Metalogische Eigenschaften der Aussagenlogik

Einführungskurs Logik, Universität Bern, Frühlingssemester 2008

handout zur Sitzung vom 8.4.08

Philipp Keller
philipp.keller@lettres.unige.ch

Punkte vom letzten Kurs

1. Charakteristisch für die Methode der natürlichen Deduktion ist die Annahmeregel, die es uns erlaubt, in jedem Schritt des Beweises jede beliebige Formel als Annahme einzuführen. Wir müssen dann allerdings über die gemachten Annahmen Buch führen; einzig die Regeln KB, RAA und $\vee\mathbf{E}$ erlauben es uns, gemachte Annahmen wieder loszuwerden.
2. Die Regeln der natürlichen Deduktion sind die Einführungs- und Eliminationsregeln der aussagenlogischen Junktoren.
3. Die Methode der natürlichen Deduktion für die Aussagenlogik besteht aus den folgenden Regeln:
   Annahme-Regel: Ich darf jede beliebige Annahme machen, wenn ich darüber Buch führe.
   MP: Wenn ich $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ und ϕ habe, darf ich ψ daraus schliessen.
   MT: Wenn ich $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ und $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ habe, darf ich $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ daraus schliessen.
   KB: Wenn ich ϕ angenommen habe und unter dieser Annahme auf ψ geschlossen habe, darf ich auf $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ schliessen.
   DN: Wenn ich $\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$ habe, darf ich auf ϕ schliessen; wenn ich ϕ habe, darf ich auf $\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$ schliessen.
   RAA: Wenn ich ϕ angenommen habe und unter dieser Annahme sowohl auf ψ als auch auf $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ geschlossen habe, darf ich auf $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ schliessen.
   $\wedge\mathbf{I}$: Wenn ich ϕ und ψ habe, darf ich $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ daraus schliessen.
   $\wedge\mathbf{E}$: Wenn ich $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ habe, darf ich auf ϕ und auf ψ schliessen.
   $\vee\mathbf{I}$: Wenn ich ϕ habe, darf ich auf $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ schliessen; wenn ich ψ habe, darf ich ebenfalls auf $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ schliessen.
   $\vee\mathbf{E}$: Wenn ich $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ habe und ich sowohl unter der Annahme von ϕ als auch unter der Annahme von ψ auf χ geschlossen habe, darf ich auf χ schliessen.
   $\leftrightarrow \mathbf{I}$: Wenn ich $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ und $\ulcorner\psi \rightarrow \phi\urcorner$ habe, darf ich auf $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$ schliessen.
   $\leftrightarrow \mathbf{E}$: Wenn ich $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$ habe, darf ich auf $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ und auf $\ulcorner\psi \rightarrow \phi\urcorner$ schliessen.
4. Diese Regeln erlauben uns, Theoreme ("$\vdash \phi$") und Sequenzen ("$\phi \vdash \psi$") zu beweisen.
5. Eine Sequenz ist die Behauptung, ein bestimmter Satz sei aus einem oder mehreren anderen ableitbar.
6. Um ein Theorem oder eine Sequenz bewiesen zu haben, müssen wir uns jeder Annahme entledigt haben. Welche Sequenz wir beweisen, hängt u.U. davon ab, welche Annahmen wir machen.
7. Um eine Implikation zu beweisen, ist es oft nützlich, die Regel KB anzuwenden.
8. Um einen negativen oder atomaren Satz zu beweisen, ist es oft nützlich, die Regel RAA anzuwenden.
9. Die Methode der natürlichen Deduktion erlaubt auch die Anwendung von abgeleiteten Regeln.
10. Die Methode der natürlichen Deduktion ist eine korrekte und vollständige syntaktische Methode: jede beweisbare Sequenz entspricht einer Beziehung der logischen (semantischen) Folgerung und jede solche Folgerungsbeziehung kann als Sequenz bewiesen werden.

Metalogische Eigenschaften

Wir nennen eine syntaktische Methode:

- **"korrekt"**, wenn alle ihre Theoreme Tautologien sind;
- **"vollständig"**, wenn alle Tautologien Theoreme sind (bewiesen werden können);
- **"adäquat"**, wenn sie korrekt und vollständig ist;
- **"konsistent"**, wenn durch sie kein Widerspruch abgeleitet werden kann.

Eine Logik (eine Menge von Tautologien) heisst

- **"entscheidbar"**, wenn es ein mechanisches Verfahren gibt zu entscheiden, ob eine Formel eine Tautologie ist oder nicht;
- **"kompakt"**, wenn jede Folgerung aus einer unendlichen Menge von Prämissen bereits aus einer endlichen Teilmenge folgt.

Das Deduktionstheorem

Eine erste metalogische Eigenschaft der Methode der natürlichen Deduktion:

Theorem 1 (Deduktionstheorem)**.** *ψ ist aus ϕ ableitbar gdw. $\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$ ein Theorem ist.*

In der Modallogik gilt kein Deduktionstheorem.

Definition 2. *Das Alphabet der Sprache $\mathcal{L}^\Box$ der modalen Aussagenlogik besteht aus den folgenden Zeichen:*

1. *den atomaren Sätzen "p_0", "p_1", "p_2" ...(abzählbar unendlich viele);*
2. *den Junktoren "$\neg \ldots$", "$\cdots \wedge \cdots$", "$\cdots \vee \cdots$", "$\cdots \to \cdots$" und "$\cdots \leftrightarrow \cdots$";*
3. *dem Modaloperator "$\Box \ldots$" ("es ist notwendig, dass ...");*
4. *Klammern und Kommata als Hilfssymbolen.*

Definition 3. *Eine wohlgeformte Formel von $\mathcal{L}^\Box$ ist ein Ausdruck, der sich durch folgendes Verfahren erhalten lässt:*

1. *Jeder atomare Satz "p_i" ($i \in \mathbb{N}$) ist eine wohlgeformte Formel.*
2. *Ist ϕ wohlgeformt, sind auch $\ulcorner(\Box\phi)\urcorner$ und $\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$ wohlgeformt.*
3. *Sind ϕ und ψ wohlgeformt, sind auch $\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \vee \psi)\urcorner$ und $\ulcorner(\phi \to \psi)\urcorner$ wohlgeformt.*

Wir führen den Modaloperator "$\Diamond \ldots$" ("es ist möglich, dass ...") als Abkürzung für "$\neg\Box\neg \ldots$" ein.

Das einfachste System der modalen Aussagenlogik (und das schwächste der sog. "normalen" Systeme) ist das System **K**. Es besteht aus einer Axiomatisierung der Aussagenlogik und einem zusätzlichen modalen Axiomenschema:

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \qquad \textbf{(K)}$$

mit (MP) und einer neuen Schlussregel, der sog. "Modalisierung" (Nec):

$$\frac{\vdash \phi}{\vdash \ulcorner \Box\phi \urcorner}\ \mathsf{Nec}$$

Beispiel eines Beweises:

(1)	$\mathbf{K} \vdash (p \wedge q) \to p$	$\mathbf{H_8}$
(2)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \to p)$	Nec aus (1)
(3)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \to p) \to (\Box(p \wedge q) \to \Box p)$	**K**
(4)	$\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \to \Box p$	(MP) aus (2) und (3)
(5)	$\mathbf{K} \vdash (p \wedge q) \to q$	$\mathbf{H_9}$
(6)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \to q)$	Nec aus (5)
(7)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \to q) \to (\Box(p \wedge q) \to \Box q)$	**K**
(8)	$\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \to \Box q$	(MP) aus (6) und (7)
(9)	$\mathbf{K} \vdash (\Box(p \wedge q) \to \Box p) \to ((\Box(p \wedge q) \to \Box q) \to (\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)))$	$\mathbf{H_{10}}$
(10)	$\mathbf{K} \vdash (\Box(p \wedge q) \to \Box q) \to (\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q))$	(MP) aus (9) und (4)
(11)	$\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)$	(MP) aus (10) und (8)

Einige andere Theoreme von **K**:

(i) "$(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$"
(ii) "$(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$"
(iii) "$(\Diamond p \vee \Diamond q) \leftrightarrow \Diamond(p \vee q)$"
(iv) "$\Diamond(p \wedge q) \rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$"

Ein Deduktionstheorem würde **K** trivialisieren: weil dank der Modalisierung Nec jede Sequenz der Form $\phi \vdash \ulcorner\Box\phi\urcorner$ beweisbar ist, würde mit $\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \Box\phi\urcorner$ (und $\vdash \ulcorner\Box\phi \rightarrow \phi\urcorner$) folgen, dass jeder Satz mit seiner Modalisierung äquivalent ist: der Modaloperator hätte jede Ausdruckskraft verloren.

Korrektheit der Baummethode

Wir unterscheiden zwei Typen aussagenlogischer Formeln:

α	α_1	α_2
$\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	ϕ	ϕ
$\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\neg(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$	ϕ	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$

β	β_1	β_2
$\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	ψ

Wir definieren die syntaktischen Begriffe "Baum" und "Tableau" formal korrekt wie folgt:

Definition 4 (binäre Bäume). *Ein binärer Baum ist eine Struktur, die aus sog. "Knoten" (Punkten) und "Zweigen" (Linien) besteht und in der sich jeder Knoten ausser dem Ursprung am Ende einer Linie befindet und sich kein Punkt am Ursprung von mehr als zwei Linien befindet.*

Definition 5 (Tableaux). *Ein Tableau ist ein binärer Baum, dessen Knoten aussagenlogische Formeln sind, die folgende Bedingung erfüllen: wenn χ eine Formel ist, deren Tableau $\mathcal{T}$ schon konstruiert worden ist und ζ ein Endpunkt von $\mathcal{T}$ ist, wird $\mathcal{T}$ durch einen der folgenden Schritte erweitert:*

(A) *Wenn sich eine α-Formel auf dem Zweig B_ζ befindet (dem Zweig in $\mathcal{T}$ von χ bis zu ζ), dann ist entweder α_1 oder α_2 der einzige Nachfolger von ζ.*

(B) *Wenn sich eine β-Formel auf dem Zweig B_ζ befindet, dann ist β_1 der linke und β_2 der rechte Nachfolger von ζ.*

Wir definieren "Interpretation", den zentralen Begriff der Semantik, wie folgt:

Definition 6 (Interpretation eines Tableau). *Eine aussagenlogische Interpretation I erfüllt einen Zweig B_ϕ eines Tableau gdw. sie alle Formeln wahr macht, die auf diesem Zweig vorkommen. I erfüllt ein Tableau gdw. sie mindestens einen Zweig dieses Tableau erfüllt.*

Für den Korrektheitsbeweis beweisen wir folgendes Theorem:

Theorem 7. *Ist $\mathcal{T}_2$ eine direkte Erweiterung von $\mathcal{T}_1$, dann wird $\mathcal{T}_2$ durch jede Interpretation erfüllt, die bereits $\mathcal{T}_1$ erfüllt.*

Theorem 8 (Korrektheit der Baummethode). *Die Baummethode ist korrekt: jedes ihrer Theoreme ist eine Tautologie.*

Beweis Das Theorem (7) erlaubt es uns, mit mathematischer Induktion für jedes Tableau $\mathcal{T}$ zu zeigen, dass folgendes gilt: wenn die Ursprungsformel $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ von einer Interpretation I erfüllt wird, dann wird auch $\mathcal{T}$ von dieser Interpretation erfüllt. Nehmen wir nun an, $\mathcal{T}$ beweise ϕ. Das bedeutet, dass $\mathcal{T}$ ein Tableau ist, dass $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ als Ursprungsformel hat und das von keiner Interpretation erfüllt wird. Sei nun I eine beliebige Interpretation. Wenn I die Ursprungsformel $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ erfüllen würde, würde sie wegen (7) das ganze Tabelau erfüllen; das ist nun aber eben nicht der Fall. Also wird $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ von I nicht erfüllt. Also ist $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ unter keiner Interpretation wahr, also ein Widerspruch. Dies bedeutet, dass ϕ eine Tautologie ist. $\Box$

Vollständigkeit der Baummethode

Wir nennen einen Zweig B_ϕ *"fertig"*, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

- für jede α-Formel auf dem Zweig enthält er sowohl α_1 als auch α_2;
- für jede β-Formel auf dem Zweig enthält er β_1 und/oder β_2.

Wir nennen ein Tableau *"fertig"*, wenn jeder Zweig entweder geschlossen oder fertig ist. Wir wollen folgendes beweisen:

Wenn $\mathcal{T}$ ein fertiges offenes Tableau ist, ist $\mathcal{T}$ erfüllbar. **(C)**

(C) bedeutet, dass die Ursprungsformel eines fertigen offenen Tableau durch mindestens eine Interpretation erfüllt wird; d.h. **(C)** garantiert uns, dass sich kein Tableau "zu früh" schliesst (ohne die Existenz einer Interpretation zu garantieren, die die Ursprungsformel wahr macht). Wenn wir **(C)** beweisen können, erhalten wir daraus die Vollständigkeit der Baummethode wie folgt:

Theorem 9 (Vollständigkeit der Baummethode)**.** *Die Baummethode ist vollständig: jede Tautologie ist mit ihr beweisbar.*

Beweis Nehmen wir an, ϕ sei eine Tautologie. Wenn ϕ nicht durch die Baummethode nicht bewiesen werden könnte, könnten wir ein fertiges offenes Tableau für $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ konstruieren. Mit **(C)** würde dann daraus folgen, dass $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ erfüllbar und also keine Kontradiktion wäre. Also wäre ϕ keine Tautologie. Aber ϕ ist eine Tautologe. Also war die Annahme falsch, dass ϕ nicht bewiesen werden kann. Also kann ϕ bewiesen werden. □

Es bleibt uns also **(C)** zu beweisen. Dazu beweisen wir (10): aus (10) folgt **(C)**, weil die Erfüllbarkeit des Zweiges die Erfüllbarkeit der Ursprungsformel impliziert.

Theorem 10. *Jeder fertige offene Zweig eines Tableau ist erfüllbar.*

Beweis Nehmen wir an, B_ϕ sei ein fertiger offener Zweig des Tableau $\mathcal{T}$ und $\mathcal{E}$ sei die Menge aller Formeln, die auf B_ϕ vorkommen. Weil B_ϕ offen ist, folgt aus den Konstruktionsregeln **(A)** und **(B)**, dass $\mathcal{E}$ folgende Bedingungen erfüllt:

(a) Es ist nicht der Fall, dass $\mathcal{E}$ sowohl einen atomaren Satz "p" als auch seine Negation "$\neg p$" enthält.
(b) Wenn eine α-Formel in $\mathcal{E}$ ist, dann sind es auch α_1 und α_2.
(c) Wenn eine β-Formel in $\mathcal{E}$ ist, dann ist es auch entweder β_1 oder β_2.

Man nennt eine Menge von Formeln, die diese drei Bedingungen erfüllt, eine "Hintikka-Menge". Wir zeigen jetzt, dass jede Hintikka-Menge erfüllbar ist.[1]

Sei jetzt $\mathcal{E}$ unsere Hintikka-Menge. Wir definieren nun wie folgt eine Interpretation, die alle Formeln in $\mathcal{E}$ erfüllt, indem wir angeben, welche Wahrheitswerte sie den atomaren Formeln zuweist

$$I(\text{“}p\text{”}) := \begin{cases} \mathbf{w} & \text{“}p\text{”} \in \mathcal{E} \\ \mathbf{f} & \text{“}\neg p\text{”} \in \mathcal{E} \\ \mathbf{w} \text{ ode r} \mathbf{f} & \text{sonst} \end{cases}$$

[1] Wir tun dies, in dem wir zeigen:
(i) dass jede Hintikka-Menge zu einer sog. "gesättigten" Menge erweitert werden kann;
(ii) dass jede gesättigte Menge erfüllbar ist.
Wenn die gesättigte Menge erfüllbar ist, und die Hintikka-Menge der Formeln auf dem Zweig ein Teil davon ist, ist auch letztere erfüllbar (die Interpretation, die die gesättigte Menge von Formeln erfüllt, muss auch alle Teilmengen davon erfüllen).

Wir nennen eine Menge von Formeln $\mathcal{E}'$ *"gesättigt"*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:
(a') Für jede Formel ϕ, enthält $\mathcal{E}'$ entweder ϕ oder $\ulcorner\neg\phi\urcorner$, aber nicht beide.
(b') $\mathcal{E}'$ enthält eine α-Formel genau dann, wenn sie auch α_1 und α_2 enthält.
(c') $\mathcal{E}'$ enthält eine β-Formel genau dann, wenn sie entweder β_1 oder β_2 enthält.

Im folgenden geht es darum, die Hintikka-Menge $\mathcal{E}$ zu einer gesättigten Menge $\mathcal{E}'$ zu erweitern, indem wir genug Formeln zu $\mathcal{E}$ hinzufügen,
(i) dass die Implikationen (b) und (c) zu den Äquivalenzen (b') und (c') verstärkt werden können; und
(ii) dass (a) nicht nur für die atomaren Sätze, sondern für alle Formeln der Fall ist (wie dies (a') behauptet).

Aufgrund der Bedingung (a) kommt es nie vor, dass I ein- und derselben atomaren Formel verschiedene Wahrheitswerte zuweist. Wie können wir nun zeigen, dass I jede Formel in $\mathcal{E}$ erfüllt? Durch mathematische Induktion nach dem Grad der letzten Formel ϕ auf dem Zweig.

Definition 11 (Grad einer Formel)**.** *Der Grad einer Formel ϕ ist die durch folgende Regeln eindeutig festgelegte natürliche Zahl:*

(1) Ist ϕ ein atomarer Satz, ist ihr Grad 0.
(2) Ist ϕ eine negierte Formel $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ und ist n der Grad von ψ, dann ist $n+1$ der Grad von ϕ.
(3) Ist ϕ eine Konjunktion $\ulcorner\psi\wedge\chi\urcorner$, eine Disjunktion $\ulcorner\psi\vee\chi\urcorner$, eine Implikation $\ulcorner\psi\rightarrow\chi\urcorner$ oder eine Äquivalenz $\ulcorner\psi\leftrightarrow\chi\urcorner$ und ist n der Grad von ψ und m der Grad von χ, dann ist $n+m+1$ der Grad von ϕ.

Nun zeigen wir durch mathematische Induktion, dass I alle Formeln in $\mathcal{E}'$ (und damit auch alle Formeln in $\mathcal{E}$) erfüllt:

Induktionsverankerung: Gemäss ihrer Definition erfüllt die Interpretation I alle atomaren Sätze (von Grad 0) in $\mathcal{E}$ – das war (a).

Induktionsschritt: Nehmen wir an, dass I jeden Satz ϕ von kleinerem Grad als n in $\mathcal{E}$ erfüllt. Wenn ϕ von einem Grad höher als 0 ist, ist ϕ entweder eine α- oder eine β-Formel:

- α: Wenn ϕ eine α-Formel ist, dann sind α_1 und α_2 bereits in $\mathcal{E}$ (das war (b)). Diese Formeln haben aber einen Grad kleiner als n, also werden sie nach Induktionsvoraussetzung bereits durch I erfüllt. Wenn aber beide Teilformeln durch I erfüllt werden, wird auch ϕ von I erfüllt.
- β: Wenn ϕ eine β-Formel ist, dann ist entweder β_1 oder β_2 bereits in $\mathcal{E}$ (das war (c)). Welche es auch ist, sie wird durch I erfüllt, weil sie einen kleineren Grad als n hat. Wenn aber eine der Teilformeln durch I erfüllt wird, dann auch ϕ.

Wir haben also eine Interpretation definiert, die alle Formeln in unserer beliebigen Hintikka-Menge $\mathcal{E}$ erfüllt. Weil die Formeln auf einem fertigen offenen Zweig eine Hintikka-Menge bilden, haben wir damit gezeigt, dass sie erfüllbar sind.

□

Entscheidbarkeit und Normalformen

Theorem 12 (Entscheidbarkeit der Aussagenlogik)**.** *Die Aussagenlogik ist entscheidbar: es gibt ein mechanisches Verfahren um festzustellen, ob eine gegebene Formel eine Tautologie ist oder nicht.*

Theorem 13. *Sei ϕ eine beliebige Formel von $\mathcal{L}$. Es gibt eine Formel ψ in disjunktiver Normalform, die zu ϕ logisch äquivalent ist. Diese Formel ψ hat folgende Form:*

- *alle Negationszeichen stehen direkt vor atomaren Sätzen;*
- *ψ ist eine Disjunktion von Konjunktionen;*
- *jedes solche Disjunkt entspricht einer Linie in der Wahrheitswerttabelle für ψ.*

Wir konstruieren, für beliebiges ϕ, die Formel ψ in negativer Normalform durch folgende Transformationsregeln, die Negationen gemäss den De Morgan'schen Gesetzen 'nach innen schieben':

Regel 1	$\phi\leftrightarrow\psi$	$\rightsquigarrow$	$(\phi\rightarrow\psi)\wedge(\psi\rightarrow\phi)$
Regel 2	$\phi\rightarrow\psi$	$\rightsquigarrow$	$\neg\phi\vee\psi$
Regel 3	$\neg(\phi\wedge\psi)$	$\rightsquigarrow$	$\neg\phi\vee\neg\psi$
Regel 4	$\neg(\phi\vee\psi)$	$\rightsquigarrow$	$\neg\phi\wedge\neg\psi$
Regel 5	$\neg\neg\phi$	$\rightsquigarrow$	ϕ

Ein Beispiel:

$(p\leftrightarrow q)\rightarrow r$		
	$((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))\rightarrow r$	Regel 1
	$\neg((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))\vee r$	Regel 2
	$\neg((\neg p\vee q)\wedge(q\rightarrow p))\vee r$	Regel 2

$\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee r$	Regel 2
$\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \vee r$	Regel 3
$(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg q \vee p) \vee r$	Regel 4
$(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p) \vee r$	Regel 4
$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r$	Regel 5

Konjunktive Normalformen geben uns ein praktisches Entscheidungsverfahren:

Definition 14 (konjunktive Normalform). *Eine Formel ist in konjunktiver Normalform wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen atomarer Formeln oder ihrer Negationen ist.*

Theorem 15. *Für jede beliebige Formel ϕ gibt es eine logisch äquivalente Formel ψ in konjunktiver Normalform.*

Dazu wenden wir folgende Transformationsregeln an:

Regeln1 – 5	ϕ	$\rightsquigarrow$	negative Normalform von ϕ
Regel 6	$(\phi \wedge \psi) \vee \chi$	$\rightsquigarrow$	$(\phi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$
Regel 7	$\chi \vee (\phi \wedge \psi)$	$\rightsquigarrow$	$(\chi \vee \phi) \wedge (\chi \vee \psi)$
Regel 8	$\phi \vee (\psi \vee \chi)$	$\rightsquigarrow$	$(\phi \vee \psi) \vee \chi$
Regel 9	$\phi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$\rightsquigarrow$	$(\phi \wedge \psi) \wedge \chi$

Ein Beispiel:

$((p \vee \neg q) \rightarrow ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u$	
$(\neg(p \vee \neg q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u$	Regel 2
$((\neg p \wedge \neg\neg q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u$	Regel 4
$((\neg p \wedge q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u$	Regel 5
$((\neg p \wedge q) \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge \neg u$	Regel 6
$((\neg p \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge (q \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t)))) \wedge \neg u$	Regel 6
$((\neg p \vee (r \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge (q \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge \neg u$	Regel 7
$((\neg p \vee (r \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u$	Regel 7
$((\neg p \vee r) \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u$	Regel 8
$((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u$	Regel 8
$((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee r) \vee t) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u$	Regel 8
$((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee r) \vee t) \wedge ((q \vee s) \vee t)) \wedge \neg u$	Regel 8
$((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t) \wedge ((q \vee r) \vee t)) \wedge ((q \vee s) \vee t) \wedge \neg u$	Regel 9

Um zu testen, ob eine Formel in konjunktiver Normalform eine Tautologie ist, testen wir, ob alle Konjunkte Tautologien sind: diese Disjunktionen sind Tautologien gdw. sie sowohl einen atomaren Satz als auch seine Negation enthalten.

Die Kompaktheit der Aussagenlogik

Theorem 16 (Königs Lemma). *Wenn ein endlich generierter Baum unendlich viele Knoten enthält, muss er einen unendlich langen Zweig enthalten.*

Theorem 17. *Die Aussagenlogik ist kompakt: $\Gamma \models \phi$ ("ϕ folgt aus der Formelmenge Γ") gdw. ϕ bereits aus einer endlichen Teilmenge $\Gamma' \subset \Gamma$ folgt ($\Gamma' \models \phi$).*

Beweis Nehmen wir an, Γ sei unendlich, aber alle ihre endlichen Teilmengen seien erfüllbar. Wir müssen zeigen, dass Γ erfüllbar ist. Wir nummerieren die Formeln in Γ ($\Gamma = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots\}$) so, dass für jedes n die Teilmenge $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ erfüllbar ist (dies ist immer eine endliche Teilmenge). Nun konstruieren wir das Tableau für ϕ_1 – dieses Tableau bleibt offen (denn ϕ_1 ist ja erfüllbar). Nun fügen wir zu jedem offenen Zweig ϕ_2 hinzu und erhalten wiederum ein offenes Tableau, denn auch $\{\phi_1, \phi_2\}$ ist erfüllbar. Nun fügen wir ϕ_3, dann ϕ_4 usw. hinzu. Wir erhalten einen endlich generierten Baum, der unendlich viele Knoten enthält (nämlich alle Formeln in Γ). Wegen Königs Lemma (16) muss dieser Baum einen unendlich langen Zweig enthalten. Dieser Zweig ist ebenfalls offen, und er enthält alle Formeln in Γ. $\square$