Die Baummethode

Einführungskurs Logik, Universität Bern, Frühlingssemester 2009

handout zur Sitzung vom 17.3.09

Philipp Keller
philipp.keller@unige.ch

Punkte vom letzten Kurs

1. Neben der semantischen Methode der Wahrheitswerttabellen gibt es auch eine rein syntaktische Methode, die nicht nur von den Bedeutungen der Sätze sondern auch von ihren Wahrheitswerten abstrahiert.
2. Die Syntax der formalen Sprache $\mathcal{L}$ der klassischen Aussagenlogik lässt sich streng formal definieren.
3. Alle Junktoren der Aussagenlogik lassen sich durch einen, den Shefferstrich, definieren.
4. Die moderne Aussagenlogik verdanken wir den Arbeiten Gottlob Freges (*Begriffsschrift*, 1879) und denen von Russell und Whitehead (*Principia Mathematica*, 1910).
5. Die Revolution in der Logik hat in der Mathematik entscheidende Fortschritte ermöglicht und ihr neue Teildisziplinen hinzugefügt (Metamathematik, Modelltheorie, Mengenlehre).
6. In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts waren die drei wichtigsten Strömungen der Philosophie der Mathematik der Logizismus Freges, der Formalismus Hilberts und der Intuitionismus Brouwers und Heytings.
7. Ein Kalkül besteht aus Axiomen und Schlussregeln, die die Ableitung von Theoremen aus den Axiomen ermöglichen.
8. Der Begriff eines (formalen) Beweises lässt sich rein syntaktisch definieren.
9. Die Aussagenlogik lässt sich auf verschiedene Arten axiomatisieren.
10. Wir müssen (objektsprachliche) Beweise in einem Kalkül von (metasprachlichen) Beweisen über ein Kalkül unterscheiden.

Die Semantik der klassischen Aussagenlogik

Definition 1 (atomare aussagenlogische Interpretation). *Eine atomare aussagenlogische Interpretation I^* ist eine Funktion, die jeder atomaren Formel "p_i", $i \in \mathbb{N}$, von $\mathcal{L}$ genau einen der beiden Wahrheitswerte* $\mathbf{w}$ *oder* $\mathbf{f}$ *zuweist:* $I^* : \{\text{"}p_i\text{"} \mid i \in \mathbb{N}\} \to \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$

Haben wir eine atomare aussagenlogische Interpretation I^* schon definiert, können wir auf ihrer Grundlage eine *aussagenlogische Interpretation* I (eine Funktion, die *jeder* wohlgeformten Formel von $\mathcal{L}$ genau einen Wahrheitswert zuweist: $I : \mathsf{Fml}(\mathcal{L}) \to \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$) wie folgt rekursiv definieren:

Definition 2 (aussagenlogische Interpretation). *Gegeben eine atomare aussagenlogische Interpretation I^*, definieren wir eine aussagenlogische Interpretation I (eine Funktion $I : \mathsf{Fml}(\mathcal{L}) \to \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$) wie folgt:*

I1 *Wenn ϕ ein atomarer Satz "p" ist, dann* $I(\phi) := I^*(\text{"}p\text{"})$

I2 $$I(\neg\phi) := \begin{cases} \mathbf{w} & \text{wenn } I(\phi) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & \text{wenn } I(\phi) = \mathbf{w} \end{cases}$$

I3 $$I(\phi \wedge \psi) := \begin{cases} \mathbf{w} & \text{wenn } I(\phi) = \mathbf{w} \text{ und } I(\psi) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f} & \text{wenn } I(\phi) = \mathbf{f} \text{ oder } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$$

I4 $$I(\phi \vee \psi) := \begin{cases} \mathbf{w} & \text{wenn } I(\phi) = \mathbf{w} \text{ oder } I(\psi) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f} & \text{wenn } I(\phi) = \mathbf{f} \text{ und } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$$

I5 $I(\phi \rightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{w} & \text{wenn } I(\phi) = \mathbf{f} \text{ oder } I(\psi) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f} & \text{wenn } I(\phi) = \mathbf{w} \text{ und } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I6 $I(\phi \leftrightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{w} & \text{wenn } I(\phi) = I(\psi) \\ \mathbf{f} & \text{wenn } I(\phi) \neq I(\psi) \end{cases}$

Definition 3. *Eine aussagenlogische Formel ϕ ist erfüllbar gdw. es mindestens eine Interpretation gibt, die sie wahr macht.*

Definition 4. *Eine aussagenlogische Formel ψ ist eine logische Folgerung aus einer aussagenlogischen Formel ϕ ("$\phi \models \psi$") gdw. jede Interpretation, die ϕ wahr macht, ψ ebenfalls wahr macht.*

Definition 5. *Eine aussagenlogische Formel ϕ ist eine Tautologie gdw. sie unter jeder Interpretation wahr ist.*

Definition 6. *Eine aussagenlogische Formel ϕ ist eine Kontradiktion gdw. sie unter keiner Interpretation wahr ist.*

Kurz zusammengefasst:

$$\begin{array}{rcl} \phi \text{ ist erfüllbar} & :\iff & \exists I\ (I(\phi) = \mathbf{w}) \\ \phi \text{ ist eine Tautologie} & :\iff & \forall I\ (I(\phi) = \mathbf{w}) \\ \phi \text{ ist eine Kontradiktion} & :\iff & \forall I\ (I(\phi) = \mathbf{f}) \\ \phi \text{ ist eine logische Folgerung aus } \psi & :\iff & \forall I\ (I(\phi) = \mathbf{w} \Rightarrow I(\psi) = \mathbf{w}) \end{array}$$

ϕ ist eine logische Folgerung aus einer Theorie Th gdw. $\mathsf{Th} \cup \{\neg\phi\}$ unerfüllbar ist. In genau diesem Fall gibt es nämlich keine Interpretation, die alle Formeln in Th wahr und ϕ falsch macht.

Die Beziehungen zwischen Folgerung $\models$ und Ableitbarkeit $\vdash$

Wir unterscheiden:

Korrektheit: HK ist korrekt: jedes Theorem ist eine Tautologie.

Vollständigkeit: HK ist vollständig: jedes Theorem ist eine Tautologie.

Zusammen ergibt sich:

Theorem 7 (Adäquatheit). *Sei Th eine Theorie und ϕ eine aussagenlogische Formel:*

$$\mathsf{HK} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi \quad \iff \quad \mathsf{HK} \cup \mathsf{Th} \models \phi$$

'$\Longrightarrow$' (Korrektheit): Der Kalkül HK beweist nicht zuviel, d.h. nicht mehr als die logischen Wahrheiten.

'$\Longleftarrow$' (Vollständigkeit): Der Kalkül HK beweist genug, d.h. alle logischen Wahrheiten.

Wir definieren den *syntaktischen* Begriff der Konsistenz wie folgt:

Definition 8. *Eine aussagenlogische Formel ϕ ist konsistent gdw. es nicht der Fall ist, dass der deduktive Abschluss von ϕ einen Satz ψ und seine Negation $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ enthält.*

Wir haben folgende Korrespondenzen:

$$\begin{array}{rcl} \phi \text{ folgt aus } \mathsf{Th} & \Rightarrow & \phi \text{ ist ableitbar aus } \mathsf{Th} \\ \phi \text{ ist erfüllbar} & \Rightarrow & \phi \text{ ist konsistent} \\ \phi \text{ ist eine Kontradiktion} & \Rightarrow & \phi \text{ ist inkonsistent} \\ \phi \text{ ist eine Tautologie} & \Rightarrow & \ulcorner\neg\phi\urcorner \text{ ist inkonsistent} \\ \ulcorner\phi, \text{ also } \psi\urcorner \text{ ist ein gültiger Schluss} & \Rightarrow & \ulcorner\phi \wedge \neg\psi\urcorner \text{ ist inkonsistent} \end{array}$$

Das Wesen der Logik

Eine Logik kann aufgefasst werden als

- eine Systematisierung logischer Wahrheiten (Theoremen bzw. Tautologien);
- eine Systematisierung gültiger Schlüsse.

Innerhalb des zweiten Paradigma wurden zwei syntaktische Techniken entwickelt:

- die Baummethode (die Methode der 'analytischen Tableaux');
- die Methode der natürlichen Deduktion.

Ihr wesentlicher Vorteil besteht darin, dass sie uns das Suchen von Substitutionsinstanzen der Axiome ersparen.

Die Baummethode

Die Baummethode ist eine semantisch motivierte syntaktische Beweismethode, die auf den niederländischen Logiker Evert Willem **?** zurückgeht und deshalb auch als Methode der "Beth Tableaux" oder "analytischen Tableaux" bezeichnet wird.

F1 Wenn eine Negation $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ falsch ist, ist ϕ wahr.

F2 Wenn eine Konjunktion $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ wahr ist, sind ϕ und ψ wahr.

F3 Wenn eine Konjunktion $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ falsch ist, ist ϕ oder ψ falsch.

F4 Wenn eine Disjunktion $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$ wahr ist, ist ϕ oder ψ wahr.

F5 Wenn eine Disjunktion $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$ falsch ist, sind ϕ und ψ falsch.

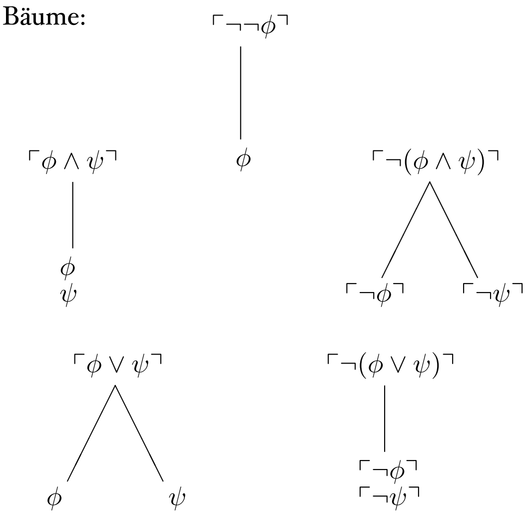
F6 Wenn eine Implikation $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ wahr ist, ist ϕ falsch oder ψ wahr.

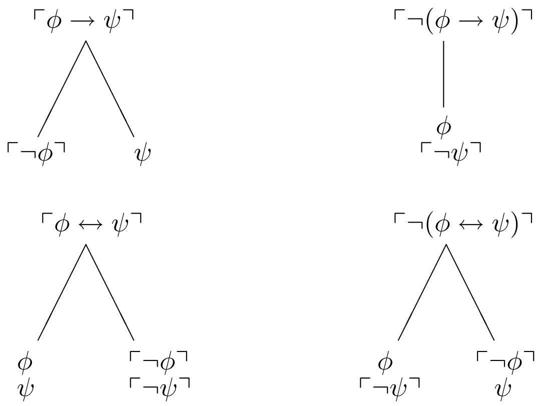
F7 Wenn eine Implikation $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ falsch ist, ist ϕ wahr und ψ falsch.

F8 Wenn eine Äquivalenz $\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$ wahr ist, sind entweder ϕ und ψ wahr oder ϕ und ψ sind falsch.

F9 Wenn eine Äquivalenz $\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$ falsch ist, ist entweder ϕ wahr und ψ ist falsch oder ϕ ist falsch und ψ ist wahr.

Die Konstruktionsregeln der Bäume:





Ein Zweig schliesst sich gdw. wenn er eine Formel und ihre Negation enthält. Sobald wir eine Konstruktionsregel auf eine Formel angewendet haben, markieren wir sie durch das Zeichen “✓”. Ein Baum ist voll entwickelt, wenn jede komplexe Formel mit “✓” markiert ist. Nach jeder Anwendung einer Konstruktionsregel überprüfen wir, ob wir einen Zweig schliessen können. Es empfiehlt sich, zuerst diejenigen Regeln anzuwenden, die den Baum nicht weiter verzweigen.

Semantische Interpretation der Baummethode:[1]

1. Ein voll entwickelter Zweig entspricht einem ‘Wahrheitsweg’: er zeigt an, mit welcher Interpretation ihrer einfachen Bestandteile die Formel am Ursprung des Baumes wahr wird.
2. Wir können uns einen Zweig als ‘Argumentationsstrategie’ denken, mit der wir die am Ursprung stehende Formel verteidigen könnten.
3. Schliessen sich alle Zweige, ist es logisch unmöglich, dass die am Ursprung stehende Formel wahr ist: sie ist eine Kontradiktion. Das bedeutet, dass ihre Negation eine Tautologie ist.
4. Die Baummethode ist damit eine Methode der *reductio ad absurdum*: wir zeigen damit, dass eine Formel logisch falsch bzw. ‘unverteidigbar’ ist.

Um mittels der Baummethode eine Formel zu beweisen, ***bilden wir ihre Negation***, entwickeln den Baum dieser Negation und zeigen, dass sich alle Zweige schliessen.

Sei ϕ eine beliebige Formel:

1. Schliessen sich alle Zweige des Baumes für $\ulcorner \neg\phi \urcorner$, ist ϕ eine Tautologie.
2. Bleibt ein Zweig des voll entwickelten Baumes für $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ offen, haben wir ein Modell für $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ (eine Interpretation der einfachen Bestandteile von ϕ, die $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ wahr macht); dann ist ϕ keine Tautologie.

Schliesst sich der Baum, ist die Ursprungsformel unerfüllbar; bleibt er offen, ist sie erfüllbar.

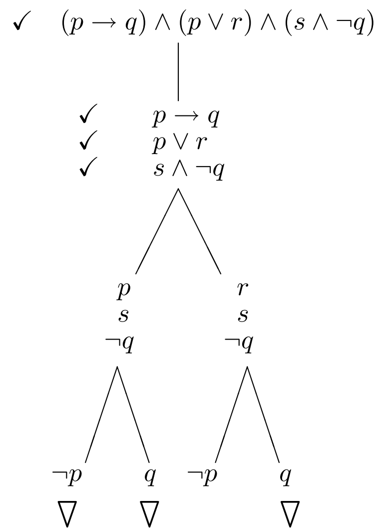
Wir zeigen, dass eine Formel ein Theorem des Baummethoden-Kalküls ist, indem wir den Baum **für ihre Negation** entwickeln und zeigen, dass sich alle Zweige schliessen.

Wir zeigen, dass eine Formel *kein* Theorem des Baummethoden-Kalküls ist, indem wir den Baum **für ihre Negation** entwickeln und zeigen, dass (mindestens) ein Zweig offenbleibt.

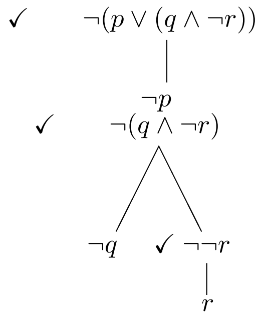
Einige Beispiele

Wir wollen ein Modell für “$(p \rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge (s \wedge \neg q)$”, d.h. feststellen, ob die Negation davon ein Theorem ist. Dazu müssen wir zuerst den Baum voll entwickeln und dann darin einen Zweig finden, der offen bleibt.

[1] Wir setzen hier die Adäquatheit des Kalküls voraus, die wir erst in zwei Wochen beweisen werden.



Wir wollen herausfinden, unter welchen Bedingungen “$\neg(p \vee (q \wedge \neg r))$” wahr ist:



Zwei Beweise mit der Baummethode: wir zeigen, dass ‘$\neg(p \wedge q) \vee (p \wedge q)$” ein Theorem ist und dass “$p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$” wahr ist, was wegen der Korrektheit auch heisst, dass “$p \rightarrow r$” aus “$p \rightarrow q$” und “$q \rightarrow r$” logisch folgt, d.h. dass der Schluss aus letzteren auf ersteres logisch gültig ist.