Syntax und Semantik der Prädikatenlogik

Einführungskurs Logik, Universität Bern, Frühlingssemester 2009

handout zur Sitzung vom 28.4.09

Philipp Keller (`philipp.keller@unige.ch`)

Punkte vom letzten Kurs

1. Die Prädikatenlogik formalisiert Schlüsse, die das logische Verhalten von Quantoren charakterisieren.
2. Ein prädikatenlogischer Schluss zeigt uns, dass ein Prädikat auf ein oder mehrere Objekte zutrifft, wenn es auf ein oder mehrere Objekte zutrifft.
3. Die allgemeine Form eines atomaren Satzes in der Prädikatenlogik ist "Fa" – Fx wird dabei als Funktion aufgefasst, die ein Objekt als Argument hat und einen Wahrheitswert als Wert.
4. Wir können die Bedeutung (die Erfüllungsbedingungen) eines logisch komplexen Prädikates auf der Basis der Bedeutungen (Erfüllungsbedingungen) seiner Atomaren Teile rekursiv definieren.
5. Prädikate in der Prädikatenlogik sind unär, binär oder im allgemeinen Fall n-är.
6. Ein singulärer Terminus ist ein Eigenname (*name*), ein indexikalischer Ausdruck (*indexical*), ein demonstrativer Ausdruck (*demonstrative*) oder eine definite Beschreibung (*definite description*).
7. Die kategoriale Grammatik charakterisiert ein (erststufiges) Prädikat durch den Typ $\mathbf{S}/\mathbf{N}$, aussagenlogische Junktoren durch $\mathbf{S}/\mathbf{S}$, prädikatenlogische Junktoren durch $(\mathbf{S}/\mathbf{N})/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$ und erststufige Quantoren durch $\mathbf{S}/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$.
8. Quantoren sind damit Prädikate zweiter Stufe, die wie singuläre Termini aus Prädikaten Sätze bilden.
9. Der universelle Quantor ("$\forall x(\ldots x \cdots$") ist eine 'Abkürzung' unendlicher Konjunktionen, der existentielle Quantor ("$\exists x(\ldots x \cdots$") eine 'Abkürzung' unendlicher Disjunktionen; der universelle und der existentielle Quantor sind in der gleichen Weise dual wie die Konjunktion und die Disjunktion.
10. Jedem Quantor ist ein Individuenbereich zugeordnet, der festlegt, welche Objekte für die Instanziierung des quantifizierten Prädikates zur Verfügung stehen.

Die Sprache $\mathcal{L}^+$

Definition 1. *Das Alphabet der Sprache $\mathcal{L}^+$ der klassischen Prädikatenlogik besteht aus den folgenden Zeichen:*

1. *den folgenden logischen Zeichen:*
   (a) *den Junktoren "$\neg \ldots$" ("nicht"), "$\cdots \wedge \cdots$" ("und"), "$\cdots \vee \cdots$" ("oder"), "$\cdots \rightarrow \cdots$" ("wenn-dann") und "$\cdots \leftrightarrow \cdots$" ("gdw.");*
   (b) *den Quantoren "$\forall x(\ldots x \cdots)$" ("für jedes x") und "$\exists x(\ldots x \cdots)$" ("es gibt mindestens ein x");*
   (c) *dem Identitätszeichen: "$\ldots \cdots$" ("...ist identisch mit $\cdots$");*
   (d) *den Individuenvariablen: "x_i" für jedes $i \in \mathcal{N}$;*
2. *den folgenden nicht-logischen Zeichen:*
   (a) *den Relationszeichen: "R_i" für jedes $i \in \mathbf{I}$;*
   (b) *den Funktionszeichen: "f_i" für jedes $i \in \mathbf{J}$;*
   (c) *den Individuenkonstanten: "c_i" für jedes $i \in \mathbf{K}$;*
3. *den Hilfszeichen: Klammern, Kommata.*

Die Funktionszeichen stehen für Funktionen in unserem Individuenbereich, die total definiert sind, d.h. für jedes Argument einen Wert haben.

Wir nennen "Sprache" ein Alphabet – eine bestimmte Wahl nicht-logischer Zeichen – zusammen mit einer Menge $\mathbf{K}$ von Indices für die Individuenkonstanten und zwei Funktionen $\lambda : \mathbf{I} \mapsto \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\mu : \mathbf{J} \mapsto \mathbb{N} \setminus \{0\}$, die die Adizität der Relations- und Funktionszeichen festlegen.

Definition 2. *Die Terme der Sprache $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ sind durch folgende rekursive Definition festgelegt:*

1. *Jede Individuenvariable "x_i" ist ein Term.*
2. *Jede Individuenkonstante "c_i" ist ein Term.*
3. *Wenn "t_1","t_2",...,"t_n" Terme sind, $j \in \mathbf{J}$ und $n = \mu(j)$, dann ist auch "$f_j(t_1, t_2, \ldots, t_n)$" ein Term.*
4. *Kein anderer Ausdruck ist ein Term.*

Auf der Grundlage dieser Definition können wir die sog."wohlgeformten Formeln" der Sprache $\mathcal{L}^+$ in zwei Schritten wie folgt definieren:

Definition 3. *ϕ ist eine atomare Formel der Sprache $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ gdw.:*

1. *ϕ ist von der Form "$t_1 t_2$" für zwei Terme "t_1" und "t_2"; oder*
2. *ϕ ist von der Form "$R_i(t_1, t_2, \ldots, t_{\lambda(i)})$" für Terme "$t_1$","$t_2$",...,"$t_{\lambda(i)}$", $j \in \mathbf{J}$;*

Definition 4. *ϕ ist eine wohlgeformte Formel der Sprache $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ gdw.:*

1. *ϕ ist eine atomare Formel; oder*
2. *ϕ ist von der Form $\ulcorner(\neg\psi)\urcorner$ für eine wohlgeformte Formel ψ; oder*
3. *ϕ ist von der Form $\ulcorner(\psi \wedge \chi)\urcorner$, $\ulcorner(\psi \vee \chi)\urcorner$, $\ulcorner(\psi \rightarrow \chi)\urcorner$ oder $\ulcorner(\psi \leftrightarrow \chi)\urcorner$, für wohlgeformte Formeln ψ und χ; oder*
4. *ϕ ist von der Form $\ulcorner \forall x_i(\psi)\urcorner$ oder $\ulcorner \exists x_i(\psi)\urcorner$ für eine wohlgeformte Formel ψ und eine Variable "x_i", $i \in \mathbb{N}$.*

Wohlgeformte Formeln sind entweder Sätze (wahr oder falsch) oder Prädikate (nicht: wahr oder falsch). Sie sind Prädikate gdw. sie eine *freie* oder *ungebundene* Variable enthalten:

Definition 5. *Sei ϕ eine wohlgeformte Formel und "x_i" eine Variable. Wir sagen, dass "x_i" frei in ϕ vorkommt gdw. eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1. *ϕ ist eine atomare Formel und enthält "x_i"; oder*
2. *ϕ ist von der Form $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ und "x_i" kommt frei vor in ψ; oder*
3. *ϕ ist von der Form $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ ou $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ und "x_i" kommt entweder in ψ oder in χ frei vor;*
4. *ϕ ist von der Form $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ und $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner$, $i \neq j$ und "x_i" kommt in ψ frei vor.*

Eine wohlgeformte Formel ist ein Prädikat (offener Satz) gdw. wenn mindestens eine Variable frei in ihr vorkommt:

Definition 6. *Ein Satz ist eine wohlgeformte Formel, in der keine Variable frei vorkommt.*

Eine Variable ist gebunden, falls sie sich im Geltungsbereich eines Quantors befindet:

Definition 7 (Geltungsbereich)**.** *Sei ϕ eine Formel, die eine Quantifikation der Variable "x" enthält ("$\forall x$" oder "$\exists x$"). Wir nennen die kleinste Formel nach der Quantifikation den Geltungsbereich des Quantors.*

Beispiele:

Q1 $\forall x(Px) \rightarrow (\forall x(Qxy) \vee Rx)$

Q2 $\forall x(Px \rightarrow (\forall x(Qxy) \vee Rx))$

Q3 $\forall x(Px \rightarrow \forall x(Qxy \vee Rx))$

Die Semantik der klassischen Prädikatenlogik

Wir interpretieren zunächst die Prädikate und Terme in einer Struktur:

Definition 8 (Struktur)**.** *Sei $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ eine Sprache der Prädikatenlogik. Eine Struktur $\mathcal{A}$ für $\mathcal{L}^+$ besteht aus:*

1. *einer nicht-leeren Menge $|\mathcal{A}|$, die wir "Diskursuniversum", "Individuen-" oder "Quantifikationsbereich" von $\mathcal{A}$ nennen;*
2. *eine Interpretation aller Relationszeichen, d.i. eine Funktion, die jedem $i \in \mathbf{I}$ eine Relation $R_i^{\mathcal{A}}$ auf $|\mathcal{A}|$ mit $\lambda(i)$ Argumentstellen zuordnet (d.h. eine Teilmenge $R_i^{\mathcal{A}} \subset |\mathcal{A}|^{\lambda(i)}$);*
3. *eine Interpretation aller Funktionszeichen, d.i. eine Funktion, die jedem $j \in \mathbf{J}$ eine Funktion $f_j^{\mathcal{A}}$ auf $|\mathcal{A}|$ mit $\mu(j)$ Argumentstellen zuordnet (d.h. eine Funktion $f_j^{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}|^{\mu(j)} \to |\mathcal{A}|$);*
4. *eine Interpretation aller Individuenkonstanten, d.i. eine Funktion, die jedem $k \in \mathbf{K}$ ein fixes Element $c_k^{\mathcal{A}}$ de $|\mathcal{A}|$ des Quantifikationsbereichs zuordnet.*

Haben wir eine Struktur erst mal gegeben, können wir den Variablen Werte aus dem Individuenbereich zuordnen:

Definition 9 (Wertzuordnung). *Sei $\mathcal{L}^+$ eine Sprache der Prädikatenlogik und $\mathcal{A}$ eine Struktur für $\mathcal{L}^+$. Eine Wertzuordnung für $\mathcal{L}^+$ ist eine Funktion h die jeder Variable x_i ($i \in \mathbb{N}$) genau ein Element des Quantifikationsbreichs zuordnet:* $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$.

Eine Interpretation bestimmt, welche Objekte des Quantifikationsbereichs von unseren Individuenkonstanten und Variablen bezeichnet werden: Die Wertzuordnung h in einer Struktur $\mathcal{A}$ bestimmt eine Funktion $\overline{h}$, die *allen* singulären Termen (nicht nur den 'einfachen') ein Referenzobjekt zuordnet (relativ zu einer Struktur und einer Wertzuordnung):

Definition 10 (Referenz der singulären Terme). *Sei $\mathcal{L}^+$ eine Sprache der Prädikatenlogik, $\mathcal{A}$ eine Struktur für $\mathcal{L}^+$ und $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$ eine Wertzuordnung. Das Referenzobjekt $\overline{h}(t)$ eines singulären Terms "t" der Sprache $\mathcal{L}^+$ unter dieser Wertzuordnung wird wie folgt definiert:*

1. *wenn "t" eine Variable ist, dann ist $\overline{h}(t)$ schlicht $h(t)$;*
2. *wenn "t" eine Individuenkonstante "c_k", dann ist $\overline{h}(t)$ die Interpretation dieser Konstante $c_k^{\mathcal{A}}$;*
3. *wenn "t" ein Term der Form "$f_j(t_1, \dots t_{\mu(j)})$" ist, dann ist $\overline{h}(t)$ der Wert der Funktion für die Interpretationen der Argumente $f_j^{\mathcal{A}}(\overline{h}(t_1), \dots, \overline{h}(t_{\mu(j)}))$.*

Eine Interpretation bestimmt, auf welche Objekte unsere singulären Terme referieren: Die Wertzuordnung h und die Struktur $\mathcal{A}$ bestimmen damit eine Funktion $\overline{h}$, die allen Individuenkonstanten, Variablen und Funktionswerten eine Bedeutung zuordnet.

Der zentrale Begriff der Semantik der Prädikatenlogik ist der der Eigenschaft, unter einer bestimmten Wertzuordnung wahr zu sein:

Definition 11 (Wahrheit unter einer Wertzuordnung). *Sei $\mathcal{L}^+$ eine prädikatenlogische Sprache, $\mathcal{A}$ eine Struktur für $\mathcal{L}^+$ und $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$ eine Wertzuordnung. Wir nennen eine wohlgeformte Formel ϕ von $\mathcal{L}^+$ wahr unter der Wertzuordnung h oder sagen, dass die Wertzuordnung h die Formel ϕ erfüllt (abgekürzt: "$\mathcal{A} \models_h \phi$") gdw. eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

S1	*ϕ ist von der Form "$t_1 = t_2$"*	*und*	$\overline{h}(t_1) = \overline{h}(t_2)$
S2	*ϕ ist von der Form "$R_i(t_1, \dots, t_{\lambda(i)})$"*	*et*	$R_i^{\mathcal{A}}(\overline{h}(t_1), \dots, \overline{h}(t_{\lambda(i)}))$
S3	*ϕ ist von der Form $\ulcorner \neg\psi \urcorner$*	*und*	$\mathcal{A} \not\models_h \psi$
S4	*ϕ ist von der Form $\ulcorner \psi \wedge \chi \urcorner$*	*und*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *und* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S5	*ϕ ist von der Form $\ulcorner \psi \vee \chi \urcorner$*	*und*	*entweder* $\mathcal{A} \models_h \psi$ *oder* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S6	*ϕ ist von der Form $\ulcorner \psi \to \chi \urcorner$*	*und*	*entweder* $\mathcal{A} \not\models_h \psi$ *oder* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S7	*ϕ ist von der Form $\ulcorner \psi \leftrightarrow \chi \urcorner$*	*und*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *gdw.* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S8	*ϕ ist von der Form $\ulcorner \forall x_i(\psi) \urcorner$*	*und*	$\mathcal{A} \models_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ *für alle* $a \in |\mathcal{A}|$
S9	*ϕ ist von der Form $\ulcorner \exists x_i(\psi) \urcorner$*	*und*	$\mathcal{A} \models_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ *für mindestens ein* $a \in |\mathcal{A}|$

Um auszudrücken, dass Wahrheit-unter-einer-Wertzuordnung von einer Wertzuordnung abhängt, indizieren wir das Zeichen für logische Gültigkeit mit dem für die Wertzuordnung und schreiben "$\models_h$". Im Gegensatz zum "$\models$" der Aussagenlogik steht "$\models_h$" für eine *dreistellige* Relation zwischen einer Struktur, einer Wertzuordnung und einer wohlgeformten Formel.

Die beiden Klauseln für die Quantoren benützen den Begriff "bei "x" variierte Wertzuordnung", den wir jetzt noch definieren müssen:

Definition 12 (variierte Wertzuordnungen). *Soit $\mathcal{L}^+$ eine Sprache der Prädikatenlogik, $\mathcal{A}$ eine Struktur für $\mathcal{L}^+$, $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}+) \to |\mathcal{A}|$ eine Wertzuordnung und "x_i" eine Variable von $\mathcal{L}^+$. Wir definieren die an der Stelle "x_i" variierte Wertzuordnung – auch "$h\binom{x_i}{a}$" genannt – wie folgt:*

$$h\binom{x_i}{a}(x_j) \quad := \quad \begin{cases} h(x_j) & i \neq j \\ a & i = j \end{cases}$$

$h\binom{x_i}{a}$ ist eine Funktion, die jeder Variable ausser "x_i" das gleiche Referenzobjekt wie h zuordnet, für "x_i" aber a als Referenzobjekt bestimmt.

Gültigkeit in der Prädikatenlogik

Es ist von allen *Sätzen* wahr, dass ihre Wahrheit nicht von einer bestimmten Wertzuordnung abhängt. Wir erhalten damit den Begriff "Wahrheit in einer Struktur" (der auf Sätze angewendet wird) als Grenzfall des Begriffs "Wahrheit unter einer Wertzuordnung und in einer Struktur":

Definition 13 (Wahrheit in einer Struktur). *Sei $\mathcal{L}^+$ eine prädikatenlogische Sprache und $\mathcal{A}$ eine Struktur für $\mathcal{L}^+$. Wir nennen eine wohlgeformte Formel ϕ von $\mathcal{L}^+$ "wahr in der Struktur $\mathcal{A}$" gdw. ϕ unter allen Wertzuordnungen von $\mathcal{L}^+$ wahr ist:*

$$\mathcal{A} \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{für jedes } h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}| \ : \quad \mathcal{A} \models_h \phi$$

Wenn ϕ in einer Struktur $\mathcal{A}$ wahr ist, nennen wir $\mathcal{A}$ ein "Modell" von ϕ.

Um nun zu einem Begriff *logischer* Wahrheit oder Gültigkeit zu gelangen, müssen wir noch über alle Strukturen generalisieren:

Definition 14 (Gültigkeit). *Sei $\mathcal{L}^+$ eine prädikatenlogische Sprache. Wir nennen eine wohlgeformte Formel ϕ von $\mathcal{L}^+$ "gültig" bzw. eine "logische Wahrheit" (der Prädikatenlogik) gdw. ϕ in allen Strukturen von $\mathcal{L}^+$ wahr ist:*

$$\models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{für jedes } \mathcal{A} \ : \quad \mathcal{A} \models \phi$$

Eine wohlgeformte Formel der Prädikatenlogik ist damit genau dann gültig (logisch wahr), wenn ihre Wahrheit nicht davon abhängt, wie wir die nicht-logischen Zeichen interpretieren.
Aus diesem Begriff der Gültigkeit erhalten wir den der (semantischen) Folgerung:

Definition 15 (logische Folgerung). *Sei $\mathcal{L}^+$ eine prädikatenlogische Sprache. Wir nennen eine wohlgeformte Formel ϕ eine "semantische Konsequenz" oder "semantische Folge" einer Menge Σ von Formeln gdw. ϕ in allen Strukturen wahr ist, in denen alle Formeln der Menge Σ wahr sind:*

$$\Sigma \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{für jedes } \mathcal{A} : \textit{si } \mathcal{A} \models \psi \textit{ für alle Formeln } \psi \in \Sigma, \textit{ dann } \mathcal{A} \models \phi$$

Theorem 16. *Eine Formel ist gültig gdw. ihr universeller Abschluss gültig ist.*

Die Logik der unären Prädikate

Wenn wir es nur mit unären (einstelligen) Prädikaten zu tun haben, können wir die Quantoren in komplexen Formeln hinein- und hinausschieben:

Theorem 17. *Sei ϕ eine wohlgeformte Formel und ψ eine Formel, in der die Variable "x" nicht frei vorkommt. Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige prädikatenlogische Struktur und h eine beliebige Wertzuordnung für $\mathcal{L}^+$.*

Wir haben dann die folgenden Äquivalenzen:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi \vee \psi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi) \vee \psi \urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi \vee \psi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi) \vee \psi \urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi \wedge \psi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi) \wedge \psi \urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi \wedge \psi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi) \wedge \psi \urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\psi \rightarrow \phi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \psi \rightarrow \forall x(\phi) \urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\psi \rightarrow \phi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \psi \rightarrow \exists x(\phi) \urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi \rightarrow \psi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi) \rightarrow \psi \urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi \rightarrow \psi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi) \rightarrow \psi \urcorner
\end{array}
$$

Wir können damit mittels folgender Regeln für eine beliebige Formel ϕ von $\mathcal{L}^+$, die nur einstellige Prädikate enthält, herausfinden, ob ϕ gültig ist:

1. Wenn ϕ keine Quantoren enthält, dann ist ϕ gültig gdw. die Konfiguration der Prädikate einer aussagenlogischen Tautologie entspricht (wenn wir"Fx" durch "p", "Gx" durch "q" etc. ersetzen).[1]
2. Wenn ϕ von der Form $\ulcorner \exists x(\psi) \urcorner$ ist für eine Formel ψ ohne Quantoren, dann ist ϕ gültig gdw. ψ gültig ist gemäss (1).
3. Wenn ϕ von der Form $\ulcorner \neg\exists x(\psi) \urcorner$ ist für eine Formel ψ ohne Quantoren, dann ist ϕ gültig gdw. ψ gemäss (1) nicht gültig ist.
4. Wenn ϕ eine Disjunktion von Formeln der Form $\ulcorner \neg\exists x(\psi_i) \urcorner$ ist für Formeln ψ_i ohne Quantoren, dann ist ϕ gültig gdw. mindestens eines der Disjunkte gemäss (3) gültig ist.
5. Wenn ϕ eine Implikation einer Formel vom Typ (2) durch eine oder mehrere Formeln von Typ (2) ist, dann ist ϕ gültig gdw. eine der Formeln im Antezedens im Sinn von (1) das Konsequens impliziert.
6. Wenn ϕ eine Konjunktion von Formeln vom Typ (2), (3), (4) oder (5) ist, dann ist ϕ gültig gdw. jedes der Konjunkte gemäss (2), (3), (4) oder (5) gültig ist.

Mit diesem Entscheidungsverfahren erhalten wir:

Theorem 18 (Löwenheim (1915))**.** *Die Logik der unären Prädikate ist entscheidbar.*

Ein axiomatischer Kalkül für die Prädikatenlogik

Definition 19 (HK$^+$)**.** *Die Axiome des Kalküls* HK$^+$ *für die Prädikatenlogik sind die folgenden Formeln von $\mathcal{L}^+$:*

TP *alle Formeln, die die logische Form einer aussagenlogischen Tautologie haben;*

ID *alle Formeln, die die Form eines der folgenden Identitätsaxiome haben (für die Variablen "x", "y", "z", "w", "x_1", "x_2", ..., "$x_{\lambda(i)}$", "y_1", "y_2", ..., "$y_{\lambda(i)}$", "z_1", "z_2", ..., "$z_{\mu(j)}$", "w_1", "w_2", ..., "$w_{\mu(j)}$" und alle $i \in \mathbf{I}$, $j \in \mathbf{J}$):*

ID1	$x = x$	*Reflexivität*
ID2	$y = z \rightarrow (y = w \rightarrow z = w)$	*Konfluenz*
ID3	$(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_{\lambda(i)} = y_{\lambda(i)}) \rightarrow (R_i(x_1, \ldots, x_{\lambda(i)}) \rightarrow R_i(y_1, \ldots, y_{\lambda(i)}))$	*Ununterscheidbarkeit*
ID4	$(z_1 = w_1 \wedge \ldots \wedge z_{\mu(j)} = w_{\mu(j)}) \rightarrow f_j(z_1, \ldots, z_{\lambda(i)}) = f_j(w_1, \ldots, w_{\mu(j)})$	*Funktionalität*

QU *alle Formeln ϕ, die die Form einer der folgenden Formeln haben (wo ϕ und ψ beliebige Formeln sind, so dass "t" für "x" in ψ frei ist und "x" in ϕ nicht frei vorkommt):*

[1] "$Fx \vee \neg Fx$" und "$(Fx \wedge \neg Fx) \rightarrow Gx$" sind aus diesem Grund bspw. gültig. Wenn es eine aussagenlogische Interpretation gibt, die die entsprechende aussagenlogische Formel gültig macht, dann gibt es in jeder Struktur (die mindestens ein Objekt enthält) eine Wertzuordnung, die den offenen Satz gültig macht. Wenn es andererseits keine solche aussagenlogische Interpretation gibt, gibt es eine Wertzuordnung, der zufolge der offene Satz auf das Objekt nicht zutrifft

Qu $\forall x(\psi) \to \psi(x/t)$		*Instanziierung*
Qu₂ $\forall x(\phi \to \psi) \to (\phi \to \forall)$		*Simplifikation*

HK$^+$ *hat zwei Schlussregeln:*

MP *die erste Schlussregel von* HK$^+$ *ist Modus Ponens (*MP*):*

$$\frac{\phi, \ulcorner\phi \to \psi\urcorner}{\psi}$$

$\forall$ *die zweite Schlussregel von* HK$^+$ *heisst "Generalisation" oder "$\forall$":*

$$\frac{\phi \to \psi}{\phi \to \forall x(\psi)} \quad \text{wenn "}x\text{" in } \phi \text{ nicht frei vorkommt}$$

Die vier Identitätsaxiome widerspiegeln den Umstand, dass sich in der erststufigen Prädikatenlogik die Identitätsbeziehung "=" nicht explizit definieren lässt. In der zweitstufigen Prädikatenlogik ist dies wie folgt möglich, für alle Terme t_1 und t_2:

(**Def**$_i d$) $\quad \ulcorner t_1 = t_2\urcorner :\Longleftrightarrow \ulcorner\forall\phi(Var(\phi) = \{x\} \to \phi[t_1/x] = \phi[t_2/x])\urcorner$

Wir müssen das Identitätsaxiom **ID₃** klar von einem sehr viel weniger plausiblen, metaphysischen Prinzip unterscheiden, dass "Identität des Ununterscheidbaren" heisst:

(**IdIn**) $\quad ((R_i(x_1, \ldots, x_{\lambda(i)}) \to R_i(y_1, \ldots, y_{\lambda(i)})) \to (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_{\lambda(i)} = y_{\lambda(i)})$

Dieses Prinzip besagt, dass zwei ununterscheidbare Dinge identisch sind, während **ID₃** bloss besagt, dass sich identische Dinge nicht unterscheiden lassen.

Die Gültigkeit von **Qu** hängt vom Umstand ab, dass eine Formel in der Prädikatenlogik gültig ist gdw. auch ihr universeller Abschluss gültig ist. In **Qu** haben wir auch drei abgeleitete Schlussregeln, deren Gültigkeit wir ebenfalls nachweisen können. Die vier Regeln zusammen sind die Einführungs- und Eliminationsregeln der Quantoren:

UG universelle Generalisierung:

$$\frac{\phi}{\ulcorner\forall x(\phi)\urcorner} \quad \text{wenn "}x\text{" in } \phi \text{ nicht frei vorkommt}$$

US universelle Spezialisierung:

$$\frac{\ulcorner\forall x(\phi)\urcorner}{\ulcorner\phi(x/t)\urcorner} \quad \text{wenn "}t\text{" in } \phi \text{ frei ist für "}x\text{"}$$

EG existentielle Generalisierung:

$$\frac{\ulcorner\phi(x/t)\urcorner}{\ulcorner\exists x(\phi)\urcorner} \quad \text{wenn "}t\text{" in } \phi \text{ frei ist für "}x\text{"}$$

ES existentielle Spezialisierung:

$$\frac{\ulcorner\exists x(\phi)\urcorner}{\ulcorner\phi(x/t)\urcorner} \quad \text{wenn "}x\text{" in } \phi \text{ nicht frei vorkommt}$$

Wir werden auf diese vier Schlussregeln im Zusammenhang mit der Methode der natürlichen Deduktion für die Prädikatenlogik noch zurückkommen.