Übungen 10

Einführungskurs Logik, Universität Bern, Frühlingssemester 2008

abzugeben vor Dienstag, dem 6.5.2008, 16h15

Name(n): ______________________________

Erzielte Punkte (in 4 Fragen mit insgesamt 20 Punkten): __________ Note: __________

1. (2 Punkte) Geben Sie deutschsprachige Sätze an, die von folgenden Formeln der Prädikatenlogik korrekt formalisiert werden:
   (a) "$\forall x(Dx \to \forall y((Cy \wedge Fy) \to Hxy))$"
   (b) "$\exists x((Dx \wedge Fx) \to Pax)$"
2. (3 Punkte) Begründen Sie die Wahrheit der folgenden Sätze anhand der Definition der Gültigkeit in der Semantik der Prädikatenlogik:
   (a) "$\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Gx \to \neg Hx) \models \forall x(Fx \to \neg Hx)$"
   (b) "$\forall x(Fx \to Gx) \models \neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$"
   (c) "$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(\neg Gx) \models \exists x(\neg Fx)$"
3. (10 Punkte) Formalisieren Sie (wobei Sie annehmen, der Individuenbereich sei die Gesamtheit aller Menschen):
   (a) Susi ist F.
   (b) Sam ist F.
   (c) Einige D sind F.
   (d) Jedes D ist F.
   (e) Nur D sind F.
   (f) Kein H ist F.
   (g) Einige H sind nicht F.
   (h) Sam ist nicht F.
   (i) Susi hat Sam getötet.
   (j) Jemand hat Sam getötet.
   (k) Sam hat jemanden getötet.
   (l) Jemand hat jemanden getötet.
   (m) Jemand hat sich getötet.
   (n) Niemand hat sich getötet.
   (o) Jemand hat alle getötet.
   (p) Jemand ist von allen getötet worden.
   (q) Es gibt ein S zwischen Sam und Susi.
   (r) Jeder Zöllner hasst einen Läufer.
   (s) Einige Läufer lieben jeden Zöllner.
   (t) Es gibt einen Läufer, den alle verrückten Zöllner hassen.
   (u) Einige C befinden sich zu keinem FD in der Beziehung P.
   (v) Einige C stehen in der Beziehung P nur zu jenen D, die nicht F sind.

4. (5 Punkte) Sei $\mathcal{L}^+$ die Sprache der Prädikatenlogik mit $\mathbf{I} = \{0\}$, $\mathbf{J} = \{0,1,2\}$, $\mathbf{K} = \{0,1\}$, $\lambda(0) = 2, \mu(0) = 1, \mu(1) = \mu(2) = 2$. Wir ersetzen die nicht-logischen Zeichen mit den folgenden:

$$\begin{array}{rcl} \ldots R_0 \cdots & \rightsquigarrow & \ldots \leq \cdots \\ f_0(\ldots) & \rightsquigarrow & - \ldots \\ f_1(\ldots, \cdots) & \rightsquigarrow & \ldots + \cdots \\ f_2(\ldots, \cdots) & \rightsquigarrow & \ldots \times \cdots \\ c_0 & \rightsquigarrow & 0 \\ c_1 & \rightsquigarrow & 1 \end{array}$$

Zusätzlich verwenden wir "$\ldots \neq \ldots$" als Abkürzung für "$\neg(\ldots = \ldots)$.

(a) Sind die folgenden Ausdrücke Terme von $\mathcal{L}^+$?

(i) "0"
(ii) "$x_1 + 1$"
(iii) "$+x_1$"
(iv) "$x_1 \times$"
(v) "$x_1 \times (0 + 1)$"
(vi) "2"

(b) Sind die folgenden Ausdrücke atomare Formeln von $\mathcal{L}^+$?

(i′) "$x_1 + 1$"
(ii′) "$0 + 0 \neq 1$"
(iii′) "$(x_1 \leq 1) \neq 1$"
(iv′) "$\forall x_1(x_1 \leq (0 + 1))$"
(v′) "$0 + 1 \neq 0 \times 1$"
(vi′) "$x_1 \leq 1$"

(c) Sind die folgenden Ausdrücke Formeln von $\mathcal{L}^+$?

(i″) "0"
(ii″) "$x_1 + 1 \leq x_1$"
(iii″) "$\forall x_1(x_1 \times (0 + 1))$"
(iv″) "$1 + (x_1 \times (0 + 1))$"
(v″) "$(1 + 1) \wedge (0 \leq 1)$"
(vi″) "$\forall x_1(x_1 \leq (0 + 1))$"

(d) In welchen der folgenden Ausdrücke von $\mathcal{L}^+$ kommt die Variable "x_1" frei vor?

(i‴) "$x_1 + 1 \leq 1$"
(ii‴) "$\forall x_1 \neg(x_1 \neq (0 + 1))$"
(iii‴) "$\exists x_2(1 + (x_2 \times (0 + 1) \leq x_1))$"
(iv‴) "$\forall x_1(0 \leq x_1) \wedge ((0 \leq 1) \vee 1 \neq x_1)$"
(v‴) "$\forall x_1((0 \leq x_1) \rightarrow (1 \neq x_1))$"
(vi‴) "$\forall x_2 \exists x_1 \neg(x_2 \leq x_1)$"