Die axiomatische Methode

Einführungskurs Logik, Universität Bern, Frühlingssemester 2009

handout zur Sitzung vom 10.3.09

Philipp Keller
philipp.keller@unige.ch

Punkte vom letzten Kurs

1. Wir müssen verschiedene Sprachebenen unterscheiden. "Bedeutung", "Referenz", "Wahrheit" und "Gültigkeit" sind Ausdrücke der Metasprache; wir verwenden sie, um über die Ausdrücke einer (formalen oder natürlichen) Objektsprache zu reden.

2. Zwei Sätze stehen in der Beziehung der logischen Folgerung gdw. es nicht logisch möglich ist, dass der erste wahr und der zweite falsch ist; d.h. gdw. der Schluss vom ersten auf den zweiten logisch gültig ist.

3. Um die Allgemeinheit logischer Gesetze und Prinzipien auszudrücken, verwenden wir die griechischen Kleinbuchstaben "ϕ", "ψ", χ", "ξ" etc. als Abkürzungen für Namen beliebiger Sätze.

4. Um von beliebigen Sätzen einer bestimmten Form zu sprechen, verwenden wir die sog. "Quine corners". "$\ulcorner \phi \wedge \neg\psi \urcorner$" ist der Ausdruck, der mit Anführungszeichen beginnt, mit ϕ, den Zeichen für die Konjunktion und für die Negation und schliesslich ψ weitergeht und mit Schlusszeichen endet.

5. Ein Schluss, der ϕ als Prämisse und ψ als Konklusion hat, ist gültig gdw. die entsprechende Implikation $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ eine Tautologie ist.

6. Jeder Schluss auf eine Tautologie und aus einer Kontradiktion ist gültig.

7. Neben der Beziehung der logischen Folgerung (der sog. "Subalternation") unterscheiden wir als weitere metasprachliche Beziehungen zwischen Sätzen: die logische Äqivalenz (gleiche Wahrheitswerttabellen), die Kontradiktion (genau einer der Sätze ist wahr), die Kontrarietät (nicht beide zusammen wahr) und die Subkontrarietät (nicht beide zusammen falsch).

8. Die Beziehung der logischen Forderung hängt nicht von der Reihenfolge der Prämissen ab: sie ist monoton, transitiv und reflexiv.

9. Die de Morganschen Gesetze:

$$\begin{array}{lcl} \ulcorner \neg(\phi \wedge \psi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner \neg\phi \vee \neg\psi \urcorner \\ \ulcorner \neg(\phi \vee \psi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner \neg\phi \wedge \neg\psi \urcorner \end{array}$$

10. Die Distributivitätsgesetze:

$$\begin{array}{lcl} \ulcorner \phi \vee (\psi \wedge \chi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi) \urcorner \\ \ulcorner \phi \wedge (\psi \vee \chi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi) \urcorner \end{array}$$

(Syntaktische) Ableitbarkeit vs. (semantische) Folgerung

Drei Abstraktionsebenen:

natürliche Sprache	"Die Erde dreht sich"	Bedeutung	Wahrheit
Semantik	"p"	–	Wahrheit
Syntax	"p"	–	–

(semantische) Folgerung/Gültigkeit $\models$: "$\phi \models \psi$" bedeutet, dass ψ logisch aus ϕ folgt, d.h. nicht falsch sein kann, wenn ϕ wahr ist. $\models$ ist eine semantische Beziehung, sie hat mit der Wahrheit ihrer Relata zu tun.

(syntaktische) Ableitbarkeit $\vdash$: "$\phi \vdash \psi$" bedeutet, dass wir die in ϕ enthaltenen Symbole gemäss rein formalen (oder sog. "strukturellen") Regeln so manipulieren können, dass wir daraus ψ erhalten. ψ ist aus ϕ ableitbar gdw. wenn wir die Schlussregeln so auf ϕ und die Axiome anwenden können, dass wir daraus ψ erhalten. $\vdash$ ist eine rein syntaktische Beziehung: ob zwei Sätze in dieser Beziehung der Ableitbarkeit stehen, hat allein mir ihrer syntaktischen Form zu tun.

Die Syntax der Sprache $\mathcal{L}$ der Aussagenlogik

Definition 1. *Das Alphabet der formalen Sprache $\mathcal{L}$ der klassischen Aussagenlogik besteht aus folgenden Zeichen:*

- *den einfachen (atomaren) Sätzen "p_0", "p_1", "p_2" ... (abzählbar unendlich viele)*
- *den aussagenlogischen Junktoren "$\neg \ldots$" ("es ist nicht der Fall, dass"), "$\ldots \wedge \cdots$" ("und"), "$\ldots \vee \cdots$" ("oder"), "$\ldots \rightarrow \cdots$" ("wenn-dann") und "$\ldots \leftrightarrow \cdots$" ("gdw.")*
- *Klammern und Kommata*

Definition 2. *Eine wohlgeformte Formel der Sprache $\mathcal{L}$ ist entweder:*

- *ein atomarer Satz "p_i" ($i \in \mathbb{N}$); oder*
- *von der Form $\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$, wobei ϕ eine wohlgeformte Formel ist; oder*
- *von der Form $\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \vee \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ oder $\ulcorner(\phi \leftrightarrow \psi)\urcorner$, wobei ϕ und ψ wohlgeformte Formeln sind.*

Definition 3. *Eine Theorie* Th *ist eine (endliche oder unendliche) Menge wohlgeformter Formeln.*

Der Shefferstrich

Die Bedeutung des Shefferstrichs ("nicht beide") ist durch folgende Wahrheitswerttabelle festgelegt:

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi\vert\psi\urcorner$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	W

Alle anderen aussagenlogischen Junktoren können allein mit dem Shefferstrich definiert werden:

$$\begin{aligned}
\ulcorner\neg\phi\urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner\phi|\phi\urcorner \\
\ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner(\phi|\psi)|(\phi|\psi)\urcorner \\
\ulcorner\phi\vee\psi\urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner((\phi|\phi)|(\psi|\psi))\urcorner \\
\ulcorner\phi\rightarrow\psi\urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner(\phi|(\psi|\psi))\urcorner \\
\ulcorner\phi\leftrightarrow\psi\urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner((\phi|(\psi|\psi))\;|\;((\phi|\phi)|\psi))\;\;|\;\;(\psi|(\phi|\phi))\;|\;((\psi|\psi)|\phi)\urcorner
\end{aligned}$$

Ein kleines bisschen Geschichte

Gottlob Frege (*Begriffsschrift*, 1879) war der erste, der die klassische Aussagen- und Prädikatenlogik axiomatisiert hat. Allerdings wurden seine Arbeiten bis zur Publikation des ersten Bandes der *Principia Mathematica* von Bertrand Russell und Alfred North Whitehead (1910) kaum beachtet. Russell entdeckte 1902, dass Freges System (*Grundgesetze der Arithmetik*, 1893 und 1903) inkonsistent ist (weil es die Bildung der Menge $a = \{x \mid x \notin x\}$ zulässt).

Diese Revolution in der Logik ermöglichte wichtige Fortschritte in der Mathematik (die Axiomatisierung der Arithmetik durch Dedekind und Peano, die Axiomatisierung der Geometrie durch Hilbert und Bernays) und führte zur Gründung neuer Teildisziplinen, der Metamathematik (die formale Untersuchung formaler Systeme; Hilbert), der Modelltheorie (formalen Semantik; Tarski) und der Mengenlehre (Cantor, Zermelo).

Die Mengenlehre wurde durch Ernst Zermelo erstmals axiomatisiert. Das wichtigste metamathematische Resultat war der Beweis der Unvollständigkeit der Arithmetik durch Gödel in 1931. Das wichtigste modelltheoretische Resultat die nicht-widersprüchliche Definition von "x ist wahr" durch Alfred Tarski in 1933.

In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts waren die wichtigsten Strömungen in der Philosophie der Mathematik: Freges Logizismus (die Mathematik als Teil der Logik), Hilberts Formalismus (die Mathematik als rein syntaktische Manipulation von Formeln) und der Intuitionismus von Brouwer und Heyting (intuitionistische Logik ohne das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten).

Kalküle und Beweise

Definition 4. *Ein Kalkül ist eine Menge wohlgeformter Formeln (der sog."Theoreme"), die durch eine Menge sog."Axiome" und den Schlussregeln folgendermassen festgelegt ist:*

1. *Jedes Axiom ist ein Theorem.*
2. *Das Resultat der Anwendung einer Schlussregel auf Theoreme ist auch ein Theorem.*
3. *Es gibt keine anderen Theoreme.*

"$\vdash$" steht für die Beziehung der (syntaktischen) *Ableitbarkeit*: "$\mathsf{HK} \vdash \phi$" bedeutet, dass ϕ aus den Axiomen des Kalküls HK mittels der Schlussregeln von HK abgeleitet werden kann – dass es in HK einen Beweis gibt, der ϕ als Konklusion hat.

Eine Beweis ist eine Abfolge wohlgeformter Formeln, die eine Reihe rein formaler / syntaktischer Bedingungen erfüllt:

Definition 5. *Ein Beweis, in einem Kalkül* HK *und ausgehend von einer Theorie* Th*, ist eine endliche Sequenz von Sätzen $\langle \phi_1, \ldots \phi_n \rangle$, in der jeder Satz aus den vorhergehenden ableitbar ist; d.h. es gilt für alle i, $1 \leq i \leq n$:* $\mathsf{HK} \cup \mathsf{Th} \cup \{\phi_1, \ldots, \phi_{i-1}\} \vdash \phi_i$.

Wir definieren die Beziehung der Ableitbarkeit $\vdash$ wie folgt:

Definition 6. *Wenn* HK *ein Kalkül,* Th *eine Theorie und ϕ eine wohlgeformte Formel ist, definieren wir "$\mathsf{HK} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$" (für jede beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$) durch mathematische Induktion über die natürlichen Zahlen:*

1. *Wenn ϕ ein Axiom von* HK *ist, dann* $\mathsf{HK} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *für jedes $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Wenn ϕ ein Element von* Th *ist, dann* $\mathsf{HK} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *für jedes $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Wenn* $\mathsf{HK} \cup \mathsf{Th} \vdash^{m_i} \psi_i$ *(mit $m_i < n$) für jede der Prämissen ψ_i einer Schlussregel des Kalküls* HK*, dann* $\mathsf{HK} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *für die Konklusion ϕ dieser Schlussregel.*

Ein axiomatischer Kalkül für die klassische Aussagenlogik

Definition 7. *Der Kalkül* HK *hat als Axiome alle wohlgeformte Formeln der Sprache* $\mathcal{L}$, *die die Form eines der folgenden Axiomenschemata haben:*

$\mathbf{H_1}$	$\ulcorner\phi \to \phi\urcorner$	*Reflexivität*
$\mathbf{H_2}$	$\ulcorner(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))\urcorner$	*Transitivität*
$\mathbf{H_3}$	$\ulcorner((\phi \wedge \psi) \to \chi) \to (\phi \to (\psi \to \chi))\urcorner$	*'Antecedens konditionalisieren'*
$\mathbf{H_4}$	$\ulcorner(\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \wedge \psi) \to \chi)\urcorner$	*'Antecedens erweitern'*
$\mathbf{H_5}$	$\ulcorner\phi \to (\phi \vee \psi)\urcorner$	*'"$\vee$" rechts einführen'*
$\mathbf{H_6}$	$\ulcorner\psi \to (\phi \vee \psi)\urcorner$	*'"$\vee$" links einführen'*
$\mathbf{H_7}$	$\ulcorner(\phi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\phi \vee \psi) \to \chi))\urcorner$	*'Alternative'*
$\mathbf{H_8}$	$\ulcorner(\phi \wedge \psi) \to \phi\urcorner$	*'"$\wedge$" rechts eliminieren'*
$\mathbf{H_9}$	$\ulcorner(\phi \wedge \psi) \to \psi\urcorner$	*'"$\wedge$" links eliminieren'*
$\mathbf{H_{10}}$	$\ulcorner(\phi \to \psi) \to ((\phi \to \chi) \to (\phi \to (\psi \wedge \chi)))\urcorner$	*'"$\wedge$" einführen'*
$\mathbf{H_{11}}$	$\ulcorner(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)\urcorner$	*Kontraposition*
$\mathbf{H_{12}}$	$\ulcorner\phi \to (\neg\phi \to \psi)\urcorner$	*ex falso quodlibet*
$\mathbf{H_{13}}$	$\ulcorner(\phi \to (\phi \wedge \neg\phi)) \to \neg\phi\urcorner$	*reductio ad absurdum*
$\mathbf{H_{14}}$	$\ulcorner((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)) \to (\phi \leftrightarrow \psi)\urcorner$	*'"$\leftrightarrow$" einführen'*
$\mathbf{H_{15}}$	$\ulcorner(\phi \leftrightarrow \psi) \to ((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi))\urcorner$	*'"$\leftrightarrow$" eliminieren'*
$\mathbf{H_{16}}$	$\ulcorner\phi \vee \neg\phi\urcorner$	*Tautologie*

Die einzige Schlussregel von HK *ist der Modus Ponens* MP: $\dfrac{\phi, \ulcorner\phi \to \psi\urcorner}{\psi}$.

Verschiedene Axiomatisierungen der Aussagenlogik unterscheiden sich in der Wahl der Axiome. Jean Nicod (1917–1920) hat gezeigt, dass sie sich sogar mit bloss einem axiomatisieren lässt:

$$\ulcorner(\phi|(\psi|\chi)) \quad | \quad ((\xi|(\xi|\xi)) \mid ((\rho|\psi) \mid ((\phi|\rho)|(\phi|\rho))))\urcorner$$

Beweise im Kalkül HK

Wir beweisen wie folgt, dass "$(p \vee q) \to (q \vee p)$" ein Theorem von HK ist:

(1)	HK $\vdash p \to (q \vee p)$	$\mathbf{H_6}$
(2)	HK $\vdash q \to (q \vee p)$	$\mathbf{H_5}$
(3)	HK $\vdash (p \to (q \vee p)) \to ((q \to (q \vee p)) \to ((p \vee q) \to (q \vee p)))$	$\mathbf{H_7}$
(4)	HK $\vdash (q \to (q \vee p)) \to ((p \vee q) \to (q \vee p))$	(MP) aus (1) und (3)
(5)	HK $\vdash (p \vee q) \to (q \vee p)$	(MP) aus (2) und (4)

Wir nummerieren die Zeilen des Beweises in der linken Spalte, um später darauf Bezug nehmen zu können. In der rechten Spalte geben wir an, welches Axiomenschema durch die Formel instantiiert wird bzw. aus welchen Zeilen die Formeln mittels welcher Schlussregel ableitbar ist. In der dritten Zeile haben wir bspw. χ in $\mathbf{H_7}$ mit "$q \vee p$" ersetzt und dadurch die Instantiierung "$(p \to (q \vee p)) \to ((q \to (q \vee p)) \to ((p \vee q) \to (q \vee p)))$" von $\mathbf{H_7}$ erhalten.

Die Hauptschwierigkeit von Beweisen im Kalkül HK liegt darin, die geeigneten Instantiierungen in den Axiomenschemata von HK zu finden, die dann die Ableitung der gewünschten Konklusion mittels MP zulassen. Der Beweis von "$(\neg p \vee q) \to (p \to q)$" ist schon etwas länger:

(1)	$\mathsf{HK} \vdash p \to (\neg p \to q)$	$\mathbf{H_{12}}$
(2)	$\mathsf{HK} \vdash (p \to (\neg p \to q)) \to ((p \wedge \neg p) \to q)$	$\mathbf{H_4}$
(3)	$\mathsf{HK} \vdash (p \wedge \neg p) \to q$	(MP) aus (1) und (2)
(4)	$\mathsf{HK} \vdash (\neg p \wedge p) \to p$	$\mathbf{H_9}$
(5)	$\mathsf{HK} \vdash (\neg p \wedge p) \to \neg p$	$\mathbf{H_8}$
(6)	$\mathsf{HK} \vdash ((\neg p \wedge p) \to p) \to (((\neg p \wedge p) \to \neg p) \to ((\neg p \wedge p) \to (p \wedge \neg p)))$	$\mathbf{H_{10}}$
(7)	$\mathsf{HK} \vdash ((\neg p \wedge p) \to \neg p) \to ((\neg p \wedge p) \to (p \wedge \neg p))$	(MP) aus (4) und (6)
(8)	$\mathsf{HK} \vdash (\neg p \wedge p) \to (p \wedge \neg p)$	(MP) aus (5) und (7)
(9)	$\mathsf{HK} \vdash ((\neg p \wedge p) \to (p \wedge \neg p)) \to (((p \wedge \neg p) \to q) \to ((\neg p \wedge p) \to q))$	$\mathbf{H_2}$
(10)	$\mathsf{HK} \vdash ((p \wedge \neg p) \to q) \to ((\neg p \wedge p) \to q))$	(MP) aus (8) und (9)
(11)	$\mathsf{HK} \vdash (\neg p \wedge p) \to q)$	(MP) aus (3) und (10)
(12)	$\mathsf{HK} \vdash (\neg p \wedge p) \to q) \to (\neg p \to (p \to q))$	$\mathbf{H_3}$
(13)	$\mathsf{HK} \vdash \neg p \to (p \to q)$	(MP) aus (11) und (12)
(14)	$\mathsf{HK} \vdash ((q \wedge p) \to q) \to (q \to (p \to q))$	$\mathbf{H_3}$
(15)	$\mathsf{HK} \vdash (q \wedge p) \to q$	$\mathbf{H_8}$
(16)	$\mathsf{HK} \vdash q \to (p \to q)$	(MP) aus (14) und (15)
(17)	$\mathsf{HK} \vdash (\neg p \to (p \to q)) \to ((q \to (p \to q)) \to ((\neg p \vee q) \to (p \to q)))$	$\mathbf{H_7}$
(18)	$\mathsf{HK} \vdash (q \to (p \to q)) \to ((\neg p \vee q) \to (p \to q))$	(MP) aus (13) und (17)
(19)	$\mathsf{HK} \vdash (\neg p \vee q) \to (p \to q)$	(MP) aus (16) und (18)

Beweise über den Kalkül HK

Theorem 8. *Seien ϕ, ψ, χ wohlgeformte Formeln von $\mathcal{L}$:*

$$\mathsf{HK} \vdash \phi \to \psi \quad \& \quad \mathsf{HK} \vdash \psi \to \chi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{HK} \vdash \phi \to \chi \tag{1}$$

[1]

$$\mathsf{HK} \vdash \phi \quad \& \quad \mathsf{HK} \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{HK} \vdash \phi \wedge \psi \tag{2}$$

Beweis (1): Der Antecedens von (1) bedeutet, dass es Zahlen n_1 und n_2 gibt so, dass

$$\mathsf{HK} \vdash^{n_1} \phi \to \psi \qquad \mathsf{HK} \vdash^{n_2} \psi \to \chi$$

Eine der beiden Zahlen n_1 und n_2 ist nicht grösser als die andere: nehmen wir an, dass $n_2 \leq n_1$. Wir müssen zeigen, dass es eine Zahl n_3 gibt, so dass

$$\mathsf{HK} \vdash^{n_3} \phi \to \chi$$

Aufgrund von $\mathbf{H_2}$ wissen wir, dass

$$\mathsf{HK} \vdash^{0} (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$$

wir können deshalb mit (MP) aus "$\mathsf{HK} \vdash^{n_1} \phi \to \psi$" ableiten, dass

$$\mathsf{HK} \vdash^{n_1+1} (\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi)$$

Mit (MP) können wir hieraus und aus "$\mathsf{HK} \vdash^{n_2} \psi \to \chi$" das Konsequens von (1) ableiten:

$$\mathsf{HK} \vdash^{n_1+2} \phi \to \chi$$

[1] Wir verwenden "&" und "$\Longrightarrow$", weil der zu beweisende Satz einer der Metasprache ist.

(2): Der Antecedens von (2), "$\mathsf{HK} \vdash \phi$ & $\mathsf{HK} \vdash \psi$", sagt aus, dass es Zahlen n_1 und n_2 gibt so, dass

$$\mathsf{HK} \vdash^{n_1} \phi \qquad \mathsf{HK} \vdash^{n_2} \psi$$

Nehmen wir an, dass $n_2 \leq n_1$. Wir müssen zeigen, dass es eine Zahl n_3 gibt, für die gilt:

$$\mathsf{HK} \vdash^{n_3} \phi \wedge \psi$$

Mit $\mathbf{H_1}$ wissen wir, dass

$$\mathsf{HK} \vdash^{0} (\phi \wedge \psi) \to (\phi \wedge \psi)$$

Mit $\mathbf{H_3}$ wissen wir ebenfalls:

$$\mathsf{HK} \vdash^{0} ((\phi \wedge \psi) \to (\phi \wedge \psi)) \to (\phi \to (\psi \to (\phi \wedge \psi)))$$

Durch die Anwendung von (MP) auf diese beiden Theoreme erhalten wir:

$$\mathsf{HK} \vdash^{1} \phi \to (\psi \to (\phi \wedge \psi))$$

Daraus und aus "$\mathsf{HK} \vdash^{n_1} \phi$" schliessen wir mit (MP):

$$\mathsf{HK} \vdash^{n_1+1} \psi \to (\phi \wedge \psi)$$

Daraus und aus "$\mathsf{HK} \vdash^{n_2} \psi$" schliessen wir mit (MP):

$$\mathsf{HK} \vdash^{n_1+2} \phi \wedge \psi$$

□

Literatur

Frege, Gottlob, 1879. *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Halle a.S.: Louis Nebert

Frege, Gottlob, 1893. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, volume I. Jena: Hermann Pohle.

Frege, Gottlob, 1903. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, volume II. Jena: Hermann Pohle.

Gödel, Kurt, 1931. "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I". *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38: 173–198.

Nicod, Jean, 1917–1920. "A Reduction in the Number of Primitive Propositions of Logic". *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 19: 32–44

Russell, Bertrand Arthur William et Whitehead, Alfred North, 1910. *Principia mathematica.* Cambridge: Cambridge University Press. 3 volumes, 1910, 1912, 1913, 2^{nd} ed. 1925, 1927.

Tarski, Alfred, 1930. "O pojęciu prawdy w odniesieniu do sformalizowanych nauk dedukcyjnych". *Ruch Filozoficzny* 12: 210–211

Tarski, Alfred, 1935. "Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen". *Studia Philosophica* 1: 261–405. Translation of **?**

Zermelo, Ernst, 1908. "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I". *Mathematische Annalen* 65: 261–181. Translated by Stefan Bauer-Mengelberg in **?**: 199–215