Chapitre 11

La méthode des arbres

11.1 Les phrases quantifiées

Nous avons remarqué que, étant donné un univers de discours, une quantification universelle est vraie si (et seulement si) la phrase ouverte gouvernée par le quantificateur universel est vraie de tous les objets dans cet univers de discours. Nous avons également dit qu'une phrase ouverte conjonctive est vraie d'un objet si cet objet et seulement si cet objet satisfait les deux phrases ouvertes qui forment la conjonction. Une phrase qui est gouvernée par un quantificateur existentiel, par contre, dit qu'au moins un objet dans l'univers de discours satisfait la phrase ouverte. Une disjonction de phrases ouvertes est également satisfaite si un objet de l'univers de discours satisfait au moins un de ses disjoints. Nous sommes ainsi amenés à l'observation suivante :

Théorème 67. *Soit $\mathcal{A}$ une structure dont l'univers de discours $|\mathcal{A}| = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ est fini et $\ulcorner \phi(x) \urcorner$ une formule qui contient une occurrence libre de la variable « x ». Nous avons les équivalences sémantiques suivantes :*

$$\begin{array}{lcl} \ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner \phi(a_1) \wedge \phi(a_2) \wedge \ldots \wedge \phi(a_n) \urcorner \\ \ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner \phi(a_1) \vee \phi(a_2) \vee \ldots \vee \phi(a_n) \urcorner \end{array}$$

où « a_1 », « a_2 », ..., « a_n » sont des constantes individuelles désignant tous les membres de $|\mathcal{A}|$.

Preuve Le théorème s'ensuit de nos conditions **S3** et **S8** pour qu'une formule soit vraie dans une structure. □

[1] Une quantification universelle sur un domaine fini est équivalente à une conjonction, une quantification existentielle sur un tel domaine est équivalente à une disjonction. La restriction aux univers de discours finis est importante parce que notre langage ne considère pas des conjonctions ou disjonctions « infinies » comme bien-formées.

1. Il s'agit d'équivalences sémantiques : dans toute structure où « a_1 », « a_2 », ..., « a_n » nomment tous les individus, les phrases à gauche du signe d'équivalence méta-linguistique sont vraies si et seulement si les phrases à sa droite le sont. Il ne s'agit pas de théorèmes, puisque nous aurions besoin, pour prouver ces équivalences, d'une *prémisse* qui dit que l'univers de cette structure est fini. Même si, par exemple, il n'y a que deux chiens et ils sont les deux méchants, nous ne pouvons pas inférer de « Fido est méchant » et de « Fodi est méchant » que tous les chiens sont méchants. Pour pouvoir faire cela, nous avons besoin d'une prémisse qui dit que Fido et Fodi sont les seuls chiens qu'il y a.

Ne considérant que des structures avec des domaines finis, la définissabilité est mutuelle : une conjonction est vraie si tous et seulement si tous ses conjoints sont vrais ; une disjonction est vraie si au moins un et seulement si au moins un de ses disjoints est vrai. Si nous appelons une *instanciation* d'une phrase (universellement ou existentiellement) quantifiée toute formule qui résulte de la phrase ouverte en remplaçant la variable gouvernée par le quantificateur par une constante individuelle, nous pouvons constater :

F10 Si une quantification universelle $\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner$ est vraie, alors toutes ses instanciations $\ulcorner\phi(a)\urcorner$, pour une constante individuelle « a », sont vraies.

F11 Si une quantification universelle $\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner$ est fausse, alors au moins une instanciation $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ est fausse.

F12 Si une quantification existentielle $\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner$ est vraie, alors au moins une instanciation $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ est vraie.

F13 Si une quantification existentielle $\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner$ est fausse, alors toutes ses instanciations $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ sont fausses.

Comme nous l'avons fait pour la logique propositionnelle, nous utiliserons ces faits pour construire des arbres testant la consistance d'une certaine phrase ou d'un certain ensemble de phrases appartenant au langage de la logique des prédicats.

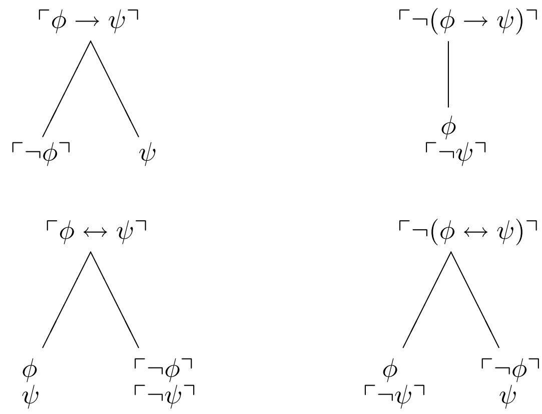
11.2 La méthode des arbres pour la logique des prédicats

Dans la leçon 5 (cf. pp. 95 et suivants), nous avons rencontré une méthode graphique et intuitive pour tester la consistance d'un ensemble de phrases. Les règles de construction d'arbres nous ont permis, pour n'importe quelle formule propositionnelle, de construire un arbre qui ou bien nous montre qu'il n'y a aucune interprétation qui rend vraie toutes les phrases initiales ou bien nous donne un modèle, c'est-à-dire une interprétation sous laquelle elles sont toutes vraies. Rappelons ces règles de construction d'arbres :

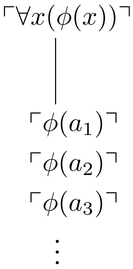
$$\begin{array}{c}\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner\\ |\\ \phi\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner\\ |\\ \phi\\ \psi\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{c}\ulcorner\neg(\phi\wedge\psi)\urcorner\\ \diagup\quad\diagdown\\ \ulcorner\neg\phi\urcorner\qquad\ulcorner\neg\psi\urcorner\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\ulcorner\phi\vee\psi\urcorner\\ \diagup\quad\diagdown\\ \phi\qquad\quad\psi\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{c}\ulcorner\neg(\phi\vee\psi)\urcorner\\ |\\ \ulcorner\neg\phi\urcorner\\ \ulcorner\neg\psi\urcorner\end{array}$$



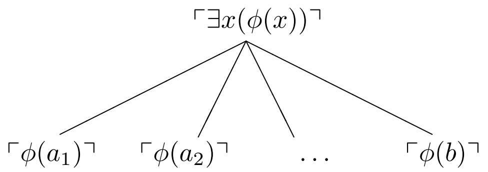
En analogie avec les règles de construction d'arbres pour la conjonction et la disjonction, nous adoptons, motivés par **F10**, la règle suivante pour les phrases universellement quantifiées :



pour toutes les constantes « a_i » apparaissant sur cette branche

La vérité d'une quantification universelle nous commet à la vérité de toutes ses instanciations. Il est important que le quantificateur universel soit instancié pour *toutes* les constantes qui apparaissent sur la branche, y inclus les constantes qui n'apparaissent seulement plus tard. La raison pour ceci est qu'une branche qui ne se ferme pas est censée représenter un modèle pour la formule en question – c'est pourquoi la méthode des arbres est une méthode pour tester la consistance d'une formule ou d'un ensemble de formules. Or, nous n'avons pas de garantie d'avoir décrit un modèle pour la formule universellement quantifiée en question avant que nous l'avons instanciée pour toutes les constantes que nous utilisons pour décrire le modèle en question. Si nous introduisons une nouvelle constante après avoir appliqué la règle du quantificateur universel, par exemple par une application de la règle pour le quantificateur existentiel que l'on discutera après, nous devons revenir en arrière et faire l'instanciation correspondante.

Comme le montre **F12**, une quantification existentielle nous donne le droit de choisir l'élément de l'univers de discours qui instancie la phrase ouverte existentiellement quantifiée. Nous pouvons donc adopter comme règle de construction d'arbres la suivante :



pour toutes les constantes « a_i » de la branche et une nouvelle constante « b »

Si notre branche contient deux constantes individuelles, par exemple, cet règle nous dit d'ouvrir trois nouvelles branches.

Nous instancions la quantification existentielle avec toutes les constantes apparaissant sur la branche : si nous omettions une, nous ne pourrions pas conclure l'insatisfaisabilité de la phrase ouverte existentiellement quantifiée du fait que toutes les branches se ferment – au moins une possibilité n'aurait pas été considérée. Nous avons également besoin d'une nouvelle constante (« nouvelle » dans le sens qu'elle n'apparaît nulle part sur la branche avant l'application de la règle) pour ne pas devoir conclure que les trois phrases « Pa », « Pb » et « Pc » soient inconsistantes avec « $\exists x \neg Px$ » – le fait que tous les éléments considérés de l'univers de discours étaient P ne veut pas dire qu'il n'y ait aucun qui n'est pas P !

C'est une bonne question en philosophie de logique, dont nous discuterions dans la sct. 12.1 du prochain chapitre, comment nous devons interpréter cette nouvelle variable « b ». Est-ce qu'elle désigne un individu arbitraire, où nous sert-elle de parler de n'importe quel individu de notre domaine de quantification, sans nous obliger de décider lequel ? À première vue, les deux interprétations semblent défendables. Pour rendre plausible la deuxième, supposons que nous avons parlé de Sam, de Marie, et nous avons dit qu'ils s'aiment. Nous devons maintenant évaluer l'affirmation qu'il existe au moins un chien. Il y a trois possibilités : soit Sam est un chien, soit Marie est un chien, soit une troisième chose dont nous n'avons pas encore parlée est un chien. En appelons ce chien « Fido », nous n'excluons aucune de ces trois possibilités, parce que nous ne nions pas que Fido est identique avec Sam, ni que Fido est identique avec Marie. Nous ne pouvons pas, cependant, analyser tous les cas de cette manière, ce qui supporte la première hypothèse. Imaginons par exemple que la phrase à évaluer n'affirme pas l'existence d'un chien, mais l'existence d'une chose qui ne porte pas de nom. Il ne semble guère satisfaisant de paraphraser l'introduction de la nouvelle constante comme « appelons cette chose de tel-et-tel nom … ». Nous reviendrons à ces sujets.

Etant donné l'interdéfinissabilité des connecteurs, **F11** et **F13**, les règles de construction d'arbres pour les négations de phrases quantifiées s'ensuivent de celle pour les quantificateurs opposés. Pour la négation d'un quantificateur universel, nous avons :

$$\ulcorner \neg\forall x(\phi(x))\urcorner$$

$$\ulcorner \neg\phi(a_1)\urcorner \quad \ulcorner \neg\phi(a_2)\urcorner \quad \ldots \quad \ulcorner \neg\phi(b)\urcorner$$

pour toutes les constantes « a_i » de la branche et une nouvelle constante « b »

Pour la négation d'une phrase existentiellement quantifiée, nous avons une variante de la règle pour le quantificateur universel :

$$\ulcorner \neg\exists x(\phi(x))\urcorner$$

$$\begin{array}{c} | \\ \ulcorner \neg\phi(a_1)\urcorner \\ \ulcorner \neg\phi(a_2)\urcorner \\ \ulcorner \neg\phi(a_3)\urcorner \\ \vdots \end{array}$$

pour toutes les constantes « a_i » apparaissant sur cette branche

Comme ces règles pour les quantificateurs nous obligent à prendre en compte toutes les constantes individuelles apparaissant sur une branche, l'ordre de leur application devient important. Il ne s'agit pas d'une importance théorique, mais plutôt d'un conseil pratique, qui peut réduire considérablement la complexité d'un arbre. Nous ne sommes pas obligés, cependant, d'appliquer les règles dans un certain ordre pour prouver ou déprouver une phrase. Mais il est souvent profitable d'appliquer les règles pour le quantificateur universel et la négation du quantificateur existentiel en dernier.

Pour faire l'arbre d'une phrase ou d'un ensemble de phrases, nous appliquons d'abord toutes les neuf règles pour les connecteurs. Ensuite, nous appliquons les règles pour le quantificateur existentiel et la négation du quantificateur universel, c'est-à-dire les règles qui multiplient le nombre de branches. À ces nouvelles branches, nous appliquons les règles pour le quantificateur universel et la négation du quantificateur existentiel, c'est-à-dire les règles qui nécessitent la considération de toutes les constantes apparaissant sur la branche. Si nous pouvons alors fermer toutes les branches de l'arbre résultant, nous pouvons conclure que l'ensemble de phrases initial est inconsistant. Autrement, nous cherchons des connecteurs que nous n'avons pas encore traités et répétons la procédure. Représentée schématiquement, la procédure est donc la suivante :

1. Est-ce qu'il y a des connecteurs reliant des phrases complètes ? Appliquons les règles pour les connecteurs.
2. Est-ce qu'il y a des formules qui commencent par « $\exists$ » ou par « $\neg\forall$ » ? Appliquons les règles correspondantes pour ouvrir de nouvelles branches pour toutes les constantes et une nouvelle.
3. Est-ce qu'il y a des formules qui commencent par « $\forall$ » ou par « $\neg\exists$ » ? Appliquons les règles correspondantes pour faire des instanciations pour toutes les constantes.
4. Est-ce qu'il y a des connecteurs reliant des phrases complètes ? Retournons à l'étape 1).
5. Est-ce qu'il y a des formules qui commencent par « $\exists$ » ou par « $\neg\forall$ » ? Retournons à l'étape 2).
6. Est-ce qu'il y a des formules qui commencent par « $\forall$ » ou par « $\neg\exists$ » ? Retournons à l'étape 3).

L'arbre n'est entièrement développé qui si les trois conditions suivantes sont toutes remplies :

1. aucune règle pour des connecteurs n'est applicable ;
2. nous avons crées de nouvelles branches pour toutes les formules commençant par « $\exists$ » ou par « $\neg\forall$ » pour toutes les constantes sur les branches correspondantes ;
3. nous avons ajouté toutes les instanciations des formules commençant par « $\forall$ » ou par « $\neg\exists$ » pour toutes les constantes sur les branches correspondantes.

Un arbre entièrement développé se ferme si nous trouvons des formules et leurs négations sur toutes les branches ; si cela n'est pas le cas, il est ouvert.

11.3 Les preuves par la méthode des arbres

Considérons, par exemple, la formule « $\exists x \forall y\ (Rxy) \wedge \exists x \forall y\ \neg(Rxy)$ ». Nous commençons à construire son arbre en appliquant la règle pour la conjonction :

$$\begin{array}{c} \checkmark \quad \exists x \forall y\ (Rxy) \wedge \exists x \forall y\ \neg(Rxy) \\ | \\ \exists x \forall y\ (Rxy) \\ \exists x \forall y\ \neg(Rxy) \end{array}$$

A ce stade, nous appliquons la règle pour le quantificateur existentiel à la première de nos deux formules existentiellement quantifiées, c'est-à-dire à « $\exists x \forall y\ (Rxy)$ ». Comme notre seule branche ne contient aucune constante individuelle, nous n'avons qu'à introduire une nouvelle constante, que nous abrégeons par « a » :

$$\begin{array}{c}
\checkmark\ \exists x \forall y\ (Rxy) \wedge \exists x \forall y\ \neg(Rxy) \\
| \\
{}^{a}\checkmark\ \exists x \forall y\ (Rxy) \\
\exists x \forall y\ \neg(Rxy) \\
| \\
\forall y\ (Ray)
\end{array}$$

Pour nous souvenir que nous avons instancié la quantification existentielle avec la constante « a », nout l'écrivons au dessus du crochet qui marque la formule comme traitée.

D'après nos règles de procédure, nous devons traiter le deuxième quantificateur existentiel « $\exists x \forall y\ \neg(Rxy)$ » avant d'appliquer la règle pour le quantificateur universel. Nous introduisons alors une nouvelle constante, « b » et instancions la deuxième quantification existentielle également avec notre ancienne constante « a », obtenant deux branches :

$$\begin{array}{c}
\checkmark\ \exists x \forall y\ (Rxy) \wedge \exists x \forall y\ \neg(Rxy) \\
| \\
{}^{a}\checkmark\ \exists x \forall y\ (Rxy) \\
{}^{a,b}\checkmark\ \exists x \forall y\ \neg(Rxy) \\
| \\
\forall y\ (Ray) \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\forall y \neg(Ray) \qquad \forall y \neg(Rby)
\end{array}$$

Après avoir traité les quantifications existentielles, nous pouvons maintenant instancier les quantifications universelles. Ceci nous oblige de considérer toutes les constantes qui apparaissent sur les deux branches respectives.

Sur la branche gauche, nous n'avons qu'une seule constante, « a » : les deux instanciations des quantifications universelles « $\forall y\ (Ray)$ » et « $\forall y \neg(Ray)$ » nous donnent donc « Paa » et « $\neg Paa$ » – la branche se ferme. A droite, nous avons deux constantes et obtenons « Paa » et « Pab » de la première quantification universelle « $\forall y\ (Ray)$ » et « $\neg Pba$ » et « $\neg Pbb$ » de la deuxième, « $\forall y \neg(Ray)$ » – la branche ne se ferme pas. Nous sommes arrivés à l'arbre suivant :

$$\begin{array}{c}
\checkmark\ \exists x \forall y\ (Rxy) \wedge \exists x \forall y\ \neg(Rxy) \\
| \\
{}^{a}\checkmark\ \exists x \forall y\ (Rxy) \\
{}^{a,b}\checkmark\ \exists x \forall y\ \neg(Rxy) \\
| \\
{}^{a}\checkmark\ \forall y\ (Ray)\ {}^{a,b}\checkmark \\
\diagup \qquad \diagdown
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
{}^{a}\checkmark\ \forall y \neg(Ray) & \forall y \neg(Rby)\ {}^{a,b}\checkmark \\
| & | \\
Raa & Raa \\
 & Rab \\
| & | \\
\neg Raa & \neg Rba \\
\nabla & \neg Rbb
\end{array}$$

Nous ne pouvons plus appliquer aucune règle à la branche droite et nous avons trouvé un modèle pour la phrase « $\exists x \forall y\ (Rxy) \wedge \exists x \forall y\ \neg(Rxy)$ » – une structure $\mathcal{A}$, où $R^{\mathcal{A}}$ relie a à a et a à b et rien d'autre. Un modèle pour la phrase initiale serait donc par exemple une structure qui consiste d'un univers de discours de deux personnes, Sam et Marie, et d'une relation exprimée par « x aime y » qui est telle que Sam aime soi-même et Marie, et Marie ne s'aime pas et n'aime pas non plus Sam.

Comme dans le cas de la logique propositionnelle, nous pouvons également utiliser la méthode des arbres pour vérifier la validité d'une proposition : une phrase sera valide si et seulement si sa négation est inconsistante, c'est-à-dire si toutes les branches de l'arbre pour cette négation se ferment.

Vérifions, par exemple, la validité de la phrase « $\forall x\ (Rxx \rightarrow \exists y Rxy)$ ». Cette phrase ne contient aucune constante individuelle – c'est pourquoi nous commençons par instancier sa négation avec une nouvelle constante « a » et nous appliquons la règle pour les formules $\ulcorner \neg(\phi \rightarrow \psi) \urcorner$:

$$\begin{array}{c}
{}^{a}\checkmark\ \neg\forall x\ (Rxx \rightarrow \exists y Rxy) \\
| \\
\checkmark \neg(Raa \rightarrow \exists y Ray) \\
| \\
Raa \\
{}^{a}\checkmark\ \neg\exists y Ray
\end{array}$$

Comme « a » est la seule constante, l'instanciation nous donne « Paa » et nous pouvons fermer la (seule) branche :

$$\begin{array}{c}
{}^{a}\checkmark\ \neg\forall x\ (Rxx \rightarrow \exists y Rxy) \\
| \\
\checkmark \neg(Raa \rightarrow \exists y Ray) \\
| \\
Raa \\
{}^{a}\checkmark\ \ \neg\exists y Ray \\
| \\
\neg Raa \\
\nabla
\end{array}$$

La branche unique est fermée : la phrase est inconsistante et sa négation est valide.

Avec la méthode des arbres, nous pouvons également tester la validité d'une inférence. Prenons l'argument qui a comme prémisses « $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ » et « $\neg\exists x(Gx)$ », et a « $\neg\exists x(Fx)$ » comme conclusion. Pour vérifier si oui ou non la conclusion est une conséquence logique des prémisses (si oui ou non il est le cas que $\{\forall x(Fx \rightarrow Gx), \neg\exists x(Gx)\} \models \neg\exists x(Fx)$), nous construisons l'arbre pour la négation de l'implication correspondante. Nous appliquons d'abord les règles pour les connecteurs :

$$\begin{array}{c}
\checkmark \quad \neg((\forall x\ (Fx \rightarrow Gx) \wedge \neg\exists x(Gx)) \rightarrow \neg\exists x\ (Fx)) \\
| \\
\checkmark\ \forall x\ (Fx \rightarrow Gx) \wedge \neg\exists x(Gx) \\
\checkmark \quad \neg\neg\exists x\ (Fx) \\
| \\
\forall x\ (Fx \rightarrow Gx) \\
\neg\exists x(Gx) \\
| \\
\exists x(Fx)
\end{array}$$

Comme nous n'avons aucune constante et qu'une seule quantification existentielle , nous introduisons une seule nouvelle constante, avec laquelle nous instancions les deux quantification universelles :

$$\checkmark \quad \neg((\forall x\ (Fx \rightarrow Gx) \wedge \neg\exists x(Gx)) \rightarrow \neg\exists x\ (Fx))$$

$$|$$

$$\begin{array}{c} \checkmark\ \forall x\ (Fx \rightarrow Gx) \wedge \neg\exists x(Gx) \\ \checkmark \quad \neg\neg\exists x\ (Fx) \end{array}$$

$$|$$

$$\begin{array}{c} {}^{a}\checkmark\ \forall x\ (Fx \rightarrow Gx) \\ {}^{a}\checkmark\ \neg\exists x(Gx) \end{array}$$

$$|$$

$${}^{a}\checkmark\ \exists x\ (Fx)$$

$$|$$

$$Fa$$

$$|$$

$$\begin{array}{c} \checkmark\, Fa \rightarrow Ga \\ \neg Ga \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \neg Fa & Ga \\ \nabla & \nabla \end{array}$$

Un arbre très similaire prouve la validité de l'inférence « $\forall x\ (Fx \rightarrow Gx) \vdash (\forall x\ (Fx) \rightarrow \forall x\ (Gx))$ » :

$$\checkmark \quad \neg(\forall x\ (Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\forall x\ (Fx) \rightarrow \forall x\ (Gx)))$$

$$|$$

$$\begin{array}{c} {}^{a}\checkmark \quad \forall x(Fx \rightarrow Gx) \\ \checkmark \quad \neg(\forall x\ (Fx) \rightarrow \forall x\ (Gx)) \end{array}$$

$$|$$

$$\begin{array}{c} {}^{a}\checkmark \forall x\ (Fx) \\ {}^{a}\checkmark \neg\forall x\ (Gx) \end{array}$$

$$|$$

$$\begin{array}{c} \neg Ga \\ Fa \\ \checkmark\, Fa \rightarrow Ga \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \neg Fa & Ga \\ \nabla & \nabla \end{array}$$

Pour prouver que « $\exists x(Gx \wedge Hx)$ » s'ensuit des deux prémisses « $(\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ » et « $\exists x(Fx \wedge Hx)) \rightarrow$ », nous commençons également avec l'instantiation de la prémisse existentielle :

$$\checkmark \quad \neg((\forall x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \exists x(Fx \wedge Hx)) \rightarrow \exists x(Gx \wedge Hx))$$

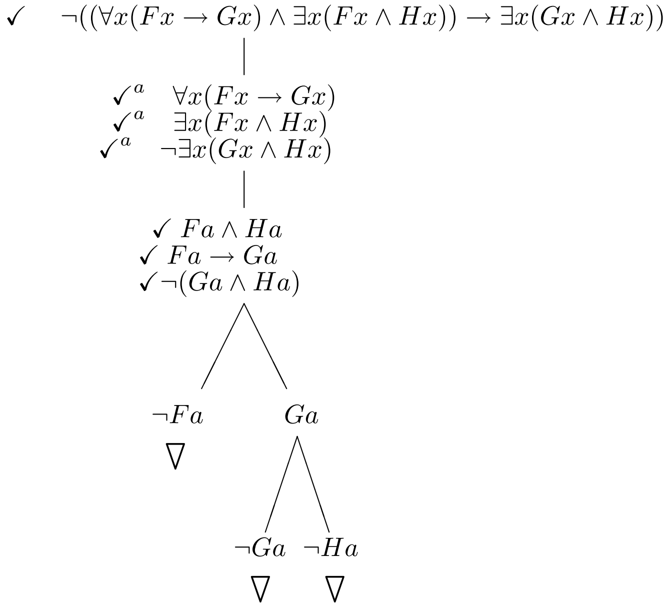
$$|$$

$$\begin{array}{c} \forall x(Fx \rightarrow Gx) \\ \checkmark^{a} \quad \exists x(Fx \wedge Hx) \\ \neg\exists x(Gx \wedge Hx) \end{array}$$

$$|$$

$$\checkmark\ Fa \wedge Ha$$

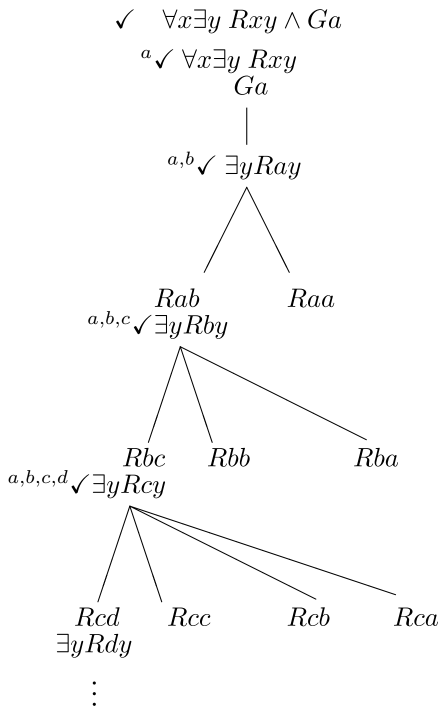
Nous pouvons maintenant instancier les quantifications universelles et construire l'arbre suivant :



11.4 Les arbres infinis et une simplification des règles

La règle de branchement pour le quantificateur existentiel (et la négation du quantificateur universel) et la règle d'instanciation pour le quantificateur universel (et la négation du quantificateur existentiel) peuvent interférer l'une avec l'autre, de sorte que la première nous force à introduire de nouvelles constantes que la seconde nous force d'utiliser dans des instanciations qui ‹ produisent › de nouvelles quantifications existentielles qui donnent lieu à des nouvelles constantes qui doivent à leur tour être utilisées pour instancier les quantifications universelles et ainsi de suite.

Considérons la phrase « $\forall x\exists y Rxy \wedge Ga$ » et faisons son arbre. Nous remarquons que nous n'en arriverons jamais au bout :



L'arbre qui en résulte est infini dans deux direction : il contient une branche infinie (celle tout à gauche) et il contient un nombre infini de branches. Nous observons aussi que les branches partant à droite n'ajoutent rien : la nouvelle constante « *b* », par exemple, introduite après le premier branchement, peut nous servir également pour représenter la vielle constante « *a* » – si nous le voulons, nous sommes libres de l'interpréter par le même individu que nous utilisons pour interpréter « *a* ». Nous arrivons donc aux simplifications suivantes pour nos règles de branchement :

$$\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$$
$$|$$
$$\ulcorner \phi(b) \urcorner \quad \text{pour une nouvelle constante « } b \text{ »}$$

$$\ulcorner \neg\forall x(\phi(x)) \urcorner$$
$$|$$
$$\ulcorner \neg\phi(b) \urcorner \quad \text{pour une nouvelle constante « } b \text{ »}$$

Avec ces nouvelles règles, notre arbre n'est infini que dans la direction verticale :

$$^{b,c,d,e,\ldots}\checkmark\ \forall x\exists y\ (Rxy)$$
$$^{b}\checkmark\ \exists y Ray$$
$$|$$
$$Rab$$
$$^{c}\checkmark\ \exists y Rby$$
$$|$$
$$Rbc$$
$$^{d}\checkmark\ \exists y Rcy$$
$$|$$
$$Rcd$$
$$^{e}\checkmark\ \exists y Rdy$$
$$|$$
$$Rde$$
$$^{f}\checkmark\ \exists y Rey$$
$$|$$
$$\vdots$$

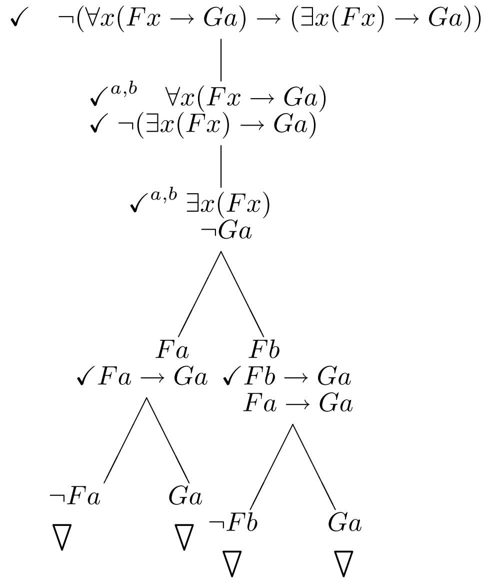
Pour prouver la validité d'une proposition, la nouvelle méthode est aussi efficace que l'ancienne. Ceci est dû au fait suivant :

Théorème 68. *Si une phrase a un modèle de n individus, alors elle a aussi un modèle de $n+1$ individus.*

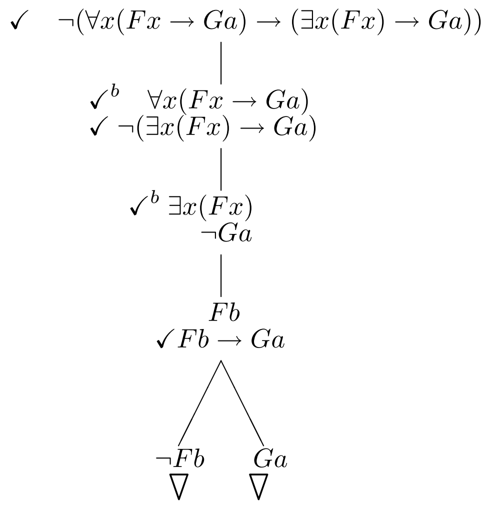
Preuve Partant d'un modèle de n individu rendant vraie la phrase en question, nous rajoutons simplement un individu de plus et stipulons que les mêmes prédicats sont vraies de lui que le sont d'un des n individus dans l'ancien modèle. □

La conversion de ce théorème dit que si une phrase n'a pas de modèle de $n+1$ individus, elle n'aura pas de modèle de n individus. Les branches générées par les règles du quantificateur existentiel (et de la négation du quantificateur universel) de l'ancienne méthode représentaient de telles modèles : nous préservons l'utilité de la méthode pour prouver des phrases si nous laissons tomber ces chemins de vérité qui correspondant à des modèles contenant moins d'individus.

Cette simplification des règles nous permet d'économiser des branches également dans les preuves ‹ ordinaires ›, comme le montre l'exemple suivant. Voici un arbre pour « $\forall x(Fx \to Ga) \to (\exists x(Fx) \to Ga))$ », par l'ancienne méthode :



Avec la nouvelle méthode nous obtenons :



11.5 Les présupposés existentiels de la logique des prédicats

Comment peut-on nier l'existence de quelque chose ? Si je dis, par exemple,

(PN) Le Père Noël n'existe pas.

ou

(PC) Il n'y a pas de Prince Charmant.

j'utilise les termes singuliers « Le Père Noël » et « le Prince Charmant ». Pour que mes assertions soient sensibles, il faut que ces expressions aient un sens. Comment leur attribuer un sens s'il n'y a rien à quoi elles se réfèrent ? Tel est le problème que Quine (1948) appelle « la barbe de Platon ».

Le problème est que (**PN**) semble avoir la même forme logique que :

(PN') Il n'y a rien qui est identique au Père Noël.

qui est formalisé comme suit :

(QN) $\neg\exists x\ (x = a)$

Mais alors (**QN**) est toujours faux, puisque nous pouvons déduire sa négation de toute phrase dans laquelle « a » a une occurrence par la règle d'inférence appellée « généralisation existentielle » (GE) :

(1) $$\frac{Fa}{\exists x(Fx)}$$

En d'autres mots, nous *présupposons* que la constante « a » n'est pas vide, c'est-à-dire qu'elle a un référent. La solution de Quine consiste en une traduction de (**PN**) et de (**PC**) non pas en (**QN**) mais plutôt en (**QN'**). Il introduit de nouveaux prédicats primitifs en stipulant que quelque chose 'noëlise' si et seulement si cette chose est identique au Père Noël. Nous pouvons alors abréger ce prédicat par « $N(x)$ » et dire

(QN') $\neg\exists x\ (N(x))$

L'engagement ontologique entrepris en énonçant (**PN**) et (**PC**) est maintenant transmis sur le quantificateur. Nous avons donc comme critère d'engagement ontologique :

(EO) La seule manière dont nous pouvons nous engager ontologiquement est par l'utilisation de variables liées.

11.6 Les limites de la méthode des arbres

Le fait qu'il est possible que nous construisons, en appliquant nos règles, des arbres infinis, montre une différence importante entre la logique propositionnelle et la logique des prédicats : la logique propositionnelle est décidable et la logique des prédicats ne l'est pas. Dans le cas de la logique propositionnelle, la méthode des arbres nous fournit une méthode syntaxique de prouver des phrases qui est correct et complète. Ceci implique que

(i) Si une phrase est une tautologie, alors toutes les branches de l'arbre pour sa négation se ferment.
(ii) Si une phrase n'est pas une tautologie, son arbre nous montre pour quelle interprétation de ses constituantes non-logique (phrases simples) elle est vraie.

La méthode des arbres pour la logique des prédicats retient la propriété (i) : les phrases que nous prouvons par cette méthode sont des tautologies. Comme le montre le dernier exemple, la propriété (ii) n'est pas retenu. Pour les phrases qui ne peuvent être vraies que dans une structure contenant une infinité d'objets, la méthode ne nous fournit pas d'interprétation de ses constituantes non-logique qui la rende vraie. Cependant ce désavantage est limité aux structures infinies : si une phrase est vraie dans une structure finie, la méthode des arbres nous permet d'en trouver au moins une.

Cette différence montre une asymétrie fondamentale entre la logique des prédicats et la logique propositionnelle. Pour la logique propositionnelle, la méthode des arbre nous donne ce que l'on appelle une « procédure de décision » : une méthode mécanique pour tester si oui ou non une phrase est une tautologie. Une telle méthode mécanique à deux propriétés importantes :

(i) Si une phrase est valide, elle répond par « oui ».
(ii) Si une phrase n'est pas valide, elle répond par « non ».

Notre exemple montre que la deuxième condition n'est pas satisfaite par la méthode des arbres pour la logique des prédicats. Il peut arriver que la méthode ne répond pas. Cette limitation n'est pas spécifique à la méthode des arbres. Comme Alonzo Church a prouvé en 1936, il n'existe pas de procédure de décision pour la logique des prédicats. Si nous voulons savoir si oui ou non une phrase est valide, et que nous faisons l'arbre pour sa négation et qu'après n étapes restons avec des chemins ouverts, nous ne pouvons conclure que la phrase est réellement valide *seulement si* tous les quantificateurs universels et tous les négations de quantificateurs existentiels ont été instancié pour toutes les constantes sur leurs branches. Comme le montre l'exemple précédent, il est possible que cette situation ne se produise jamais.

Cette limitation des la méthode des arbres ne signifie pas que nous n'arriverons jamais à trouver une structure vérifiant une phrase satisfaisable. Si la phrase admet un modèle fini, nous le trouverons. Mais si elle n'a que des modèles infinies, il n'est pas toujours possible d'en trouver un. Cette tâche requiert de l'ingéniosité.

11.7 L'indécidabilité de la logique des prédicats

Il n'y a pas de procédure de décision pour le calcul de prédicat (Church 1936), mais il y en a pour le fragment monadique, c'est-à-dire cette partie de la logique des prédicats qui ne considère que des prédicats unaires et laisse de côté les relations.

Points à retenir

1. Si une quantification universelle $\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner$ est vraie, alors toutes ses instanciations $\ulcorner\phi(a)\urcorner$, pour une constante individuelle « a », sont vraies. Si une quantification existentielle $\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner$ est fausse, alors toutes ses instanciations $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ sont fausses.
2. Si une quantification universelle $\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner$ est fausse, alors au moins une instanciation $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ est fausse. Si une quantification existentielle $\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner$ est vraie, alors au moins une instanciation $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ est vraie.
3. Les règles de construction d'arbres pour le quantificateur universel et la négation d'un quantificateur existentiel sont les suivantes :

$$\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner \qquad\qquad\qquad\qquad \ulcorner\neg\exists x(\phi(x))\urcorner$$

$$\ulcorner\phi(a_1)\urcorner \qquad\qquad\qquad\qquad \ulcorner\neg\phi(a_1)\urcorner$$
$$\ulcorner\phi(a_2)\urcorner \quad \text{pour toutes les constantes « } a_i \text{ »} \quad \ulcorner\neg\phi(a_2)\urcorner$$
$$\ulcorner\phi(a_3)\urcorner \quad \text{apparaissant sur cette branche} \quad \ulcorner\neg\phi(a_3)\urcorner$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

4. Les règles de construction d'arbres pour le quantificateur existentiel et la négation du quantificateur universel sont les suivantes :

$$\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner \qquad\qquad\qquad\qquad \ulcorner\neg\forall x(\phi(x))\urcorner$$

$$\ulcorner\phi(a_1)\urcorner \quad \ulcorner\phi(a_2)\urcorner \quad \ldots \quad \ulcorner\phi(b)\urcorner \qquad \ulcorner\neg\phi(a_1)\urcorner \quad \ulcorner\neg\phi(a_2)\urcorner \quad \ldots \quad \ulcorner\neg\phi(b)\urcorner$$

pour toutes les constantes « a_i » de la branche et une nouvelle constante « *b* »

5. Dans une structure ayant un domaine fini, une quantification universelle est équivalente à la conjonction de ses instanciations et une quantification existentielle est équivalente à la disjonction de ses instanciations.
6. Nous pouvons simplifier les dernières règles pour « $\exists x(\phi(x))$ » et pour « $\neg\forall x(\phi(x))$ » en nous concentrant uniquement sur la branche contenant la constante nouvelle.
7. Cette nouvelle méthode est aussi efficace pour prouver des phrases que l'ancienne, parce qu'une phrase avec un modèle de n individus a aussi un modèle avec $n + 1$ individus.
8. La méthode des arbres nous permet prouver une phrase *si* cette phrase est valide.
9. Nous ne pouvons pas déduire de l'impossibilité de prouver une phrase (du fait que l'arbre pour sa négation ne se ferme pas) le caractère non-valide de celle-ci. Nous avons une garantie de trouver un modèle seulement si la phrase est vraie dans une structure avec un univers de discours fini.
10. Ceci correspond à une différence importante entre la logique propositionnelle et la logique des prédicats : la première est décidable (admet une procédure mécanique pour tester le caractère tautologique d'une proposition), la dernière ne l'est pas. Pour trouver des contre-exemples, il faut de l'ingéniosité.