Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe

Einführungskurs Logik, Universität Bern, Frühlingssemester 2008

an der Prüfung am 27. Mai zur Verfügung stehendes Material

Philipp Keller `philipp.keller@lettres.unige.ch`

Syntax

Die Sprache der Aussagenlogik

Definition 1. *Das Alphabet der formalen Sprache $\mathcal{L}$ der klassischen Aussagenlogik besteht aus folgenden Zeichen:*

- *den einfachen (atomaren) Sätzen "p_0", "p_1", "p_2" ... (abzählbar unendlich viele)*
- *den aussagenlogischen Junktoren "$\neg \dots$" ("es ist nicht der Fall, dass"), "$\dots \wedge \cdots$" ("und"), "$\dots \vee \cdots$" ("oder"), "$\dots \rightarrow \cdots$" ("wenn-dann") und "$\dots \leftrightarrow \cdots$" ("gdw.")*
- *Klammern und Kommata*

Definition 2. *Eine wohlgeformte Formel der Sprache $\mathcal{L}$ ist entweder:*

- *ein atomarer Satz "p_i" ($i \in \mathbb{N}$); oder*
- *von der Form $\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$, wobei ϕ eine wohlgeformte Formel ist; oder*
- *von der Form $\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \vee \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ oder $\ulcorner(\phi \leftrightarrow \psi)\urcorner$, wobei ϕ und ψ wohlgeformte Formeln sind.*

Definition 3. *Eine Theorie Th ist eine (endliche oder unendliche) Menge wohlgeformter Formeln.*

Die Sprache der Prädikatenlogik

Definition 4. *Das Alphabet der Sprache $\mathcal{L}^+$ der klassischen Prädikatenlogik besteht aus den folgenden Zeichen:*

1. *den folgenden logischen Zeichen:*
   (a) *den Junktoren "$\neg \dots$" ("nicht"), "$\cdots\wedge\cdots$" ("und"), "$\cdots\vee\cdots$" ("oder"), "$\cdots \rightarrow \cdots$" ("wenn-dann") und "$\cdots \leftrightarrow \cdots$" ("gdw.");*
   (b) *den Quantoren "$\forall x(\dots x \cdots)$" ("für jedes x") und "$\exists x(\dots x \cdots)$" ("es gibt mindestens ein x");*
   (c) *dem Identitätszeichen: "$\dots \cdots ^{-}$" ("...ist identisch mit $\cdots$");*
   (d) *den Individuenvariablen: "x_i" für jedes $i \in \mathcal{N}$;*
2. *den folgenden nicht-logischen Zeichen:*
   (a) *den Relationszeichen: "R_i" für jedes $i \in \mathbf{I}$;*
   (b) *den Funktionszeichen: "f_i" für jedes $i \in \mathbf{J}$;*
   (c) *den Individuenkonstanten: "c_i" für jedes $i \in \mathbf{K}$;*
3. *den Hilfszeichen: Klammern, Kommata.*

Definition 5. *Die Terme der Sprache $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu\rangle$ sind durch folgende rekursive Definition festgelegt:*

1. *Jede Individuenvariable "x_i" ist ein Term.*
2. *Jede Individuenkonstante "c_i" ist ein Term.*
3. *Wenn "t_1", "t_2", ..., "t_n" Terme sind, $j \in \mathbf{J}$ und $n = \mu(j)$, dann ist auch "$f_j(t_1, t_2, \dots, t_n)$" ein Term.*

Definition 6. *ϕ ist eine atomare Formel der Sprache $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu\rangle$ gdw.:*

1. *ϕ ist von der Form "$t_1 t^{-}{}_2$" für zwei Terme "t_1" und "t_2"; oder*
2. *ϕ ist von der Form "$R_i(t_1, t_2, \dots, t_{\lambda(i)})$" für Terme "$t_1$", "$t_2$", ..., "$t_{\lambda(i)}$", $j \in \mathbf{J}$;*

Definition 7. *ϕ ist eine wohlgeformte Formel der Sprache $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu\rangle$ gdw.:*

1. *ϕ ist eine atomare Formel; oder*
2. *ϕ ist von der Form $\ulcorner(\neg\psi)\urcorner$ für eine wohlgeformte Formel ψ; oder*

3. ϕ *ist von der Form* $\ulcorner(\psi \wedge \chi)\urcorner$, $\ulcorner(\psi \vee \chi)\urcorner$, $\ulcorner(\psi \rightarrow \chi)\urcorner$ *oder* $\ulcorner(\psi \leftrightarrow \chi)\urcorner$, *für wohlgeformte Formeln* ψ *und* χ*; oder*
4. ϕ *ist von der Form* $\ulcorner\forall x_i(\psi)\urcorner$ *oder* $\ulcorner\exists x_i(\psi)\urcorner$ *für eine wohlgeformte Formel* ψ *und eine Variable "x_i", $i \in \mathbb{N}$.*

Definition 8. *Sei ϕ eine wohlgeformte Formel und "x_i" eine Variable. Wir sagen, dass "x_i" frei in ϕ vorkommt gdw. eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*
1. *ϕ ist eine atomare Formel und enthält "x_i"; oder*
2. *ϕ ist von der Form $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ und "x_i" kommt frei vor in ψ; oder*
3. *ϕ ist von der Form $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ ou $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ und "x_i" kommt entweder in ψ oder in χ frei vor;*
4. *ϕ ist von der Form $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ und $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner$, $i \neq j$ und "x_i" kommt in ψ frei vor.*

Definition 9. *Ein Satz ist eine wohlgeformte Formel, in der keine Variable frei vorkommt.*

Definition 10. *Sei ϕ eine Formel, die eine Quantifikation der Variable "x" enthält ("$\forall x$" oder "$\exists x$"). Wir nennen die kleinste Formel nach der Quantifikation den Geltungsbereich des Quantors.*

Beweistheorie

Definition 11. *Ein Kalkül ist eine Menge wohlgeformter Formeln (der sog. "Theoreme"), die durch eine Menge sog. "Axiome" und den Schlussregeln folgendermassen festgelegt ist:*
1. *Jedes Axiom ist ein Theorem.*
2. *Das Resultat der Anwendung einer Schlussregel auf Theoreme ist auch ein Theorem.*
3. *Es gibt keine anderen Theoreme.*

Definition 12. *Ein Beweis, in einem Kalkül* HK *und ausgehend von einer Theorie* Th*, ist eine endliche Sequenz von Sätzen $\langle\phi_1, \dots \phi_n\rangle$, in der jeder Satz aus den vorhergehenden ableitbar ist; d.h. es gilt für alle i, $1 \leq i \leq n$:* $\mathsf{HK} \cup \mathsf{Th} \cup \{\phi_1, \dots, \phi_{i-1}\} \vdash \phi_i$.

Definition 13. *Wenn* HK *ein Kalkül,* Th *eine Theorie und ϕ eine wohlgeformte Formel ist, definieren wir "$\mathsf{HK} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$" (für jede beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$) durch mathematische Induktion über die natürlichen Zahlen:*
1. *Wenn ϕ ein Axiom von* HK *ist, dann $\mathsf{HK} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Wenn ϕ ein Element von* Th *ist, dann $\mathsf{HK} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Wenn $\mathsf{HK} \cup \mathsf{Th} \vdash^{m_i} \psi_i$ (mit $m_i < n$) für jede der Prämissen ψ_i einer Schlussregel des Kalküls* HK*, dann $\mathsf{HK} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ für die Konklusion ϕ dieser Schlussregel.*

Semantik

Wahrheitswerttabellen für die Aussagenlogik

ϕ	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$
V	F
F	V

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Die Semantik der Aussagenlogik

Definition 14. *Eine atomare aussagenlogische Interpretation I^* ist eine Funktion, die jeder atomaren Formel "p_i", $i \in \mathbb{N}$, von $\mathcal{L}$ genau einen der beiden Wahrheitswerte* $\mathbf{w}$ *oder* $\mathbf{f}$ *zuweist:* $I^* : \{“p_i” \mid i \in \mathbb{N}\} \to \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$

Definition 15. *Gegeben eine atomare aussagenlogische Interpretation I^*, definieren wir eine aussagenlogische Interpretation I (eine Funktion $I : \mathsf{Fml}(\mathcal{L}) \to \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$) wie folgt:*

I1 *Wenn ϕ ein atomarer Satz "p" ist, dann* $I(\phi) := I^*(“p”)$

I2 $I(\neg\phi) := \begin{cases} \mathbf{w} & \textit{wenn } I(\phi) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & \textit{wenn } I(\phi) = \mathbf{w} \end{cases}$

I3 $I(\phi \wedge \psi) := \begin{cases} \mathbf{w} & \textit{wenn } I(\phi) = \mathbf{w} \textit{ und } I(\psi) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f} & \textit{wenn } I(\phi) = \mathbf{f} \textit{ oder } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I4 $I(\phi \vee \psi) := \begin{cases} \mathbf{w} & \textit{wenn } I(\phi) = \mathbf{w} \textit{ oder } I(\psi) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f} & \textit{wenn } I(\phi) = \mathbf{f} \textit{ und } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I5 $I(\phi \to \psi) := \begin{cases} \mathbf{w} & \textit{wenn } I(\phi) = \mathbf{f} \textit{ oder } I(\psi) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f} & \textit{wenn } I(\phi) = \mathbf{w} \textit{ und } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I6 $I(\phi \leftrightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{w} & \textit{wenn } I(\phi) = I(\psi) \\ \mathbf{f} & \textit{wenn } I(\phi) \neq I(\psi) \end{cases}$

Definition 16. *Seien ϕ und ψ Formeln der Aussagenlogik:*

$$\begin{array}{rcl} \phi \textit{ ist erfüllbar} & :\Longleftrightarrow & \exists I\ (I(\phi) = \mathbf{w}) \\ \phi \textit{ ist eine Tautologie} & :\Longleftrightarrow & \forall I\ (I(\phi) = \mathbf{w}) \\ \phi \textit{ ist eine Kontradiktion} & :\Longleftrightarrow & \forall I\ (I(\phi) = \mathbf{f}) \\ \phi \textit{ ist eine logische Folgerung aus } \psi & :\Longleftrightarrow & \forall I\ (I(\phi) = \mathbf{w} \Rightarrow I(\psi) = \mathbf{w}) \end{array}$$

Die Semantik der Prädikatenlogik

Definition 17. *Sei $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ eine Sprache der Prädikatenlogik. Eine Struktur $\mathcal{A}$ für $\mathcal{L}^+$ besteht aus:*

1. *einer nicht-leeren Menge $|\mathcal{A}|$, die wir "Diskursuniversum" oder "Quantifikationsbereich" von $\mathcal{A}$ nennen;*
2. *eine Interpretation aller Relationszeichen, d.i. eine Funktion, die jedem $i \in \mathbf{I}$ eine Relation $R_i^{\mathcal{A}}$ auf $|\mathcal{A}|$ mit $\lambda(i)$ Argumentstellen zuordnet (d.h. eine Teilmenge $R_i^{\mathcal{A}} \subset |\mathcal{A}|^{\lambda(i)}$);*
3. *eine Interpretation aller Funktionszeichen, d.i. eine Funktion, die jedem $j \in \mathbf{J}$ eine Funktion $f_j^{\mathcal{A}}$ auf $|\mathcal{A}|$ mit $\mu(j)$ Argumentstellen zuordnet (d.h. eine Funktion $f_j^{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}|^{\mu(j)} \to |\mathcal{A}|$);*
4. *eine Interpretation aller Individuenkonstanten, d.i. eine Funktion, die jedem $k \in \mathbf{K}$ ein fixes Element $c_k^{\mathcal{A}}$ de $|\mathcal{A}|$ des Quantifikationsbereichs zuordnet.*

Definition 18. *Sei $\mathcal{L}^+$ eine Sprache der Prädikatenlogik und $\mathcal{A}$ eine Struktur für $\mathcal{L}^+$. Eine Wertzuordnung für $\mathcal{L}^+$ ist eine Funktion h die jeder Variable x_i ($i \in \mathbb{N}$) genau ein Element des Quantifikationsbreichs zuordnet:* $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$.

Definition 19. *Sei $\mathcal{L}^+$ eine Sprache der Prädikatenlogik, $\mathcal{A}$ eine Struktur für $\mathcal{L}^+$ und $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$ eine Wertzuordnung. Das Referenzobjekt $\overline{h}(t)$ eines singulären Terms "t" der Sprache $\mathcal{L}^+$ unter dieser Wertzuordnung wird wie folgt definiert:*

1. *wenn "t" eine Variable ist, dann ist $\overline{h}(t)$ schlicht $h(t)$;*
2. *wenn "t" eine Individuenkonstante "c_k", dann ist $\overline{h}(t)$ die Interpretation dieser Konstante $c_k^{\mathcal{A}}$;*
3. *wenn "t" ein Term der Form "$f_j(t_1, \ldots t_{\mu(j)})$" ist, dann ist $\overline{h}(t)$ der Wert der Funktion für die Interpretationen der Argumente $f_j^{\mathcal{A}}(\overline{h}(t_1), \ldots, \overline{h}(t_{\mu(j)}))$.*

Definition 20. *Sei $\mathcal{L}^+$ eine prädikatenlogische Sprache, $\mathcal{A}$ eine Struktur für $\mathcal{L}^+$ und $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$ eine Wertzuordnung. Wir nennen eine wohlgeformte Formel ϕ von $\mathcal{L}^+$ wahr unter der Wertzuordnung h oder sagen, dass die Wertzuordnung h die Formel ϕ erfüllt (abgekürzt: "$\mathcal{A} \models_h \phi$") gdw. eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

S1	*ϕ ist von der Form "$t_1 = t_2$"*	*und*	$\overline{h}(t_1) = \overline{h}(t_2)$
S2	*ϕ ist von der Form "$R_i(t_1, \ldots, t_{\lambda(i)})$"*	*et*	$R_i^{\mathcal{A}}(\overline{h}(t_1), \ldots, \overline{h}(t_{\lambda(i)}))$
S3	*ϕ ist von der Form $\ulcorner \neg\psi \urcorner$*	*und*	$\mathcal{A} \not\models_h \psi$
S4	*ϕ ist von der Form $\ulcorner \psi \wedge \chi \urcorner$*	*und*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *und* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S5	*ϕ ist von der Form $\ulcorner \psi \vee \chi \urcorner$*	*und*	*entweder* $\mathcal{A} \models_h \psi$ *oder* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S6	*ϕ ist von der Form $\ulcorner \psi \to \chi \urcorner$*	*und*	*entweder* $\mathcal{A} \not\models_h \psi$ *oder* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S7	*ϕ ist von der Form $\ulcorner \psi \leftrightarrow \chi \urcorner$*	*und*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *gdw.* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S8	*ϕ ist von der Form $\ulcorner \forall x_i(\psi) \urcorner$*	*und*	$\mathcal{A} \models_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ *für alle* $a \in |\mathcal{A}|$
S9	*ϕ ist von der Form $\ulcorner \exists x_i(\psi) \urcorner$*	*und*	$\mathcal{A} \models_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ *für mindestens ein* $a \in |\mathcal{A}|$

Definition 21. *Sei $\mathcal{L}^+$ eine Sprache der Prädikatenlogik, $\mathcal{A}$ eine Struktur für $\mathcal{L}^+$, $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}+) \to |\mathcal{A}|$ eine Wertzuordnung und "x_i" eine Variable von $\mathcal{L}^+$. Wir definieren die an der Stelle "x_i" variierte Wertzuordnung – auch "$h\binom{x_i}{a}$" genannt – wie folgt:*

$$h\begin{pmatrix} x_i \\ a \end{pmatrix}(x_j) \quad := \quad \begin{cases} h(x_j) & i \neq j \\ a & i = j \end{cases}$$

Definition 22. *Sei $\mathcal{L}^+$ eine prädikatenlogische Sprache und $\mathcal{A}$ eine Struktur für $\mathcal{L}^+$. Wir nennen eine wohlgeformte Formel ϕ von $\mathcal{L}^+$ "wahr in der Struktur $\mathcal{A}$" gdw. ϕ unter allen Wertzuordnungen von $\mathcal{L}^+$ wahr ist:*

$$\mathcal{A} \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{für jedes } h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}| : \quad \mathcal{A} \models_h \phi$$

Wenn ϕ in einer Struktur $\mathcal{A}$ wahr ist, nennen wir $\mathcal{A}$ ein "Modell" von ϕ.

Definition 23. *Sei $\mathcal{L}^+$ eine prädikatenlogische Sprache. Wir nennen eine wohlgeformte Formel ϕ von $\mathcal{L}^+$ "gültig" bzw. eine "logische Wahrheit" (der Prädikatenlogik) gdw. ϕ in allen Strukturen von $\mathcal{L}^+$ wahr ist:*

$$\models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{für jedes } \mathcal{A} : \quad \mathcal{A} \models \phi$$

Definition 24. *Sei $\mathcal{L}^+$ eine prädikatenlogische Sprache. Wir nennen eine wohlgeformte Formel ϕ eine "semantische Konsequenz" oder "semantische Folge" einer Menge Σ von Formeln gdw. ϕ in allen Strukturen wahr ist, in denen alle Formeln der Menge Σ wahr sind:*

$$\Sigma \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{für jedes } \mathcal{A} : \textit{si } \mathcal{A} \models \psi \textit{ für alle Formeln } \psi \in \Sigma, \textit{ dann } \mathcal{A} \models \phi$$

Axiomatische Kalküle

Ein axiomatischer Kalkül für die Aussagenlogik

Definition 25. *Der Kalkül* HK *hat als Axiome alle wohlgeformte Formeln der Sprache $\mathcal{L}$, die die Form eines der folgenden Axiomenschemata haben:*

H₁	$\ulcorner \phi \to \phi \urcorner$	*Reflexivität*
H₂	$\ulcorner (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi)) \urcorner$	*Transitivität*
H₃	$\ulcorner ((\phi \wedge \psi) \to \chi) \to (\phi \to (\psi \to \chi)) \urcorner$	*'Antecedens konditionalisieren'*
H₄	$\ulcorner (\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \wedge \psi) \to \chi) \urcorner$	*'Antecedens erweitern'*
H₅	$\ulcorner \phi \to (\phi \vee \psi) \urcorner$	*'"$\vee$" rechts einführen'*
H₆	$\ulcorner \psi \to (\phi \vee \psi) \urcorner$	*'"$\vee$" links einführen'*
H₇	$\ulcorner (\phi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\phi \vee \psi) \to \chi)) \urcorner$	*'Alternative'*
H₈	$\ulcorner (\phi \wedge \psi) \to \phi \urcorner$	*'"$\wedge$" rechts eliminieren'*
H₉	$\ulcorner (\phi \wedge \psi) \to \psi \urcorner$	*'"$\wedge$" links eliminieren'*

H10	$\ulcorner(\phi \to \psi) \to ((\phi \to \chi) \to (\phi \to (\psi \wedge \chi)))\urcorner$	*‘“$\wedge$” einführen’*
H11	$\ulcorner(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)\urcorner$	*Kontraposition*
H12	$\ulcorner\phi \to (\neg\phi \to \psi)\urcorner$	*ex falso quodlibet*
H13	$\ulcorner(\phi \to (\phi \wedge \neg\phi)) \to \neg\phi\urcorner$	*reductio ad absurdum*
H14	$\ulcorner((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)) \to (\phi \leftrightarrow \psi)\urcorner$	*‘“$\leftrightarrow$” einführen’*
H15	$\ulcorner(\phi \leftrightarrow \psi) \to ((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi))\urcorner$	*‘“$\leftrightarrow$” eliminieren’*
H16	$\ulcorner\phi \vee \neg\phi\urcorner$	*Tautologie*

Die einzige Schlussregel von HK *ist der Modus Ponens* MP*:* $\dfrac{\phi, \ulcorner\phi \to \psi\urcorner}{\psi}$.

Ein axiomatischer Kalkül für die Prädikatenlogik

Definition 26 (HK$^+$). *Die Axiome des Kalküls* HK$^+$ *für die Prädikatenlogik sind die folgenden Formeln von* $\mathcal{L}^+$*:*

TP *alle Formeln, die die logische Form einer aussagenlogischen Tautologie haben;*

ID *alle Formeln, die die Form eines der folgenden Identitätsaxiome haben (für die Variablen “x”,“y”,“z”, “w”,“x_1”,“x_2”, ...,“$x_{\lambda(i)}$”,“y_1”,“y_2”, ...,“$y_{\lambda(i)}$”,“z_1”,“z_2”, ...,“$z_{\mu(j)}$”,“w_1”,“w_2”, ...,“$w_{\mu(j)}$” und alle $i \in \mathbf{I}$, $j \in \mathbf{J}$):*

ID1	$x = x$	*Reflexivität*
ID2	$y = z \to (y = w \to z = w)$	*Konfluenz*
ID3	$(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_{\lambda(i)} = y_{\lambda(i)}) \to (R_i(x_1, \ldots, x_{\lambda(i)}) \to R_i(y_1, \ldots, y_{\lambda(i)}))$	*Ununterscheidbarkeit*
ID4	$(z_1 = w_1 \wedge \ldots \wedge z_{\mu(j)} = w_{\mu(j)}) \to f_j(z_1, \ldots, z_{\lambda(i)}) = f_j(w_1, \ldots, w_{\mu(j)})$	*Funktionalität*

QU *alle Formeln ϕ, die die Form einer der folgenden Formeln haben (wo ψ für eine beliebige Formel steht und “t” für “x” in ψ frei ist):*

Qu $\forall x(\psi) \to \psi(x/t)$ *Instanziierung*

HK$^+$ *hat zwei Schlussregeln:*

MP *die erste Schlussregel von* HK$^+$ *ist Modus Ponens (*MP*):*

$$\frac{\phi, \ulcorner\phi \to \psi\urcorner}{\psi}$$

$\forall$ *die zweite Schlussregel von* HK$^+$ *heisst “Generalisation” oder “$\forall$”:*

$$\frac{\phi \to \psi}{\phi \to \forall x(\psi)}$$ *wenn “x” in ϕ nicht frei vorkommt*

Die Baummethode

Konstruktionsregeln für Bäume:

$$\begin{array}{c} \ulcorner\neg\neg\phi\urcorner \\ | \\ \phi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner \\ | \\ \phi \\ \psi \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\ulcorner\neg(\phi\wedge\psi)\urcorner} \\ / & \backslash \\ \ulcorner\neg\phi\urcorner & \ulcorner\neg\psi\urcorner \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\ulcorner\phi\vee\psi\urcorner} \\ / & \backslash \\ \phi & \psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \ulcorner\neg(\phi\vee\psi)\urcorner \\ | \\ \ulcorner\neg\phi\urcorner \\ \ulcorner\neg\psi\urcorner \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\ulcorner\phi\rightarrow\psi\urcorner} \\ / & \backslash \\ \ulcorner\neg\phi\urcorner & \psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \ulcorner\neg(\phi\rightarrow\psi)\urcorner \\ | \\ \phi \\ \ulcorner\neg\psi\urcorner \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\ulcorner\phi\leftrightarrow\psi\urcorner} \\ / & \backslash \\ \phi & \ulcorner\neg\phi\urcorner \\ \psi & \ulcorner\neg\psi\urcorner \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\ulcorner\neg(\phi\leftrightarrow\psi)\urcorner} \\ / & \backslash \\ \phi & \ulcorner\neg\phi\urcorner \\ \ulcorner\neg\psi\urcorner & \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner \\ | \\ \ulcorner\phi(a_1)\urcorner \\ \ulcorner\phi(a_2)\urcorner \\ \ulcorner\phi(a_3)\urcorner \\ \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{c} \ulcorner\neg\exists x(\phi(x))\urcorner \\ | \\ \ulcorner\neg\phi(a_1)\urcorner \\ \ulcorner\neg\phi(a_2)\urcorner \\ \ulcorner\neg\phi(a_3)\urcorner \\ \vdots \end{array}$$

für alle Individuenkonstanten "a_i" auf diesem Zweig

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner} \\ / & / & \backslash & \backslash \\ \ulcorner\phi(a_1)\urcorner & \ulcorner\phi(a_2)\urcorner & \ldots & \ulcorner\phi(b)\urcorner \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\ulcorner\neg\forall x(\phi(x))\urcorner} \\ / & / & \backslash & \backslash \\ \ulcorner\neg\phi(a_1)\urcorner & \ulcorner\neg\phi(a_2)\urcorner & \ldots & \ulcorner\neg\phi(b)\urcorner \end{array}$$

für alle Individuenkonstanten "a_i" auf dem Zweig und eine neue Individuenkonstante "b"

Die Methode der natürlichen Deduktion

Die Annahme-Regel

n	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	Annahme

Modus ponens (modus ponendo ponens)

m	$\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \phi$	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\vdash \psi$	aus (m) und (n) mit (MP)

Modus tollens (modus tollendo tollens)

m	$\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner\neg\psi\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$	aus (m) und (n) mit (MT)

Konditionaler Beweis

m	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	Annahme
$\vdots$		$\vdots$	
n	ϕ	$\vdash^* \ \psi$	
$\vdots$		$\vdots$	
o		$\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	aus (m) und (n) mit (KB)

Einführung und Elimination der doppelten Negation

m	$\vdash \ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \phi$	aus (m) mit (DN)

m	$\vdash \phi$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	aus (m) mit (DN)

Reductio ad absurdum

m	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	Annahme
⋮		⋮	
n	ϕ	$\vdash^* \ \psi$	
⋮		⋮	
o	ϕ	$\vdash^* \ \ulcorner\neg\psi\urcorner$	
⋮		⋮	
p		$\vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$	aus (m), (n) und (o) mit (RAA)

Einführung der Konjunktion

m	$\vdash \phi$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \psi$	
⋮	⋮	
o	$\vdash \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	aus (m) und (n) mit ($\wedge$**I**)

Elimination der Konjunktion

m	$\vdash \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \phi$	aus (m) mit ($\wedge$**E**)

m	$\vdash \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \psi$	aus (m) mit ($\wedge$**E**)

Einführung der materialen Äquivalenz

m	$\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \ulcorner\psi \rightarrow \phi\urcorner$	
⋮	⋮	
o	$\vdash \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$	aus (m) und (n) mit ($\leftrightarrow$ **I**)

Elimination der materialen Äquivalenz

m		$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	aus (m) mit $(\leftrightarrow$ **E**)

m		$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner \psi \rightarrow \phi \urcorner$	aus (m) mit $(\leftrightarrow$ **E**)

Einführung der Disjunktion

m		$\vdash \phi$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	aus (m) mit $(\vee$**I**)

m		$\vdash \psi$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	aus (m) mit $(\vee$**I**)

Elimination der Disjunktion

m		$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	Annahme
$\vdots$		$\vdots$	
o	ϕ	$\vdash^* \ \chi$	
$\vdots$		$\vdots$	
p	ψ	$\vdash^* \ \psi$	Annahme
$\vdots$		$\vdots$	
q	ψ	$\vdash^* \ \chi$	
$\vdots$		$\vdots$	
r		$\vdash \chi$	aus (m), (n), (o), (p) und (q) mit $(\vee$**E**)

Elimination des Allquantors
Bedingung: "t" muss frei sein für "x" in ϕ, d.h. "t" darf sich in $\ulcorner\phi(x/t)\urcorner$ nicht im Geltungsbereich eines "x" bindenden Quantors befinden.

m	$\vdash \ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \ulcorner\phi(x/t)\urcorner$	aus (m) mit (US)

Einführung des Existenzquantors
Bedingung: "t" muss frei sein für "x" in ϕ, d.h. "t" darf sich in $\ulcorner\phi(x/t)\urcorner$ nicht im Geltungsbereich eines "x" bindenden Quantors befinden.

m	$\vdash \ulcorner\phi(x/t)\urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \ulcorner\exists x(\phi)\urcorner$	aus (m) mit (EG)

Einführung des Allquantors
Bedingung: "a" kommt in keiner Prämisse oder Annahme vor, von der der Beweis von $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ abhängt.

m	$\vdash \ulcorner\phi(a)\urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \ulcorner\forall x(\phi(a/x))\urcorner$	aus (m) mit (UG)

Elimination des Existenzquantors
Bedingung: "a" kommt nicht in ψ und in keiner Annahme (ausser $\ulcorner\phi(a)\urcorner$) vor, von der der Beweis von ψ aus $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ abhängt.

m	$\vdash \ulcorner\exists x(\phi(a/x))\urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\ulcorner\phi(a)\urcorner \quad \vdash^* \ulcorner\phi(a)\urcorner$	Annahme
.	.	
.	.	
.	.	
o	$\ulcorner\phi(a)\urcorner \quad \vdash^* \psi$	
.	.	
.	.	
.	.	
p	$\vdash \psi$	aus (m), (n) et (o) mit (ES)