Die Syllogistik

Einführungskurs Logik, Universität Bern, Frühlingssemester 2009

handout zur Sitzung vom 7.4.09

Philipp Keller
philipp.keller@unige.ch

Punkte vom letzten Kurs

1. Ein Axiomensystem und eine Theorie sind konsistent, wenn sich aus ihnen kein Widerspruch ableiten lässt. d.h. wenn es nicht der Fall ist, dass sie sowohl einen Satz ϕ wie auch $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ beweisen.
2. Ein Kalkül und eine syntaktische Beweismethode sind korrekt, wenn jedes Theorem eine Tautologie ist.
3. Ein Kalkül und eine syntaktische Beweismethode sind vollständig, wenn jede Tautologie ein Theorem ist.
4. Der axiomatische Kalkül HK, die Baummethode und die Methode der natürlichen Deduktion sind korrekt und vollständig.
5. Wir haben deshalb folgende Entsprechungen:

ϕ folgt (semantisch / logisch) aus Th	$\Longleftrightarrow$	ϕ ist ableitbar aus Th
ϕ ist erfüllbar	$\Longleftrightarrow$	ϕ ist konsistent
ϕ ist eine Kontradiktion	$\Longleftrightarrow$	ϕ ist inkonsistent
ϕ ist eine Tautologie	$\Longleftrightarrow$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$ ist inkonsistent
$\ulcorner\phi$ also $\psi\urcorner$ ist ein gültiges Argument	$\Longleftrightarrow$	$\ulcorner\phi \wedge \neg\psi\urcorner$ ist inkonsistent

6. Wir können bezüglich unserer syntaktischen Methoden ein Deduktionstheorem beweisen: ψ lässt sich aus ϕ ableiten gdw. die Implikation $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ bewiesen werden kann. Das Deduktionstheorem versichert uns der Gültigkeit der Regel des konditionalen Beweises KB.
7. Die Aussagenlogik ist entscheidbar: Es gibt ein mechanisches Verfahren um festzustellen, ob ein gegebener Satz eine Tautologie ist oder nicht.
8. Jede Formel der Aussagenlogik ist logisch äquivalent zu Formeln in negativer, konjunktiver und disjunktiver Normalform. Die disjunktive Normalform einer Formel 'kodiert' ihre Wahrheitswerttabelle: Jedes Disjunkt entspricht einer Zeile, in der die Formel den Wahrheitswert "V" erhält.
9. Die Aussagenlogik ist kompakt: Jede Konsequenz einer unendlichen Menge von Prämissen folgt bereits aus endlich vielen.
10. Die Kompaktheit der Aussagenlogik folgt aus dem sog. "Königs Lemma", das besagt, dass ein endlich verzweigter unendlicher Baum einen unendlich langen Zweig enthält.

Das logische Verhalten von Prädikaten

Betrachten wir folgende Schlüsse:

$$\frac{\text{Alle Menschen sind sterblich.} \quad \text{Alle Philosophen sind Menschen.}}{\text{Alle Philosophen sind sterblich.}} \tag{1}$$

$$\frac{\text{Kein Philosoph ist böse.} \quad \text{Einige Berner sind Philosophen.}}{\text{Einige Berner sind nicht böse.}} \tag{2}$$

$$\frac{\text{Kein Mensch ist vollkommen.} \quad \text{Alle Philosophen sind Menschen.}}{\text{Kein Philosoph ist vollkommen.}} \tag{3}$$

Wir bemerken, dass die Gültigkeit dieser Schlüsse nicht von den verwendeten Prädikaten abhängt:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Alle } H \text{ sind } M.\\ \text{Alle } P \text{ sind } H.\end{array}}{\text{Alle } P \text{ sind } M.} \tag{4}$$

Nicht nur ist folgender Schluss

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Alle Tiere sind böse.}\\ \text{Alle Pinguine sind Tiere.}\end{array}}{\text{Alle Pinguine sind böse.}} \tag{5}$$

eine Instanz von (4), sondern auch:

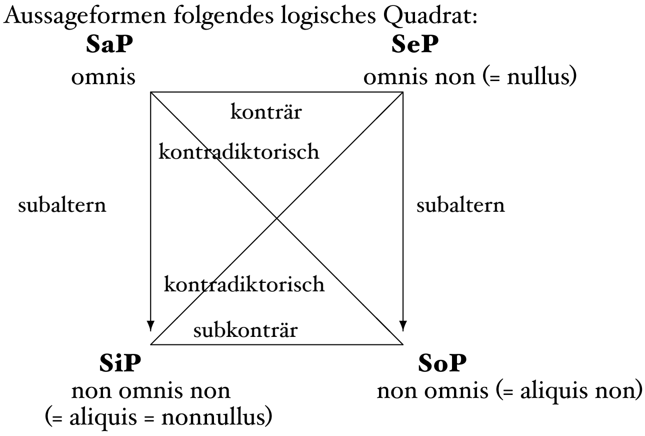
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Alle Freunde meines australischen Grossvaters sind entweder Känguruhs}\\ \text{oder beten den Mond an.}\\ \text{Alle Pinguine, die nicht rosarot sind und nicht bei Microsoft arbeiten, sind}\\ \text{Freunde meines australischen Grossvaters.}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Alle Pinguine, die nicht rosarot sind und nicht bei Microsoft arbeiten, sind entweder Känguruhs}\\ \text{oder beten den Mond an.}\end{array}}$$

Die Syllogistik

Die Syllogistik unterscheidet nicht (wie die moderne Prädikatenlogik) zwischen singulären Termen und Prädikaten, sondern zwischen Subjekt- und Prädikatsbegriffen, die sie zu vier sog. "kategorischen Aussageformen" kombiniert:

SaP	SiP	SeP	SoP
"alle S sind P"	"einige S sind P"	"Kein S ist P"	"Einige S sind nicht P"
"alle Philosophen sterblich"	"einige Menschen sind Philosophen"	"Kein Philosoph irrt immer."	"Einige Philosophen irren nie."
affirmatives Urteil allgemeines Urteil	affirmatives Urteil partikuläres Urteil	negatives Urteil allgemeines Urteil	negatives Urteil partikuläres Urteil

Wir haben für die kategorischen Aussageformen folgendes logisches Quadrat:



Die Implikation "SaP; also SiP" widerspiegelt die Voraussetzung der Syllogistik, dass jeder Subjekts- und Prädikatsterm nicht leer ist, d.h. auf mindestens ein Objekt zutrift.

Die gültigen Syllogismen

Die 'direkten' Schlüsse (mit einer einzigen Prämisse):

'Conversio simplex' $\quad \frac{\textbf{AiB}}{\textbf{BiA}} \qquad \frac{\textbf{AeB}}{\textbf{BeA}}$

‘Conversio per accidens’ $\qquad \dfrac{\mathbf{AaB}}{\mathbf{BiA}} \qquad \dfrac{\mathbf{AeB}}{\mathbf{BoA}}$

‘Conversio per contrapositionem’ $\qquad \dfrac{\mathbf{AaB}}{(\mathbf{non}-\mathbf{B})\mathbf{a}(\mathbf{non}-\mathbf{A})} \qquad \dfrac{\mathbf{AoB}}{(\mathbf{non}-\mathbf{B})\mathbf{o}(\mathbf{non}-\mathbf{A})}$

“Reduktion der Quantität” $\qquad \dfrac{\mathbf{AaB}}{\mathbf{AiB}} \qquad \dfrac{\mathbf{AeB}}{\mathbf{AoB}}$

‘obversio’ $\qquad \dfrac{\mathbf{AaB}}{\mathbf{Ae}(\mathbf{non}-\mathbf{B})} \qquad \dfrac{\mathbf{AiB}}{\mathbf{Ao}(\mathbf{non}-\mathbf{B})} \qquad \dfrac{\mathbf{AeB}}{\mathbf{Aa}(\mathbf{non}-\mathbf{B})} \qquad \dfrac{\mathbf{AoB}}{\mathbf{Ai}(\mathbf{non}-\mathbf{B})}$

Die vier Figuren der ‘indirekten’ Schlüsse:

	erste Figur	zweite Figur	dritte Figur	vierte Figur
praemissa maior	$M\ P$	$P\ M$	$M\ P$	$P\ M$
praemissa minor	$S\ M$	$S\ M$	$M\ S$	$M\ S$
conclusio	$S\ P$	$S\ P$	$S\ P$	$S\ P$

Von den 256 sog. “Modi” (64 pro Figur) sind nur 24 gültig. 19 davon werden “stark” genannt, die anderen fünf “schwach” (ein Modus ist schwach, wenn die Konklusion schwächer ist als es die Prämissen erzwingen). Für die erste Figur haben wir 4 starke Modi:

a-a-a “Barbara”	**e-a-e** “Celarent”
Alle Menschen sind sterblich. Alle Philosophen sind Menschen. Alle Philosophen sind sterblich.	Kein Mensch ist vollkommen. Alle Philosophen sind Menschen. Kein Philosoph ist vollkommen.

a-i-i “Darii”	**e-i-o** “Ferio”
Alle Eisbären sind weiss. Einige Bären sind Eisbären. Einige Bären sind weiss.	Kein Philosoph ist Kreationist. Einige Menschen sind Philosophen. Einige Menschen sind nicht Kreationisten.

Auch für die zweite Figur gibt es vier starke Modi:

e-a-e “Cesare”	**a-e-e** “Camestres”
Kein Säugetier ist ein Fisch. Alle Pinguine sind Fische. Kein Pinguin ist ein Säugetier.	Alle Pinguine sind Fische. Kein Säugetier ist ein Fisch. Kein Säugetier ist ein Pinguin.

e-i-o “Festino”	**a-o-o** “Baroco”
Kein Pinguin ist ein Säugetier. Einige Kängurus sind Säugetiere. Einige Kängurus sind keine Pinguine.	Alle Pinguine sind Fische. Einige Säugetiere sind eine Fische. Einige Säugetiere sind keine Pinguine.

Für die dritte Figur gibt es sechs starke Modi:

a-a-i “Darapti”	**e-a-o** “Felapton”
Alle Eisbären sind sterblich. Alle Eisbären sind Bären. Einige Bären sind sterblich.	Kein Eisbär ist Kreationist. Alle Eisbären sind Bären. Einige Bären sind nicht Kreationisten.

i-a-i “Disamis”	**a-i-i** “Datisi”
Einige Eisbären sind weiss. Alle Eisbären sind Bären. Einige Bären sind weiss.	Alle Kreationisten sind Amerikaner. Einige Kreationisten sind Philosophen. Einige Philosophen sind Amerikaner.

o-a-o “Bocardo”	**e-i-o** “Ferison”
Einige Kreationisten sind keine Philosophen. Alle Kreationisten sind Amerikaner. Einige Amerikaner sind keine Philosophen.	Kein Bär ist ein Kreationist. Einige Bären sind Philosophen. Einige Philosophen sind keine Kreationisten.

Für die vierte Figur gibt es fünf starke Modi:

a-a-i “Bamalip”	**a-e-e** “Calemes”
Alle Philosophen sind Menschen. Alle Menschen sind sterblich. Einige Sterbliche sind Philosophen.	Alle Pinguine sind Fische. Kein Fisch ist ein Säugetier. Kein Säugetier ist ein Pinguin.

i-a-i “Dimatis”	**e-a-o** “Fesapo”
Einige Hunde sind Dackel. Alle Dackel sind Säugetiere. Einige Säugetiere sind Dackel.	Kein Pinguin ist ein Geier. Alle Geier sind Vögel. Einige Vögel sind keine Pinguine.

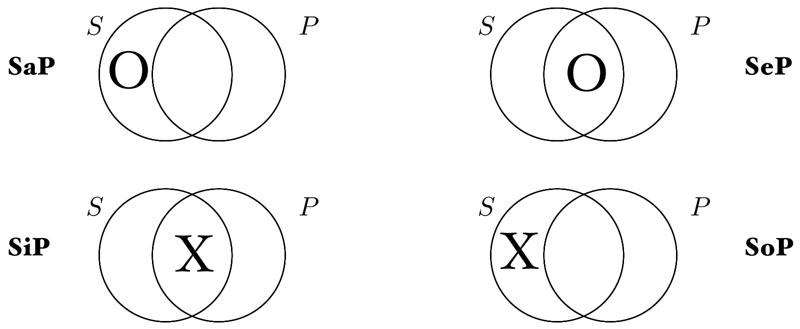
e-i-o “Fresison”
Kein Hund ist ein Vogel. Einige Vögel sind Geier. Einige Geier sind keine Hunde.

Die 19 starken Modi kann man sich durch mnemotechnische Reime einprägen:

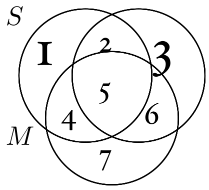
> Barbara, Celarent primae, Darii Ferioque.
> Cesare, Camestres, Festino, Baroco secundae.
> Tertia grande sonans recitat: Darapti, Felapton,
> Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison. Quartae sunt:
> Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison.

Venn-Diagramme

Den vier kategorischen Aussageformen entsprechen Beziehungen zwischen ihren Extensionen (den Mengen der Objekte, auf die die Subjekts- und Prädikatsbegriffe zutreffen), die wir durch sog. “Venn-Diagramme” symbolisieren können:

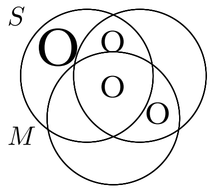


Die Venn-Diagramme erlauben uns, die Gültigkeit eines gegebenen Syllogismus zu überprüfen:

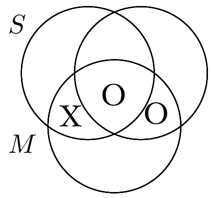


Einige Beispiele:

$$\begin{array}{c} \text{Kein } P \text{ ist } M. \\ \text{Alle } S \text{ sind } M. \\ \hline \text{Kein } S \text{ ist } P. \end{array}$$

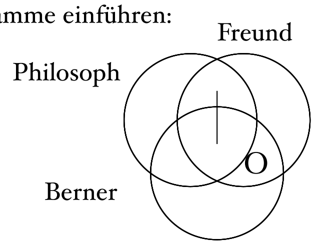


$$\begin{array}{c} \text{Kein } M \text{ ist } P. \\ \text{Einige } S \text{ sind } M. \\ \hline \text{Einige } S \text{ sind nicht } P. \end{array}$$



Wir können die Disjunktion als zusätzlichen Junktor in die Venn-Diagramme einführen:

$$\begin{array}{c} \text{Alle meiner Berner Freunde sind Philosophen.} \\ \text{Einige meiner Freunde sind entweder Philosophen oder Berner.} \\ \hline \text{Einige meiner Freunde sind Philosophen.} \end{array}$$



Die Grenzen der Syllogistik

Es ist in der Syllogistik oder mit Venn-Diagrammen nicht möglich, Argumente zu formalisieren, die bspw. in der folgenden Weise Quantoren und Junktoren mischen:

Wenn alle meine Freunde, die im Newsletter eingeschrieben sind, Philosophie machen, dann sind einige meiner Freunde nicht im Newsletter eingeschrieben.
Entweder sind alle meine Freunde im Newsletter eingeschrieben, oder sie machen alle Philosophie.
Also: Wenn alle meine Philosophen-Freunde sich im Newsletter einschreiben, machen das auch einige Nicht-Philosophen-Freunde.

In der Prädikatenlogik formalisieren wir diesen Schluss wie folgt:

$$\begin{array}{c} \text{Alle } F\text{, die } H \text{ sind, sind } G \;\rightarrow\; \text{Einige } F \text{ sind nicht } H. \\ \text{Alle } F \text{ sind } H \;\vee\; \text{Alle } F \text{ sind } G. \\ \hline \text{Alle } F\text{, die } G \text{ sind, sind } H \;\rightarrow\; \text{Einige } F\text{, die nicht } G \text{ sind, sind } H. \end{array}$$

Die Syllogistik und die Venn-Diagramme haben die folgenden Nachteile gemeinsam:

1. Sie unterscheiden nicht zwischen Prädikaten und singulären Termini und erlauben es deshalb nicht, Argumente wie das folgende zu formalisieren: "Alle Philosophen sind glücklich; Sam ist ein Philosoph; also ist Sam glücklich". Möglicher Ausweg: "der Sokratisierer" für Sokrates.
2. Sie erlauben bloss die Formalisierung "unärer" Prädikate (Prädikate, die aus einem Satz durch die Ersetzung eines einzigen Namens entstehen); Schlüsse mit Prädikaten mit mehreren (unterschiedlichen) Leerstellen wie der folgende können nicht formalisiert werden: "Marie ist meine Freundin; also habe ich eine Freundin". Möglicher Ausweg: relationale Prädikate als unär behandeln. Aber das geht nicht (wie wir noch sehen werden).

Ein Hauptvorteil der modernen Prädikatenlogik liegt darin, dass sie nicht diesen Beschränkungen unterliegt.

Offene Sätze und ihre Quantifikation

Betrachten wir folgende Sätze:
(F1) $15 \cdot 1^2 + 1$
(F2) $15 \cdot 2^2 + 2$
(F3) $15 \cdot 3^2 + 3$
Wir können das, was diese Sätze gemeinsam haben, als eine Funktion identifizieren – angewandt auf 1, 2 und 3 ergeben sich daraus die drei Sätze:

F′ $15 \cdot x^2 + x$

F″ $15 \cdot (\ldots)^2 + (\ldots)$

In der gleichen Weise gewinnen wir in der Prädikatenlogik Prädikate (offene Sätze) aus (geschlossenen) Sätzen, indem wir einen oder mehrere sog. "singuläre Terme" durch Leerstellen (Variablen) ersetzen. Füllen wir solche Leerstellen durch singuläre Terme oder Quantoren, erhalten wir wiederum ganze Sätze. Aus dem Satz "Robert ist das Lieblingstier von Sam" erhalten wir nicht nur das Prädikat (den offenen Satz) "...ist Sams Lieblingstier", sondern auch "Robert ist das Lieblingstier von ..." und "...ist das Lieblingstier von $\cdots$".
Die Prädikatenlogik unterscheidet sog. "Quantoren" von singulären Termen und kann daher den (gültigen) Schluss **(a)** vom (ungültigen) Schluss **(b)** unterscheiden:

(a) Tom ist gekommen. Also ist jemand gekommen.

(b) Niemand ist gekommen. Also ist jemand gekommen.

Quantoren erlauben uns, die sog. "multiple Allgemeinheit" zu formalisieren. Wir unterscheiden bspw. zwischen zwei Sinnen von "Alle Knaben lieben ein Mädchen":

(i′) $\forall x$ (x ist ein Knabe $\rightarrow$ $\exists y$(y ist ein Mädchen $\wedge$ x liebt y))

(i″) $\exists y$ (y ist ein Mädchen $\wedge$ $\forall x$(x ist ein Knabe $\rightarrow$ x liebt y))

Der Unterschied liegt darin, dass nur im zweiten Fall alle dasselbe Mädchen lieben.

Objekte und ihre Existenz

In der Syllogistik formalisieren wir "...existiert" als 'normales' Prädikat. In der Prädikatenlogik haben wir allerdings die Regel der sog. "existentiellen Generalisierung", welche folgendes ergäbe:

$$\frac{Fa}{\exists x(Fx)} \quad \rightsquigarrow? \quad \frac{\text{Pegasus existiert nicht.}}{\exists x(x = \text{Pegasus} \wedge x \text{ existiert nicht})}$$

Die Formalisierung in der Prädikatenlogik:

$$a \text{ existiert} \quad \rightsquigarrow \quad \exists x(x = a) \tag{6}$$
$$F\text{s existieren} \quad \rightsquigarrow \quad \exists x(Fx) \tag{7}$$
$$a \text{ existiert nicht} \quad \rightsquigarrow \quad \neg\exists x(x = a) \tag{8}$$
$$F\text{s existieren nicht} \quad \rightsquigarrow \quad \neg\exists x(Fx) \tag{9}$$

Der Existenzquantor dient uns auch der Formalisierung partikulärer Aussagen:

"Max ist ein Schwein." $\rightsquigarrow$ Fa
"Max lacht." $\rightsquigarrow$ Ga
"Max ist ein lachendes Schwein." $\rightsquigarrow$ $Fa \wedge Ga$
"Es gibt ein Schwein." $\rightsquigarrow$ $\exists xFx$
"Es gibt ein lachendes Schwein." $\rightsquigarrow$ $\exists x(Fx \wedge Gx)$
"Es gibt ein Schwein und es gibt etwas Lachendes." $\rightsquigarrow$ $\exists xFx \wedge \exists yGy$
"Jedes Ding ist ein Schwein." $\rightsquigarrow$ $\forall xFx$
"Jedes Schwein lacht." $\rightsquigarrow$ $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$