

zusätzliche Übungen zur Prädikatenlogik  
Einführungskurs Logik, Universität Bern, Frühlingssemester 2008

1. (5 points) Beweisen Sie mittels der Baummethode:

- (a) " $\forall x(Fx) \rightarrow \forall y(Fy)$ "
- (b) " $\forall x(Fx \rightarrow Ga) \rightarrow (\exists x(Fx) \rightarrow Ga)$ "
- (c) " $Ga \rightarrow (\forall x(Fx) \rightarrow \exists x(Fx))$ "
- (d) " $\exists x\forall y(Rxy) \rightarrow \forall y\exists x(Rxy)$ "
- (e) " $(\forall x\forall y(Rxy \rightarrow Ryz) \wedge \forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)) \rightarrow \forall x\forall y(Rxy \rightarrow Rxx)$ "

2. (4 points) Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln keine Theoreme der Prädikatenlogik sind:

- (a) " $\forall x(Fx \vee Gx) \rightarrow (\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx))$ "
- (b) " $\forall x\exists y(Rxy) \rightarrow \exists y\forall x(Rxy)$ "

3. (8 points) Beweisen Sie mittels der Methode der natürlichen Deduktion:

- (a) " $\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx) \vdash \forall x(Fx \vee Gx)$ "
- (b) " $\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \exists x(Fx \wedge Hx)$ "
- (c) " $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Hx \rightarrow \neg Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$ "
- (d) " $(\forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx)) \leftrightarrow \exists x(Fx) \vdash \neg\exists x\neg(Fx)$ "
- (e) " $\vdash \exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow (\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx))$ "
- (f) " $\forall x\neg(Fx \wedge Gx), Ga \vdash \neg Fa$ "
- (g) " $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists x(Fx) \rightarrow \exists x(Gx)$ "
- (h) " $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$ "

4. (8 points) Beweisen Sie folgende Äquivalenzen sowohl mit der Baummethode als auch mit der Methode der natürlichen Deduktion:

- (a) " $\exists x(Fx \wedge Gx) \dashv\vdash \neg\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ "
- (b) " $\forall x(Fx \rightarrow \exists y(Gxy)) \dashv\vdash \forall x\exists y(Fx \rightarrow Gxy)$ "

5. (4 points) Beweisen Sie folgende Äquivalenzen mit der Methode der natürlichen Deduktion:

- (a) " $\exists x(Fx) \dashv\vdash \neg\forall x\neg(Fx)$ "
- (b) " $\exists x\neg(Fx) \dashv\vdash \neg\forall x(Fx)$ "