

# Die Prädikatenlogik

Einführungskurs Logik, Universität Bern, Frühlingssemester 2009

handout zur Sitzung vom 21.4.09

Philipp Keller  
philipp.keller@unige.ch

## Punkte vom letzten Kurs

- Wir erhalten Prädikate (offene Sätze), indem wir in einem Satz einen singulären Terminus oder mehrere singuläre Termini durch Leerstellen ersetzen.
- Die klassische Syllogistik unterscheidet vier sog. kategorische Aussageformen: **SaP**, **SiP**, **SeP**, **SoP**.
- Diese vier Aussageformen entsprechen vier Modifikationen der Kopula bzw. vier verschiedenen Beziehungen zwischen den Extensionen des Subjektsbegriffes "S" und des Prädikatbegriffes "P".
- Diese Beziehungen können anhand von Venn-Diagrammen symbolisiert werden; mittels Venn-Diagrammen können wir die Gültigkeit von Syllogismen und bspw. das logische Quadrat der Syllogistik überprüfen.
- Die gültigen Schlüsse der Syllogistik sind entweder direkt oder indirekt; es gibt 19 direkte gültige Schlüsse, die wir uns anhand mnemotechnischer Namen wie "Barbara", "Ferio", "Cesare" und "Felapton" merken können.
- Bereits die Venn-Diagramme gehen weiter als die Syllogistik; bspw. erlauben sie die Einführung einer Disjunktion.
- Die hauptsächlichen Nachteile der Syllogistik und der Venn-Diagramme sind die folgenden:
  - Kategoriale Aussageformen lassen sich nicht mit aussagenlogischen Junktoren kombinieren.
  - Es wird kein Unterschied zwischen singulären Termini und Prädikaten gemacht; singuläre Existenzaussagen werden deshalb mittels Prädikaten formalisiert, die nur auf ein einziges Objekt zutreffen.
  - Relationale Aussagen können nicht adäquat formalisiert werden; syllogistische 'Prädikate' sind immer unär.
- Prädikate (offene Sätze) sind nicht wahr oder falsch, sondern treffen auf bestimmte Objekte zu oder nicht (bzw. werden von diesen Objekten erfüllt oder nicht). Ein Objekt erfüllt ein Prädikat gdw. das Prädikat für das Objekt als Argument den Wert **w** ergibt.
- Variablen deuten die Leerstellen in einem offenen Satz an; Quantoren bilden daraus geschlossene (vollständige) Sätze, die entweder wahr oder falsch sind.
- Variablen erlauben uns, der sog. "multiplen Allgemeinheit" gerechtzuwerden und den Unterschied zwischen "Alle lieben jemanden" und "Jemand wird von allen geliebt" zu formalisieren.

## Einige gültige Schlüsse der Prädikatenlogik

$$(1) \quad \frac{\begin{array}{l} \forall x (x \text{ ist ein Mensch} \rightarrow x \text{ ist sterblich}) \\ \forall x (x \text{ ist ein Philosoph} \rightarrow x \text{ ist ein Mensch}) \end{array}}{\forall x (x \text{ ist ein Philosoph} \rightarrow x \text{ ist sterblich})}$$

$$(2) \quad \frac{\begin{array}{l} \neg \exists x (x \text{ ist ein Philosoph} \wedge x \text{ ist böse}) \\ \exists x (x \text{ ist ein Logiker} \wedge x \text{ ist ein Philosoph}) \end{array}}{\exists x (x \text{ ist ein Logiker} \wedge \neg(x \text{ ist böse}))}$$

$$(3) \quad \frac{\neg \exists x (x \text{ ist ein Mensch} \wedge x \text{ ist vollkommen}) \quad \forall x (x \text{ ist ein Philosoph} \rightarrow x \text{ ist ein Mensch})}{\neg \exists x (x \text{ ist ein Philosoph} \wedge x \text{ ist vollkommen})}$$

## Wahrheit und Erfüllung

Um zu sagen, dass  $a$  das Prädikat (den offenen Satz) " $Fx$ " erfüllt, wenden wir die durch " $Fx$ " repräsentierte Funktion auf das durch die Individuenkonstante repräsentierte Argument an:

$$(4) \quad Fa$$

(4) ist die allgemeine Form eines atomaren Satzes in der Prädikatenlogik und besteht aus drei Elementen: einer Individuenkonstante (dem Eigennamen " $a$ "), einem Prädikat (" $Fx$ "), und der Anwendung der Funktion  $Fx$  auf das Argument  $a$  (repräsentiert durch die Juxtaposition von " $F$ " und " $a$ ").

Gemäss seiner Fregeschen Interpretation bezeichnet (4) den Wert der Funktion  $Fx$  für das Argument  $a$  – einen (und nur einen) der beiden Wahrheitswerte: das Wahre,  $\mathbf{w}$ , oder das Falsche,  $\mathbf{f}$ .

Es gibt einen wichtigen Unterschied zwischen einem Satz wie " $Fa$ " und einem Prädikat wie " $Fx$ ", obwohl Prädikate manchmal auch "offene Sätze" genannt werden: Während Sätze wahr oder falsch sind, werden Prädikate von Gegenständen erfüllt oder nicht erfüllt; Prädikate sind nicht wahr oder falsch, sondern wahr-von (*true of*) bestimmten Gegenständen bzw. treffen auf bestimmte Gegenstände zu.

Mittels der gleichen Zeichen wie für die aussagenlogischen Junktoren bilden wir komplexe Prädikate, die wir über ihre Erfüllungsbedingungen definieren (dies im Gegensatz zu den Wahrheitsbedingungen komplexer Sätze):

$C\neg$  : Ein Gegenstand  $a$  erfüllt " $\neg Fx$ " gdw.  $a$  " $Fx$ " nicht erfüllt.

$C\wedge$  : Ein Gegenstand  $a$  erfüllt " $Fx \wedge Gx$ " gdw.  $a$  sowohl " $Fx$ " als auch " $Gx$ " erfüllt.

$C\vee$  : Ein Gegenstand  $a$  erfüllt " $Fx \vee Gx$ " gdw.  $a$  entweder " $Fx$ " oder " $Gx$ " erfüllt.

$C\rightarrow$  : Ein Gegenstand  $a$  erfüllt " $Fx \rightarrow Gx$ " gdw.  $a$  entweder " $Fx$ " nicht erfüllt oder sonst " $Gx$ " erfüllt.

$C\leftrightarrow$  : Ein Gegenstand  $a$  erfüllt " $Fx \leftrightarrow Gx$ " gdw.  $a$  entweder " $Fx$ " und " $Gx$ " erfüllt oder sowohl " $Fx$ " als auch " $Gx$ " nicht erfüllt.

## Singuläre Terme

Ein singulärer Term ist ein Ausdruck, der sich aufgrund seiner Form auf höchstens einen Gegenstand beziehen kann. Worauf sich ein singulärer Term bezieht, kann mit dem Äusserungskontext oder dem Auswertungskontext variieren. Wir unterscheiden:

- Eigennamen ("Sam"): keine Variation mit Äusserungs- oder Auswertungskontext. [Aber: "Rolling Stones", "Jungfrau Maria"?]
- Singuläre Beschreibungen ("Mond der Erde", "Lehrer des Platon"): Variation mit dem Auswertungskontext, aber nicht mit dem Äusserungskontext. [Aber: "der aktuelle Mond der Erde", "der Mann mit dem Martini"?]
- Indexikalische Ausdrücke ("ich", "hier", "jetzt"): Variation mit dem Äusserungskontext, aber nicht mit dem Auswertungskontext. [Aber: "ich bin jetzt hier", "morgen ist nicht heute"?]
- Demonstrative Ausdrücke ("dies", "jener Mann"): Bezug des Referenzobjekts aus der assoziierten 'Demonstration'. [= Variation mit dem Äusserungs- *und* dem Auswertungskontext?]

## Formalisierung in der Prädikatenlogik

Für die Prädikatenlogik unterscheiden wir zwischen zwei Etappen der Formalisierung:

1. Wir bilden zuerst einen synonymen Satz, der die logische Form deutlicher zum Ausdruck bringt:

- “Alles ist.”  $\rightsquigarrow$  “Jede Sache ist so, dass sie existiert.”  
 “Alle Menschen sind sterblich.”  $\rightsquigarrow$  “Alles ist so, dass, wenn ein Mensch, es dann sterblich ist.”  
 “Sam kam herein und lachte.”  $\rightsquigarrow$  “Es gibt eine Sache, die ist Sam, und diese Sache kam herein und diese Sache lachte.”

2. In einem zweiten Schritt ersetzen wir Pronomen mit Variablen, um die anaphorischen Abhängigkeitsbeziehungen zwischen ihnen deutlicher zum Ausdruck zu bringen:

- “Jede Sache ist so, dass sie existiert.”  $\rightsquigarrow \forall x(x \text{ existiert})$   
 “Alles ist, wenn ein Mensch, sterblich.”  $\rightsquigarrow \forall x(x \text{ ist ein Mensch} \rightarrow x \text{ ist sterblich})$   
 “Es gibt etwas, das ist Sam, kam herein und lachte.”  $\rightsquigarrow \exists x(x = \text{Sam} \wedge x \text{ kam herein} \wedge x \text{ lachte})$

Achtung! In natürlichen Sprachen finden wir oft Fälle *syntaktischer* Doppeldeutigkeit:

- (i) Alle Knaben lieben ein Mädchen.
- (ii) Dieser Mann hat über alles ein Buch geschrieben.

In der formalen Sprache der Prädikatenlogik können wir solche Fälle “multipler Allgemeinheit” anhand ihrer Formalisierungen unterscheiden:

- (i')  $\forall x (x \text{ ist ein Knabe} \rightarrow \exists y(y \text{ ist ein Mädchen} \wedge x \text{ liebt } y))$
- (i'')  $\exists y (y \text{ ist ein Mädchen} \wedge \forall x(x \text{ ist ein Knabe} \rightarrow x \text{ liebt } y))$
- (ii')  $\exists y (\forall x(y \text{ ist ein Buch dieses Herrn} \wedge y \text{ ist über } x))$
- (ii'')  $\forall x (\exists y(y \text{ ist ein Buch dieses Herrn} \wedge y \text{ ist über } x))$

Folgende Argumente sind allerdings Fehlschlüsse:

1. Blau ist die Farbe des Himmels. Die Farbe des Himmels wechselt. Also wechselt Blau.
2. Die Apostel sind zwölf. Judas ist ein Apostel. Also ist Judas zwölf.
3. Die Menschen sind über die Erde verstreut. Hans ist ein Mensch. Also ist Hans über die Erde verstreut.
4. Niemand ist vollkommen. Ich bin niemand. Also bin ich vollkommen.
5. Ich habe gedacht, deine Jacht sei grösser als sie ist. Ich hatte Recht. Also ist deine Jacht grösser als sie ist.

## Klassifikation der Ausdrücke in der sog. “kategorialen Grammatik”

- “Es regnet und ich bin traurig”:

Es regnet                      und                      Ich bin traurig  
**S**                                      **S/SS**                                      **S**  
 Es regnet und ich bin traurig.  
**S**

- “Sam ist traurig”:

Sam                                      ... ist traurig  
**N**                                      **S/N**  
 Sam ist traurig.  
**S**

- “Sam liebt Maria”:
  - (i) Sam  $\text{S}$  ... liebt  $\text{S/NN}$  ... Maria  $\text{N}$   
 ... liebt Maria  $\text{S/N}$   
 Sam liebt Maria.  $\text{S}$
  - (ii) Sam  $\text{S}$  ... liebt  $\text{S/NN}$  ... Maria  $\text{N}$   
 Sam liebt ...  $\text{S/N}$   $\text{N}$   
 Sam liebt Maria.  $\text{S}$
- “Sam ist traurig und verheiratet”:
  - Sam  $\text{S}$  ... ist traurig  $\text{S/N}$  und  $(\text{S/N})/(\text{S/N})(\text{S/N})$  ... verheiratet  $\text{S/N}$   
 $\text{N}$  ... ist traurig und verheiratet  $\text{S/N}$   
 Sam ist tr. und v.  $\text{S}$
- “Es gibt jemand Trauriges”:
  - Es gibt etwas, das ...  $\text{S}/(\text{S/N})$  ... traurig ist.  $\text{S/N}$   
 $\text{S}$   
 Es gibt etwas, das traurig ist.  $\text{S}$

## Variablen

Einige Beispiele:

- (5)  $\exists x (\text{liebt } x)$
- (6)  $\exists x (\text{liebt } x \wedge x \text{ ist ein Philosoph})$
- (7)  $\exists x (\text{liebt } x) \wedge x \text{ ist ein Philosoph}$
- (8)  $\exists x (\text{liebt } x) \wedge \exists x (x \text{ ist ein Philosoph})$
- (9)  $\exists x (\text{liebt } x) \wedge \exists y (y \text{ ist ein Philosoph})$
- (10)  $\exists y (\text{liebt } y \wedge y \text{ ist ein Philosoph})$

Quantifikation ist eng mit dem Begriff des Individuenbereiches (*universe of discourse, domain of quantification*) verbunden. “ $\forall x(Fx)$ ” bedeutet, dass alle Individuen im Individuenbereich die durch das Prädikat “ $Fx$ ” ausgedrückte Eigenschaft besitzen; “ $\exists x(Fx)$ ” bedeutet, dass es mindestens ein Individuum im Individuenbereich gibt, das diese Eigenschaft besitzt. Der Individuenbereich ist die Gesamtheit der Objekte, von denen wir sprechen und die wir als Belege für oder Gegenbeispiele zu unseren Äußerungen akzeptieren.

Variablen haben keinen deskriptiven Gehalt. Trotzdem sind die beiden Prädikate (offenen Sätze) “ $x = x$ ” und “ $x = y$ ” sehr verschieden.

Existenz- und Allquantor sind in der gleichen Weise dual zueinander wie Disjunktion und Konjunktion:

$$\begin{aligned} \lceil \forall x (\phi(x)) \rceil &\iff \lceil \neg \exists x \neg(\phi(x)) \rceil \\ \lceil \exists x (\phi(x)) \rceil &\iff \lceil \neg \forall x \neg(\phi(x)) \rceil \end{aligned}$$