Logische Beziehungen und Schlüsse

Einführungskurs Logik, Universität Bern, Frühlingssemester 2008

handout zur Sitzung vom 4.3.08

Philipp Keller
philipp.keller@lettres.unige.ch

Punkte vom letzten Kurs

1. Die Aussagenlogik studiert Junktoren, die einfach(er)e Sätze zu komplex(er)en verbinden; die Prädikatenlogik kümmert sich ausserdem um Quantoren, Relationen und Funktionen.
2. Der Hauptjunktor eines komplexen Satzes ist derjenige, der am Schluss ausgewertet wird.
3. Die Syntax bestimmt, welches die wohlgeformten Formeln einer Sprache sind.
4. Die Semantik liefert die Interpretation der Zeichen, indem sie uns ihre Bedeutung angibt.
5. Nach dem Prinzip der Wahrheitsfunktionalität (für die Aussagenlogik) ist der Wahrheitswert eines komplexen Satzes durch die Wahrheitswerte der in ihm enthaltenen atomaren Sätze und durch die sie verbindenden Junktoren (eindeutig) bestimmt.
6. "$\neg p$" ist wahr gdw. "p" nicht wahr ist.
7. "$p \wedge q$" ist wahr gdw. "p" und "q" beide wahr sind.
8. "$p \vee q$" ist wahr gdw. mindestens eines von "p" und "q" wahr ist.
9. "$p \rightarrow q$" ist wahr gdw. entweder "p" falsch oder "q" wahr ist.
10. Eine Wahrheitswerttabelle für einen aussagenlogischen Junktor bestimmt seine Bedeutung, indem sie angibt, wie die Wahrheit eines komplexen, diesen Junktor enthaltenen Satzes von den Wahrheitswerten der in ihm enthaltenen einfach(er)en Sätze abhängt.

Objekt- und Metasprache

"Bern" enthält vier Buchstaben und keine Anführungszeichen; ""Bern"" enthält sechs Buchstaben und zwei davon sind Anführungszeichen; Bern enthält keine Buchstaben, aber dafür Personen und eine Universität.

Die Metasprache dient dazu, ***über*** Ausdrücke der Objektsprache zu sprechen:

Bern ist eine schöne Stadt. (1)

"Bern" is my favourite word. (2)

""Bern" is my favourite word." est une phrase bien formée du métalangage. (3)

(1) ist ein Satz der Objektsprache (hier des Deutschen), (2) ein Satz der Metasprache (des Englischen), und (3) ein Satz der Meta-Metasprache (hier des Französischen).

Die Unterscheidung erlaubt uns, den Begriff der Gültigkeit als metasprachlichen zu erkennen:

Wenn ich Logik studiere, werde ich glücklich und weise sein; ich studiere Logik; also werde ich glücklich und weise sein. (4)

"Wenn ich Logik studiere, werde ich glücklich und weise sein; ich studiere Logik; also werde ich glücklich und weise sein" ist gültig. (5)

""Wenn ich Logik studiere, werde ich glücklich und weise sein; ich studiere Logik; also werde ich glücklich und weise sein" ist gültig." ist wahr. (6)

(4) ist ein Satz der Objektsprache, (5) ein Satz der Metasprache und (6) ein Satz der Meta-Metasprache.

Die Unterscheidung zwischen Objekt- und Metasprache wurde vom polnischen Logiker, Mathematiker und Philosoph Alfred Tarski (1923) eingeführt, um das Paradox zu lösen, das man erhält, wenn man im sog. W-Schema für "p" den Satz "Ich bin falsch" einsetzt:

"p" ist wahr gdw. p **(w)**

Gültigkeit und logische Wahrheit

Der Schluss

p. Ebenfalls q. Auf der anderen Seite, r. Also s. (7)

hat folgende (logische) Form:

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ \hline s \end{array} \tag{8}$$

Aufgrund der Semantik des Junktors "$\wedge$" ("und"), können wir auch schreiben:

$$\frac{p \wedge q \wedge r}{s} \tag{9}$$

Wenn wir sagen, dass ein Argument der Form (8) oder (9) gültig ist, *erwähnen* wir die Sätze "p", "q", "r" und "s", brauchen sie aber nicht. Sagen, dass ein Argument der Form (8) oder (9) gültig ist, ist zu sagen:

Wenn "p", "q" et "r" wahr sind, dann ist auch "s" wahr. (10)

Durch diesen metasprachlichen Satz prädizieren wir die Relation oder Beziehung der *logischen Folgerung* bzw. der *formalen Implikation*:

materiale Implikation von q durch p ("q" ist impliziert von "p") $\iff$ "$p \to q$" ist wahr (es ist nicht der Fall, dass "p" wahr und "q" falsch ist.)

formale Implikation von q durch p ("q" folgt logisch aus "p") $\iff$ "$p \to q$" ist eine Tautologie (es ist nicht logisch möglich, dass "p" wahr und "q" falsch ist.)

Ein Schluss ist gültig gdw. die sog. entsprechende Implikation (die die Konjunktion der Prämissen als Antecedens und die Konklusion als Konsequens hat) eine Tautologie ist. Wenn wir bspw. herausfinden wollen, ob

$$\frac{p \to \neg p}{\neg p} \tag{3k}$$

gültig ist, müssen wir herausfinden, ob es logisch möglich ist, dass die Prämisse "$p \to \neg p$" wahr, die Konklusion "$\neg p$" aber falsch ist. Wir machen dazu die Wahrheitswerttabelle:

p	$\neg p$	$p \to \neg p$
W	F	F
F	W	W

p	$\neg p$
W	F
F	W

und finden heraus, dass in jeder Zeile, in der in der ersten ein "W" steht, in der zweiten ebenfalls ein "W" zu finden ist.

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$\text{“Ein Schluss der Form } \frac{p \wedge q \wedge r}{s} \text{ ist gültig.”} \quad \rightsquigarrow \quad \text{“}\{p \wedge q \wedge r\} \models s\text{”}$$

$$\text{“Ein Schluss der Form } \frac{\begin{array}{c} p \\ q \\ r \end{array}}{s} \text{ ist gültig.”} \quad \rightsquigarrow \quad \text{“}\{p, q, r\} \models s\text{”}$$

Namen von Sätzen und die sog. “Quine corners”

Der scheinbar objektsprachliche Satz:

$$p \models q \tag{11}$$

ist damit eigentlich ein metasprachlicher:

$$\text{“}p\text{”} \models \text{“}q\text{”} \tag{12}$$

Aber Moment! Indem wir die Satzschemata in Anführungszeichen gesetzt haben, haben wir die Allgemeinheit verloren – wir wollen ja schliesslich nicht von bestimmten Sätzen reden, sondern von irgendwelchen.

Wir beheben diese Schwierigkeit, indem wir Abkürzungen nicht nur für Sätze (“p”, “q”, etc.), sondern auch für *Namen von Sätzen* einführen: die griechischen Kleinbuchstaben “ϕ” (ausgesprochen: “phi”), “ψ” (“psi”), “χ” (“chi”) und “ξ” (“xi”). Damit können wir nun (12) wie folgt reformulieren:

$$\phi \models \psi \tag{13}$$

Ein weiteres Problem stellt sich: manchmal wollen wir nicht nur von irgendwelchen Sätzen, sondern im speziellen von irgendwelchen Sätzen *einer bestimmten Form* reden.

Erste schlechte Lösung:	$\phi \wedge \psi$
Zweite schlechte Lösung:	“$\phi \wedge \psi$”
Gute Lösung:	$\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$

“$\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$” bezeichnet (referiert auf) die Formel, die mit ϕ (d.h. des von “ϕ” bezeichneten Ausdrucks) anfängt, mit “$\wedge$” weitergeht und auf ψ endet.

Wenn z.B. ϕ “p” ist und ψ für “q” steht, dann ist $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ dasselbe wie “$p \wedge q$”. Wenn ϕ für “$p \rightarrow q$” steht und ψ für “$r \vee s$”, dann ist $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ “$(p \rightarrow q) \wedge (r \vee s)$”.

Tautologien und Kontradiktionen

Ein Satz ist eine Tautologie (eine ‘logische Wahrheit’) gdw.:

- er in allen logischen Möglichkeiten wahr ist;
- er wahr wird unter jeder Interpretation seiner Bestandteile;
- er aus jedem Satz logisch folgt;
- er zu “$p \vee \neg p$” semantisch äquivalent ist.

Ein Satz ist eine Kontradiktion gdw.:

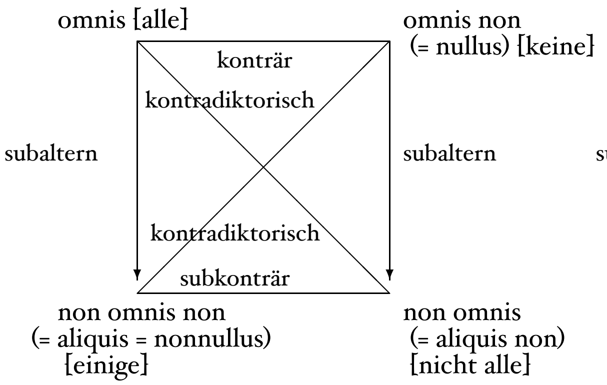
- er in allen logischen Möglichkeiten falsch ist;
- er falsch wird unter jeder Interpretation seiner Bestandteile;
- jeder Satz aus ihm logisch folgt;
- er zu “$p \wedge \neg p$” semantisch äquivalent ist.

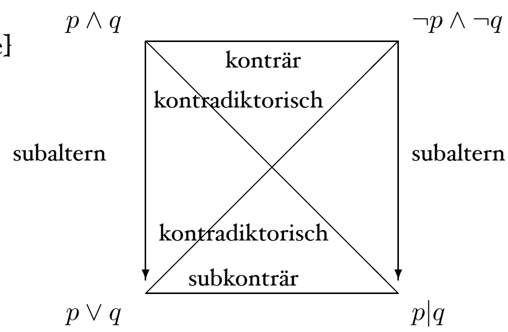
Das logische Quadrat

Wir können drei Arten von 'Entgegensetzungen' unterscheiden:

- Zwei Sätze sind ***kontradiktorisch***, wenn sie weder zusammen wahr noch zusammen falsch sein können.
- Zwei Sätze sind ***konträr***, wenn sie nicht zusammen wahr sein können.
- Zwei Sätze sind ***subkonträr***, wenn sie nicht zusammen falsch sein können.

Das logische Quadrat des Apuleius und das logische Quadrat für die Aussagenlogik:[1]





konträr: es gibt keine Interpretation, die sowohl "$p \wedge q$" als auch "$\neg p \wedge \neg q$" wahr macht.

subkonträr: es gibt keine Interpretation, die sowohl "$p \vee q$" als auch "$p|q$" falsch macht.

subaltern: jede Interpretation, die "$p \wedge q$" wahr macht, macht auch "$p \vee q$" wahr.

subaltern: jede Interpretation, die "$\neg p \wedge \neg q$" wahr macht, macht auch "$p|q$" vraie.

kontradiktorisch: eine Interpretation macht "$p \wedge q$" wahr gdw. sie "$p|q$" falsch macht.

kontradiktorisch: eine Interpretation macht "$p \vee q$" wahr gdw. sie "$\neg p \wedge \neg q$" falsch macht.

Implikation und logische Folgerung

Das berühmte Paradox von Lewis Carroll (1895) zwingt uns, Schlussregeln von Tautologien (und ebenfalls die Relation der logischen Folgerung von der materialen Implikation) zu unterscheiden:

$$\frac{\begin{array}{c}p\\ p \rightarrow q\end{array}}{q} \qquad \frac{\begin{array}{c}p\\ p \rightarrow q\\ (p \wedge p \rightarrow q) \rightarrow q\end{array}}{q} \qquad \frac{\begin{array}{c}p\\ p \rightarrow q\\ (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q\\ (p \wedge (p \rightarrow q) \wedge ((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q)) \rightarrow q\end{array}}{q} \qquad \ldots$$

Wenn wir die verwendete Schlussregel jeweils als Prämisse anführen müssen, geraten wir in einen viziösen unendlichen Regress.

[1] Der sog. "Shefferstrich" ist wie folgt definiert:

p	q	$p\|q$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	W

Die Beziehung der logischen Folgerung

Einige (metalogische) Eigenschaften:

Permutabilität: $\{p_1, p_2, \ldots p_n\} \models r \implies \{p_2, p_3, p_1, \ldots p_n, \ldots p_7, \ldots\} \models r$

Monotonie: $\{p_1, p_2, \ldots p_n\} \models r \implies \{p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots q_1, q_2, \ldots q_m\} \models r$

Transitivität: $\{p_1, p_2, \ldots p_n\} \models r \;\&\; \{r, q_1, \ldots q_n\} \models s \implies \{p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, \ldots q_m\} \models s$

Reflexivität: $\{p_1, p_2, \ldots p_n\} \models p_i$ (für alle Sätze $p_i \in \{p_1, p_2, \ldots\}$)

Die Interdefinierbarkeit der Junktoren

Die de Morganschen Gesetze:

$$\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner \iff \ulcorner\neg\phi \vee \neg\psi\urcorner$$
$$\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner \iff \ulcorner\neg\phi \wedge \neg\psi\urcorner$$

Definitionen der anderen Junktoren mittels "$\neg$" und "$\wedge$":

$$\begin{array}{lll} \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner & :\iff & \ulcorner\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \\ \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner & :\iff & \ulcorner\neg(\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \\ \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner & :\iff & \ulcorner\neg(\phi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\neg\phi \wedge \psi)\urcorner \end{array}$$

Definitionen der anderen Junktoren mittels "$\neg$" und "$\rightarrow$":

$$\begin{array}{lll} \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner & :\iff & \ulcorner\neg(\phi \rightarrow \neg\psi)\urcorner \\ \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner & :\iff & \ulcorner\neg\phi \rightarrow \psi\urcorner \\ \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner & [\iff & \ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)\urcorner\,] \\ & :\iff & \ulcorner\neg((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \phi))\urcorner \end{array}$$

Andere logische Äquivalenzen:

$$\begin{array}{rcl} \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner & \iff & \ulcorner\psi \wedge \phi\urcorner \\ \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner & \iff & \ulcorner\psi \vee \phi\urcorner \\ \ulcorner\phi \vee (\psi \wedge \chi)\urcorner & \iff & \ulcorner(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)\urcorner \\ \ulcorner\phi \wedge (\psi \vee \chi)\urcorner & \iff & \ulcorner(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)\urcorner \\ \ulcorner\phi \wedge (\psi \vee \neg\psi)\urcorner & \iff & \phi \\ \ulcorner\phi \vee (\psi \wedge \neg\psi)\urcorner & \iff & \phi \\ \phi & \iff & \ulcorner\neg\neg\phi\urcorner \iff \ulcorner\phi \wedge \phi\urcorner \iff \ulcorner\phi \vee \phi\urcorner \\ & & \ulcorner\phi \vee (\phi \wedge \psi)\urcorner \iff \ulcorner\phi \wedge (\phi \vee \psi)\urcorner \\ & & \ulcorner(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \iff \ulcorner(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \neg\psi)\urcorner \end{array}$$

Freges Begriffschrift

Auch wenn die Idee (oder eher Utopie) einer rein formalen Sprache schon früher auftauchte (vgl. Barnes (2002) zur Geschichte), war Gottlob Frege der erste, der sie realisierte. Auch wenn Frege dazu eine zweidimensionale Notation verwendete, die viele für anachronistisch halten, war doch im wesentlichen unsere Logik schon die seine.

Freges Motivation war eine doppelte: (i) welches sind die Grundlagen der Arithmetik? (ii) wie können wir arithmetische Wahrheiten erkennen? Frege war überzeugt, dass die Arithmetik und die Mathematik im allgemeinen zur Logik gehört und dass wir durch eine Reduktion der mathematischen Axiome auf logische erklären können, wie wir erstere erkennen. Um diese Fragen zu beantworten, hat Frege

(i) ein logisches System (die Begriffsschrift) entworfen, deren Axiome und Schlussregeln er für evident hielt (Frege 1879)
(ii) versucht, die Zahlen und das Prädikat "...ist eine Zahl" rein logisch zu definieren (Frege 1884)
(iii) versucht zu zeigen, dass die Peano Axiome (die die Arithmetik formalisieren) Spezialfälle logischer Axiome sind (Frege 1893 1903)

Im dritten Schritt ist sein sog. "logizistisches" Programm an der Entdeckung der Russell-Paradoxie durch Bertrand Russell (1902) gescheitert.

Literatur

Barnes, Jonathan, 2002. "What is a Begriffsschrift?" *Dialectica* 56: 65–80

Carroll, Lewis, 1895. "What the Tortoise Said to Achilles". *Mind* 4: 278–280

Frege, Gottlob, 1879. *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Halle a.S.: Louis Nebert

Frege, Gottlob, 1884. *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Breslau: Wilhelm Koebner.

Frege, Gottlob, 1893. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, volume I. Jena: Hermann Pohle.

Frege, Gottlob, 1903. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, volume II. Jena: Hermann Pohle.

Tarski, Alfred, 1923. "O wrazie pierwotnym logistyki". *Przegląd Filozoficzny* 26: 68–89.