitert:*

(A) *Wenn sich eine α-Formel auf dem Zweig B_ζ befindet (dem Zweig in $\mathcal{T}$ von χ bis zu ζ), dann ist entweder α_1 oder α_2 der einzige Nachfolger von ζ.*

(B) *Wenn sich eine β-Formel auf dem Zweig B_ζ befindet, dann ist β_1 der linke und β_2 der rechte Nachfolger von ζ.*

(C) *Wenn sich eine γ-Formel auf dem Zweig B_ζ befindet, dann sind alle $\ulcorner\gamma(a)\urcorner$ Nachfolger afu dem Zweig, für alle Konstanten "a", die auf diesem Zweig vorkommen.*

(D) *Wenn sich eine δ-Formel auf dem Zweig B_ζ befindet, dann ist eine Formel $\ulcorner\delta(a)\urcorner$ Nachfolger auf dem Zweig, für eine neue Konstante "a", die noch nicht auf dem Zweig vorkommt.*

Wir konstatieren folgendes

$\mathbf{F}_1$ α ist wahr gdw. α_1 und α_2 wahr sind;

$\mathbf{F}_2$ β ist wahr gdw. entweder β_1 oder β_2 wahr ist;

$\mathbf{F}_3$ γ ist wahr gdw. $\ulcorner\gamma(a)\urcorner$ wahr ist für alle a im Individuenbereich;

$\mathbf{F}_4$ δ ist wahr gdw. $\ulcorner\delta(a)\urcorner$ wahr ist für mindestens ein a im Individuenbereich.

$\mathbf{G}_1$ Wenn S erfüllbar ist und $\alpha \in S$, dann ist auch $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ erfüllbar.

$\mathbf{G}_2$ Wenn S erfüllbar ist und $\beta \in S$, dann ist entweder $S \cup \{\beta_1\}$ oder $S \cup \{\beta_2\}$ erfüllbar.

$\mathbf{G}_3$ Wenn S erfüllbar ist und $\gamma \in S$, dann ist $S \cup \{\gamma(a)\}$ erfüllbar für jede Individuenkonstante "a".

$\mathbf{G}_4$ Wenn S erfüllbar ist, $\delta \in S$ und "a" nicht in S vorkommt, dann ist auch $S \cup \{\delta(a)\}$ erfüllbar.

Um bspw. $\mathbf{G}_4$ zu beweisen, gehen wir wie folgt vor: Wenn S erfüllbar ist, gibt es eine Struktur und eine Wertzuordnung, unter der alle Formeln in S wahr sind. Insbesondere gibt es eine Interpretation I der nicht-logischen Zeichen in S und eine Wertzuordnung, die δ wahr machen. Weil δ eine Existenzquantifikation ist, folgt aus $\mathbf{F}_4$, dass δ genau dann wahr ist, wenn sie auf ein Element des Individuenbereiches zutrifft. Nennen wir dieses Element "a". Nachdem wir nun diese Individuenkonstante zu unserer Sprache hinzugefügt haben, definieren wir eine neue Interpretation wie folgt:

$$I^*(\text{“}k\text{”}) := \begin{cases} a & k = a \\ I(\text{“}k\text{”}) & k \neq a \end{cases}$$

Unter dieser neuen Interpretation I^* ist $\ulcorner\delta(a)\urcorner$ wahr. $S \cup \{\ulcorner\delta(a)\urcorner\}$ ist daher erfüllbar:

Theorem 2 (Korrektheit der Baummethode). *Die Baummethode für die Prädikatenlogik ist korrekt: jede beweisbare Formel ist gültig.*

Beweis Wie für die Aussagenlogik beweisen wir die Korrektheit mittels mathematischer Induktion. $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_3$ und $\mathbf{G}_4$ garantieren, dass jeder durch (A), (C) oder (D) erweiterte erfüllbare Zweig erfüllbar bleibt. Wenn wir einen erfüllbaren Zweig mit (B) durch zwei Zweige erweitern, bleibt dank $\mathbf{G}_2$ mindestens einer der beiden neuen Zweige erfüllbar. Jede direkte Erweiterung eines erfüllbaren Tableau ist daher erfüllbar. Durch mathematische Induktion folgt: wenn der Ursprung des Tableau erfüllbar ist, dann auch das ganze Tableau. Durch Kontraposition erhalten wir: wenn das ganze Tableau nicht erfüllbar ist (nur geschlossene Zweige enthält), dann ist auch die Ursprungsformel unerfüllbar. Ihre Negation ist daher gültig. □

Im Fall der Aussagenlogik haben wir die Vollständigkeit der Baummethode unter Berufung auf folgende Tatsachen bewiesen:

(i) Für jede Formel erhalten wir nach einer endlichen Anzahl von Schritten einen fertigen Baum;
(ii) Die Formeln, die sich auf einem fertigen offenen Zweig befinden, bilden eine Hintikka-Menge;
(iii) Jede Hintikka-Menge ist erfüllbar, d.h. ist eine Teilmenge einer sog. "gesättigten" Menge.

Wir müssen nun unsere Definition einer Hintikka-Menge dem Umstand anpassen, dass die Prädikatenlogik die Bildung unendlicher Bäume erlaubt:

Definition 3. *Eine Hintikka-Menge $\mathcal{H}$ für einen Individuenbereich D ist eine Menge prädikatenlogischer Formeln, die folgenden Bedingungen genügen:*
(a) Es ist nicht der Fall, dass $\mathcal{H}$ eine atomare Formel und ihre Negation enthält.
(b) Wenn $\alpha \in \mathcal{H}$, dann $\alpha_1 \in \mathcal{H}$ und $\alpha_2 \in \mathcal{H}$.
(c) Wenn $\beta \in \mathcal{H}$, dann entweder $\beta_1 \in \mathcal{H}$ oder $\beta_2 \in \mathcal{H}$.
(d) Wenn $\gamma \in \mathcal{H}$, dann $\gamma(a) \in \mathcal{H}$ für jedes $a \in D$.
(e) Wenn $\delta \in \mathcal{H}$, dann $\delta(a) \in \mathcal{H}$ für mindestens eines $a \in D$.

Wie für die Aussagenlogik beweisen wir folgendes Lemma:

Theorem 4 (Lemma). *Jede Hintikka-Menge für einen Individuenbereich D ist in D erfüllbar.*

Beweis
Sei $\mathcal{H}$ eine Hintikka-Menge für einen Individuenbereich D. Wie im Fall der Aussagenlogik geht es nun darum, eine Interpretation zu finden, die alle Formeln in $\mathcal{H}$ wahr machen. Wir definieren diese Interpretation wie folgt für jede atomare Formel ϕ:

$$I(\phi) := \begin{cases} \mathbf{w} & \phi \in \mathcal{H} \\ \mathbf{f} & \ulcorner\neg\phi\urcorner \in \mathcal{H} \\ \text{entweder } \mathbf{w} \text{ oder } \mathbf{f} & \phi \notin \mathcal{H} \ \wedge \ \ulcorner\neg\phi\urcorner \notin \mathcal{H} \end{cases}$$

Wir müssen nun zeigen, dass I nicht nur die atomaren, sondern alle Formeln in $\mathcal{H}$ wahr macht. Dazu müssen wir zunächst unsere Definition des "Grades" einer Formel anpassen:

Definition 5 (Grad). *Der Grad einer prädikatenlogischen Formel ϕ ist die durch folgende Regeln festgelegte natürliche Zahl:*
(1) Wenn ϕ ein atomarer Satz ist, dann ist sein Grad 0.
(2) Wenn ϕ eine Negation $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ und der Grad von ψ n ist, dann ist der Grad von ϕ $n+1$.
(3) Wenn ϕ eine Konjunktion $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, eine Disjunktion $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, eine Implikation $\ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ oder eine Äquivalenz $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ ist und der Grad von ψ n, der Grad von χ m ist, dann ist der Grad von ϕ $n+m+1$.
(4) Wenn ϕ eine Allquantifikation $\ulcorner\forall x(\psi)\urcorner$ oder eine Existenzquantifikation $\ulcorner\exists x(\psi)\urcorner$ ist und der Grad von ψ n beträgt, dann ist der Grad von ϕ $n+1$.

Wir beweisen nun mittels mathematischer Induktion über den Grad der Formeln, dass I *alle* Formeln wahr macht:

Induktionsverankerung: Es folgt direkt aus der Defintiion von I, dass I alle atomaren Formeln (vom Grad 0) in $\mathcal{H}$ wahr macht.

Induktionsschritt: Nehmen wir an, I mache jede Formel ϕ aus $\mathcal{H}$ mit Grad kleiner als n wahr. Wenn ϕ eine Formel von höherem Grad als 0 ist, muss ϕ eine Formel α, β, γ oder δ sein:

α**:** Wenn ϕ eine α-Formel ist, dann sind α_1 und α_2 ebenfalls in $\mathcal{H}$. Da sie beide von kleinerem Grad als n sind, werden sie gemäss der Induktionsvoraussetzung von I wahr gemacht. Also ist auch ϕ wahr.

β**:** Wenn ϕ eine β-Formel ist, dann ist entweder β_1 oder β_2 auch in $\mathcal{H}$. Welche Formel auch immer in $\mathcal{H}$ ist, sie wird von I wahr gemacht, weil sie von kleinerem Grad als n ist. Also wird auch ϕ von I wahr gemacht.

γ**:** Wenn ϕ eine γ-Formel ist, dann sind alle $\gamma(k)$ für $k \in U$ ebenfalls in $\mathcal{H}$. Weil diese Formeln $\gamma(k)$ für jedes $k \in U$ von kleinerem Grad als n sind, folgt aus der Induktionsvoraussetzung, dass auch ϕ wahr ist.

δ**:** Wenn ϕ eine δ-Formel ist, dann gibt es ein $k \in U$ so, dass $\delta(k)$ in $\mathcal{H}$ ist. $\delta(k)$ ist von kleinerem Grad als n, also wahr gemäss der Induktionsvoraussetzung. ϕ ist daher ebenfalls wahr.

Wir haben damit eine Interpretation definiert, die alle Formeln in $\mathcal{H}$ und im allgemeinen alle Formeln einer beliebigen Hintikka-Menge wahr macht. □

In der Aussagenlogik war jeder Baum nach einer endlichen Anzahl von Schritten fertig. Im Fall der Prädikatenlogik besteht die entscheidende Komplikation darin, dass der Baum einer Formel unendlich sein kann. Nach Königs Lemma enthält ein solcher Baum einen unendlichen Zweig. Können wir nun annehmen, dass die Formeln auf einem solchen unendlichen Zweig eine Hintikka-Menge bilden?
Leider können wir das nicht, wie das Beispiel des unendlichen Baumes in der Lektion 11 zeigt. Auf einem solchen Baum können wir bspw. eine Konjunktion finden, die nie 'drankommt', weil jeder Existenzquantor die Einführung einer neuen Konstante erzwingt, für die wir wiederum einen Allquantor instantiieren müssen, der uns wieder einen Existenzquantor bringt etc. Unsere Konstruktionsregeln verpflichten uns dann jeweils, zum Allquantor zurückzukehren.
Diesen 'loop' können wir durch die Definition deterministischer Bäume aus der Welt schaffen:

Definition 6 (Deterministische Tableaux)**.** *Ein deterministisches Tableau für ϕ ist ein binärer Baum, dessen Konstruktion wie folgt induktiv definiert wird:*
$n = 0$ *Wir setzen ϕ an den Ursprung des Baumes.*
$n \to n+1$ *Nachdem wir den Baum bis zur Etappe n konstruiert haben, gehen wir wie folgt vor:*

(i) Wenn das Tableau geschlossen ist, hören wir auf.

(ii) Wenn jede nicht-atomare Formel auf einem offenen Zweig schon benützt worden ist, hören wir auf.

(iii) Im anderen Fall konstruieren wir eine direkte Erweiterung an der Stelle der Formel ϕ, die sich am weitesten links und auf einem offenen Zweig befindet:

(A) Wenn ϕ eine α-Formel ist, fügen wir α_1 und α_2 zu allen ϕ enthaltenden offenen Zweigen hinzu und markieren ϕ als benützt.

(B) Wenn ϕ eine β-Formel ist, fügen wir β_1 als linken und β_2 als rechten Nachfolger zu allen ϕ enthaltenden offenen Zweigen hinzu und markieren ϕ als benützt.

(C) Wenn ϕ eine γ-Formel ist, fügen wir zu jedem ϕ enthaltenden offenen Zweig sowohl eine Formel $\gamma(a)$ hinzu (wobei "a" die erste noch nicht auf dem Zweig vorkommende Individuenkonstante ist) als auch die ursprüngliche Formel ϕ hinzu und markieren das vorherige Vorkommnis von ϕ als benützt.

(D) Wenn ϕ eine δ-Formel ist, fügen wir zu jedem ϕ enthaltenden offenen Zweig die $\delta(a)$ hinzu (wobei "a" die erste noch nicht auf dem Zweig vorkommenden Individuenkonstante ist) und markieren ϕ als benützt.

Deterministische unterscheiden sich von anderen Tableaux in drei Beziehungen:

1. Sie sind viel länger, weil wir jede Allquantifikation und jede negative Existenzquantifikation nach ihrer Instantiierung wiederholen.

2. Im Konstruktionsprozess eines deterministischen Tableaus müssen wir niemals 'zurückkehren': kein Allquantifikation und keine negative Existenzquantifikation werden mehr als einmal instantiiert.
3. Die Formeln auf einem offenen Zweig eines deterministischen Tableaus, das entweder unendlich ist oder nur benützte Formeln enthält, bilden eine Hintikka-Menge.

(3) folgt aus unserer Definition, weil jeder endliche offene Zweig entweder keine γ-Formel enthält oder dann bloss eine 'leere' Allquantifikation (bzw. negative Existenzquantifikation), d.h. eine Formel der Form $\ulcorner \forall x(\phi) \urcorner$, wobei "$x$" in ϕ gar nicht frei vorkommt. Wenn das Tableau unendlich ist, garantiert uns unsere Konstruktionsmethode, dass alle Formeln, die keine γ-Formeln sind, benützt worden sind.
Wir können nun endlich die Vollständigkeit beweisen:

Theorem 7 (Vollständigkeit der Baummethode)**.** *Die Baummethode für die Prädikatenlogik ist vollständig: jede gültige Formel ist damit beweisbar.*

Beweis Nehmen wir an, ϕ sei eine gültige Formel und $\mathcal{T}$ ihr deterministisches Tableau (das $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ als Ursprungsformel hat). Wenn $\mathcal{T}$ einen offenen Zweig enthielte, würden die Formeln auf diesem Zweig eine Hintikka-Menge bilden, die (aufgrund des Lemmas) erfüllbar wäre. Weil $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ ein Element dieser Menge wäre, wäre auch $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ erfüllbar und also wäre ϕ nicht gültig. Also schliesst sich das Tableau und ϕ ist beweisbar. □

Das Theorem von Löwenheim-Skolem

Wir haben bereits festgestellt (in der 12. Lektion), dass eine Formel, die ein Modell mit n Individuen hat, ebenfalls ein Modell mit $n+1$ Individuen hat. Bloss durch die Hinzufügung neuer Objekte werden wir keine erfüllte Formel unerfüllt machen.
Wir können einige weitere Beobachtungen über Erfüllbarkeit und Konsistenz von Formelmengen unserer Sprache $\mathcal{L}^+$ machen. Sei Σ eine solche Formelmenge.

1. Ob Σ in einer Struktur $\mathcal{A}$ erfüllbar ist, hängt nur von der Kardinalität des Individuenbereichs $|\mathcal{A}|$ ab.
2. Wenn Σ in einer Struktur erfüllbar ist, dann auch in jeder anderen Struktur, die die Interpretation der Relations-, Funktionszeichen und Konstanten gleich belässt, aber einen grösseren Individuenbereich enthält.
3. Es gibt Formeln, die nur in unendlichen erfüllt werden können.

Bei genauerer Betrachtung sind diese Bemerkungen nicht sehr erstaunlich. Viel erstaunlicher ist ein wichtiges Theorem, dass eine teilweise Umkehrbarkeit der zweiten Feststellung behauptet.
Löwenheim hat 1915 bewiesen, dass jede erfüllbare Formel ϕ in einem abzählbaren Individuenbereich erfüllbar ist, d.h. in einer Struktur die (nur!) soviele Elemente wie natürliche Zahlen enthält. Wir erhalten dieses Resultat als Korollar der Erfüllbarkeit der Formeln auf einem offenen Zweig eines deterministischen Tableau:

Theorem 8 (Löwenheim)**.** *Jede erfüllbare Formel ϕ hat ein Modell mit abzählbarem Individuenbereich.*

Beweis Sei ϕ eine erfüllbare Formel. Wir schliessen aus dem Vollständigkeitsbeweis, dass das deterministische Tableau für ϕ sich nicht schliesst und also einen offenen Zweig enthält. Die Formeln auf diesem Zweig sind erfüllbar, weil sie eine Hintikka-Menge bilden. Die Interpretation, die alle Elemente dieser Menge gleichzeitig wahr macht, erwähnt nur eine abzählbare Menge von Individuen, weil alle diese Individuen von je einer Konstante bezeichnet werden, von denen es nur abzählbar viele gibt. Diese Interpretation in einem abzählbaren Individuenbereich macht auch ϕ wahr. □

Skolem hat dieses Theorem auf Formelmengen erweitert: wenn eine abzählbar unendliche Formel erfüllbar ist, dann ist sie in einer Struktur mit abzählbar unendlich vielen Individuen erfüllbar.
Der Beweis beruht auf einer Erweiterung der Methode der deterministischen Tableau: wir nennen ein Tableau "Σ-komplett" für eine Formelmenge Σ gdw. jeder offene fertige Zweig eine Hintikka-Menge von Formeln enthält, in der alle Formeln aus Σ vorkommen. Für eine beliebige Formel (und eine beliebige Formelmenge Σ) konstruieren wir ihr Σ-komplettes Tableau, indem wir in der n-ten Etappe der Konstruktion des deterministischen Tableau die n-te Formel aus Σ hinzufügen. Wir haben dann:

Theorem 9 (Löwenheim-Skolem). *Jede abzählbar unendliche erfüllbare Formelmenge Σ hat ein Modell mit abzählbarem Individuenbereich.*

Beweis Sei Σ eine abzählbar unendliche erfüllbare Formelmenge. Wenn das Σ-komplette Tableau $\mathcal{T}$ geschlossen wäre, enthielte es (aufgrund von Königs Lemma) eine endliche Anzahl von Formeln. Weil das Tableau alle Formeln aus Σ enthält, müsste Σ dann selbst endlich sein und wäre aufgrund des Vollständigkeitsbeweises nicht erfüllbar. Also kann $\mathcal{T}$ nicht geschlossen sein und muss einen offenen Zweig enthalten. Wir wissen, dass die Formeln auf diesem Zweig eine Hintikka-Menge bilden und dass jede Formel aus Σ in dieser Menge vorkommt. Aufgrund des Lemmas ist daher Σ wahr in einer Struktur mit abzählbar unendlichem Individuenbereich. □

Wir erhalten als Korrolar einen Beweis der Kompaktheit der Prädikatenlogik:

Theorem 10 (Kompaktheit). *Die Prädikatenlogik ist kompakt: wenn eine Menge von Formeln Σ nicht erfüllbar ist, dann hat sie eine unerfüllbare endliche Teilmenge $\Sigma' \subset \Sigma$.*

Beweis Wenn Σ unerfüllbar ist, gibt es ein geschlossenes Σ-komplettes Tableau. Weil ein solches Tableau endlich ist, kann es nur eine endliche Menge von Elementen aus Σ enthalten. □

Wie im Fall der Kompaktheit der Aussagenlogik bedeutet dieses Theorem, dass jede logische Konsequenz aus einer Menge von Prämissen bereits eine Konsequenz einer endlichen Teilmenge dieser Prämissenmenge ist. Die Beweise von Löwenheim und von Skolem nehmen auf keinen speziellen logischen Formalismus Bezug. Sie handeln ganz allgemein von Strukturen (möglichen Modellen), die im allgemeinen als spezielle Mengen aufgefasst werden. Sie gehören damit zur sog. "Modelltheorie", die in aller Allgemeinheit die Form und Existenz von Modellen für formalen Systemen studiert.

Gödels Theorem der Unvollständigkeit der Arithmetik

Informelle Version: Jedes konsistente formale System, in dem wir über natürliche Zahlen sprechen können, ist unvollständig. Insbesondere können wir in einem solchen System einen Satz formulieren, der von sich sagt, er sei nicht beweisbar:

G ist nicht beweisbar. **(G)**

Ist der Satz falsch, ist er beweisbar und das System beweist einen falschen Satz, ist also inkorrekt. Ist der Satz wahr, ist er nicht beweisbar und das System beweist nicht alle wahren Sätze.
Gödels Beweis der Unvollständigkeit der Arithmetik besteht im wesentlichen in einer Codierung der Syntax der Sprache, die dem System erlaubt, über seine eigenen Sätze zu sprechen, und von ihnen zu sagen, dass sie beweisbar oder nicht beweisbar sind.
Etwas formalere Version: Sei "Bew p" die Abkürzung für die Behauptung, dass "p" in einer Formalisierung der Arithmetik (bspw. der sog. "Peano-Arithmetik" PA) beweisbar ist. Wir können mit metamathematischen Methoden folgendes beweisen:

(i) Wenn wir $\mathsf{PA} \vdash p$ haben, dann auch $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Bew}\ p$.
(ii) $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Bew}\ (\ulcorner p \to q \urcorner) \to (\mathsf{Bew}\ p \to \mathsf{Bew}\ q)$

"Bew ..." können wir als Modaloperator interpretieren: (ii) zeigt uns dann, dass seine Logik den Axiomen des modallogischen Systems **K** genügt. Gödels Beweis beruht auf dem folgenden "Diagonallemma":

(iii) Wenn $F(x)$ ein Prädikat der Sprache PA mit einer einzigen freien Variable "x" ist, dann enthält die Sprache von PA einen Satz "p", für den gilt: $\mathsf{PA} \vdash p \leftrightarrow F(\ulcorner p \urcorner)$.

Aus den drei Behauptungen (i)-(iii) folgt die Unvollständigkeit der Arithmetik

Theorem 11 (Unvollständigkeit der Arithmetik). *Falls* PA *konsistent ist, ist* PA *unvollständig: es gibt einen unentscheidbaren Satz in der Sprache von* PA *(d.h. einen Satz, der weder bewiesen noch widerlegt werden kann).*

Beweis "$\neg\mathsf{Bew}\ (x)$" ist ein Prädikat mit einer einzigen freien Variable, also gibt es einen Satz "p" so, dass $\mathsf{PA} \vdash p \leftrightarrow \neg\mathsf{Bew}\ (\ulcorner p \urcorner)$. Wenn "$p$" beweisbar wäre ($\mathsf{PA} \vdash p$) könnten wir mit MP daraus auf "$\neg\mathsf{Bew}\ (\ulcorner p \urcorner)$" schliessen ($\mathsf{PA} \vdash \neg\mathsf{Bew}\ (\ulcorner p \urcorner)$), was $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Bew}\ (\ulcorner p \urcorner)$ widerspricht, das wir aus (i) erhalten. Falls PA also konsistent ist (keinen Widerspruch beweist), dann ist "p" nicht beweisbar und "Bew ($\ulcorner p \urcorner$)" ist falsch. Wenn "p" widerlegbar und also "$\neg p$" beweisbar ist, dann auch "Bew ($\ulcorner p \urcorner$)" (dies ist die rechts-nach-links Richtung des Diagonallemmas). Aus (i) erhalten wir aber PA $\vdash$ Bew ($\ulcorner \neg p \urcorner$), also wäre PA wiederum inkonsistent. Also haben wir weder PA $\vdash p$ noch PA $\vdash \neg p$. □

Gödel hat ein zweites, allgemeineres Unvollständigkeitstheorem bewiesen, für dessen Beweis wir auf ein (späteres!) Resultat zurückgreifen, das M.H. Löb 1954 bewiesen hat:
(iv) Wenn PA $\vdash$ Bew ($\ulcorner p \urcorner$) $\rightarrow p$, dann PA $\vdash p$.
Wir erhalten das zweite Gödelsche Unvollständigkeitstheorem als direktes Korollar:

Theorem 12 (Zweites Unvollständigkeitstheorem). *Wenn* PA *konsistent ist, dann* PA $\nvdash \neg$Bew ($\ulcorner p \wedge \neg p \urcorner$).

Beweis Wenn PA seine eigene Konsistenz beweisen könnte (PA $\vdash \neg$Bew ($\ulcorner p \wedge \neg p \urcorner$)), dann PA $\vdash$ Bew ($\ulcorner p \wedge \neg p \urcorner$) $\rightarrow (p \wedge \neg p)$, woraus mit Löbs Theorem folgt, dass PA $\vdash p \wedge \neg p$, was das System inkonsistent machen würde. □

Kein formales System kann seine eigene Konsistenz beweisen.