Chapitre 10

Syntaxe et sémantique de la logique des prédicats

10.1 Le langage $\mathcal{L}^+$

Afin de pouvoir formaliser les inférences qui nous intéressent, nous devons d'abord élargir la syntaxe de notre langue et définir le langage formel de la logique des prédicats. Dans la cinquième leçon (pp.70 et suivants), nous avons défini le langage $\mathcal{L}$ qui consiste en des formules propositionnelles composées de phrases simples et de connecteurs propositionnels. Nous élargissons maintenant notre alphabet et adoptons une nouvelle définition, plus large, de ce qu'est une formule bien-formée :

Définition 43. *L'alphabet du langage $\mathcal{L}^+$ de la logique des prédicats consiste en les signes suivants :*

1. *des signes logiques :*
   (a) *les connecteurs « $\neg\ldots$ » (« ne-pas »), « $\ldots\wedge\cdots$ » (« et »), « $\ldots\vee\cdots$ » (« ou »), « $\ldots\rightarrow\cdots$ » (« si-alors) et « $\ldots\leftrightarrow\cdots$ » (« ssi. ») ;*
   (b) *les quantificateurs « $\forall x(\ldots x\cdots)$ » (« pour tout x ») et « $\exists x(\ldots x\cdots)$ » (« il y a au moins un x ») ;*
   (c) *le signe d'identité : « $\ldots = \cdots$ » (« est identique à ») ;*
   (d) *des variables pour des individus : « x_i » pour tout $i\in\mathbb{N}$;*
2. *des signes non-logiques :*
   (a) *des signes pour les relations : « R_i » pour tout $i\in\mathbf{I}$;*
   (b) *des signes pour les fonctions : « f_i » pour tout $i\in\mathbf{J}$;*
   (c) *des constantes pour des individus : « c_i » pour tout $i\in\mathbf{K}$;*
3. *des signes auxiliaires : parenthèses, virgules*

Nous appelons les signes « $\forall$ » et « $\exists$ » des « *quantificateurs* », les expressions de la même forme que « $\forall x$ » et « $\exists x$ » des « *quantifications des variables* » et les phrases de la forme « $\forall x(\ldots x\cdots)$ » et « $\exists x(\ldots x\cdots)$ » des « *phrases quantifiées* ». Nous écrivons « $=$ » pour le signe de la relation d'identité dans la langage objet pour le distinguer de « $=$ » qui représente la relation d'identité dans le métalangage. Nous abrégeons « $\neg(\ldots = \ldots)$ » par « $\ldots \neq \ldots$ » et adoptons les mêmes conventions d'économie de parenthèses que pour la logique propositionnelle.

Les fonctions, comme nous l'avons vu à la p. 174 déterminent un objet sur la base de leurs arguments. La référence des expressions comme « le père de Jean » est alors établie de manière univoque : elle sera la valeur pour la fonction « le père de x » appliquée à Jean. Les fonctions dont nous parlons en $\mathcal{L}^+$ sont des fonctions d'individus, c'est-à-dire des relations entre des éléments de notre domaine de quantification. Dans les langues naturelles, de telles fonctions sont exprimées par des expressions comme « le père de … », « le livre préféré de … », « l'intérêt commun de …et $\cdots$ » et « le centre du cercle inscrit dans le triangle détérminé par les points …, $\cdots$ et $\ldots$ ». Il s'agit de ‹ règles de construction › pour les termes singuliers complexes. Contrairement à beaucoup de fonctions exprimées dans les langues naturelles, nous supposons que nos fonctions d'individu soient ce que l'on appelle *« entièrement définies »* , c'est-à-dire qu'elles ont une valeur pour *tout* argument.

Notons que $\mathcal{L}^+$ contient $\mathcal{L}$, du moins si nous nous imaginons toutes les phrases simples de $\mathcal{L}$ composées d'un prédicat (relation unaire) et d'une constante individuelle « Fa » : ceci veut dire qu'une formule bien-formée de $\mathcal{L}$ sera aussi une formule bien-formée de $\mathcal{L}^+$.[1]

Les signes non-logiques de notre alphabet jouent le rôle des phrases primitives de la logique propositionnelle : comme « p », « q » etc. (ou « p_1 », « p_2 », « p_3 » etc.) sont des abréviations arbitraires pour les phrases de notre langage objet que nous considérons comme logiquement simple, les signes « R », « f » et « c » (ou « R_1 », « R_2 », « R_3 » …, « f_1 », « f_2 », « f_3 », …« c_1 », « c_2 », « c_3 » …) nous servent pour abréger n'importe quel signe de relation, de fonction et n'importe quelle constante. Comme dans le cas de la logique propositionnelle, on peut toujours s'imaginer ces signes remplacés par des expressions du français (du type syntaxique correspondant). Pour les prédicats unaires, nous utilisons souvent « F », « G », « H » etc.

Les ensembles $\mathbf{I}$,$\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ sont des ensembles d'indices qui nous servent à distinguer les différents symboles pour les relations, les fonctions et les individus. Nous pourrions par exemple énumer les signes de relations par les nombres $1, 4, 7, 10, 14$ etc., les signes de fonctions par $2, 5, 8, 11, 15$ etc. et les constantes individuelles par $3, 6, 9, 12, 16$ etc. Au lieu de « x_1 », « x_2 », « x_3 », nous écrivons parfois « x », « y », « z » pour les variables. Nous abrégeons l'ensemble de toutes les variables de la langue $\mathcal{L}^+$ par « $\mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+)$ ».

Les relations et les fonctions peuvent être unaires, binaires, tertiaires et ainsi de suite. Elles peuvent prendre un, deux, trois ou plusieurs argument pour former une phrase, c'est-à-dire avoir une adicité de 1, 2, 3 etc. C'est pourquoi nous appelons une *« langue »* $\mathcal{L}^+$ un alphabet – incluant un choix précis de signes non-logiques – avec un ensemble $\mathbf{K}$ d'indices pour les constantes et deux fonctions $\lambda : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mu : \mathbf{J} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ qui déterminent l'adicité de nos signes de relations et de fonctions.[2] Si F est un prédicat (une relation unaire), par exemple, $\lambda(F) = 1$; si R est une relation binaire, $\lambda(R) = 2$; si $+$ est une fonction binaire, alors $\mu(+) = 2$ etc. Une langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ pour la logique des prédicats est donc composée de connecteurs, de quantificateurs, du signe d'identité, d'une infinité de variables individuelles, d'un certain nombre de relations et de fonctions ayant des adicités spécifiques (déterminées par λ et μ) et d'un certain nombre de constantes individuelles.

Nous pouvons maintenant définir ce qu'est un *terme* (singulier) de notre langue $\mathcal{L}^+$:

Définition 44 (Termes)**.** *Les termes d'une langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ sont définis par les clauses récursives :*

1. *Toute variable « x_i » ($i \in \mathbb{N}$) est un terme.*
2. *Toute constante « c_i » ($i \in \mathbb{N}$) est un terme.*
3. *Si « t_1 », « t_2 », … , « $t_{\mu(j)}$ » sont des termes ($j \in \mathbf{J}$), alors « $f_j(t_1, t_2, \ldots, t_{\mu(j)})$ » est un terme.*
4. *Rien d'autre n'est un terme.*

1. Une autre provision est nécessaire : les connecteurs propositionnels, définis dans le langage de la logique propositionnelle comme reliant des phrases, relient dans la logique des prédicats des phrases qui peuvent être complètes *ou* ouvertes. Ceci veut dire que les connecteurs dans $\mathcal{L}$ sont toujours du type $\mathbf{S/SS}$ (cf. p. 190 dans le ch. 9.6), bien que ceux de $\mathcal{L}^+$ soient ambiguës entre $\mathbf{S/SS}$ et $(\mathbf{S/N})/(\mathbf{S/N})(\mathbf{S/N})$.

2. Nous exluons une adicité de 0. Alternativement, nous aurions pu définir les constantes individuelles comme des fonctions d'adicité 0.

Puisqu'elle utilise le prédicat à définir (« … est un terme »), cette définition est récursive, comme le sont aussi les définitions de formule atomique et de formule que nous donnerons par la suite.[3] Les termes sont les expressions de notre langage qui nous servent pour désigner les objets du domaine de discours.

Nous définissons également les formules atomiques, qui jouent le rôle des phrases simples de la logique propositionnelle :

Définition 45 (Formules atomiques). *ϕ est une formule atomique de la langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ si et seulement si un des suivants est le cas :*

1. *ϕ est de la forme « $t_1 = t_2$ » pour deux termes « t_1 » et « t_2 » ;*
2. *ϕ est de la forme « $R_i(t_1, t_2, \ldots, t_{\lambda(i)})$ » pour des termes « t_1 », « t_2 », … , « $t_{\lambda(i)}$ » et $i \in \mathbf{I}$.*

Ayant à notre disposition l'équivalent de phrases simples, nous pouvons construire les formules complexes, en imitant la procédure pour les connecteurs de la logique propositionnelle :

Définition 46 (Formules). *ϕ est une formule de la langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ si et seulement si un des suivants et le cas :*

1. *ϕ est une formule atomique ;*
2. *ϕ est de la forme $\ulcorner(\neg\psi)\urcorner$ pour une formule ψ ;*
3. *ϕ est de la forme $\ulcorner(\psi \wedge \chi)\urcorner$, $\ulcorner(\psi \vee \chi)\urcorner$, $\ulcorner(\psi \rightarrow \chi)\urcorner$ ou $\ulcorner(\psi \leftrightarrow \chi)\urcorner$, pour des formules ψ et χ ;*
4. *ϕ est de la forme $\ulcorner\forall x_i(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_i(\psi)\urcorner$ pour une formule ψ et une variable « x_i », $i \in \mathbb{N}$.*

Nous économisons des parenthèses par les mêmes conventions que dans le cas de la logique propositionnelle. En plus, nous écrivons « $\forall x, y, z(\ldots)$ » au lieu de « $\forall x\ (\ldots\ \forall y\ (\ldots\ \forall z(\ldots)\ldots)\ldots)$ » et « $\exists x, y, z(\ldots)$ » au lieu de « $\exists x\ (\ldots\ \exists y\ (\ldots\ \exists z(\ldots)\ldots)\ldots)$ ». Il est à remarquer que nous considérons comme bien-formées des quantifications vides – des phrases contenant des quantificateurs qui portent sur des phrases entières comme « $\forall x(Fa)$ » et « $\exists y \exists x(Fx)$ ».

Comme nous l'avons vu dans le ch. 9.3, il est crucial pour la sémantique de la logique des prédicats de distinguer entre les phrases complètes qui sont vraies ou fausses et des phrases ouvertes qui sont vraies ou fausses *de* certains objets. Cette distinction nous oblige de dire quand une variable a une occurrence « libre » dans une formule. Nous adoptons donc la définition suivante, qui nous fournit une manière plus rigoureuse de parler de ce que nous avons appelé, de manière métaphorique, un « trou » dans une phrase ouverte :

Définition 47 (Occurrence libre). *Si ϕ est une formule et « x_i » une variable, nous disons que « x_i » a une occurrence libre dans ϕ si et seulement si une des conditions suivantes est remplie :*

1. *ϕ est une formule atomique et contient « x_i » ;*
2. *ϕ a la forme $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et « x_i » a une occurrence libre dans ψ ;*
3. *ϕ a la forme $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ ou $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ et « x_i » a une occurrence libre soit dans ψ, soit dans χ ;*

---

3. Ceci signifie que notre définition a la forme suivante :
(i) Toute variable est un terme.
(ii) Toute constante est un terme.
(iii) Tout nom pour la valeur d'une fonction pour un référent d'une ou de plusieurs expressions des catégories 1 et 2 est un terme.
(iv) Tout nom pour la valeur d'une fonction pour un référent d'une ou de plusieurs expressions des catégories 1, 2 et 3 est un terme.
(v) Tout nom pour la valeur d'une fonction pour un référent d'une ou de plusieurs expressions des catégories 1, 2, 3 et 4 est un terme.
(vi) …
La récursion dans la clause (3) de la définition donnée nous permet d'abréger les conditions (3), (4), (5) etc. de cette définition itérative (c'est-à-dire non-récursive), qui a le défaut (considérable !) d'être d'une longueur infinie.

4. *ϕ a la forme $\ulcorner \forall x_j(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner \exists x_j(\psi)\urcorner$, $i \neq j$ et « x_i » a une occurrence libre dans ψ.*

Par la dernière clause, les quantificateurs réduisent le nombre d'occurrences libres des variables qu'ils quantifient dans leur portée.

Une variable a une occurrence libre dans une formule si elle n'y est pas partout gouvernée par un quantificateur correspondant. Nous disons que les occurrences de variables qui ne sont pas libres sont « liées » – liées par un quantificateur dans la portée duquel elles se trouvent.[4] Considérons par exemple la formule suivante dans le langage de l'arithmétique :

$$\forall x(x \leq 0 \rightarrow x \leq y) \wedge \exists z(0 \leq z \wedge z \leq x \wedge x \neq 0 \wedge z \neq x)$$

Dans cette formule, la variable « x » a à la fois des occurrences libres et des occurrences liées, la variable « y » n'a que des occurrences libres et « z » n'a que des occurrences liées.

Une expression est une phrase ouverte si et seulement si elle contient au moins une occurrence libre d'une variable. Par conséquent, nous pouvons définir :

Définition 48 (Phrases). *Une phrase est une formule qui ne contient aucune occurrence libre d'une variable.*

Nous abrégeons par « ϕ », « ψ » etc. des noms pour des phrases arbitraires et par « $\ulcorner\phi(x)\urcorner$ », « $\ulcorner\psi(x,y)\urcorner$ » des noms pour des phrases ouvertes contenant des occurrences libres des variables « x » et des variables « x » et « y » respectivement.[5] Les résultats de la substitution des constantes individuelles « a » et « b » pour les variables sont désignés par « $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ » et « $\ulcorner\psi(a,b)\urcorner$ » respectivement.

Comme les connecteurs, les quantificateurs ont aussi une *portée* – la phrase ouverte qui est gouvernée par le quantificateur. La distinction entre

(i) Personne n'est heureux et personne n'est honnête.
(ii) Personne n'est heureux et honnête.

est que le premier quantificateur universel dans la première phrase ne gouverne que la phrase ouverte simple « x est heureux » bien que celui dans la deuxième phrase le phrase ouverte complexe « x est heureux et x est honnête » :

(i′) $\forall x\, \neg(x$ est heureux$)\ \wedge\ \forall x\, \neg(x$ est honnête$)$
(ii′) $\forall x\, \neg(x$ est heureux $\wedge\ x$ honnête$)$

Par la première phrase, je fais deux assertions : que personne n'est heureux et que personne n'est honnête – s'il y a quelque chose qui est heureux ou s'il y a quelque chose qui est honnête j'ai également tort. Par la deuxième phrase, cependant, je fais une assertion beaucoup plus faible : je dis que personne n'est heureux et honnête *en même temps* – que tous ce qui sont heureux ne sont pas honnêtes et que tous ce qui sont honnêtes ne sont pas heureux. Nous définissons la portée d'un quantificateur :

Définition 49 (Portée). *Si ϕ est une formule qui contient une quantification d'une variable « x » (ou bien « $\forall x$ » ou bien « $\exists x$ »), nous appelons « portée de la variable « x » dans ϕ » la plus petite formule qui suit la quantification de « x ».*

4. Voici quelques exemples. La variable « x » a une occurrence libre dans toutes les expressions suivantes : « x », « Fx », « $Fx \wedge Fy$ », « $\exists y(Rxy)$ », « $f(x)$ » et « $\forall y \exists z(Fx \rightarrow Ryz)$ ». Elle a aussi une occurrence libre dans « $\exists x(Fx) \wedge Gx$ » (la deuxième) et dans « $\forall y(Rxy) \rightarrow \exists x(Fx)$ » (la première).

5. Nous avons besoin des demi-crochets de Quine puisque les expressions « « ... est triste »(x) », « « $\ldots$ aime $\cdots$ »(x,y) » ne sont pas des formules bien-formées. Les expressions « x est triste », « x aime y » (ou, à titre équivalent, « ... est triste » et « $\ldots$ aime $\cdots$ »), par contre, que l'on obtient en substituant « ... est triste » pour $\phi(\ldots)$ et « $\ldots$ aime $\cdots$ » pour $\psi(\ldots,\cdots)$, sont des phrases ouvertes bien-formées.

Dans les trois formules suivantes, nous avons deux occurrences d'un quantificateur universel :

Q1 $\forall x(Px) \rightarrow (\forall x(Qxy) \vee Rx)$
Q2 $\forall x(Px \rightarrow (\forall x(Qxy) \vee Rx))$
Q3 $\forall x(Px \rightarrow \forall x(Qxy \vee Rx))$

Dans l'implication **Q1**, la portée de premier quantificateur universel qui lie la variable « x » est « Px », dans la quantification universelle **Q2**, c'est « $Px \rightarrow (\forall x(Qxy) \vee Rx)$ » et dans **Q3** c'est « $Px \rightarrow \forall x(Qxy \vee Rx)$ ». La portée de la deuxième quantification de « x », dans **Q1** et dans **Q2**, est « Qxy » et « $Qxy \vee Rx$ » dans **Q3**. La variable « x » a une seule occurrence libre dans **Q1** (la troisième) et n'a pas d'occurrence libre dans **Q2** ou **Q3**. La variable « y », cependant, a des occurrences libres dans chacune des trois phrases considérées.

10.2 La sémantique de la logique des prédicats

Après avoir défini, de manière rigoureuse, ce qu'est une langue pour la logique des prédicats, nous allons maintenant montrer comment il faut *interpréter* une telle langue, en donnant une sémantique pour la logique des prédicats. Une interprétation d'une formule du langage de la logique propositionnelle consiste en l'attribution de valeurs de vérité à toutes les phrases simples que cette formule contient ; une telle attribution correspond à une ligne de la table de vérité pour le connecteur principal de la formule en question. Malheureusement, la sémantique de la logique des prédicats est compliquée par deux facteurs, absents au cas de la logique propositionnelle :

1. la présence des signes non-logiques sub-sententiels dans notre alphabet de base ; [6]
2. la présence des variables et, en conséquence, des phrases ouvertes.

La première difficulté signifie que nous ne pouvons pas simplement attribuer des valeurs de vérité à des phrases complètes, mais que nous sommes obligés d'interpréter les constantes, les signes de relations et les signes de fonctions. C'est pourquoi nous introduisons la notion d'une « structure ». La deuxième difficulté entraîne que même une interprétation du vocabulaire non-logique ne suffira pas comme interprétation de notre langue, puisque nous devons interpréter également les phrases ouvertes : nous avons besoin de la notion d'une « assignation de valeurs » aux variables contenues dans une formule.

La définition suivante détermine quelles seront les valeurs des termes et des prédicats de notre langage. Pour les constantes et les variables, nous devons fixer un ensemble d'objet comme univers de discours – cet ensemble contient tous les individus dont nous voulons parler à l'aide du langage en question.[7] Aux signes de relations correspondront des relations à l'intérieur de cet ensemble et aux signes de fonctions des fonctions de cet ensemble dans cet ensemble. [8]

---

6. Une expression bien-formée est appelée « sub-sententielle » si elle ne contient pas de phrase entière.

7. Nous reviendrons à la question des univers de discours vides plus tard (cf. le ch. 11.5 à la p. 223.

8. Voici quelques exemples de structures :
   1. l'ensemble de tous les êtres humains, avec la relation d'amour, la fonction exprimée par « la mère de ... » et deux constantes individuelles, « Sam » pour Sam et « Marie » pour Marie ;
   2. l'ensemble de tous les animaux, avec les relations exprimées par « x est un kangourou » et « x adore y », aucune fonction et des constantes individuelles « c_1 », « c_2 », ..., « c_n » pour tous les kangourous ;
   3. l'ensemble de tous les nombres naturels, avec la relation exprimée par « $x \leq y$ », les fonctions de soustraction, addition et multiplication et deux constantes individuelles pour les nombres 0 et 1.

Définition 50 (Structures). *Soit $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ une langue de la logique des prédicats. Une structure $\mathcal{A}$ pour $\mathcal{L}^+$ consiste en :*

1. *un ensemble non-vide $|\mathcal{A}|$, appelé « l'univers de discours » ou le « domaine de quantification » de $\mathcal{A}$;*
2. *une interprétation de tous les signes de relations : une fonction qui attribue à tout $i \in \mathbf{I}$ une relation $R_i^{\mathcal{A}}$ sur $|\mathcal{A}|$ avec $\lambda(i)$ places argumentales, c'est-à-dire un sous-ensemble $R_i^{\mathcal{A}} \subset |\mathcal{A}|^{\lambda(i)}$.* [9]
3. *une interprétation de tous les signes de fonctions : une fonction qui attribue à tout $j \in \mathbf{J}$ une fonction $f_j^{\mathcal{A}}$ sur $|\mathcal{A}|$ avec $\mu(j)$ places argumentales, c'est-à-dire une fonction $f_j^{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}|^{\mu(j)} \to |\mathcal{A}|$.*
4. *une interprétation de toutes les constantes, qui attribue à tout $k \in \mathbf{K}$ un élément fixe $c_k^{\mathcal{A}}$ de $|\mathcal{A}|$.*

Nous utilisons des superscripts pour rendre clair que « $R^{\mathcal{A}}$ », « $f^{\mathcal{A}}$ » et « $c^{\mathcal{A}}$ » désignent, respectivement, une relation, une fonction et un élément de l'univers de discours qui nous servent d'interpréter le signe de relation « R », le signe de fonction « f » et la constante « c » dans la structure $\mathcal{A}$.[10] Nous appelons une telle structure une *« interprétation »* de notre langue et nous disons que nous « interprétons » les formules de cette langue dans la structure en question.

Prenons une phrase de notre langage objet, par exemple « $R(a, b)$ ». Nous savons, étant données nos conventions typographiques, que « R » représente une relation et que « a » et « b » sont des constantes individuelles, représentant des objets de notre domaine. Une interprétation de ces signes consistera en une assignation d'une relation précise et des référents particuliers à « R », « a » et « b ». Nous pouvons, par exemple, interpréter cette phrase dans l'ensemble de toutes les personnes, assigner la relation d'amour à « R », Marie à « a » et Jean à « b ». La phrase sera donc vraie s'il est le cas et seulement s'il est le cas que Marie aime Jean.

Notons que la définition d'une structure ne nous dit rien sur l'interprétation des phrases ouvertes. Si nous prenons « $R(a, x)$ » comme exemple, nous savons seulement qu'un objet satisfait cette phrase ouverte si et seulement si cet objet est aimé par Marie. Mais comment pouvons-nous rendre cette relation exprimée par « $\ldots$ est vrai de $\cdots$ » plus précise ? Dans le contexte d'une structure donnée, nous pouvons assigner des valeurs aux occurrences libres de nos variables :

Définition 51 (Assignations de valeurs). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats et $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$. Une assignation de valeurs pour $\mathcal{L}^+$ est une fonction h qui assigne à toute variable x_i ($i \in \mathbb{N}$) exactement un élément de l'univers de discours :* $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$.

Une assignation de valeurs, en d'autres termes, est une interprétation ‹ conditionnelle › des variables, « ‹ conditionnelle › » parce qu'elle ne les interprète pas au niveau d'une structure (une possibilité logique), mais à l'intérieur d'une structure. L'assignation de valeurs nous permet, dans certaines conditions, de traiter les phrases ouvertes comme des phrases complètes.[11] La signification d'une phrase ouverte, telle que « x aime Marie », dépendra de l'assignation de valeurs dans le sens qu'une assignation de Sam à

9. « $|\mathcal{A}|^{\lambda(i)}$ » désigne un produit cartésien, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les séquences, à $\lambda(i)$ membres, d'éléments de $|\mathcal{A}|$:

$$|\mathcal{A}|^{\lambda(i)} \quad := \quad \underbrace{|\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}| \times \ldots \times |\mathcal{A}|}_{\lambda(i) \text{ fois}}$$

10. Alternativement, nous aurions pu dire qu'une structure $\mathcal{A}$ est une séquence de quatre éléments, $\mathcal{A} = \langle |\mathcal{A}|, h_{\mathbf{I}}, h_{\mathbf{J}}, h_{\mathbf{K}} \rangle$, consistant d'un ensemble $|\mathcal{A}|$, d'une fonction qui assigne à tout signe de relation son interprétation $h_{\mathbf{I}} : R_i \mapsto R_i^{\mathcal{A}}$, une autre fonction qui assigne à tout signe de fonction son interprétation $h_{\mathbf{J}} : f_J \mapsto f_j^{\mathcal{A}}$ et une fonction qui assigne à toute constante un élément de l'univers de discours : $h_{\mathbf{K}} : c_k \mapsto c_k^{\mathcal{A}} \in |\mathcal{A}|$.

11. Ceci n'est pas tout à fait exact : il serait plus adéquat de dire qu'une assignation de valeurs nous permet de définir une notion générale, celle de la satisfaction, qui s'applique également aux phrases ouvertes et complètes et qui nous permet de définir la vérité d'une phrase complète comme cas limite.

« x » nous donnera une phrase vraie, mais une assignation de Frédérique à « x » une phrase fausse. Pour éviter l'ambiguïté, il est également important qu'une assignation de valeurs soit une fonction : toute occurrence d'une variable doit être assignée à un seul objet.

Une structure et une assignation de valeurs, prises ensemble, déterminent de quels objets nous parlons à l'aide de nos expressions du langage objet : la structure en question nous fournit les référents des constantes individuelles. Les fonctions étant également interprétées dans la structure, nous pouvons donc déterminer sans univoque la référence ou la désignation de tous nos termes singuliers :

Définition 52 (Désignation de termes). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$ et $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs. La désignation $\overline{h}(t)$ d'un terme « t » de $\mathcal{L}^+$ sous cette assignation de valeurs est définie comme suit :*

1. *si « t » est une variable, $\overline{h}(t)$ est $h(t)$;*
2. *si « t » est une constante « c_k », $\overline{h}(t)$ est $c_k^{\mathcal{A}}$;*
3. *si « t » est un terme de la forme « $f_j(t_1, \ldots t_{\mu(j)})$ », alors $\overline{h}(t)$ est $f_j^{\mathcal{A}}(\overline{h}(t_1), \ldots, \overline{h}(t_{\mu(j)}))$.*

Une interprétation détermine à quels objets se réfèrent nos termes singuliers et quels objets sont représentés par nos variables : c'est ainsi qu'une assignation de valeurs h et une structure $\mathcal{A}$ déterminent la fonction $\overline{h}$ qui associe à tous nos termes singuliers et nos variables leurs désignations (dans une structure et sous une assignation de valeurs).

Comme nous avons vu à la p. 177 de la sct. 9.3, nous pouvons donner des conditions de satisfaction pour des prédicats logiquement complexes, ainsi expliquant leurs significations par la signification de leurs parties.

Au lieu de dire que les phrases ouvertes ne sont ni vraies ni fausses mais vraies ou fausses *de* certains objets, nous pouvons maintenant dire qu'elles sont vraies ou fausses *sous une assignation de valeurs* aux variables dont elles contiennent des occurrences libres. Cette notion de vérité-sous-une-assignation-de- valeurs est la notion clef de la sémantique de la logique des prédicats :

Définition 53 (Vérité sous un assignation de valeurs). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$ et $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}^+$ est vraie sous l'assignation de valeurs h ou que l'assignation de valeurs h satisfait la formule ϕ (abrégé : « $\mathcal{A} \models_h \phi$ ») si et seulement si une des conditions suivantes est remplie :*

S1	*ϕ a la même forme que « $t_1 = t_2$ »*	*et*	$\overline{h}(t_1) = \overline{h}(t_2)$
S2	*ϕ a la même forme que « $R_i(t_1, \ldots, t_{\lambda(i)})$ »*	*et*	$R_i^{\mathcal{A}}(\overline{h}(t_1), \ldots, \overline{h}(t_{\lambda(i)}))$
S3	*ϕ est de la forme $\ulcorner \neg\psi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \not\models_h \psi$
S4	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \wedge \chi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *et* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S5	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \vee \chi \urcorner$*	*et*	*soit* $\mathcal{A} \models_h \psi$ *soit* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S6	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \to \chi \urcorner$*	*et*	*soit* $\mathcal{A} \not\models_h \psi$ *soit* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S7	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \leftrightarrow \chi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *si et seulement si* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S8	*ϕ est de la forme $\ulcorner \forall x_i(\psi) \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ *pour tous les* $a \in |\mathcal{A}|$
S9	*ϕ est de la forme $\ulcorner \exists x_i(\psi) \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ *pour au moins un* $a \in |\mathcal{A}|$

Nous ajoutons le signe de l'assignation de valeurs au signe de conséquence logique et écrivons « $\models_h$ » pour indiquer qu'il ne s'agit pas, comme dans le cas de la logique propositionnelle, d'une relation entre un ensemble de phrases et une phrase, mais d'une relation ternaire entre une structure, une assignation de valeurs et une phrase.

Ces conditions de vérité-sous-une-assignation sont disquotationelles : ce qui est affirmé dans le langage objet est simplement ‹ sre-traduit› s dans le métalangage. Les conditions de vérité disquotationelles

les plus fameuses sont ceux qui ont la forme du schéma **T** de Tarski : [12]

$$\text{« La neige est blanche » est vraie.} \quad\Longleftrightarrow\quad \text{La neige est blanche.}$$

C'est justement la trivialité de cette condition de vérité pour « La neige est blanche » qui nous assure de sa correction. Si nous abrégeons « la neige » par « a » et « ...est blanc » par « Fx », la clause **S2** de la définition de la satisfaction nous donne :

$$\text{« } Fa \text{ » est vraie dans } \mathcal{A} \quad\Longleftrightarrow\quad a^{\mathcal{A}} \in F^{\mathcal{A}}$$

Nous disons qu'une phrase ouverte est *satisfaisable dans une structure* s'il y a une assignation de valeurs qui la satisfait. Elle est *satisfaisable* s'il y a une structure dans laquelle elle est satisfaisable. Un ensemble de phrases Σ est satisfaisable si tous ses membres $\phi \in \Sigma$ le sont. Comme avant, dire que Σ est satisfaisable revient à dire qu'il est logiquement possible que toutes les phrases dans Σ soient vraies ensembles, qu'elles décrivent une possibilité logique : une possibilité logique, dans la logique des prédicats, correspondra donc à une structure et une assignation de valeurs.

S1 et **S2** disent que les phrases qui affirment une identité ou que certaines choses se trouvent dans une certaine relation sont vraies sous une assignation de valeurs, si et seulement si les choses dites identiques sont réellement traitées comme étant identiques par cette assignation de valeurs et les choses dont on dit qu'elles se trouvent dans une certaine relation R_i se trouvent réellement dans cette relation d'après l'assignation de valeurs en question. En bref, elles disent que les phrases atomiques sont vraies si elles représentent les choses comment elles sont d'après l'assignation en question.

Les conditions **S3** à **S7** répètent les clauses que nous avons données pour la sémantique des connecteurs propositionnels, sauf qu'elles sont maintenant appliquées également à des connecteurs qui relient des phrases ouvertes. [13]

Les deux clauses concernant les quantificateurs sont plus difficiles à comprendre. Elles utilisent une notion que nous n'avons pas encore introduite, celle d'une « assignation variée à la place « x » ». Ce que nous voulons dire, en stipulant la condition **S9**, c'est qu'une formule quantifiée existentiellement est vraie dans $\mathcal{A}$ sous h si et seulement s'il y a un objet dans l'univers du discours dont est vraie la phrase ouverte précédée par le quantificateur existentiel. Nous ne savons pas, cependant, si l'assignation h en question assigne cet objet à l'occurrence libre de la variable dans la phrase ouverte. Nous avons donc besoin de changer l'assignation en question, pour rendre sûr qu'elle assigne le bon objet.

Définition 54 (Assignations variées)**.** *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$, $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}+) \to |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs et « x_i » une variable de $\mathcal{L}^+$. Nous définissons*

12. La condition qu'un prédicat de vérité doit rendre vrais toutes les instances du schéma **T**, chez **?**, joue le rôle d'un critère d'adéquation pour une définition de vérité. Selon lui, tout prédicat « Fx » qui ne satisfait pas la condition suivante ne mérite pas le nom d'un prédicat de vérité (cf. p. 52) :

$$\text{« La neige est blanche » est } F \quad\Longleftrightarrow\quad \text{La neige est blanche.}$$

La présence des phrases auto-référentielles, cependant, nous interdit de prendre simplement la totalité de toutes ces équivalences comme définition de la vérité ; en substituant « cette phrase est fausse » dans le schéma **T**, nous obtenons une contradiction C'est pour exclure cette forme d'auto-référentialité que le ‹ détour ‹ à travers la syntaxe est nécessaire.

13. Comme nous les avons définis les connecteurs propositionnels, les connecteurs reliant des phrases ouvertes ne sont pas des connecteurs propositionnels. Strictement parlant, il n'est donc pas vrai que les formules bien-formées de la logique propositionnelle sont aussi des formules bien-formées du calcul des prédicats. Nous aurions pu, cependant, définir les connecteurs dès le début et pour des phrases complètes et pour des phrases ouvertes – dans la logique propositionnelle, nous n'aurions donc traité que d'un de ces cas.

l'assignation variée à la place « x_i » – appelée « $h\binom{x_i}{a}$ » – comme suit :

$$h\binom{x_i}{a}(x_j) \quad := \quad \begin{cases} h(x_j) & i \neq j \\ a & i = j \end{cases}$$

$h\binom{x_i}{a}$ est une fonction qui assigne à toutes les variables sauf « x_i » le même individu que leur assigne h et assigne a à « x_i » – c'est une modification locale de l'assignation h à la place « x_i » qui la force d'assigner a à « x_i ».

S8 dit, en conséquence, qu'une formule universellement quantifiée est vraie sous une assignation de valeurs si et seulement si la phrase ouverte est vraie sous toute modification de cette assignation et donc sous toute assignation d'un élément du domaine à la variable en question. Une quantification universelle est vraie uniquement au cas où la phrase ouverte, gouvernée par le quantificateur universel, est satisfaite en tenant compte de toutes les valeurs possibles de ses variables. **S9**, de l'autre côté, dit qu'une phrase existentielle est vraie sous une assignation de valeurs s'il y a et seulement s'il y a, dans l'univers de discours en question, au moins un individu qui peut être assigné comme valeur à la variable ayant une occurrence libre dans la phrase ouverte en question.

10.3 La validité

Nous avons vu que la définition de la notion de vérité sous un assignation de valeurs consiste en trois parties :

1. une première partie qui affirme la vérité des formules atomiques de la forme « $t_1 = t_2$ » et « $R_i(t_1, \ldots, t_{\lambda(i)})$ » si l'assignation en question attribue au termes les mêmes désignations (premier cas) et au signe de relation une relation entretenue entre les désignations des termes (deuxième cas) ;
2. une deuxième partie qui donne des définitions récursives pour les formules contenant des connecteurs propositionnels ;
3. une troisième partie qui traite des quantificateurs et utilise la notion d'assignation de valeurs variée à une place : une phrase universellement quantifiée est vraie sous une assignation si et seulement si elle est vraie sous toute assignation variée à la place de la variable universellement quantifiée ; une phrase existentiellement quantifiée est vraie sous une assignation si et seulement si elle est vraie sous au moins une telle assignation variée.

Une formule est vraie sous une assignation de valeurs si et seulement si l'assignation des valeurs à ses variables correspond à la manière dont ces variables sont reliées dans la proposition. En examinant les clauses **S1** à **S9**, nous remarquons que leurs résultats pour certaines phrases ne dépendent pas de l'assignation h en question. Si nous choisissons, par exemple, la phrase « $\forall x(0 \leq x)$ » et nous l'évaluons dans la structure des nombres naturels (et avec l'interprétation de « $\leq$ » par la relation de n'être pas plus grand que), selon **S8** le résultat est qu'elle est vraie sous toutes les assignations. La raison pour cela est simple : il n'y a rien à assigner à cette proposition, puisqu'elle ne contient pas d'occurrence libre d'une variable (la seule variable qu'elle contient, « x », a une seule occurrence et celle-là est gouvernée par le quantificateur universel).

Cette observation se généralise : il est vrai de toutes les *phrases* que leurs valeurs de vérité ne dépendent pas d'une assignation de valeurs particulière. Une phrase ne contient pas d'occurrence libre d'une variable, donc il n'y a rien à assigner – si elle est vraie, elle est vraie sous toutes les assignations, si elle est fausse, elle n'est vraie sous aucune. Nous obtenons ainsi la notion de vérité (ne s'appliquant qu'à des phrases complètes) comme cas limite de la notion de vérité-sous-une-assignation (qui s'applique également à des phrases ouvertes) :

Définition 55 (Vérité dans une structure)**.** *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats et $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}^+$ est vraie dans la structure $\mathcal{A}$ si et seulement si ϕ est vraie sous toutes les assignations de valeurs pour $\mathcal{L}^+$:*

$$\mathcal{A} \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{pour tout } h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}| \ : \quad \mathcal{A} \models_h \phi$$

Si ϕ est vraie dans une structure $\mathcal{A}$, nous appelons $\mathcal{A}$ un « modèle » de ϕ.

Cette définition de vérité-dans-une-structure comme vérité-sous-toutes-les-assignations est essentiellement celle de Tarski (1933).

La notion de vérité-dans-une-structure est une généralisation de la notion ordinaire de vérité, qui traite le monde actuel comme seule structure digne d'intérêt. En logique, nous ne nous intéressons pas à ce qui est vrai ou faux dans une structure particulière : nous nous intéressons à ce qui est vrai dans toutes les structures (aux tautologies) et aux relations qu'il y a entre les vérités dans différentes structures (aux relations de conséquence logique).

Pour arriver à une notion de vérité logique, nous devons donc généraliser sur toutes les structures :

Définition 56 (Validité)**.** *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}^+$ est valide ou qu'elle est une vérité logique (de la logique des prédicats) si et seulement si ϕ est vraie dans toutes les structures pour $\mathcal{L}^+$:*

$$\models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{pour tout } \mathcal{A} \ : \quad \mathcal{A} \models \phi$$

De cette notion de validité, nous obtenons une notion de conséquence logique :

Définition 57 (Conséquence logique)**.** *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats. Nous appelons une formule ϕ une conséquence logique d'un ensemble de formules si et seulement si ϕ est vrai dans toutes les structures où toutes ces formules sont vraies :*

$$\Sigma \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{pour tout } \mathcal{A} : \textit{si } \mathcal{A} \models \psi \textit{ pour toutes les formules } \psi \in \Sigma, \textit{ alors } \mathcal{A} \models \phi$$

Cette définition de validité nous permet de compter comme valides ou logiquement vraies des phrases qui ne sont pas des tautologies de la logique propositionnelle. Prenons par exemple la phrase ouverte suivante :

(1) $\quad (x = y) \to (Rxb \to Ryb)$

Interprétée dans une certaine structure, (1) dit, par exemple, que si la valeur de la variable « x » est la même que la valeur de la variable « y », alors si x aime Marie, alors y aime Marie. La vérité de (1) ne dépend pas de la valeur des variable « x » et donc de l'assignation de valeurs en question – quelle que soit l'assignation particulière, si elle assigne le même individu à ces deux variables, alors l'amour de Marie ne distinguera pas leurs référents. Nous voyons également que la vérité de (1) ne dépend pas non plus de l'interprétation particulière de « R », ni de celle de « b » – si nous l'interprétons comme « si les valeurs de « x » et de « y » sont les mêmes, alors si un des deux dépend de Dieu, alors l'autre en dépend également », elle est également vraie. La phrase (1) est donc vraie dans toutes les structures, et sous toutes les assignations, donc logiquement vraie ou valide.

Qu'est-ce qui change si nous préfixons (1) de deux quantificateurs universels qui lient les variables « x » et « y » qui ont des occurrences libres dans (1) ?

(2) $\forall x \forall y\ ((x = y) \rightarrow (Rxb \rightarrow Ryb))$

Nous avons déjà vu que la validité d'une phrase ne dépend jamais d'une assignation de valeurs. Nous appelons « *clôture universelle* » d'une formule ϕ la formule obtenue en adjoignant à ϕ des quantificateurs universels correspondant à chaque variable dont ϕ contient une occurrence libre. La validité ne distingue pas entre une formule et sa clôture universelle :

Théorème 58. *Une formule est valide si et seulement si sa clôture universelle est valide.*

PREUVE Soit $\mathcal{A}$ une structure arbitraire. ϕ est valide si et seulement si ϕ est vraie dans $\mathcal{A}$ sous toutes les assignations de valeurs possibles. Étant donné **S8**, cette condition est nécessaire et suffisante pour la vérité, dans $\mathcal{A}$, de la clôture universelle de ϕ. □

Nous voyons donc que (1) sera valide si et seulement si sa clôture universelle (2) est également valide. Ce théorème nous apprend que nous pouvons nous limiter à la considération de phrases pour décider des questions de validité.

Nous avons comme exemple d'une équivalence logique (conséquence logique réciproque) le suivant : Soit ϕ une formule contenant n occurrences libres de variables différentes « x_1 », ... « x_n » :

(3) $\mathcal{A} \models \phi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{A} \models \ulcorner \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n\ (\phi) \urcorner$

Il est à remarquer que cette équivalence est vraie seulement au niveau de la validité : si ϕ est valide, c'est-à-dire vraie dans toutes les structures et sous toutes les assignations de valeurs, alors sa clôture universelle l'est aussi, et vice versa. Au niveau d'une structure et d'une assignation particulière, une formule et sa clôture universelle peuvent très bien différer. Soit $\mathcal{A}$, par exemple, une structure dont l'univers de discours sont tous les animaux et « Px » est interprété par l'ensemble de tous les pingouins. Sous une assignation particulière – une assignation qui assigne un pingouin à « x », « Px » sera vraie. Mais ceci ne veut pas dire que tous les animaux sont des pingouins, ni que, sous cette assignation, « $\forall x(Px)$ » sera également vraie.

10.4 Les substitutions

La notion d'assignation de valeurs variée à la place « x_i » (cf. p. 202) nous permet de dire quand une assignation de valeurs satisfait une phrase universellement ou existentiellement quantifiée. Imitant la procédure de substitution pour la logique propositionnelle (cf. p. 120), nous pouvons définir des notions analogues en syntaxe : la substitution d'un terme par un autre terme dans un terme ou une formule.

Définition 59 (Substitutions dans des termes)**.** *Si « s » et « t » sont des termes et « x_i » une variable, nous définissons un nouveau terme, que nous appelons « la substitution de « x_i » par « t » dans « s » » ou « « $s(x_i/t)$ » », de manière récursive, comme suit :*

1. *Si « s » est la même variable que « x_i », alors « $s(x_i/t)$ » est « t ».*
2. *Si « s » est une variable autre que « x_i », alors « $s(x_i/t)$ » est « s ».*
3. *Si « s » est une constante, alors « $s(x_i/t)$ » est « s ».*
4. *Si « s » est un terme pour une valeur de fonction « $f_j(t_1, \ldots, t_{\mu(j)})$ » pour des termes « t_1 », ..., « $t_{\mu(j)}$ », alors « $s(x_i/t)$ » est « $f_j(t_1(x_i/t), \ldots, t_{\mu(j)}(x_i/t))$ ».*

En bref, toute occurrence *libre* de « x_i » dans « s » est remplacée par « t ». Nous pouvons maintenant définir ce qu'est la substitution d'un terme par un autre dans une formule :

Définition 60 (Substitutions dans des formules). *Si ϕ est une formule, « t » un terme et « x_i » une variable, nous définissons une nouvelle formule, que nous appelons « le résultat de la substitution de « x_i » pour « t » dans ϕ » ou « $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ », de manière récursive comme suit :*

1. *Si ϕ est « $t_1 = t_2$ » pour deux termes « t_1 » et « t_2 », alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est « $t_1(x_i/t) = t_2(x_i/t)$ ».*
2. *Si ϕ est « $R_i(t_1, \ldots t_{\lambda(i)})$ » pour un signe de relation « R_i » et des termes « t_1 », ...« $t_{\lambda(i)}$ », alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est « $R_i(t_1(x_i/t), \ldots t_{\lambda(i)}(x_i/t))$ ».*
3. *Si ϕ est $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ pour une formule ψ, alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est $\ulcorner\neg\psi(x_i/t)\urcorner$.*
4. *Si ϕ est $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ ou $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ pour des formules ψ et χ, alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est $\ulcorner\psi(x_i/t) \wedge \chi(x_i/t)\urcorner$, $\ulcorner\psi(x_i/t) \vee \chi(x_i/t)\urcorner$, $\ulcorner\psi(x_i/t) \rightarrow \chi(x_i/t)\urcorner$ ou $\ulcorner\psi(x_i/t) \leftrightarrow \chi(x_i/t)\urcorner$ respectivement.*
5. *Si ϕ est $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner$ pour une formule ψ et une variable « x_j », alors*

$$\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner := \begin{cases} \ulcorner\forall x_j \psi(x_i/t)\urcorner & i \neq j \\ \phi & i = j \end{cases} \qquad \ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner := \begin{cases} \ulcorner\exists x_j \psi(x_i/t)\urcorner & i \neq j \\ \phi & i = j \end{cases}$$

En bref, nous remplaçons toute occurrence libre de la variable « x_i » par le terme « t ». Si « x_i » n'a aucune occurrence libre dans ϕ, $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est la même formule que ϕ. Si nous pouvons être assurés grâce au contexte que ϕ contient au moins une occurrence libre de « x », nous écrivons $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ pour $\ulcorner\phi(x/a)\urcorner$: $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ est l'*application* du prédicat $\ulcorner\phi(x)\urcorner$ à a.

En substituant des termes pour des variables à leurs occurrences libres, nous devons faire attention à ne pas lier une variable qui ne l'était pas initialement. Soit ϕ la formule « $\exists x(x \neq y)$ ». Si une structure a un domaine contenant plus qu'un seul individu, il y aura toujours une assignation de valeurs à « y » qui satisfait cette phrase ouverte. Si nous substituons une autre variable « z » pour « y » dans ϕ, nous obtenons « $\exists x(x \neq z)$ », formule qui est également satisfaisable dans toutes les structures à plus d'un individu – le résultat de la substitution $\ulcorner\phi(y/z)\urcorner$ sera vrai si et seulement si ϕ l'est également.

En substituant « y » par « x » nous obtenons un autre résultat : la formule « $\exists x(x \neq x)$ » est une phrase complète et qui n'est vraie dans aucune structure. Le diagnostic de ce changement est que l'occurrence de la variable « y », libre dans ϕ, a été liée dans $\ulcorner\phi(y/x)\urcorner$ – un simple changement 'terminologique' a réduit le nombre total d'occurrences libres de variables. Nous devons exclure ce cas pour les substitutions admissibles.

Nous disons alors que la variable « x » dans ϕ n'était pas *libre pour « y »* et adoptons la définition suivante :

Définition 61 (Substitutions admissibles). *Soit ϕ une formule, « t » un terme et « x_i » une variable. Nous disons que « t » est libre pour « x_i » dans ϕ si l'une des possibilités suivantes est le cas :*

1. *ϕ est une formule atomique ;*
2. *ϕ est $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et « t » est libre pour « x_i » dans ψ ;*
3. *ϕ est $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ ou $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ pour des formules ψ et χ et « t » est libre pour « x_i » dans ψ et dans χ ;*
4. *ϕ est $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner$ et « x_i » n'a pas d'occurrence libre dans ψ.*
5. *ϕ est $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner$, « x_j » n'a pas d'occurrence dans « t » et « t » est libre pour « x_i » dans ψ.*

Cette définition nous apprend qu'un terme « t » est libre pour une variable « x_i » dans une formule ϕ s'il n'y a pas de variable « x_j » dans « t » et aucun quantificateur « $\forall x_j$ » dans ϕ tel qu'une occurrence libre de « x_i » est dans la portée de « $\forall x_j$ ». Reprenons le cas de deux variables, où la substitution de « y » par « x »

n'étais pas admissible. « x » n'est pas libre pour « y » dans « $\exists x(x \neq y)$ » parce que ni la quatrième ni la cinquième possibilité est réalisée : « y » a une occurrence libre dans « $x \neq y$ » (ce qui exclut la quatrième) et « x » (= « x_j ») a une occurrence dans « x » (= « t »).

Intuitivement, un terme n'est pas libre pour une variable dans une formule si une éventuelle substitution du terme pour la variable réduisait le nombre total d'occurrences libres de variables dans la formule. Notre définition formalise cette intuition en définissant les formules dans lesquelles un terme est libre pour une variable : toute formule atomique a cette propriété (condition (1)), cette propriété est préservée sous les connecteurs propositionnels (conditions (2) et (3)) et n'est perdue par une quantification que si cette dernière lie une variable déjà contenu dans le terme. Nous verrons plus tard que les règles d'inférence de spécialisation universelle (SE) et de généralisation existentielle (GE) ne sont applicables qu'à des termes libres pour les variables que nous substituons par eux.

10.5 La logique des prédicats unaires

À part des équivalences logiques du type de (3) nous avons également affaire à un autre type d'équivalences – plus fortes, parce qu'il ne s'agit non seulement des équivalences entre la vérité des formules dans une structure, mais d'équivalences reliant la *satisfaction* de quelques formules dans des structures par des assignations de valeurs. Un exemple d'une telle équivalence est l'interdéfinissabilité des quantificateurs que nous avons déjà rencontrée dans la leçon 9 (cf. p. 187) :

Théorème 62. *Soit ϕ une formule, $\mathcal{A}$ n'importe quelle structure pour la logique des prédicats et h n'importe quelle assignation de valeurs aux variables de $\mathcal{L}^+$:*

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x\,(\phi(x))\urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \neg\exists x\,\neg(\phi(x))\ulcorner \\ \mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x\,(\phi(x))\urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \neg\forall x\,\neg(\phi(x))\ulcorner \end{array}$$

D'autres équivalences définitionnelles de ce dernier type, appelées « règles de passage » par Quine (1950: 142–148), nous disent sous quelles conditions nous pouvons « entrer » et « sortir » des quantificateurs :

Théorème 63. *Soit ϕ une formule et ψ une formule dans laquelle la variable « x » n'a pas d'occurrence libre. Si $\mathcal{A}$ est n'importe quelle structure pour la logique des prédicats et h n'importe quelle assignation de valeurs aux variables de $\mathcal{L}^+$, nous avons les équivalences suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi \vee \psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi) \vee \psi\urcorner \\ \mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi \vee \psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi) \vee \psi\urcorner \\ \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi \wedge \psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi) \wedge \psi\urcorner \\ \mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi \wedge \psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi) \wedge \psi\urcorner \\ \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\psi \rightarrow \phi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \psi \rightarrow \forall x(\phi)\urcorner \\ \mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\psi \rightarrow \phi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \psi \rightarrow \exists x(\phi)\urcorner \\ \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi \rightarrow \psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi) \rightarrow \psi\urcorner \\ \mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi \rightarrow \psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi) \rightarrow \psi\urcorner \end{array}$$

Preuve Des quatre premières équivalences, nous ne prouvons que la première : on en obtient la deuxième par l'interdéfinissabilité de $\ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$ et $\ulcorner\neg\exists x\neg(\phi)\urcorner$ et la troisième et la quatrième par l'interdéfinissabilité des connecteurs.

Soit $\mathcal{A}$ une structure arbitraire et h une assignation de valeurs. Si $\ulcorner\forall x(\phi \vee \psi)\urcorner$ est vraie dans cette structure et sous cette assignation, $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ est vraie sous toute assignation variée à la place « x ». Si c'est le premier disjoint ϕ qui est vrai, rien ne se change dans $\ulcorner\forall x(\phi) \vee \psi\urcorner$. Si c'est le deuxième disjoint ψ, une assignation variée à la place « x » sera juste une assignation ordinaire, puisque la variable « x » n'a pas d'occurrence libre dans ψ. En conséquence, $\ulcorner\forall x(\phi) \vee \psi\urcorner$ sera également vraie sous cette assignation. La converse est prouvée de manière similaire.

La cinquième et la sixième équivalence sont obtenues de la première et la deuxième par l'équivalence entre $\ulcorner\psi \to \phi\urcorner$ et $\ulcorner\phi \vee \neg\psi\urcorner$.

Pour la septième équivalence, notons que $\ulcorner\forall x(\phi \to \psi)\urcorner$ est équivalente à $\ulcorner\forall x(\neg\phi \vee \psi)\urcorner$ et donc, par la première équivalence, à $\ulcorner\forall x(\neg\phi) \vee \psi\urcorner$. Par l'interdéfinissabilité des quantificateurs, les formules de cette dernière forme sont équivalentes à $\ulcorner\neg\exists x(\phi) \vee \psi\urcorner$, dont nous obtenons $\ulcorner\exists x(\phi) \to \psi\urcorner$.

Pour la huitième équivalence, nous transformons $\ulcorner\exists x(\phi \to \psi)\urcorner$ en $\ulcorner\exists x(\neg\phi \vee \psi)\urcorner$, en $\ulcorner\exists x(\neg\phi) \vee \psi\urcorner$, en $\ulcorner\neg\forall x(\phi) \vee \psi\urcorner$ et puis en $\ulcorner\forall x(\phi) \to \psi\urcorner$. □

Les quatre premières équivalences nous permettent de faire 'entrer' et de faire 'sortir' des conjoints et des disjoints de la portée d'un quantificateur s'ils ne contiennent pas de variable qui est liée par celui-ci. La cinquième et sixième équivalence nous permettent de faire la même chose avec les antécédents des implications. La septième et la huitième, au contraire, nous montrent que les antécédents des implications sont implicitement niées et qu'il faut par conséquent changer le quantificateur en question en son quantificateur dual si on veut distribuer un quantificateur à travers une implication dont il quantifie l'antécédent.

Prises ensembles, ces dix équivalences nous permettent de réduire toute formule ne contenant que des prédicats unaires à une forme *purifiée* (où la portée de chaque quantificateur est minimale) et d'appliquer une procédure mécanique pour établir si oui ou non la formule en question est valide (cf. Quine 1950: 121–128). Nous pouvons ainsi prouver la décidabilité de la logique des prédicats unaires, qui a été prouvée la première fois par le mathématicien allemand Leopold Löwenheim en 1915.

Les équivalences prouvées nous montrent comment nous pouvons faire entrer et sortir des quantificateurs à travers des connecteurs *si une des formules ne contient pas d'occurrence libre de la variable qui est quantifiée par le quantificateur correspondant*.[14] La qualification est importante : si nous avons affaire à un prédicat binaire dont les deux places argumentales sont gouvernées par différents quantificateurs, nous ne pouvons pas recourir à ces équivalences. Il n'aura, par exemple, aucune manière de transformer « $\forall x(Fx \to \exists y(Rxy))$ » en « $\exists x(Fx) \to \exists y(Rxy)$ ».

Ceci nous oblige à accepter, pour des relations binaires, des quantifications 'mixtes' (contenant une alternation de quantificateurs universels et existentiels) que nous ne pourrons pas distribuer sur les parties de la phrase ouverte complexe qu'elles gouvernent. Il est important à noter, cependant, que ce cas n'arrivera pas avec des prédicats unaires : dans la logique des prédicats unaires, toute formule peut être transformée (préservant la satisfaction par une assignation) *en forme prénex*, où toutes les quantificateurs se trouvent au début de la formule, et toutes les quantifications peuvent également être transformées en une forme *purifiée*, où la portée de chaque quantificateur ne comprend que des formules atomiques dans lesquelles la variable quantifiée a une occurrence libre.

Nous pouvons, alors, nous demander ce qu'on obtiendrait en nous limitant à des prédicats unaires : Le changement serait dramatique : la logique des prédicats, incluant des signes de relations (binaire), est indécidable (ce que nous verrons dans la leçon 12) ; la logique des prédicats unaires, par contre, est

14. Ceci n'est pas vrai de toutes les équivalences notées. La deuxième et la troisième sont valides peut importe si oui non ψ contient des occurrences libres de la variable « x ». Les formules « $\forall x(Fx \vee Gx) \to (\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx))$ » et « $(\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)) \to \exists x(Fx \wedge Gx)$ », par contre, ne sont pas valides.

décidable et permet un test de validité simple et efficace.[15]

Théorème 64 (Löwenheim (1915))**.** *La logique des prédicats unaires est décidable.*

Preuve Nous notons d'abord que, grâce à l'équivalence logique de toute formule avec sa clôture universelle, le problème de trouver une procédure de décision peut se limiter aux phrases, formules qui ne contiennent pas d'occurrence libre de variables. Nous pouvons maintenant appliquer, à n'importe quelle phrase ϕ de $\mathcal{L}^+$ ne contenant que des prédicats unaires, les règles suivantes pour déterminer si elle est valide.

1. Si ϕ ne contient pas de quantificateurs (et est alors appelée « booléen »), alors ϕ est valide si et seulement si la configuration de ces prédicats correspond à une tautologie propositionnelle (remplaçant « Fx » par « p », « Gx » par « q » etc.).[16]
2. Si ϕ est $\ulcorner\exists x(\psi)\urcorner$ pour une phrase booléenne ψ, alors ϕ est valide si et seulement si ψ est valide d'après (1).
3. Si ϕ est $\ulcorner\neg\exists x(\psi)\urcorner$ pour une phrase booléenne ψ, alors ϕ est valide si et seulement si ψ est inconsistante d'après (1).
4. Si ϕ est une disjonction de phrases de la forme $\ulcorner\neg\exists x(\psi_i)\urcorner$ pour des phrases booléennes ψ_i, alors ϕ est valide si au moins un de ces disjoints est valide d'après (3).
5. Si ϕ est l'implication d'une phrase du type (2) par une ou plusieurs phrases du type (2), alors ϕ est valide si et seulement si une des phrases de son antécédent implique, dans le sens de (1), la phrase qui est son conséquent.
6. Si ϕ est une conjonction de phrases du type (2) à (5), alors ϕ est valide si et seulement si chacun de ces conjoints est valide d'après (2) à (5).

La condition (1), en effet, réduit le problème de la détermination de la validité d'une phrase contenant des occurrences libres d'une seule variable et ne contenant aucun quantificateur au problème correspondant de la logique propositionnelle.

Il nous reste à montrer que toutes les phrases de la logique des prédicats unaires tombe sous une des catégories mentionnées. Utilisant le fait que toute phrase de la logique des prédicats unaires est équivalente à une phrase en forme prénex, nous montrons comme suit que notre test détermine la validité de n'importe quelle phrase.

Soit ϕ une phrase arbitraire ne contenant que des prédicats unaires :

1. Si ϕ contient des quantificateurs universels ou des négations de quantificateurs universels, nous appliquons les lois d'interdéfinissabilité des quantificateurs pour les changer en des quantificateurs existentiels.
2. Nous transformons le résultat de (1) dans une forme normale conjonctive, à savoir une conjonction de disjonctions. D'après (6), le teste de validité sera appliqué aux conjoints individuellement.
3. Toute disjonction qui apparaît dans la formule sera une disjonctions de phrases du type (2) ou (3). Puisque le quantificateur existentiel distribue sur les disjonctions, toute disjonction sera une disjonction d'au plus une phrase du type (2) et de quelques (peut-être plusieurs) disjonctions du type (3). Il ne reste que quatre cas possible :
   (i) Si ϕ n'est qu'une seule phrase du type (3), elle tombe sous (3).
   (ii) Si ϕ est une disjonction de plusieurs phrases du type (3), elle tombe sous (4).

15. Dans la présentation de la procédure de décision pour la logique des prédicats unaires, je suis Quine (1950: 121–128).

16. « $Fx \vee \neg Fx$ » et « $(Fx \wedge \neg Fx) \rightarrow Gx$ », par exemple, sont valides pour cette raison. S'il y a une interprétation propositionnelle qui rend vraie la formule propositionnelle correspondante, alors il y aura, dans toute structure (qui, d'après nos définitions, contiendra au moins un objet) une assignation de valeurs qui rend vraie la phrase ouverte. S'il n'y a, par contre, pas d'interprétation propositionnelle, il y aura une interprétation qui rend la phrase ouverte faux de cet objet.

(iii) Si ϕ ne contient qu'une seule phrase du type (2), elle tombe sous (2).
(iv) Si ϕ contient plusieurs phrases du type (3) et une seule phrase du type (2), elle tombe sous (5), puisque « $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n \vee q$ » est équivalent à « $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ ».

Nous voyons donc que notre test de validité s'applique à toutes les phrases de la logique des prédicats unaires et pouvons énoncer le théorème. Nous venons d'esquisser une procédure de décision, applicable à n'importe quelle formule de $\mathcal{L}^+$. □

10.6 Un calcul axiomatique pour la logique des prédicats

Même si la syntaxe de leurs deux langues $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^+$ est différente, la logique propositionnelle est dans un certain sens contenue dans la logique des prédicats. Cela veut dire que nous pouvons, de manière absolument analogue à ce que nous avons fait dans la leçon 5 (cf. pp. 80 et suivants), définir des interprétations, maintenant appelées *« interprétations propositionnelles »*, pour des formules de la logique des prédicats. Nous pouvons alors appeler *« tautologie propositionnelle »* toute formule de $\mathcal{L}^+$ que l'on obtient en substituant aux phrases simples d'une tautologie de la logique propositionnelle des formules de la logique des prédicats. Une définition plus rigoureuse est la suivante :

Définition 65. *Soit ϕ une tautologie d'une langue $\mathcal{L}$ pour la logique propositionnelle et « p_1 », « p_2 », ... « p_n » toutes les phrases simples contenues dans ϕ. Une tautologie propositionnelle d'une langue $\mathcal{L}^+$ de la logique des prédicats est une formule $\ulcorner\phi(\alpha_1/p_1, \alpha_2/p_2, \ldots, \alpha_n/p_n)\urcorner$ que l'on obtient en substituant à « p_1 », « p_2 »,... « p_n » n'importe quelles formules « α_1 », « α_2 », ..., « α_n » bien-formées de $\mathcal{L}^+$.*

Il est facile de montrer qu'une tautologie propositionnelle d'une langue $\mathcal{L}^+$ est valide dans la logique des prédicats.

Le calcul axiomatique que nous allons donner pour axiomatiser les formules valides de la logique des prédicats consiste en des axiomes de trois types. Pour que nos axiomes soient valides (et donc que le calcul soit correct), il est nécessaire qu'ils soient vrais dans toutes les structures. Par conséquent, leur vérité ne peut pas dépendre d'une interprétation particulière des symboles non-logiques. Le premier type d'axiomes regroupe les formules dont la vérité ne dépend que des connecteurs ; le deuxième, celles qui sont vraies en vertu de la relation d'identité « $=$ », et le troisième les formules qui sont vraies grâce aux quantificateurs qu'elles contiennent.

Définition 66 (HC^+). *Les axiomes du calcul HC^+ consistent en toutes les formules de $\mathcal{L}^+$ suivantes :*

TP *toutes les tautologies propositionnelles ;*

ID *les formules ayant la forme de l'un des axiomes d'identité suivants (pour des variables « x », « y », « z », « w », « x_1 », « x_2 », ..., « $x_{\lambda(i)}$ », « y_1 », « y_2 », ..., « $y_{\lambda(i)}$ », « z_1 », « z_2 », ..., « $z_{\mu(j)}$ », « w_1 », « w_2 », ..., « $w_{\mu(j)}$ » et tous les $i \in \mathbf{I}$, $j \in \mathbf{J}$) :*

ID₁ $x = x$ *réflexivité*
ID₂ $y = z \rightarrow (y = w \rightarrow z = w)$ *confluence*
ID₃ $(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_{\lambda(i)} = y_{\lambda(i)}) \rightarrow (R_i(x_1, \ldots, x_{\lambda(i)}) \rightarrow R_i(y_1, \ldots, y_{\lambda(i)}))$ *indiscernabilité*
ID₄ $(z_1 = w_1 \wedge \ldots \wedge z_{\mu(j)} = w_{\mu(j)}) \rightarrow f_j(z_1, \ldots, z_{\lambda(i)}) = f_j(w_1, \ldots, w_{\mu(j)})$ *fonctionnalité*

QU *les formules ϕ qui ont la forme de la phrase suivante, où ψ est une formule et « t » un terme libre pour « x » dans ψ, et ϕ est une formule qui ne contient pas d'occurrence libre de la variable « x » :*

Qu₁ $\forall x(\psi) \rightarrow \psi(x/t)$ *instanciation*
Qu₂ $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \forall)$ *simplification*

HC^+ *a deux règles d'inférences :*

MP *la première règle d'inférences de* HC^+ *est la règle du modus ponens* MP :

$$\frac{\phi, \ulcorner \phi \to \psi \urcorner}{\psi}$$

$\forall$ *la deuxième règle d'inférences de* HC^+ *est appelée « généralisation » ou « $\forall$ » :*

$$\frac{\phi \to \psi}{\phi \to \forall x(\psi)} \qquad \textit{si « } x \textit{ » n'a pas d'occurrence libre dans } \phi$$

Les deux premiers axiomes d'identité, **ID₁** et **ID₂**, impliquent que la relation désignée par « = » (dans toutes les structures) est une relation d'équivalence, c'est-à-dire une relation réflexive, transitive et symétrique.[17] Le principe d'indiscernabilité des identiques est parfois appelé « loi de Leibniz ».[18] Le principe de fonctionnalité nous assure que nos signes de fonctions désignent réellement des fonctions, c'est-à-dire que leurs valeurs sont uniquement déterminées par leurs arguments.[19] **ID₃** et **ID₄** ensemble nous permettent de substituer des variables qui sont assignées au même objet dans des formules atomiques.

Puisque les variables et les signes de relations et de fonctions dans **ID₁** à **ID₄** ne sont pas spécifiées, il s'agit de schémas d'axiomes, schémas qui déterminent chacun une infinité d'axiomes : **ID₁**, par exemple, nous donne un axiome pour chaque variable dans notre langue et **ID₃** pour chaque variable dans notre langue et pour chaque signe de relation.

Qu nous dit que nous pouvons toujours instancier une variable universellement quantifiée par un terme. Pour voir pourquoi la restriction aux termes libres pour la variable est nécessaire, considérons la formule « $\exists y(y \neq x)$ » – dans cette formule, « y » n'est pas libre pour « x ». Nous ne pouvons donc pas dériver de **Qu** que la phrase suivante est un axiome :

(4) $\forall x \exists y(y \neq x) \to \exists y(y \neq y)$

Il est avantageux que (4) ne soit pas un axiome, car (4) n'est pas valide : il existe des structures contenant plus de deux éléments (où l'antécédent est donc vrai), mais qui ne contiennent pas d'individus qui manquent d'être identique à eux-mêmes (aucune structure ne contient de tels élément, sinon le premier axiome d'identité ne serait pas valide).

La validité de **Qu** dépend du fait qu'une formule de la logique des prédicats est valide si et seulement si sa clôture universelle l'est aussi **Qu** nous donne trois autres règles d'inférences dérivées, qui peuvent aussi être démontrées comme valides. Prises ensemble, il s'agit des règles d'inférences pour l'introduction et l'élimination des quantificateurs que nous utiliserons pour la déduction naturelle :

GU généralisation universelle :

$$\frac{\phi}{\ulcorner \forall x(\phi) \urcorner} \qquad \text{si « } x \text{ » n'a pas d'occurrence libre avant l'application de cette règle}$$

17. La symétrie s'ensuit de la confluence et en échangeant « y » pour « z » ; la réflexivité nous assure de l'antécédent. La transitivité s'ensuit de la confluence et de la symétrie, en remplaçant « y » par « z » et « z » par « y » – la symétrie nous permet alors de changer « z » et « y » dans l'antécédent.

18. Sa converse, beaucoup plus controversée en métaphysique, est le principe de l'identité des indiscernables nous permettant d'identifier tout ce qui ne peut pas être distingué.

19. Comme on l'a vu dans la n. 24 à la p. 46, cela veut dire que l'argument d'une fonction ***détermine*** sa valeur. Mathématiquement, une fonction qui relie deux ensembles, $f : A \to B$, est une relation (un ensemble de paires dont le premier membre appartient à A et le deuxième à B ($\{\langle a, b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$), qui est telle que le choix de a détermine celui de b : il n'est pas le cas qu'on a $\langle a, b'\rangle$ et $\langle a, b''\rangle$ pour deux $b', b'' \in B$ différents : $(f(a) = b' \wedge f(a) = b'') \to b' = b''\}$.

SU spécialisation universelle :

$$\frac{\ulcorner \forall x(\phi) \urcorner}{\ulcorner \phi(x/t) \urcorner} \qquad \text{si « } t \text{ » est libre pour « } x \text{ » dans } \phi$$

GE généralisation existentielle :

$$\frac{\ulcorner \phi(x/t) \urcorner}{\ulcorner \exists x(\phi) \urcorner} \qquad \text{si « } t \text{ » est libre pour « } x \text{ » dans } \phi$$

SE spécialisation existentielle :

$$\frac{\ulcorner \exists x(\phi) \urcorner}{\ulcorner \phi(x/t) \urcorner} \qquad \text{si « } x \text{ » n'a pas d'occurrence libre avant l'application de cette règle}$$

Nous reviendrons sur ces règles d'inférences en relation avec la méthode de la déduction naturelle pour la logique des prédicats.

10.7 L'identité

Points à retenir

1. L'alphabet d'une langue pour la logique des prédicats contient des connecteurs, le signe d'identité, des variables, des quantificateurs, des signes de relations, des signes de fonctions et des constantes individuelles. Les trois dernières catégories composent les signes non-logiques du langage.
2. Les quantificateurs de la logique des prédicats sont de la même catégorie syntaxique que les prédicats de deuxième ordre.
3. Une variable a une occurrence libre dans une formule si elle ne se trouve pas partout dans la portée d'un quantificateur correspondant.
4. Une structure pour un langage de la logique des prédicats consiste d'un univers de discours et d'une interprétation de ses signes non-logiques.
5. Une interprétation d'une constante lui assigne un élément de l'univers de discours ; l'interprétation d'un signe de relation lui assigne une relation dans cet univers ; et l'interprétation d'un signe de fonction lui assigne une fonction qui prend ses arguments et ses valeurs dans cet univers de discours.
6. Une assignation de valeurs dans une structure assigne à toute variable de la langue un élément de l'univers de discours.
7. La notion clef de la sémantique de la logique des prédicats est celle de la satisfaction d'une phrase ouverte par une assignation de valeurs dans une structure. La phrase ouverte est alors appelée « vraie sous cette assignation » (dans cette structure).
8. Une formule est vraie dans une structure si elle est et seulement si elle est vraie sous toutes les assignations de valeurs dans cette structure. Une telle structure est appelée un « modèle » de la formule. Une formule est valide si et seulement si elle est vraie dans toutes les structures.
9. La substitution d'un terme pour une variable dans une formule substitue ce terme à toute occurrence de la variable dans la formule. Pour qu'une telle substitution compte comme instanciation, il faut que le terme soit libre pour la variable dans la formule, c'est-à-dire qu'il ne contient pas de variable qui devient liée par la substitution.
10. L'ordre des quantificateur est important : « $\exists y \forall x\ (Rxy)$ » implique formellement « $\forall x \exists y\ (Rxy)$ », mais la converse est fausse.