Die aussagenlogischen Junktoren

Einführungskurs Logik, Universität Bern, Frühlingssemester 2009

handout zur Sitzung vom 24.2.08

Philipp Keller, `philipp.keller@unige.ch`

Punkte vom letzten Kurs

1. Die moderne Logik geht auf Gottlob Frege zurück (*Begriffsschrift*, 1879).
2. In der Philosophie geht es um Argumente.
3. In der Logik geht es um gültige Schlüsse.
4. Die Logik behandelt formale Sprachen, die im Vergleich zu natürlichen Sprachen vereinfacht und in vielerlei Hinsicht idealisiert sind.
5. Die Aussagenlogik behandelt Junktoren, die Sätze verbinden; die Prädikatenlogik behandelt daneben auch Quantoren, Relationen und Funktionen.
6. Die Syntax beschreibt die Form von Ausdrücken, die Semantik ihre Bedeutungen und die Pragmatik ihren Gebrauch.
7. Die Formalisierung von Argumenten ist eine Kunst.
8. Argumente sind nicht wahr oder falsch, sondern gültig oder ungültig.
9. Ein Schluss ist gültig dann und genau dann wenn (gdw.) es unmöglich ist, dass seine Prämissen wahr sind und seine Konklusion falsch ist.
10. Wir müssen Gebrauch (use) und Erwähnung (mention) von Wörtern unterscheiden; Anführungs- und Schlusszeichen sind dann zu setzen, wenn wir von den Wörtern reden wollen und nicht von dem, wofür sie stehen.

Formalisierung

Betrachten wir folgendes, in einer natürlichen Sprache formuliertes Argument:

Wenn ich Logik studiere, werde ich glücklich und weise sein.
Ich studiere Logik.
Also werde ich glücklich und weise sein.

Wenn wir die einfachen Sätze mit Buchstaben abkürzen, erhalten wir folgendes:

Wenn p, dann q.
p
Also, q.

Wir deuten folgendermassen an, dass aus den Prämissen auf die Konklusion geschlossen wird:

$$\begin{array}{l} \text{Wenn } p, \text{ dann } q. \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Schliesslich ersetzen wir das natürlichsprachliche "wenn..., dann $\cdots$" durch das Zeichen "$\rightarrow$" für die logische Relation der materialen Implikation:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Wir haben es hier mit einem in der Sprache der Aussagenlogik ausgedrückten Skelett eines natürlichsprachlichen Schlusses zu tun, das die gemeinsame Form all jener Argumente repräsentiert, die wir durch die Ersetzungen von "$\rightarrow$" durch "wenn ..., dann $\cdots$, vom Strich durch "Also, ...", und von "p" und "q" durch natürlichsprachliche Sätze erhalten.

Syntax und Semantik der Aussagenlogik

Wir definieren wie folgt die formale Sprache $\mathcal{L}$ der Aussagenlogik:

A1	atomare Sätze: "p", "q", "r", "s", "t" etc.
A2	logische Konstanten: "$\wedge$" (manchmal: "&") ("und"), "$\vee$" ("oder"), "$\neg$" (manchmal $\sim$) ("es ist nicht der Fall, dass"), "$\rightarrow$" (manchmal: "$\supset$") ("wenn ... dann $\cdots$") und "$\leftrightarrow$" (manchmal: "$\equiv$") ("... dann und genau dann, wenn $\cdots$", "... gdw. $\cdots$")
A3	Klammern: "(" und ")"

Wir definieren rekursiv den Begriff "wohlgeformte Formel von $\mathcal{L}$":

B1	Jeder atomare Satz ist eine wohlgeformte Formel.
B2	Wenn "ϕ" und "ψ" wohlgeformte Formeln sind, dann sind auch "$(\neg\phi)$", "$(\phi \wedge \psi)$", "$(\phi \vee \psi)$", "$(\phi \rightarrow \psi)$" und "$(\phi \leftrightarrow \psi)$" wohlgeformte Formeln.
B3	Es gibt keine anderen wohlgeformten Formeln.

Das Prinzip der *Wahrheitsfunktionalität* (für die Aussagenlogik) besagt, dass der Wahrheitswert eines komplexen Satzes von den Wahrheitswerten der in ihm enthaltenen atomaren Sätze und den sie verbindenden Junktoren (eindeutig) bestimmt ist.

Eine *Interpretation* eines Satzes ist die Zuweisung von Wahrheitswerten zu den in ihm enthaltenen atomaren Sätzen.

Der *Hauptjunktor* ist derjenige, der am letzten interpretiert werden muss.

Die Negation

Die Bedeutung von "$\neg$" ist durch folgende Wahrheitswerttabelle festgelegt:

p	$\neg p$
W	F
F	W

Die Eliminierung der doppelten Negation:

$$\frac{\neg\neg p}{p}\ \neg\mathbf{E} \tag{1}$$

Die *reductio ad absurdum* als Einführungsregeln:

$$\frac{p \rightarrow \bot}{\neg p}\ \neg\mathbf{I}* \tag{2}$$

Für einen beliebigen Satz "p" unterscheiden wir folgende Prinzipien:

Bivalenzprinzip	"p" ist entweder wahr oder falsch
Nichtwiderspruchsprinzip	es ist nicht der Fall, dass "p" *und* "$\neg p$" beide wahr sind
ausgeschlossenes Drittes	entweder "p" oder "$\neg p$" ist wahr

Graphisch:

wahr	falsch

Bivalenzprinzip	was nicht im linken Feld steht, steht im rechten, und vice versa
Nichtwiderspruchsprinzip	nie "p" ***und*** "$\neg p$" im gleichen Feld
ausgeschlossenes Drittes	links ist entweder "p" oder "$\neg p$"

Die Konjunktion

Die Einführungs- und Eliminierungsregeln ("introduction and elimination rules"):

$$\frac{p,\ q}{p \wedge q}\ \wedge\mathbf{I} \qquad \frac{p \wedge q}{p}\ \wedge\mathbf{E} \qquad \frac{p \wedge q}{q}\ \wedge\mathbf{E} \tag{3}$$

Die Wahrheitswerttabelle:

p	q	$p \wedge q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Die Disjunktion

Einführungs- und Eliminierungsregeln:

$$\frac{p}{p \vee q}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{q}{p \vee q}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{p \vee q,\ \neg p}{q}\ \vee\mathbf{E} \tag{4}$$

Die Wahrheitswerttabelle:

p	q	$p \vee q$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Die materiale Implikation

Die Eliminerungsregel (modus ponens):

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \end{array}}{q}\ \rightarrow\mathbf{E} \tag{5}$$

Die Wahrheitswerttabelle ("$p \rightarrow q$" ist äquivalent zu "$\neg p \vee q$"):

p	q	$p \rightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Die materiale Äquivalenz

Einführungs- und Eliminierungsregeln:

$$\frac{p \to q, q \to p}{p \leftrightarrow q} \leftrightarrow \mathbf{I} \qquad \frac{p \leftrightarrow q}{p \to q} \leftrightarrow \mathbf{E} \qquad \frac{p \leftrightarrow q}{q \to p} \leftrightarrow \mathbf{E} \tag{6}$$

Die Wahrheitswerttabelle:

p	q	$p \leftrightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Wahrheitswerttabellen – erste Methode

Wir konstruieren die Wahrheitswerttabelle für "$\neg(\neg p \vee \neg q)$" wie folgt:

1. Erster Schritt:

p	q
W	W
W	F
F	W
F	F

2. Zweiter Schritt:

p	q	$\neg p$	$\neg q$
W	W	F	F
W	F	F	W
F	W	W	F
F	F	W	W

3. Dritter Schritt:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
W	W	F	F	F
W	F	F	W	W
F	W	W	F	W
F	F	W	W	W

4. Vierter Schritt:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$
W	W	F	F	F	**V**
W	F	F	W	W	**F**
F	W	W	F	W	**F**
F	F	W	W	W	**F**

Wahrheitswerttabellen – zweite Methode

1. Erster Schritt:

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
		W			W
		W			F
		F			W
		F			F

2. Zweiter Schritt:

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
	F	W		F	W
	F	W		W	F
	W	F		F	W
	W	F		W	F

3. Dritter Schritt:

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
	F	W	F	F	W
	F	W	W	W	F
	W	F	W	F	W
	W	F	W	W	F

4. Vierter Schritt:

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
V	F	W	F	F	W
F	F	W	W	W	F
F	W	F	W	F	W
F	W	F	W	W	F