

Chapitre 13

Propriétés métalogiques de la logique des prédicats

13.1 Les propriétés métalogiques de la logique des prédicats

Dans cette leçon, nous démontrerons quelques propriétés métalogiques de la logique des prédicats :

- la *correction* de la méthode des arbres, du calcul axiomatique et de la méthode de déduction naturelle, dont s’ensuit leur consistance ;
- la *complétude* de la méthode des arbres, du calcul axiomatique et de la déduction naturelle ;
- le *théorème de Löwenheim-Skolem* sur la logique des prédicats.
- la *compacité* de la logique des prédicats ;

Comme pour la logique propositionnelle (cf. p. 126), nous pouvons prouver un théorème de déduction pour la logique des prédicats, ainsi la distinguant nettement de la logique modale (cf. p. 250).

13.2 La correction et la complétude de la méthode des arbres pour la logique des prédicats

Pour prouver la complétude de la méthode des arbres pour la logique des prédicats, nous reprenons quelques notions et définitions de la leçon 7 et suivons la présentation de Smullyan (1968: 57 et seq.). Comme avant, nous divisons les sept autres règles de construction d’arbres (considérant les règles pour l’équivalence matérielle comme dérivées) en deux catégories : celles qui traitent des formules que nous appelons « du type α » ($\Gamma \neg \neg \phi \neg$, $\Gamma \phi \wedge \psi \neg$, $\Gamma \neg(\phi \vee \psi) \neg$, $\Gamma \neg(\phi \rightarrow \psi) \neg$) qui ‘continuent sur la même branche’, et celles qui traitent des formules « du type β » ($\Gamma \neg(\phi \wedge \psi) \neg$, $\Gamma \phi \vee \psi \neg$ et $\Gamma \phi \rightarrow \psi \neg$) qui nous obligent à créer au moins une nouvelle branche. Nous ajoutons deux nouvelles catégories :

α	α_1	α_2
$\lceil \neg\neg\phi \rceil$	ϕ	ϕ
$\lceil \phi \wedge \psi \rceil$	ϕ	ψ
$\lceil \neg(\phi \vee \psi) \rceil$	$\lceil \neg\phi \rceil$	$\lceil \neg\psi \rceil$
$\lceil \neg(\phi \rightarrow \psi) \rceil$	ϕ	$\lceil \neg\psi \rceil$

β	β_1	β_2
$\lceil \neg(\phi \wedge \psi) \rceil$	$\lceil \neg\phi \rceil$	$\lceil \neg\psi \rceil$
$\lceil \phi \vee \psi \rceil$	ϕ	ψ
$\lceil \phi \rightarrow \psi \rceil$	$\lceil \neg\phi \rceil$	ψ

γ	$\gamma(a)$
$\lceil \forall x(\phi) \rceil$	$\phi(x/a)$
$\lceil \neg\exists x(\phi) \rceil$	$\lceil \neg\phi(x/a) \rceil$

δ	$\delta(a)$
$\lceil \exists x(\phi) \rceil$	$\phi(x/a)$
$\lceil \neg\forall x(\phi) \rceil$	$\lceil \neg\phi(x/a) \rceil$

Nous modifions la construction des tableaux en ajoutant les règles (C) et (D) à (A) et (B) :

Définition 69 (Tableaux). *Un tableau est un arbre binaire dont les noeuds sont des formules bien-formées de la logique des prédicats construites à partir d'une formule comme suit : si χ est une formule dont le tableau T a déjà été construit et que ζ en est un point extrême, nous élargissons T par l'une des méthodes suivantes :*

- (A) *Si une formule du type α a une occurrence sur le chemin B_ζ (le chemin de χ jusqu'à ζ dans T), nous ajoutons soit α_1 soit α_2 comme successeur unique à ζ .*
- (B) *Si une formule du type β a une occurrence sur le chemin B_ζ , nous ajoutons β_1 comme successeur gauche et β_2 comme successeur de droite à ζ .*
- (C) *Si une formule du type γ a une occurrence sur le chemin B_ζ , nous ajoutons des formules $\lceil \gamma(a) \rceil$ comme successeurs pour toutes les constantes « a » apparaissant sur le chemin.*
- (D) *Si une formule du type δ a une occurrence sur le chemin B_ζ , nous ajoutons des formules $\lceil \delta(a) \rceil$ pour une nouvelle constante « a » qui n'apparaissait pas encore sur le chemin.*

Nous constatons les quatre faits suivants concernant les formules du type α , β , γ et δ :

- F₁** une formule du type α est vraie ssi. α_1 est vrai et α_2 est vraie ;
- F₂** une formule du type β est vraie ssi. soit β_1 est vrai soit β_2 est vraie ;
- F₃** une formule du type γ est vraie ssi. $\lceil \gamma(a) \rceil$ est vraie pour tout a dans l'univers ;
- F₄** une formule du type δ est vraie ssi. $\lceil \delta(a) \rceil$ est vraie pour au moins un a dans l'univers.

Nous notons aussi les quatre faits suivants concernant la satisfaisabilité d'un ensemble arbitraire E :

- G₁** Si S est satisfaisable et que $\alpha \in S$, alors $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ est satisfaisable.
- G₂** Si S est satisfaisable et que $\beta \in S$, alors soit $S \cup \{\beta_1\}$, soit $S \cup \{\beta_2\}$ est satisfaisable.
- G₃** Si S est satisfaisable et que $\gamma \in S$, alors $S \cup \{\gamma(a)\}$ est satisfaisable pour toute constante « a ».
- G₄** Si S est satisfaisable, que $\delta \in S$ et que « a » est une constante qui n'a aucune occurrence dans un élément de S , alors $S \cup \{\delta(a)\}$ est satisfaisable.

Pour prouver **G₄** nous procédons comme suit : Si S est satisfaisable, il y a une structure et une assignation de valeurs par rapport auxquelles toutes les phrases dans S sont vraies. En particulier, il existe une interprétation I des signes non-logiques dans S et une assignation de valeurs à toutes les variables dans S qui rendent la formule du type δ vraie. δ est d'un type existentiel – de **F₄** il s'ensuit alors que δ est vraie ssi. il existe un élément de l'univers de discours de lequel elle est vraie. Nous appelons cet élément « a ». Ayant ajouté cette nouvelle constante à notre langue, nous définissons une nouvelle interprétation des constantes comme suit :

$$I^*(\langle k \rangle) := \begin{cases} a & k = a \\ I(\langle k \rangle) & k \neq a \end{cases}$$

Sous cette nouvelle interprétation I^* , $\lceil \delta(a) \rceil$ est vraie. $S \cup \{\lceil \delta(a) \rceil\}$ est donc satisfaisable.

Nous pouvons maintenant prouver la correction de la méthode des arbres pour la logique des prédicats :

Théorème 70 (Correction de la méthode des arbres). *La méthode des arbres pour la logique des prédicats est correcte : toute formule prouvable est valide.*

PREUVE Comme pour la logique propositionnelle, nous prouvons la correction par induction mathématique. \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_3 et \mathbf{G}_4 nous assurent qu'une branche satisfaisable étendue par l'une des règles (A), (C) ou (D) reste satisfaisable.

Si on étend une branche satisfaisable en deux branches par (B), au moins une des branches reste satisfaisable (par \mathbf{G}_2). Toute extension directe d'un tableau satisfaisable est donc satisfaisable. Il s'ensuit par induction mathématique que si l'origine d'un tableau est satisfaisable, le tableau entier l'est également. Par conversion, si un tableau n'est pas satisfaisable (ne contient que des branches fermées), l'origine ne l'est pas non plus. Sa négation est donc valide. \square

Dans le cas de la logique propositionnelle, nous avons prouvé la complétude de la méthode des arbres en nous appuyant sur les faits suivants :

- (i) pour chaque proposition, nous obtenons un arbre complet après un nombre fini d'étapes ;
- (ii) les phrases se trouvant sur une branche complète et ouverte forment un ensemble de Hintikka ;
- (iii) tout ensemble de Hintikka est satisfaisable, c'est à dire est un sous-ensemble d'un ensemble saturé.

Nous devons adapter notre définition des ensembles de Hintikka pour tenir compte du fait que la logique des prédicats permet des arbres infinis :

Définition 71. *Un ensemble de Hintikka \mathcal{H} pour un univers de discours D est un ensemble de formules de la logique des prédicats satisfaisant les conditions suivantes :*

- (a) \mathcal{H} ne contient pas de formule atomique et sa négation.
- (b) Si $\alpha \in \mathcal{H}$, alors $\alpha_1 \in \mathcal{H}$ et $\alpha_2 \in \mathcal{H}$.
- (c) Si $\beta \in \mathcal{H}$, alors soit $\beta_1 \in \mathcal{H}$, soit $\beta_2 \in \mathcal{H}$.
- (d) Si $\gamma \in \mathcal{H}$, alors $\gamma(a) \in \mathcal{H}$ pour tout $a \in D$.
- (e) Si $\delta \in \mathcal{H}$, alors $\delta(a) \in \mathcal{H}$ pour au moins un $a \in D$.

Nous prouvons un lemme analogue :

Théorème 72 (Lemme). *Tout ensemble de Hintikka pour un univers D est satisfaisable dans D .*

PREUVE

Soit \mathcal{H} un ensemble de Hintikka pour l'univers D . Comme pour la logique propositionnelle, nous devons trouver une interprétation qui rende vraies toutes les phrases dans \mathcal{H} . Nous la définissons ainsi pour le cas spécial d'une formule atomique ϕ :

$$I(\phi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \phi \in \mathcal{H} \\ \mathbf{f} & \lceil \neg\phi \rceil \in \mathcal{H} \\ \text{un de } \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{f} & \phi \notin \mathcal{H} \wedge \lceil \neg\phi \rceil \notin \mathcal{H} \end{cases}$$

Nous devons alors montrer que I rend vraies non seulement les phrases atomiques, mais toutes les phrases dans \mathcal{H} . Pour cela, nous devons adapter notre définition de « degré » à la logique des prédicats :

Définition 73 (Degrés). *Le degré d'une formule ϕ de la logique des prédicats est le nombre naturel déterminé par les règles suivantes :*

- (i) Si ϕ est une phrase atomique, alors son degré est 0.

- (2) Si ϕ est une phrase niée $\neg\psi$ et que le degré de ψ est n , alors son degré est $n + 1$.
- (3) Si ϕ est une conjonction $\psi \wedge \chi$, une disjonction $\psi \vee \chi$, une implication $\psi \rightarrow \chi$ ou une équivalence $\psi \leftrightarrow \chi$ et si le degré de ψ est n et que le degré de χ est m , alors le degré de ϕ est $n + m + 1$.
- (4) Si ϕ est une phrase quantifiée $\forall x(\psi)$ ou $\exists x(\psi)$ et que le degré de ψ est n , alors son degré est $n + 1$.

Nous prouvons alors par induction mathématique sur le degré des formules que I rend vraies toutes les formules :

base de l'induction : Il s'ensuit de sa définition que I rend vraies toutes les formules atomiques (de degré 0) dans \mathcal{H} .

pas de l'induction : Supposons que I rende vraie toute phrase ϕ dans \mathcal{H} de degré inférieur à n . Si ϕ est d'un degré supérieur à 0, ϕ doit être une formule α, β, γ ou δ :

α : Si ϕ est du type α , alors α_1 et α_2 sont aussi dans \mathcal{H} . Mais ces formules sont d'un degré inférieur à n , donc elles sont rendues vraies par I . ϕ doit donc être vraie aussi.

β : Si ϕ est du type β , alors soit β_1 , soit β_2 est un membre de \mathcal{H} . Quelle qu'elle soit, elle doit être rendue vraie par I (puisque'elle est d'un degré inférieur à n). Donc ϕ est aussi rendue vraie par I .

γ : Si ϕ est du type γ , alors $\gamma(k)$, pour tout $k \in U$, est un membre de \mathcal{H} . Comme, pour tout $k \in U$, $\gamma(k)$ est d'un degré inférieur à n , il s'ensuit de l'hypothèse d'induction que ϕ est vraie.

δ : Si ϕ est du type δ , alors il y a un $k \in U$ tel que $\delta(k)$ est un membre de \mathcal{H} . $\delta(k)$ est d'un degré inférieur à n et vraie par l'hypothèse d'induction. ϕ est donc également vraie.

Nous avons donc défini une interprétation qui rend vraies toutes les phrases dans \mathcal{H} et, plus généralement, toutes les phrases dans un ensemble de Hintikka. □

En logique propositionnelle, chaque arbre était complet après un nombre fini d'applications de règles de construction d'arbre. La complication cruciale dans le cas de la logique des prédicats est qu'un arbre pour une phrase peut être infini. Par le lemme de König (cf. p. 140 dans la leçon 7), un tel arbre contiendra une branche infinie. Pouvons-nous assumer que les phrases sur une telle branche constituent un ensemble de Hintikka?

Malheureusement, la réponse est négative, comme le montre l'exemple d'un arbre infini donné dans la leçon 11 (p. 225). Sur un tel arbre, il peut se trouver une formule conjonctive, par exemple, qui ne sera jamais traitée puisque chaque instanciation d'une quantification universelle nous force à introduire une nouvelle constante qui doit également être instanciée par la suite. Nos règles de construction d'arbres nous forcent à 'retourner en arrière' un nombre infini de fois.

Cette complication peut être évitée en adoptant la modification suivante de notre notion de tableau :

Définition 74 (Tableaux déterministes). *Un tableau déterministe pour ϕ est un tableau construit par le processus ayant comme étape n le suivant :*

$n = 0$ Nous plaçons ϕ à l'origine de l'arbre.

$n \rightarrow n + 1$ Après avoir conclu la n -ième étape de la construction du tableau, nous procédons ainsi :

- (i) Si le tableau est déjà fermé, nous nous arrêtons.
- (ii) Si chaque point se trouvant sur une branche ouverte et qui n'est pas une formule atomique a déjà été utilisé, nous nous arrêtons.
- (iii) Autrement, nous construisons une extension directe du tableau en fonction du point ϕ de niveau minimal (et autant que possible à gauche) qui n'a pas encore été utilisé et qui se trouve sur au moins une branche ouverte :

- (A) Si ϕ est une formule du type α , nous ajoutons α_1 et α_2 à toutes les branches ouvertes passant par ϕ et marquons ϕ comme utilisé.
- (B) Si ϕ est une formule du type β , nous ajoutons β_1 comme successeur de gauche et β_2 comme successeur de droite à toutes les branches ouvertes passant par ϕ et nous marquons ϕ comme utilisé.
- (C) Si ϕ est une formule du type γ , nous ajoutons à toute branche ouverte passant par ϕ une formule $\gamma(a)$ (où « a » est la première constante n'apparaissant pas encore sur la branche) et également la même formule ϕ et nous marquons l'ancienne occurrence de ϕ comme utilisée.
- (D) Si ϕ est une formule du type δ , nous ajoutons à toute branche ouverte passant par ϕ la nouvelle formule $\delta(a)$ (où « a » est la première constante n'apparaissant pas encore sur la branche) et nous marquons ϕ comme utilisé.

Les tableaux déterministes se distinguent d'autres tableaux par trois aspects :

1. Ils sont beaucoup plus longs, puisque nous répétons chaque quantification universelle (et négation d'une quantification existentielle) après son instanciation.
2. Dans leur construction, nous ne devons jamais retourner en arrière : aucune occurrence d'une quantification universelle ne sera instanciée plus d'une fois.
3. Les formules sur une branche ouverte d'un tableau déterministe, soit qui est infini soit ne contient que de phrases utilisées, forment un ensemble de Hintikka.

(3) s'ensuit de notre définition parce qu'une branche ouverte et finie soit ne contient pas de formule du type γ , soit ne contient une quantification universelle (ou une négation d'une quantification existentielle) 'vide', c'est-à-dire de la forme $\lceil \forall x(\phi) \rceil$ où ϕ ne contient pas d'occurrence de « x ». Si le tableau est infini, notre méthode de construction nous assure que toutes les autres formules que celles du type γ ont été utilisées.

Nous pouvons maintenant prouver la complétude de la méthode des arbres :

Théorème 75 (Complétude de la méthode des arbres). *La méthode des arbres pour la logique des prédicats est complète : toute formule valide est prouvable.*

PREUVE Supposons que ϕ est une formule valide et \mathcal{T} son tableau déterministe (qui a $\lceil \neg\phi \rceil$ comme origine). Si \mathcal{T} contenait une branche ouverte, les formules sur cette branche formeraient un ensemble de Hintikka qui, par le lemme, serait satisfaisable. Comme $\lceil \neg\phi \rceil$ serait un élément de cette branche, $\lceil \neg\phi \rceil$ serait également satisfaisable, donc ϕ ne serait pas valide. \square

Le lemme de König, que nous avons prouvé dans la leçon 7 (cf. p. 140), dit qu'un arbre infini doit contenir une branche infinie. Un tableau qui ne contient que des branches finies doit être fini. Le théorème de complétude nous assure par conséquent que tout tableau systématique pour la négation d'une formule valide doit se fermer après un nombre fini d'étapes.

13.3 La correction et la complétude de la méthode de déduction naturelle pour la logique des prédicats

à venir

13.4 La correction et la complétude du calcul axiomatique de la logique des prédicats

à venir

13.5 La théorie des modèles

à venir

13.6 Le théorème de Löwenheim-Skolem

Revenons sur la modification que nous avons faite de la méthode des arbres en modifiant les règles pour le quantificateur existentiel et la négation du quantificateur universel en ne les instanciant qu'avec la constante nouvelle, censée représenter un individu arbitraire. Est-elle vraiment innocente ?

La réponse est oui, pour la raison suivante : Si une formule ϕ est vraie ou fausse dans une structure avec un univers de discours de n individus, elle sera également vraie ou fausse dans beaucoup de modèles contenant des univers de discours plus larges. Supposons que nous sommes arrivés, par la nouvelle méthode, à un modèle qui rend vraie la phrase « Rab », pour une nouvelle constante « b », et que nous aurions obtenu, par l'ancienne méthode, deux modèles, rendant vraies « Raa » et « Rab » respectivement. Supposant que nous n'avons pas utilisé d'autres constantes, l'un de ces modèles ne contient qu'un seul individu, a , bien que les autres en contiennent aussi un autre, b . Cependant, cet autre individu ne peut pas être distingué de a dans le modèle : d'après tout ce que nous savons de a et de b , il pourrait s'agir du même individu. Nous remarquons ainsi que pour tout modèle, nous pouvons en créer d'autres, en y ajoutant des individus indistinguables de ceux qui se trouvent dans le domaine du discours du premier.

Nous pouvons faire quelques observations sur la satisfaisabilité et la consistance de formules ou d'ensembles de formules de notre langage \mathcal{L}^+ . Soit Σ un ensemble de formules de cette langue.

1. Que Σ soit ou pas satisfaisable dans une structure \mathcal{A} , ne dépend que de la cardinalité de $|\mathcal{A}|$, c'est-à-dire du nombre d'éléments contenus dans l'univers de discours de \mathcal{A} .
2. Si Σ est satisfaisable dans \mathcal{A} , alors Σ est également satisfaisable dans toute structure qui garde l'interprétation des signes de relations, des signes de fonctions et des constantes mais contient un univers de discours plus large.
3. Il y a des formules satisfaisables dans une structure infinie qui ne sont pas satisfaisables dans une structure finie.

À la réflexion, ces observations ne sont pas étonnantes. Beaucoup plus étonnant, et le sujet d'un méta-théorème important, est une converse partielle à notre première observation, converse qui nous permet de réduire nos modèles au lieu de les agrandir.

Löwenheim a prouvé en 1915 que si une formule ϕ est satisfaisable, alors elle est satisfaisable dans un domaine de discours dénombrable, c'est-à-dire un domaine de discours contenant le même nombre d'éléments qu'il y a de nombres naturels. Nous obtenons ce résultat comme corollaire de la satisfaisabilité de tout ensemble de formules sur une branche ouverte d'un tableau déterministe :

Théorème 76 (Löwenheim). *Si une formule ϕ est satisfaisable alors elle est satisfaisable dans une structure avec un domaine de discours dénombrable.*

PREUVE Par le théorème de complétude, le tableau systématique de ϕ ne peut pas être fermé. Il doit donc contenir une branche ouverte. Les formules se trouvant sur cette branche sont simultanément satisfaisables parce qu'elles forment un ensemble de Hintikka. L'interprétation qui satisfait la branche ouverte ne parle que d'un nombre dénombrable d'individus ; par la construction du tableau systématique, tous les individus dans son domaine de discours seront nommés par des constantes, dont il n'y a qu'un nombre dénombrable. L'interprétation satisfaisant la branche ouverte doit aussi satisfaire son origine, qui est ϕ . \square

Skolem a étendu ce résultat, prouvant que si un ensemble dénombrable de phrases est satisfaisable simultanément, il est simultanément satisfaisable dans un domaine de discours dénombrable.

La preuve repose sur une extension de la méthode de tableaux déterministes à des ensembles de formules : nous disons d'un tableau qu'il est « Σ -complet » pour un ensemble de formules Σ si les formules sur chacune de ces branches déterminent un ensemble de Hintikka et s'il contient également toutes les formules dans Σ . Pour n'importe quel ensemble de phrases Σ , nous construisons un tableau qui est Σ -complet en utilisant la procédure systématique pour la construction d'un tableau déterministe, commençant par la première formule dans Σ (par rapport à n'importe quelle énumération) et ajoutant la n ème formule dans Σ à la n ème étape de la construction à chaque branche ouverte. Pris ensemble, ceci nous donne le théorème suivant :

Théorème 77 (Löwenheim-Skolem). *Si un ensemble dénombrable de formules Σ est simultanément satisfaisable, alors Σ est satisfaisable dans un modèle dont le domaine est dénombrable.*

PREUVE Supposons que Σ est un ensemble dénombrable de formules. Nous savons qu'il existe un tableau \mathcal{T} qui est S -complet. Si \mathcal{T} était fermé, il ne contiendrait qu'un nombre fini de formules (par le lemme de König). Puisqu'il contient toutes les formules de Σ , Σ devrait également être fini et, par le théorème de complétude, ne serait pas satisfaisable. Donc \mathcal{T} ne peut pas être fermé et contient une branche ouverte. Par la construction des tableaux Σ -complets, les formules sur cette branche ouverte composent un ensemble de Hintikka contenant toutes les formules dans Σ . Par le lemme, cet ensemble est satisfaisable dans un univers de discours dénombrable. \square

Comme corollaire, nous pouvons prouver la compacité de la logique des prédicats :

Théorème 78 (Compacité). *La logique des prédicats est compacte : si un ensemble de formules Σ est insatisfaisable alors il existe un sous-ensemble fini $\Sigma' \subset \Sigma$ qui est également insatisfaisable.*

PREUVE Si Σ est insatisfaisable, il y a un tableau fermé qui est Σ -complet. Un tel tableau doit être fini, donc ne peut contenir qu'un nombre fini d'éléments de Σ . \square

Comme dans le cas de la compacité de la logique propositionnelle, ce théorème nous assure que toute formule qui est une conséquence logique de quelques prémisses, s'ensuit déjà d'un nombre fini de ses prémisses.

Les raisonnements de Löwenheim et Skolem, bien que pertinents pour des questions logiques, n'utilisent pas de formalisme logique ni des axiomes d'un calcul précis. Ils portent sur des structures considérées comme des entités mathématiques, c'est-à-dire des ensembles satisfaisant quelques conditions. Le champ de recherche auquel appartiennent des raisonnements de ce type s'appelle la « *théorie des modèles* ». La théorie des modèles étudie, en toute généralité, la nature et l'existence des modèles pour des systèmes modèles, et les questions de la consistance et de la satisfaisabilité qui y sont liées.

13.7 Les limites de la logique des prédicats

à venir

Points à retenir

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.