Chapitre 12

La déduction naturelle

Après avoir donné les définitions du langage $\mathcal{L}^+$ et des notions clefs de la sémantique des prédicats, nous étudierons dans cette leçon deux calculs syntaxiques pour prouver des théorèmes de la logique des prédicats. Le premier calcul est un calcul axiomatique, qui consiste en quelques axiomes et deux règles d'inférences à l'aide desquelle on en déduit des théorèmes. La deuxième méthode syntaxique est une extension de la méthode des arbres pour la logique propositionnelle, avec quatre règles supplémentaires pour les phrases quantifiées et leurs négations.

12.1 Les individus arbitraires

Pour pouvoir traiter des phrases quantifiées par les méthodes de la déduction naturelle, nous avons besoin de règles d'introduction et d'élimination pour les quantificateurs.

Comme nous l'avons fait pour la méthode des arbres, nous devons prendre en considération le fait qu'une quantification universelle sur un domaine fini est équivalente à la conjonction de toutes ses instanciations, et qu'une quantification existentielle sur un tel domaine fini correspond à une disjonction de ses instanciations. Éliminer un quantificateur universel revient donc à l'instancier pour tous les membres du domaine. Considérons l'inférence suivante :

(1) $\dfrac{\text{Tous les hommes sont mortels.} \quad \text{Socrate est un homme.}}{\text{Socrate est mortel.}}$

L'inférence valide (1) correspondra à cette preuve-ci dans le calcul que nous développerons dans cette leçon :

1	$Ha, \forall x(Hx \to Mx)$	$\vdash Ha$	prémisse
2	$Ha, \forall x(Hx \to Mx)$	$\vdash \forall x(Hx \to Mx)$	prémisse
3	$Ha, \forall x(Hx \to Mx)$	$\vdash Ha \to Ma$	de (2) par (SU)
4	$Ha, \forall x(Hx \to Mx)$	$\vdash Ma$	de (1) et (3) avec (MP)

La règle (SU), appelée « *spécialisation universelle* », nous permet de passer d'une quantification universelle à n'importe quelle instanciation de la phrase ouverte universellement quantifiée pour une constante. L'élimination du quantificateur universel revient donc à une instanciation de la phrase ouverte qu'il gouverne, remplaçant toutes les occurrences libres d'une variable par des occurrences d'une constante.

Comment pouvons nous *introduire* un quantificateur universel dans une formule ? L'analogie avec la conjonction pourrait nous faire penser qu'il suffirait, pour établir la vérité de « $\forall x(Fx)$ », par exemple, de prouver « $F(a_1)$ », « $F(a_2)$ » et « $F(a_3)$ », si nous nous trouvons dans une structure finie ne contenant que les trois objets a_1, a_2 et a_3 dans son domaine. Cette méthode, cependant, ne s'avère aucunement valide. Non seulement elle serait inapplicable dans le cas d'un domaine infini et le serait aussi dans le cas où nous ne disposons pas de noms pour tous les objets dans le domaine. Son application signifierait également utiliser, à l'intérieur d'une preuve, une information qui ne nous est donnée que de l'extérieur du modèle : même si nous arrivions 'accidentellement' à prouver « Fx » de tous les membres du domaine – et ainsi à prouver, pour toute constante « a », que Fa –, nous n'aurions pas encore prouvé *que « Fx » est vrai de tous les membres du domaines* – pour cela, nous aurions besoin d'une garantie que la totalité des individus dont nous avons prouvé « Fx » comprend réellement tous les individus du domaine.

Une piste plus prometteuse nous est désignée par les preuves mathématiques et par l'introduction de nouvelles constantes dans la méthode des arbres. Si un géomètre, par exemple, veut prouver que la somme des angles intérieurs de n'importe quel triangle est égale à 180 degrés, il dessinera au tableau noir un triangle particulier, nommé ABC d'après ses trois angles. S'il ne fait usage, dans sa preuve du théorème, d'aucune propriété de ce triangle autre que celles qui lui sont imposées par la définition même d'un triangle, le théorème vaudra pour tout triangle. Le triangle particulier ABC aura représenté tous les triangles. Dans ce sens, le triangle ABC peut être appelé « triangle arbitraire ».

Nous sommes passées par une étape analogue dans le développement de la méthode des arbres ; nous avons montré qu'il était possible de simplifier les règles pour le quantificateur existentiel et la négation du quantificateur universel, en nous limitant à une seule constante, nouvelle, qui représentait également les anciennes constantes déjà introduites sur la branche correspondante. Au lieu de dire que la constante nouvelle représentait les individus que nous n'avions pas encore considérés dans notre preuve, nous avons simplement dit qu'elle représentait *n'importe quel* individu du domaine. Nous nous avons servi de la constante pour désigner un individu arbitraire.

Pour prouver une quantification universelle à partir des prémisses particulières, nous exigerons donc que ces prémisses soient vraies d'un individu arbitraire.[1] Un tel individu nous est fourni par exemple par la règle de spécialisation universelle, comme c'est le cas dans la preuve suivante :

1	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash \forall x(Fx \to Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash Fa$	de (1) par (SU)
4	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash Fa \to Ga$	de (2) par (SU)
5	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash Ga$	de (3) et (4) avec (MP)
6	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash \forall x(Gx)$	de (5) avec (GU)

Nous appellerons cette règle, qui nous permet d'établir une phrase générale à partir d'une phrase singulière parlant d'un individu arbitraire, « *généralisation universelle* » (GU).

Cependant, il est clair que nous devons restreindre notre usage de (GU). Le raisonnement suivant est clairement fallacieux :

1	Fa	$\vdash Fa$	prémisse
2	Fa	$\vdash \forall x(Fx)$	de (1) par (GU)

Nous ne pouvons pas, du fait qu'un certain individu a soit F conclure que toutes les choses dans

1. Je préfère cette présentation à celle de Lemmon (1965a: 107) qui parle de *noms arbitraires* pour des raisons esquissées dans la leçon trois. REFERENCE WHERE EXACTLY ? Pour une théorie développée des individus arbitraires, voir Fine (1985) et, pour une revue critique de différentes théories, Nef (1998).

l'univers de discours soient F – le a en question doit être arbitraire. Mais qu'est-ce que cela signifie concrètement ? Dans le cas de la méthode des arbres, ceci signifiait que la constante était « nouvelle » pour la branche, c'est-à-dire n'avait pas d'occurrence précédente. Dans le cas du géomètre qui prouve des théorèmes sur tous les triangles, ceci signifie que la preuve en question ne dépend d'aucune assomption particulière sur le triangle étant considéré paradigmatique ou arbitraire. Dans la déduction naturelle, nous combinons ces deux exigences : la constante en question, « a », ne doit apparaître dans aucune supposition ou prémisse dont dépend la preuve de la phrase singulière « Fa ».

De même que les règles pour l'introduction et l'élimination de la disjonction sont plus complexes que celles pour la conjonction, de même les règles pour le quantificateur existentiel sont un peu plus compliquées que celles pour le quantificateur universel. Pour introduire le quantificateur existentiel, nous *généralisons* une phrase particulière : si « Fa » est prouvée pour un certain a, alors nous pouvons prouver « $\exists x(Fx)$ ». La règle d'introduction du quantificateur existentiel est donc appelée « *généralisation existentielle* » (GE). En voici un exemple :

1	$\forall x(Fx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx)$	$\vdash Fa$	de (1) par (SU)
3	$\forall x(Fx)$	$\vdash \exists x(Fx)$	de (2) par (GE)

Même si la constante individuelle « a » que nous introduisons dans l'application de (SU) désigne un individu arbitraire, nous pouvons toujours conclure, du fait que cet individu arbitraire est F, qu'il y en a au moins un F – a, bien que arbitraire, existe. [2]

Pour la règle d'élimination du quantificateur existentiel, nous nous rappelons de la règle ($\vee$**E**) : cette règle éliminait une disjonction dans le sens qu'elle nous permettait de prouver une formule prouvée à partir des deux disjoints directement de la disjonction elle-même. D'une manière analogue, la règle d'élimination du quantificateur existentiel nous permet de passer des preuves d'une formule ϕ à partir de toute la série des instanciations « $Fa_1 \vee Fa_2 \vee \ldots \vee Fa_n \vee \ldots$ » à une preuve de ϕ directement à partir de « $\exists x(Fx)$ ».

Au lieu de montrer que ϕ est une conséquence de toutes les instanciations de la quantification universelle, il suffit de montrer qu'elle s'ensuit d'une instanciation *quelconque* – d'une instanciation par un individu arbitraire, où « arbitraire » veut dire la même chose que dans l'application de la règle de généralisation universelle ((GU), l'introduction du quantificateur universel). Nous appelons cette instanciation le *« disjoint typique »* qui correspond à la quantification existentielle. Nous appelons « (SE) » ou *« spécialisation existentielle »* la règle qui élimine la quantification existentielle en faveur du disjoint typique.

Les règles de généralisation universelle (GU) et de spécialisation existentielle (SE) sont intimement liées : non seulement elles sont toutes deux restreintes par la condition selon laquelle l'individu en question est un individu arbitraire, mais de plus la notion d'arbitraire qu'elles utilisent est la même : (GU) est applicable à une phrase ϕ si et seulement si ϕ aurait pu être obtenue, par (SE), de sa quantification existentielle. L'application de la règle de spécialisation existentielle comprend quatre étapes :

1. la preuve d'une quantification existentielle sous certaines suppositions et à partir de certaines prémisses ;
2. la supposition du disjoint typique ;
3. une preuve d'une autre formule sous la supposition du disjoint typique ;
4. l'application de la règle, ayant comme conclusion cette dernière formule (de l'étape (3)), et comme

2. La raison sémantique pour la validité du séquent « $\forall x(Fx) \vdash \exists x(Fx)$ » est que nous avons exclu les domaines vides dans notre définition d'une structure pour la logique des prédicats. Nous avons parlé d'une « logique libre » qui ne faisant pas cette présupposition dans le ch. 11.5 (cf. p. 223).

suppositions et prémisses celles de la quantification existentielle (de l'étape (1)) ;

Voici, comme exemple, une preuve du séquent « $\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx) \vdash \exists x(Gx)$ » :

1	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash \forall x(Fx \to Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash \exists x(Fx)$	prémisse
3	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$Fa \quad \vdash^* Fa$	supposition (du disjoint typique)
4	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$Fa \quad \vdash^* Fa \to Ga$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$Fa \quad \vdash^* Ga$	de (3) et (4) avec (MP)
6	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$Fa \quad \vdash^* \exists x(Gx)$	de (5) avec (GE)
7	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash \exists x(Gx)$	de (2), (3) et (6) avec (SE)

Étant donné les prémisses que tout ce qui est F est également G et qu'il y a quelque chose qui est F, nous supposons, à la ligne (3), qu'un individu arbitraire a est F. Sous cette supposition, nous démontrons ensuite qu'il y a quelque chose qui est G (ligne 6). De ces deux lignes et de la ligne où nous avons prouvé la quantification existentielle, nous concluons qu'il y a quelque chose qui est G (ligne 7). Dans une application de (SE), nous indiquons trois lignes : celle où nous avons prouvé la quantification existentielle, celle où nous avons fait la supposition du disjoint typique et celle où nous avons montré que la phrase en question peut être démontrée sous cette supposition.

Comme l'indique le parallélisme entre (SE) et (GU), nous devons également adopter quelques restrictions pour éviter des raisonnements fallacieux comme le suivant :

1	$\exists x(Fx)$	$\vdash \exists x(Fx)$	prémisse
2	$\exists x(Fx)$	$Fa \quad \vdash^* Fa$	supposition
3	$\exists x(Fx)$	$\vdash Fa$	de (1), (2) et (2) avec (SE)
4	$\exists x(Fx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	de (3) avec (GU)

L'application de (GU) est correcte, puisque « $\exists x(Fx)$ » ne contient pas « a ». Mais l'application de (SE) est incorrecte, puisque la conclusion prouvée sous la supposition du disjoint typique contient elle-même une occurrence de la constante pour l'individu arbitraire a. Même si « Fa » est une conséquence d'elle-même, il ne s'ensuit pas de « $\exists x(Fx)$ » qu'un individu, arbitrairement choisi, est F. Nous devons donc limiter les conclusions obtenues à partir du disjoint typique à des phrases qui portent sur des individus autres que celui qui nous a servi pour l'instanciation.

Cette restriction correspond à l'exigence que, de toutes les phrases que nous dérivons de la supposition du disjoint typique, seules celles qui ne concernent pas l'individu choisi comme arbitraire sont également des conséquences de la quantification existentielle.

Cette précaution, même si elle est nécessaire, n'est pas encore suffisante. Nous devons également supposer que « a » n'a pas d'occurrence dans les suppositions sous lesquelles est obtenue la conclusion dérivée du disjoint typique. Ceci est montré par le raisonnement fallacieux suivant :

1	$\exists x(Fx), Ga$	$\vdash \exists x(Fx)$	prémisse
2	$\exists x(Fx), Ga$	$\vdash Ga$	prémisse
3	$\exists x(Fx), Ga$	$Fa \quad \vdash^* Fa$	supposition
4	$\exists x(Fx), Ga$	$Fa \quad \vdash^* Fa \wedge Ga$	de (2) et (3) avec ($\wedge$**I**)
5	$\exists x(Fx), Ga$	$Fa \quad \vdash^* \exists x(Fx \wedge Gx)$	de (4) avec (GE)
6	$\exists x(Fx), Ga$	$\vdash \exists x(Fx \wedge Gx)$	de (2), (3) et (5) avec (SE)

Ce raisonnement est fallacieux – nous procédons de deux prémisses portant sur deux individus – qu'un individu arbitraire est F et que quelque chose est G – à la conclusion qu'il y a quelque chose qui est en même temps F et G. Le problème n'est pas que la conclusion obtenue, à la ligne (5), de la supposition du disjoint typique, contient « a ». Le caractère fallacieux du raisonnement est plutôt dû au fait qu'elle reste sur une supposition, à savoir « Ga », autre que le disjoint typique, contenant « a ». « $\exists x(Fx \wedge Gx)$ » a été dérivée en faisant une assomption sur l'individu arbitraire en question – qu'il n'était pas seulement F, mais également G.

Ces quatre règles (GU), (SU), (GE) et (SE) ainsi que les règles pour les connecteurs forment un calcul de déduction naturelle pour la logique des prédicats. Les règles pour les connecteurs sont maintenant interprétées comme s'appliquant à des phrases du langage $\mathcal{L}^+$. Il est important de noter que l'on ne peut pas, par exemple, supposer une phrase ouverte – une telle supposition donnerait facilement lieu à des raisonnements fallacieux et serait sémantiquement non-sensée : nous supposons qu'une phrase est vraie et ne pouvons pas supposer qu'une phrase ouverte est satisfaite par quelques objets.[3]

12.2 Les règles de la déduction naturelle pour la logique des prédicats

Nous sommes maintenant en mesure de formuler nos règles de la déduction naturelle pour les quantificateurs, règles qui se rajoutent à celles pour les connecteurs, maintenant interprétées comme gouvernant non seulement des connecteurs propositionnels, mais aussi des connecteurs reliant des phrases ouvertes.

L'élimination du quantificateur universel et l'introduction du quantificateur existentiel

Soit ϕ une formule de $\mathcal{L}^+$, « x » une variable et « t » un terme *libre pour « x » dans ϕ*.[4] Soit $\ulcorner\phi(x/t)\urcorner$ le résultat de la substitution (uniforme) de « t » pour « x » dans ϕ. La règle de *« spécialisation universelle »* (SU) nous donne alors le droit de conclure $\ulcorner\phi(x/t)\urcorner$ à partir de $\ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$:

m	$\vdash \ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner\phi(x/t)\urcorner$	de (m) avec (SU)

La règle de *« généralisation existentielle »* (GE) est la converse de (SU) : elle nous donne le droit d'inférer $\ulcorner\exists x(\phi)\urcorner$ à partir de $\ulcorner\phi(x/t)\urcorner$.

m	$\vdash \ulcorner\phi(x/t)\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner\exists x(\phi)\urcorner$	de (m) avec (GE)

Dans les deux cas, d'éventuelles suppositions ou prémisses à la ligne (m) sont conservées à la ligne (n).

3. L'application des anciennes règles aux nouvelles formules peut créer de nouveaux types d'erreurs : Pour l'application de la règle de preuve conditionnelle, par exemple, il faut garder à l'esprit qu'elle ne nous permet d'enlever que la supposition transformée en l'antécédent de l'implication. Nous ne pouvons pas, par exemple, supposer « Fa », prouver sous cette supposition que $\exists x(Gx)$ et conclure ensuite « $\exists x(Fx) \rightarrow \exists x(Gx)$ ».

4. Nous avons défini cette notion dans la leçon 12 (cf. p. 206). Un terme n'est pas libre pour une variable dans une formule si une éventuelle substitution de la variable par le terme avait comme conséquence qu'une occurrence libre de cette variable dans le terme devenait gouvernée par un quantificateur dans la formule. Dans le cas où le terme en question est une variable, cela veut dire qu'il serait substitué à l'intérieur d'un quantificateur qui le gouvernera.

L'introduction du quantificateur universel et l'élimination du quantificateur existentiel

Soit $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ une formule qui contient une constante individuelle « a ». S'il n'est pas le cas que « a » a une occurrence dans une des prémisses dont dépend la preuve de ϕ, la règle de *généralisation universelle* (GU) nous permet d'étendre une preuve de $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ à une preuve de $\ulcorner\forall x(\phi(a/x))\urcorner$:

m	$\vdash \ulcorner\phi(a)\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner\forall x(\phi(a/x))\urcorner$	de (m) avec (GU)

La règle de *spécialisation existentielle* (SE) nous permet de prouver, à partir de $\ulcorner\exists x(\phi(a/x))\urcorner$ toute formule ψ que nous pouvons prouver à partir de la supposition $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ – s'il n'est pas le cas que « a » a une occurrence dans ψ ou dans une supposition ou une prémisse dont dépend la preuve de ψ à partir de $\ulcorner\phi(a)\urcorner$:

m		$\vdash \ulcorner\exists x(\phi(a/x))\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n	$\ulcorner\phi(a)\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\phi(a)\urcorner$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
o	$\ulcorner\phi(a)\urcorner$	$\vdash^* \psi$	
$\vdots$		$\vdots$	
p		$\vdash \psi$	de (m), (n) et (o) avec (SE)

La ligne (p) contiendra toutes les prémisses ou suppositions de la ligne (m) et toutes les suppositions nécessaires pour la preuve de ψ à partir de $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ (autres que $\ulcorner\phi(a)\urcorner$).

12.3 Quelques exemples

Le premier exemple illustre le bon usage de la règle de spécialisation existentielle (SE). Pour prouver une conclusion à partir d'une quantification existentielle, nous essayons de la dériver de son disjoint typique. Voici une preuve du séquent « $\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \exists x(Fx \wedge Hx)$ ». Nous commençons par la supposition du disjoint typique :

1	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$		$\vdash \forall x(Gx \to Hx)$	prémisse
2	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$		$\vdash \exists x(Fx \wedge Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa \wedge Ga$	supposition

Une instanciation de la quantification universelle pour la constante « a » qui représente l'individu arbitraire qui était dit être F et G nous permet alors d'appliquer les règles ordinaires de connecteurs, prouvant que a n'est pas seulement F mais aussi H :

4	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Ga \to Ha$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Ga$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
6	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Ha$	de (4) et (5) avec (MP)
7	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
8	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa \wedge Ha$	de (6) et (7) avec ($\wedge$**I**)

Pour compléter la preuve de « $\exists x(Fx \land Hx)$ », il nous reste à faire une généralisation existentielle par rapport à l'individu arbitraire et d'appliquer la règle de spécialisation existentielle au résultat :

9	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \land Gx)$	$Fa \land Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx \land Hx)$	de (8) avec (GE)
10	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \land Gx)$	$\vdash \exists x(Fx \land Hx)$		de (2), (3) et (9) avec (SE)

L'application de (SE) est légitime car « a » n'a pas d'occurrence dans « $\exists x(Fx \land Hx)$ » et parce que la preuve de la dernière phrase ne dépendait pas d'autres suppositions sur a que celle que le disjoint typique était vrai.

Prouvons la distributivité du quantificateur universel sur la conjonction, c'est-à-dire le séquent «$\forall x(Fx) \land \forall x(Gx) \vdash \forall x(Fx \land Gx)$ ». La preuve consiste en une instanciation des deux conjoints, suivie d'une généralisation de la conjonction des instanciations :

1	$\forall x(Fx) \land \forall x(Gx)$	$\vdash \forall x(Fx) \land \forall x(Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx) \land \forall x(Gx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	de (1) avec ($\land$**E**)
3	$\forall x(Fx) \land \forall x(Gx)$	$\vdash Fa$	de (2) avec (SU)
4	$\forall x(Fx) \land \forall x(Gx)$	$\vdash \forall x(Gx)$	de (1) avec ($\land$**E**)
5	$\forall x(Fx) \land \forall x(Gx)$	$\vdash Ga$	de (2) avec (SU)
6	$\forall x(Fx) \land \forall x(Gx)$	$\vdash Fa \land Ga$	de (3) et (5) avec ($\land$**I**)
7	$\forall x(Fx) \land \forall x(Gx)$	$\vdash \forall x(Fx \land Gx)$	de (6) avec (GU)

Dans la preuve précédente, nous n'avons dû faire aucune supposition. Par contre, pour prouver la distributivité du quantificateur existentiel sur la disjonction, nous devons en faire une. Prouvons alors le séquent « $\exists x(Fx \lor Gx) \vdash \exists x(Fx) \lor \exists x(Gx)$ » :

1	$\exists x(Fx \lor Gx)$	$\vdash \exists x(Fx \lor Gx)$		prémisse
2	$\exists x(Fx \lor Gx)$	$Fa \lor Ga$	$\vdash^* Fa \lor Ga$	supposition
3	$\exists x(Fx \lor Gx)$	$Fa \lor Ga, Fa$	$\vdash^* Fa$	supposition
4	$\exists x(Fx \lor Gx)$	$Fa \lor Ga, Fa$	$\vdash^* \exists x(Fx)$	de (3) avec (GE)
5	$\exists x(Fx \lor Gx)$	$Fa \lor Ga, Fa$	$\vdash^* \exists x(Fx) \lor \exists x(Gx)$	de (4) avec ($\lor$**I**)
6	$\exists x(Fx \lor Gx)$	$Fa \lor Ga, Ga$	$\vdash^* Ga$	supposition
7	$\exists x(Fx \lor Gx)$	$Fa \lor Ga, Ga$	$\vdash^* \exists x(Gx)$	de (6) avec (GE)
8	$\exists x(Fx \lor Gx)$	$Fa \lor Ga, Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx) \lor \exists x(Gx)$	de (7) avec ($\lor$**I**)
9	$\exists x(Fx \lor Gx)$	$Fa \lor Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx) \lor \exists x(Gx)$	de (2, 3, 5, 6, 8) avec ($\lor$**E**)
10	$\exists x(Fx \lor Gx)$	$\vdash \exists x(Fx) \lor \exists x(Gx)$		de (1), (2) et (9) avec (SE)

Nous prouvons la distributivité du quantificateur existentiel sur la conjonction sous forme de théorème plutôt que de séquent. Grâce au méta-théorem de déduction (cf. p. 241) et la présence d'une règle d'inférence de preuve conditionnelle (CP), cela revient à la même chose. Voici donc une preuve de

« $\vdash \exists x(Fx \land Gx) \rightarrow (\exists x(Fx) \land \exists x(Gx))$ » :

1	$\exists x(Fx \land Gx)$	$\vdash^* \exists x(Fx \land Gx)$	supposition
2	$\exists x(Fx \land Gx), Fa \land Ga$	$\vdash^* Fa \land Ga$	supposition
3	$\exists x(Fx \land Gx), Fa \land Ga$	$\vdash^* Fa$	de (2) par ($\land$E)
4	$\exists x(Fx \land Gx), Fa \land Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx)$	de (3) par (GE)
5	$\exists x(Fx \land Gx), Fa \land Ga$	$\vdash^* Ga$	de (2) par ($\land$E)
6	$\exists x(Fx \land Gx), Fa \land Ga$	$\vdash^* \exists x(Gx)$	de (5) par (GE)
7	$\exists x(Fx \land Gx), Fa \land Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx) \land \exists x(Gx)$	de (4) et (6) par ($\land$I)
8	$\exists x(Fx \land Gx)$	$\vdash^* \exists x(Fx) \land \exists x(Gx)$	de (1), (2), (7) par (SE)
9		$\vdash \exists x(Fx \land Gx) \rightarrow (\exists x(Fx) \land \exists x(Gx))$	de (1) et (8) par (PC)

Comme nous l'avons vu dans la discussion sur les règles de passage (p. 207 dans a leçon 10, le quantificateur existentiel distribue aussi sur l'antécédent d'une implication qui ne contient pas d'occurrence libre de la variable qu'il quantifie. Nous pouvons donc prouver « $\exists x(Fa \rightarrow Fx) \vdash Fa \rightarrow \exists x(Fx)$ » :

1	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$\vdash\ Fa \rightarrow \exists x(Fx)$		prémisse
2	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	Fa	$\vdash^*\ Fa$	supposition
3	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$Fa, Fa \rightarrow Fb$	$\vdash^*\ Fa \rightarrow Fb$	supposition
4	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$Fa, Fa \rightarrow Fb$	$\vdash^*\ Fb$	de (2) et (3) avec (MP)
5	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$Fa, Fa \rightarrow Fb$	$\vdash^*\ \exists x(Fx)$	de (4) avec (GE)
6	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	Fa	$\vdash^*\ \exists x(Fx)$	de (1), (3) et (5) avec (SE)
7	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$\vdash\ Fa \rightarrow \exists x(Fx)$		de (2) et (6) avec (PC)

Puisque nous avons déjà une occurrence de la constante « *a* », nous devons choisir, à la ligne (3), la constante « *b* » pour désigner l'individu arbitraire qui figure dans le disjoint typique de la quantification existentielle.

Nous pouvons aussi prouver un séquent, « $\forall x\forall y(Rxy) \vdash \forall y\forall x(Rxy)$ », qui correspond à une observation que nous avons faite auparavant : que les variables, prises individuellement, sont interchangeables – tout ce qui distingue une variable d'une autre sont leurs propriétés relationnelles, en particulier si elles sont liées par des quantificateurs de différentes types :

1	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall x\forall y(Rxy)$	prémisse
2	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall y(Ray)$	de (1) avec (SU)
3	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash\ Rab$	de (2) avec (SU)
4	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall x(Rxb)$	de (3) avec (GU)
5	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall y\forall x(Rxy)$	de (4) avec (GU)

Comme dans la dernière preuve, nous devons choisir deux constantes individuelles différentes, car sans le faire, nous déduirions le séquent invalide « $\forall x\forall y(Rxy) \vdash \forall x(Rxx)$ », ayant perdu toute possibilité de distinguer les deux places argumentales.

Finalement, nous prouvons un séquent compliqué, à savoir le suivant :

$$\exists x(Fx \land \forall y(Gy \rightarrow Rxy)), \forall x(Fx \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Rxy)) \vdash \forall x(Gx \rightarrow \neg Bx)$$

En abrégeant « $\exists x(Fx \land \forall y(Gy \rightarrow Rxy))$ » par « **A** » et « $\forall x(Fx \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Rxy))$ » par « **B** », nous obtenons la preuve suivante :

1	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow Rxy))$			prémisse
2	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \forall x(Fx \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Rxy))$			prémisse
3	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	supposition
4	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*$	Fa	de (3) avec (∧)
5	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*$	$\forall y(Gy \rightarrow Ray)$	de (3) avec (∧)
6	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*$	$Fa \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Ray)$	de (2) avec (SU)
7	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*$	$\forall y(By \rightarrow \neg Ray)$	de (4) et (6) avec (MP)
8	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*$	Gb	supposition
9	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*$	$Gb \rightarrow Rab$	de (5) avec (SU)
10	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*$	Rab	de (8) et (9) avec (MP)
11	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*$	$Bb \rightarrow \neg Rab$	de (7) avec (SU)
12	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*$	$\neg\neg Rab$	de (10) avec (DN)
13	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*$	$\neg Bb$	de (12) et (11) avec (MT)
14	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*$	$Gb \rightarrow \neg Bb$	de (8) et (13) avec (PC)
15	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*$	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Bx)$	de (14) avec (GU)
16	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \forall x(Gx \rightarrow \neg Bx)$			de (1), (3) et (15) avec (SE)

Comme toujours, nous commençons par des instanciations des quantifications, ce qui nous permet ensuite d'appliquer les règles pour les connecteurs. En vue d'une application de (PC), nous supposons, à la ligne (8), l'antécédent de l'implication dont nous voulons prouver la quantification universelle. Nous aurions également pu supposer « Ga » et faire les instantiation dans les lignes (9) et (11) avec « a » au lieu de « b ». Nous généralisons le résultat obtenu à la ligne (15) et enlevons la supposition du disjoint typique, ce qui est permis parce que la conclusion obtenue n'en dépend pas.

12.4 La critique référentialiste de Frege

Für Frege können Identitätsaussagen informativ sein, wenn die beiden singulären Terme verschiedene Sinne haben. Diese Sinne ("Arten des Gegebenseins") ***bestimmen*** die Referenz : Referenzobjekt des Terms ist dasjenige Ding, auf das der im Sinn 'kodifizierte' deskriptive Gehalt zutrifft. Eigennamen werden damit ähnlich wie singuläre Beschreibungen behandelt.

Quelques propriétés du sens Fregéen :

1. Le sens détermine la référence. Il est singularisant dans le sens où, pour un nom propre, un et un seul individu tombe sous le contenu conceptuel rattaché au nom propre – le sens est donc conçu d'après le modèle des descriptions définies. Ceci exclut, p. ex., la possibilité que le sens de « je » soit la signification linguistique conventionnelle donnée par « la personne qui parle ». Cette dernière ne détermine pas la référence. La signification linguistique reste la même, mais la référence varie selon les personnes qui utilisent l'expression « je ».
2. Le sens est ce que l'on saisit si on comprend une expression.
3. Le sens est la signification linguistique conventionnelle des expressions (au moins dans des langages parfaits où il n'y a ni d'ambiguïté ni dépendance contextuelle).
4. Le sens est objectif et universel et peut être saisi par n'importe qui (ce qui le distingue des représentations, i.e. des images mentales et subjectives associées à une expression).
5. Le sens est indépendant de la référence. On peut tout à fait comprendre une expression sans pour autant être capable d'en identifier le référent (ex. « l'homme le plus riche du monde »). Il est possible qu'on n'ait accès à des référents qu'à travers le sens d'une expression. C'est pour

cette raison qu'on peut comprendre des énoncés contenants des noms propres vides.
6. Le sens est l'objet des attitudes, c'est ce qu'on croit/ A VOIR : c'est ce qu'on pense FIN/, p. ex., si on croit quelque chose. Si quelqu'un donne son assentiment à ou affirme une phrase (p. ex. « Superman peut voler »), ce qu'on affirme et croit est une pensée, i.e. le sens de la phrase (qui est différent du sens de la phrase « Clark Kent peut voler »).
7. Le sens est le référent des mots qui se trouvent dans un contexte linguistique indirect, p. ex. un contexte linguistique introduit par « Je crois que . . . ».

Ces propriétés du sens Fregéen correspondent à des problèmes discutés plus haut. Chacune de ces propriétés a été critiquée.

Für Kripke (1972) und Kaplan (1989) hingegen sind Eigennamen eher am Modell von Variablen (unter einer Wertzuordnung) aufzufassen. Die Referenz ist *direkt*, d.h. wird nicht durch einen Sinn vermittelt.

Kripke gibt im wesentlich drei Argumente :

1. Das modale Argument : "$a = b$" ist, wenn wahr, notwendigerweise wahr.
2. Das semantische Argument : auch wenn "F" den 'Sinn' von "a" angibt, kann "Fa" synthetisch sein.
3. Das erkenntnistheoretische Argument : ich kann "a" verstehen, auch wenn ich nichts über a weiss.

Pour les exposants de la théorie de la référence directe, et notamment pour Kripke (1972) et Kaplan (1989), la variable est l'expression référentielle par excellence – dans le cas de la variable gouvernée par un quantificateur , le ‹ mode › de sa référence ne peut être que direct.

A la base de la théorie de Frege comme elle était interprété par ses adversaires dans les années cinquante et soixante se trouve *une conception satisfactionelle (descriptiviste) du sens*. La conception satisfactionnelle du sens est la pensée qu'à chaque mot sont attachées quelques conditions que n'importe quelle chose dans le monde doit satisfaire pour être le référent du mot. Le référent de « Superman » est l'individu unique qui satisfait ces conditions. S'il n'y pas de tel objet, ou s'il y en a plusieurs, rien n'est dénoté par « Superman ». Pour les phrases, cette conception satisfactionnelle nous amène à identifier la pensée, c'est-à-dire le sens d'une phrase, avec les conditions de vérité de cette phrase (les conditions que notre monde doit satisfaire pour que la phrase en question soit vraie). Même les partisans du Neo-Fregéenisme, cependant, rejettent un descriptivisme général.

A cette conception satisfactionelle s'oppose *une théorie relationnelle*, comme elle a été défendue par David Kaplan. Pour les termes singuliers, Kaplan (1989) propose de caractériser la théorie de Frege par le schéma suivant :

(2) terme singulier $\stackrel{\text{exprime}}{\longrightarrow}$ concept / sens $\stackrel{\text{satisfaction}}{\longrightarrow}$ individu qui tombe le concept

La relation de référence $\langle$terme singulier $\stackrel{\text{dénote}}{\longrightarrow}$ individu$\rangle$ est conçu comme produit de ces deux relations :

$$\stackrel{\text{dénote}}{\longrightarrow} = \stackrel{\text{exprime}}{\longrightarrow} \quad \circ \quad \stackrel{\text{est satisfait par}}{\longrightarrow}$$

A cette conception, Kaplan oppose l'idée de la *référence directe*, i.e. d'une relation de référence qui n'est pas méditatée par un sens.

A la base de cette querelle, on trouve deux conceptions différentes du rapport entre langage et monde. Selon un camp (représenté p. ex. par Carnap), le monde est d'un côté et le langage de l'autre, et c'est le langage qui impose des conditions, le monde qui les satisfait ou pas. Selon l'autre, on est forcé de prendre en compte les liens (pragmatiques par ex.) à l'intérieur du niveau du langage *déjà* pour établir les liens de référence qui lient ce niveau avec le monde ; il faut prendre en compte le fait que les mots, eux aussi, sont *dans* le monde – au moins les mots conçus comme occurrences (« tokens », et non pas comme types) qui ont une location spatio-temporelle (ils se trouvent sur le tableau noir p. ex.).

Ces occurrences entrent, en tant qu'objets du monde, dans des relations avec d'autres objets du monde (comme le locuteur, les personnes par lesquelles j'ai appris ce mot (ce qu'on appelle une chaîne de transmission), l'auditeur etc.). La relation de dénotation entre une occurrence concrète de « ce bout de craie » et ce bout de craie (la chose blanche, pointue, dans ma main) est une relation entre deux choses qui se trouvent dans le (même, puisqu'il n'y a qu'un seul) monde.

Le nouveau paradigme dit que ce qui fixe la référence des mots, ce n'est pas le contenu conceptuel attaché aux mots mais les relations entre des occurrences des mots et tels et tels objets. Le référent d'un(e occurrence d'un) mot est cette chose qui se trouve dans une telle relation spécifique avec cette occurrence. C'est pour cette raison que les indexicaux peuvent parfaitement servir comme exemples : pour arriver au référent, il faut déterminer quel objet dans le monde se trouve dans la bonne relation avec cette occurrence (la relation d'*avoir été énoncée par* quelqu'un, en l'occurrence).

Les propriétés sémantiques d'une photo, p. ex. le fait que cette photo est *de* Mme. Thatcher, viennent du fait qu'elle a été prise en la présence de Mme. Thatcher et que la photo vient de l'impression de la pellicule causée par Mme. Thatcher. Même si c'est bien possible que Mme. Thatcher satisfait le « contenu conceptuel » de la photo (a les mêmes apparences que la personne photographiée), ceci n'est pas nécessaire, comme on voit comme suivant : si Mme. Thatcher avait une soeur jumelle qui lui ressemblait énormément, on ne dirait pas que la photo est une photo de cette soeur jumelle ; même si la photo ne ressemble pas du tout à Mme. Thatcher (parce qu'il faisait noir etc.), on dit toujours qu'elle est une photo (ratée) d'elle. En conséquent, même s'il arrivait que seul Mme. Thatcher satisfasse le contenu conceptuel, cette satisfaction n'est pas ce qui fait de la photo une photo de Mme. Thatcher, mais ce qui en est responsable est une relation réelle (dans les cas paradigmatiques, il s'agit d'une relation causale).[5]

Un des exemples les plus clairs de ce nouveau paradigme et en même temps une critique de Frege est constitué par ce que Donnellan (1968) appelle *l'emploi référentiel des descriptions définies*. Si je dis, dans un bar, « le type là-bas qui boit du Martini a dragué ma fille » je peux désigner quelqu'un même si ce quelqu'un ne boit que de l'eau – et même si, là-bas, caché derrière un rideau, il y a quelqu'un qui, /A VOIR : en effet A LA PLACE DE (en fait) FIN/, boit du Martini. La théorie de Frege nous dirait que j'ai fait référence à la personne cachée – ce qui, intuitivement, n'est pas le résultat qu'on aimerait avoir.[6] C'est plus clair encore pour les descriptions incomplètes comme « ce type »,[7] ou « lui ». Ce qui fixe la référence est p. ex. la saillance perceptuelle de l'individu en question dans le contexte.

Une option possible pour le Fregéen serait de dire que, dans ces cas-là, la relation même est représentée dans le concept – le sens de « ce type » serait alors donné par « le type que je vois s'agiter ». L'objection à cela, donnée par Kripke (1972), est que les chaînes de transmission reliant notre usage des noms propres avec les baptêmes originaux, et donc finalement avec les choses baptisées, nous permettent de parler des choses *dont on n'a que les noms* et dont on ne sait rien d'autre, ou encore, par rapport

5. Il est difficile de caractériser ces relations sans présupposer qu'elles sont toutes réductibles à des relations causales. Cette dernière réduction est le but d'un certain programme de recherche qui vise à naturaliser toutes les relations sémantiques. De toute façon, une caractérisation adéquate de cette relation devrait éviter de trivialiser la thèse qui / A VOIR : survient A LA PLACE DE (arrivait) FIN/ si on comptait la relation de satisfaction comme relation en question.

6. Peut-être une distinction entre « référent sémantique » et « référent pragmatique », pourrait aider ici au Néo-Fregéen. Le référent sémantique serait l'homme derrière le rideau (et le référent sémantique de « Jean » est Jean), même si le référent pragmatique est l'homme au bar qui boit de l'eau (comme le référent pragmatique de « Jean » peut être Pierre, si le locuteur a voulu faire référence à Pierre).

7. La stratégie de n. 6 ne marche pas dans ces cas, puisqu'il n'y a pas de référent (unique) sémantique.

auxquelles on est dans des illusions terribles. Au moins dans ces cas-ci, la référence ne semble pas être médiatisée par un contenu conceptuel. On n'est pas conscient des chaînes causales et on n'a pas besoin de les conceptualiser pour faire référence.

Hilary Putnam (1975a) a généralisé cette théorie à une sous-espèce des mots communs, c'est-à-dire aux termes d'espèce naturelle comme « or », « eau » et « tigre ». Dans cette théorie, il y a un certain inversement de la relation entre sens et référence. La référence est première. Les référents nous sont *donnés* et le sens c'est la façon dont le référent nous est donné ou encore la façon dont nous nous le représentons.

12.5 La logique des prédicats de deuxième ordre

à venir

12.6 La quantification plurielle

à venir

12.7 Le Néo-Frégéanisme

à venir

Points à retenir

1. La déduction naturelle pour la logique des prédicats consiste en les règles de déduction naturelle pour les connecteurs et en quatre règles d'introduction et d'élimination de quantificateurs.
2. La règle (SU), appelée « *spécialisation universelle* », nous permet de passer d'une quantification universelle à une instanciation de la phrase ouverte pour n'importe quel terme.
3. Un quantificateur existentiel est introduit par la règle de *généralisation existentielle* (GE).
4. Pour qu'une application des règles (SU) et (GE) soit correcte, il est requis que le terme remplacé par la variable soit libre pour cette variable dans la formule qui le contient, c'est-à-dire qu'il ne se trouve pas dans la portée d'un quantificateur qui lie cette variable.
5. Pour prouver une quantification universelle à partir d'une prémisse particulière à l'aide de la règle de *généralisation universelle* (GU), nous exigeons que cette prémisse soit vraie d'un individu arbitraire, c'est-à-dire d'un individu qui n'apparaît dans aucune supposition ou prémisse dont dépend la preuve de cette phrase particulière.
6. Par (GU), nous pouvons ensuite inférer une quantification universelle dans laquelle le terme arbitraire est substitué *partout* par une variable. Il est important que cette substitution soit uniforme.
7. La règle d'élimination du quantificateur existentiel (SE) correspond à celle de l'élimination de la disjonction ($\vee$**E**) et est par conséquent plus compliquée. L'application de la règle de spécialisation existentielle (SE) comprend quatre étapes :
   (a) la preuve d'une quantification existentielle sous certaines suppositions et à partir de certaines prémisses ;
   (b) la supposition du disjoint typique ;
   (c) une preuve d'une autre phrase sous la supposition du disjoint typique ;

   (d) l'application de la règle, avec la conclusion que nous pouvons également prouver la phrase prouvée sous la supposition du disjoint typique à partir des suppositions et prémisses nécessaires pour la preuve de la quantification existentielle ;

8. La règle de spécialisation existentielle (SE) est sujette aux mêmes deux conditions que la règle de généralisation universelle :
   (a) la constante remplaçant la variable dans le disjoint typique ne doit apparaître dans aucune prémisse ou supposition de laquelle dépend la quantification existentielle ;
   (b) elle ne doit pas avoir d'occurrence dans la formule que nous voulons prouver.
9. L'application de ces règles nous permet de prouver des théorèmes (« $\vdash \phi$ ») et des séquents (« $\phi \vdash \psi$ »). La déduction naturelle est une méthode syntaxique qui est correcte et complète par rapport à la sémantique de la logique des prédicats : toute phrase valide est un théorème et tout théorème est valide ; tout séquent déductible correspond à une relation de conséquence sémantique et toute conséquence sémantique peut être déduite comme séquent.
10. Die Einführung neuer Individuenkonstanten für 'beliebige' Elemente des Individuenbereichs (Referenz einer 'Variable-unter-einer-Wertzuordnung') motiviert eine Kritik der Fregeschen Auffassung des Sinns von Eigennamen. Gemäss der Theorie der direkten Referenz referieren Eigennamen nicht via der Erfüllung ihres deskriptiven Gehalts, sondern 'direkt' : sie sind rigide Designatoren, die in allen möglichen Welten dasselbe Objekt bezeichnen.