Chapitre 14

La logique modale

14.1 La logique modale propositionnelle

Voici quelques inférences valides en logique modale :

(1)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Quelqu'un de sage est nécessairement heureux.}\\ \text{Dieu est nécessairement sage.}\end{array}}{\text{Dieu est nécessairement heureux.}}$$

(2)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Il n'est pas possible qu'une chose soit entièrement rouge et verte en même temps.}\\ \text{Cette chose est entièrement verte.}\end{array}}{\text{Cette chose n'est pas entièrement rouge.}}$$

(3)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Il est possible que si } p \text{ alors } q.\\ \text{Il est nécessaire que } p.\end{array}}{\text{Il est possible que } q.}$$

La logique modale étudie les notions de possibilité, d'impossibilité, de nécessité, de contingence et de compatibilité. Une phrase est possible si elle peut être vraie et impossible dans le cas inverse. Elle est nécessaire si sa négation est impossible, contingente si elle n'est ni nécessaire ni impossible. Deux phrases sont compatibles s'il est possible qu'elles soient toutes deux vraies.

Dans ce chapitre, nous développerons les moyens pour rendre compte de ces inférences, en introduisons des systèmes axiomatiques et des méthode des arbres pour la logique modale propositionnelle et des prédicats. Nous commençons en élargissant notre langage :

Définition 79. *L'alphabet du langage $\mathcal{L}^{\Box}$ de la logique modale propositionnelle consiste en les signes suivants :*

1. *des phrases atomiques « p_0 », « p_1 », « p_2 » ... (une infinité dénombrable) ;*
2. *un opérateur « $\Box \ldots$ » (« nécessairement ») ;*
3. *les connecteurs « $\neg \ldots$ », « $\ldots \wedge \cdots$ », « $\ldots \vee \cdots$ », « $\ldots \rightarrow \cdots$ » et « $\ldots \leftrightarrow \cdots$ » ;*
4. *des symboles auxiliaires : parenthèses, virgules ;*

Comme la négation, « $\Box \ldots$ est un opérateur du type $\mathbf{S}/\mathbf{S}$:

Définition 80. *Une formule propositionnelle de $\mathcal{L}^\Box$ est toute expression obtenue par la procédure suivante :*

1. *Toute phrase atomique « p_i » ($i \in \mathbb{N}$) est une formule propositionnelle.*
2. *Si ϕ est une formule propositionnelle, alors $\ulcorner(\Box\phi)\urcorner$ et $\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$ sont des formules propositionnelles.*
3. *Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \vee \psi)\urcorner$ et $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ sont des formules propositionnelles.*

Nous utiliserons les expressions « il es nécessaire que p », « nécessairement p » et « il est nécessairement vrai que p » comme équivalentes, même si « nécessairement » est parfois utilisé pour marquer les cas de modalité dite « de re » dans la logique modale des prédicats (cf. 255 ci-dessous).

Nous introduisons l'opérateur « $\Diamond \ldots$ » comme abréviation pour « $\neg\Box\neg \ldots$ » et ainsi établissons les équivalences suivantes par définition :

$$\text{(4)} \quad \neg\Diamond\phi \iff \Box\neg\phi$$
$$\text{(5)} \quad \Diamond\neg\phi \iff \neg\Box\phi$$
$$\text{(6)} \quad \neg\Diamond\neg\phi \iff \Box\phi$$

14.2 Sémantique de la logique modale propositionnelle

L'idée de base de la sémantique pour la logique modale est que nous relativisons la notion de vérité à ce qu'on appelle normalement un « monde possible », un point d'évaluation autre que le monde comme il est, le monde dit « actuel ». Au lieu de dire de la phrase « il y a des cochons qui volent » qu'elle est fausse, nous dirons qu'elle est possiblement vraie, ainsi la distinguant de la phrase « 2 + 2 = 5 », par exemple. Nous dirons qu'elle est vraie dans un monde possible, un scénario consistant, et que c'est parce que « il y a des cochons qui volent » est possiblement vraie, vraie dans un monde possible, que « il est possible qu'il y a des cochons qui volent » est une affirmation vraie sur notre monde actuel. Pour relativiser la vérité d'une phrase à un monde possible ou point d'évaluation, nous rajouterons un nom de ce dernier à nos affirmation de « validité » (du type « $\models \phi$ ») qui deviennent ainsi des affirmations des affirmations de « vérité par rapport à un monde » (du type « $w_1 \models \phi$ »). « $w_1 \models \phi$ » veut dire que phi décrit correctement (est vraie dans) le monde w_1.

Le système le plus simple (et le système le plus faible dit « normal ») de logique modale propositionnelle est le système **K**. Il consiste en une axiomatisation de la logique propositionnelle (comme l'est par exemple le calcul HC introduit en leçon 4) et un seul schéma d'axiomes modal :

$$\textbf{(K)} \quad \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$$

(**K**) dit que je peux ‹ distribuer › l'opérateur de nécessité à travers une implication : s'il est nécessaire qu'une implication avec un antécédent nécessaire soit vraie, alors son conséquent obtient également avec nécessité. **K**, ainsi que toutes les systèmes modales normales, contient également (MP) et une nouvelle règle d'inférence appelée « règle de nécessitation » (Nec) :

$$\frac{\vdash \phi}{\vdash \ulcorner\Box\phi\urcorner}\ \text{Nec}$$

qui nous permet de passer de n'importe quel théorème « ϕ » à sa nécessitation $\ulcorner\Box\phi\urcorner$: nous pouvons toujours préfixer d'un opérateur de nécessité un théorème d'un système modale normale.

Il est important de distinguer cette règle d'inférence, qui n'est applicable qu'à des *théorèmes* d'une phrase de la forme « $p \rightarrow \Box p$ ». Si une telle phrase était dérivable dans un système modal, ce système modal serait trivialisé : chaque phrase impliquerait sa nécessitation, et (avec une instanciation de (**K**)) la nécessitation de sa nécessitation, et ainsi de suite. Parce que Nec est une règle d'inférence des systèmes modales normales et que « $p \rightarrow \Box p$ » n'en est pas un théorème, que nous n'avons pas de théorème de déduction pour ces systèmes :

Dans le nouveau calcul **K**, nous construisons des preuves de la même manière que dans HC.

Voici par exemple une preuve de « $\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$ » :

(1)	$\mathbf{K} \vdash (p \wedge q) \rightarrow p$	$\mathbf{H_8}$
(2)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \rightarrow p)$	Nec de (1)
(3)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \rightarrow p) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p)$	**K**
(4)	$\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p$	(MP) de (2) et (3)
(5)	$\mathbf{K} \vdash (p \wedge q) \rightarrow q$	$\mathbf{H_9}$
(6)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \rightarrow q)$	Nec de (5)
(7)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \rightarrow q) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q)$	**K**
(8)	$\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q$	(MP) de (6) et (7)
(9)	$\mathbf{K} \vdash (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p) \rightarrow ((\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)))$	$\mathbf{H_{10}}$
(10)	$\mathbf{K} \vdash (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q))$	(MP) de (9) et (4)
(11)	$\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$	(MP) de (10) et (8)

D'autres théorèmes de **K** sont par exemple :

(i) « $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$ »
(ii) « $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$ »
(iii) « $(\Diamond p \vee \Diamond q) \leftrightarrow \Diamond(p \vee q)$ »
(iv) « $\Diamond(p \wedge q) \rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$ »

Par contre, les suivants ne sont pas des théorèmes de **K** :

(i') « $\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$ »
(ii') « $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$ »
(iii') « $\Box p \rightarrow p$ »

Quand nous comparons le théorème (ii) avec le non-théorème (i'), nous notons une similarité entre l'opérateur de nécessité « $\Box$ » et le quantificateur universel : $(\Box p \wedge \Box q) \leftrightarrow \Box(p \wedge q)$ et $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$ sont des théorèmes, au même titre que le sont $(\forall x\phi \wedge \forall x\psi) \leftrightarrow \forall x(\phi \wedge \psi)$ et $(\forall x\phi \vee \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\phi \vee \psi)$ de la logique des prédicats, mais $\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$ (et $\forall x(\phi \vee \psi) \rightarrow (\forall x\phi \vee \forall x\psi)$) ne le sont pas.

Pour l'opérateur de possibilité « $\Diamond$ » (et quantificateur existentiel), les relations sont inversées : ils distribuent sur la disjonction, mais dans une seule direction sur la conjonction.

Cette analogie nous donne la clef pour la sémantique de la logique modale, qui a été introduite par Saul Kripke (Kripke 1959 1963ab 1965).

Comme pour la logique des prédicats, nous développons la sémantique de la logique modale propositionnelle en deux étapes : la première notion détermine 'l'univers modal' de différents 'mondes possibles', la deuxième fournit une interprétation des phrases simples (relative à un monde possible).

Définition 81. *Un cadre est une paire $\langle W, R\rangle$ d'un ensemble non-vide W, dont les membres sont appelés « mondes possibles » et une relation binaire R dite « d'accessibilité » entre ces mondes possibles.*

Définition 82. *Un modèle est un triple $\langle W, R, I\rangle$ consistant en un cadre $\langle W, R\rangle$ et en une fonction I : $\mathsf{Fml}(\mathcal{L}) \times W \to \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$ (appelée « interprétation ») qui assigne à toute phrase et tout monde possible une valeur de vérité satisfaisant les conditions suivantes :*

I1 *Si ϕ est une phrase atomique « p » et $w \in W$, soit $I(\phi, w) := \mathbf{v}$, soit $I(\phi, w) := \mathbf{f}$*

I2 $I(\neg\phi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi, w) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & I(\phi, w) = \mathbf{v} \end{cases}$

I3 $I(\phi \wedge \psi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi, w) = \mathbf{v} \textit{ et } I(\psi, w) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi, w) = \mathbf{f} \textit{ ou } I(\psi, w) = \mathbf{f} \end{cases}$

I4 $I(\phi \vee \psi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi, w) = \mathbf{v} \textit{ ou } I(\psi, w) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi, w) = \mathbf{f} \textit{ et } I(\psi, w) = \mathbf{f} \end{cases}$

I5 $I(\phi \to \psi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi, w) = \mathbf{f} \textit{ ou } I(\psi, w) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi, w) = \mathbf{v} \textit{ et } I(\psi, w) = \mathbf{f} \end{cases}$

I6 $I(\phi \leftrightarrow \psi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi, w) = I(\psi, w) \\ \mathbf{f} & I(\phi, w) \neq I(\psi, w) \end{cases}$

I7 $I(\Box\phi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & \forall v(Rwv \to I(\phi, v) = \mathbf{v}) \\ \mathbf{f} & \exists v(Rwv \wedge I(\phi, v) = \mathbf{f}) \end{cases}$

I1 relativise l'attribution des valeurs de vérités à un monde possible spécifique : dans différents mondes possibles, les phrases simples recevront différentes valeurs de vérités. En ce sens, les mondes possibles correspondent aux différentes lignes dans une table de vérité.

I2 à **I6** assurent que l'interprétation des connecteurs propositionnelles est consistante avec leurs tables de vérité : nos mondes seront « logiquement possibles » dans le sens qu'il respectent la sémantique standard des connecteurs propositionnels.

I7 est la condition qui interprète l'opérateur de nécessité : une phrase est nécessaire dans un monde w si et seulement si elle est vraie dans tous les mondes qui se trouvent en relation R avec w. Etant donné l'interdéfinissabilité des opérateurs modaux ($\ulcorner\Box\phi\urcorner \Leftrightarrow \ulcorner\neg\Diamond\neg\phi\urcorner$), il est facile de voir que **I7** est équivalent à la condition suivante pour l'opérateur de possibilité :

I7′ $I(\Diamond\phi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & \exists v(Rwv \wedge I(\phi, v) = \mathbf{v}) \\ \mathbf{f} & \forall v(Rwv \to I(\phi, v) = \mathbf{f}) \end{cases}$

Nous adoptons une définition relationnelle de validité :

Définition 83. *Une formule propositionnelle ϕ de $\mathcal{L}^\Box$ est valide sur un cadre $\langle W, R\rangle$ si et seulement si pour tout modèle $\langle W, R, I\rangle$ et pour tout monde possible $w \in W$ du cadre, alors $I(\phi, w) = \mathbf{v}$.*

Nous avons un premier théorème de correction :

Théorème 84 (Correction de **K**). *Tout théorème de* **K** *est valide sur tous les cadres.*

Preuve □

Nous avons remarqué (cf. (iii') ci-dessus) que « $\Box p \to p$ » n'est pas un théorème de **K**. Si nous l'ajoutons comme axiome

(T) $\Box p \to p$

à **K**, nous obtenons un système plus fort, appelé **T**. Voici quelques théorèmes de **T** :

(i) « $p \to \Diamond p$ »

(ii) « $\Diamond(p \to \Box p)$ »

Pour certaines interprétations de « $\Box$ », l'axiome (**T**) est trop fort : bien qu'adéquat pour l'interprétation dite « aléthique » de « $\Box$ » comme « Nécessairement ... », il exclut une interprétation comme « il est obligatoire que ... ». Pour cette interprétation dite « déontique », un système plus faible est plus adéquat, ayant comme seul axiome supplémentaire à (**K**) le suivant :

(D) $\quad \Box p \to \Diamond p$

Lu « déontiquement », (**D**) dit que ce qui est obligatoire est permis : s'il est obligatoire de faire quelque chose, il n'est pas interdit de ne pas le faire.

Pour les preuves de correction des deux systèmes **T** et **D**, nous devons considérer de plus près la relation R dans notre définition d'un cadre. Dans le cas de **K**, aucune restriction sur R n'a été adoptée : n'importe quelle interprétation de R sur W nous donne un cadre sur lequel tout théorème de **K** est valide.

L'axiome (**T**), par contre, peut être lu comme restriction aux relations d'accessibilité : il force cette relation à être réflexive : si w est en relation avec n'importe quel autre monde v, alors forcément w est en relation avec lui-même.

Théorème 85 (Correction de **T**). *Si $\langle W, R\rangle$ est tel que $\forall w \forall v\,(Rwv \to Rww)$, alors tout théorème de* **T** *est valide sur $\langle W, R\rangle$.*

Preuve $\Box$

Pour la correction de **D**, nous remarquons que l'axiome (**D**) ne peut être vrai dans un monde que si ce monde est en relation R avec au moins un monde. Autrement dit, (**D**) sera faux dans un monde si ce monde est une impasse par rapport à R. Nous appelons un cadre « sériel » si sa relation d'accessibilité n'a pas d'impasses. Prouvons la correction de **D** par rapport aux cadres sériels :

Théorème 86 (Correction de **D**). *Si $\langle W, R\rangle$ est tel que $\forall w \exists v (Rwv)$, alors tout théorème de* **D** *est valide sur $\langle W, R\rangle$.*

Preuve $\Box$

Notre définition du langage $\mathcal{L}^{\Box}$ permet des modalités itérées comme dans « $\Box\Box p$ », « $\Box\Diamond p$ » et « $\Box(p \to \Diamond q)$ ». Quelques-unes de ces formules propositionnelles sont des théorèmes des logiques modales déjà introduites :

(i) « $(\Diamond\Box p \lor \Diamond q) \leftrightarrow \Diamond(\Box p \lor q)$ » est un théorème de **K**
(ii) « $\Box\Box p \to \Box p$ » est un théorème de **T**
(iii) « $\Box\Box p \to \Diamond\Box p$ » est un théorème de **D**

D'autres, par contre, ne le sont pas :

(i') « $\Box p \to \Box\Box p$ » n'est pas un théorème de **T** (ni, par conséquent, de **D** ni de **K**)
(ii') « $\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$ » n'est pas un théorème de **T** (ni, par conséquent, de **D** ni de **K**)

Si nous ajoutons (i') à **T**, nous obtenons la logique **S4**, caractérisée par le schéma d'axiomes suivant :

(4) $\quad \Box p \to \Box\Box p$

En voici quelques théorèmes :

(i) « $\Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$ »

(ii) « $\Box\Box p \leftrightarrow \Box p$ »
(iii) « $\Diamond\Box\Diamond p \to \Diamond p$ »
(iv) « $\Box\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ »
(v) « $\Box\Diamond\Box\Diamond p \leftrightarrow \Box\Diamond p$ »
(vi) « $\Diamond\Box\Diamond\Box p \leftrightarrow \Diamond\Box p$ »

Ces théorèmes nous montrent qu'en **S4**, toute phrase modale est équivalente à l'une des formes suivantes :

(i) une phrase sans opérateur modale
(ii) une phrase de la forme « $\Box \ldots$ » où « $\ldots$ » ne contient pas d'opérateur modale
(iii) une phrase de la forme « $\Diamond \ldots$ » où « $\ldots$ » ne contient pas d'opérateur modale
(iv) une phrase de la forme « $\Box\Diamond \ldots$ » où « $\ldots$ » ne contient pas d'opérateur modale
(v) une phrase de la forme « $\Diamond\Box \ldots$ » où « $\ldots$ » ne contient pas d'opérateur modale
(vi) une phrase de la forme « $\Box\Diamond\Box \ldots$ » où « $\ldots$ » ne contient pas d'opérateur modale
(vii) une phrase de la forme « $\Diamond\Box\Diamond \ldots$ » où « $\ldots$ » ne contient pas d'opérateur modale

Pour la preuve de correction, nous notons d'abord qu'un cadre sur lequel tous les théorèmes de **S4** sont valides doit être sériel : puisque **S4** contient (**D**), un cadre avec une impasse servirait comme contre-exemple à un théorème. En plus, **S4** contient également **T** – la relation d'accessibilité doit donc aussi être réflexive ; elle serait en conséquence automatiquement sérielle. Pour valider tous les théorèmes de **S4**, la relation d'accessibilité doit non seulement être réflexive, mais aussi transitive :

Théorème 87 (Correction de **S4**). *Si* $\langle W, R\rangle$ *est tel que* $\forall w\forall v(Rwv \to Rww)$ *et* $\forall w\forall v\forall u((Rwv \wedge Rvu) \to Rwu)$, *alors tout théorème de* **S4** *est valide sur* $\langle W, R\rangle$.

Preuve □

Bien que « $\Box p \to \Box\Box p$ » soit un théorème de **S4**, « $\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$ » ne l'est pas. En ajoutant

(5) $\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$

à **T**, nous obtenons un système plus fort que **S4**, appelé **S5**. Dans **S5**, les opérateurs modaux distribuent plus librement sur la disjonction et la conjonction :

(i) « $(\Box p \vee \Box q) \leftrightarrow \Box(p \vee \Box q)$ »
(ii) « $(\Box p \vee \Diamond q) \leftrightarrow \Box(p \vee \Diamond q)$ »
(iii) « $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \leftrightarrow \Diamond(p \vee \Diamond q)$ »
(iv) « $(\Diamond p \wedge \Box q) \leftrightarrow \Diamond(p \vee \Box q)$ »

Grâce à ces quatre théorèmes de 'distribution', toute modalité itérée en **S5** se réduit à une modalité simple : dans toute paire de modalités, nous pouvons effacer la première :

(v) « $\Box\Box p \leftrightarrow \Box p$ »
(v) « $\Box\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$ »
(v) « $\Diamond\Box p \leftrightarrow \Box p$ »
(v) « $\Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$ »

Comme (4) est un théorème de **S5**, **S4** est contenue dans **S5**. La relation d'accessibilité d'un cadre sur lequel (5) est valide doit donc être réflexive et transitive. En outre, elle doit être symétrique, donc ce qu'on appelle une 'relation d'équivalence' :

Théorème 88 (Correction de **S5**). *Si* $\langle W, R\rangle$ *est tel que* $\forall w\forall v(Rwv \to Rww)$, $\forall w\forall v\forall u((Rwv \wedge Rvu) \to Rwu)$, *et* $\forall w\forall v(Rwv \to Rvw)$ *alors tout théorème de* **S5** *est valide sur* $\langle W, R\rangle$.

Preuve □

En somme, nous avons les correspondances suivantes :

système	axiomes	cadres
K	(**K**)	tous
D	(**K**)+(**D**)	sériels
T	(**K**)+(**T**)	réflexifs
S4	(**K**)+(**T**)+(**4**)	réflexifs et transitifs
S5	(**K**)+(**T**)+(**5**)	réflexifs, transitives et symétriques

14.3 La méthode des arbres pour la logique modale propositionnelle

Comme pour la méthode des arbres pour la logique propositionnelle classique (cf. le ch. 5), nous motivons la méthode syntaxique des arbres par des faits sémantiques :

F14 Si une affirmation de nécessité $\ulcorner\Box\phi\urcorner$ est vraie, alors ϕ est vrai dans toutes les possibilités.

F14 Si une affirmation de nécessité $\ulcorner\Box\phi\urcorner$ est fausse, alors ϕ est faux dans au moins une possibilité.

F14 Si une affirmation de nécessité $\ulcorner\Diamond\phi\urcorner$ est vraie, alors ϕ est vrai dans au moins une possibilité.

F14 Si une affirmation de nécessité $\ulcorner\Diamond\phi\urcorner$ est fausse, alors ϕ est faux dans toutes les possibilités.

Comme nous l'avons vu, ce que nous comptons comme « possibilité » varie d'un système à l'autre. C'est pourquoi que nous devons mentionner explicitement la relation d'accessibilité

14.4 La logique modale des prédicats

à venir

14.5 Les logiques epistémique, temporelles et déontiques

à venir

14.6 La théorie de la référence directe

La théorie de la référence directe est née dans les discussions sur l'interprétation de la logique modale dans les années cinquante et soixante et a trouvé son expression canonique dans une série de conférences de Saul Kripke (Kripke 1972). [1] Elle maintient les thèses suivantes :

- Il y a des expressions directement référentielles, qui ne désignent pas leur référents par l'intermédiaire d'une composante descriptive de leur significations (leur « sens »).
- Les exemples paradigmatiques d'expressions directement référentielles sont les noms propres (dans le sens contemporain, à distinguer des descriptions définies).

1. Pour des introductions générales à la théorie de Kripke, voir (Salmon 1982 1986; Devitt et Sterelny 1987; Devitt 1981).

- D'autres exemples sont les « noms » désignant les espèces naturelles, comme « eau », « cheval » et « or ».
- Les expressions directement référentielles désignent leurs référents avec nécessité : il n'est pas possible, par exemple, que l'eau soit quelque chose de différent de H_2O.
- Mais cela ne veut pas dire que « eau = H_2O » soit a priori. Il faut reconnaître l'existence des nécessités a posteriori.

Considérons de nouveau :

(Ari1') Aristote est l'élève le plus célèbre de Platon.

(**Ari1'**) n'est ni analytique (argument sémantique), ni a priori (argument épistémique), ni nécessaire (argument modal).

Une description définie peut nous servir pour *fixer la référence* d'un nom propre, sans pour autant nous *donner sa signification*.

Un désignateur est rigide si et seulement si sa référence ne varie pas parmi les situations contrefactuelles prises comme contextes d'évaluation. Il faut distinguer les contextes d'évaluation des contextes d'application.

Les termes d'espèces naturelles comme « eau » et « tigre » sont aussi des désignateurs rigides.

La reconstruction du paradoxe de Frege par Kit Fine :

1 différence sémantique : les deux phrases sont sémantiquement différentes

2 compositionnalité : si les phrases sont sémantiquement différentes, alors les deux noms propres sont sémantiquement différents

3 lien référentiel : si les deux noms propres sont sémantiquement différents, ils sont référentiellement différents

4 identité référentielle : les deux noms propres ne sont pas référentiellement différents

Les quatre propositions sont contradictoires : il s'ensuit de (1), (2) et (3) que les deux noms propres sont référentiellement différents, ce qui contredit (4). Il faut donc rejeter une des prémisses. (1) s'ensuit de deux autres prémisses :

1a différence cognitive : les deux phrases sont cognitivement différentes

1b lien cognitif : si les deux phrases sont cognitivement différentes, alors elles sont sémantiquement différentes

Les Frégéens rejettent la prémisse (3), acceptant des différences sémantiques entre des noms propres qui ne sont pas des différences au niveau de leurs références.

Cette position est problématique parce qu'elle nous oblige à dire, dans des cas concrets, quelle est la différence sémantique qui n'est pas une différence référentielle. Il semble possible de donner le même sens aux deux noms propres et de toujours garder une différence cognitive.

Les partisans de la théorie de la référence directe rejettent le lien cognitif (1b). Mais le rejet de (1) semble contre-intuitif, puisqu'une différence sémantique semble constituer l'explication la plus plausible de la différence cognitive qui est elle-même incontestable.

Examinons de plus de près la prémisse de compositionnalité (2). Elle s'ensuit de deux autres principes :

3a compositionnalité propre : si les deux phrases sont sémantiquement différentes, alors les deux paires de noms sont sémantiquement différentes

3b le principe de l'intrinsèque des relations sémantiques : si les deux paires de noms propres sont sémantiquement différents, alors les deux noms propres le sont également

Il est possible de maintenir (3a) tout en niant (3b). Ceci nous permet de rejeter (3) sans pour autant rejeter toute forme de compositionnalité. Le rejet de (3b) caractérise la théorie de Fine qu'il appelle le « relationalisme sémantique ».

Nous remarquons qu'une forme du paradoxe de Frege apparaît déjà avec les variables. Comparons « $x = x$ » et « $x = y$ ». L'une des deux phrases est un théorème de tout système logique contenant un signe d'identité. La deuxième phrase ne peut pas être un théorème d'un système qui accepte l'existence de plus d'un seul objet. Le paradoxe consiste en la contradiction entre les prémisses suivantes :

1. principe d'identité : « x » et « y » ont le même rôle sémantique
2. principe de différence : les deux paires de variables $\langle$ « x », « y » $\rangle$ et $\langle$ « x », « x » $\rangle$ ont des rôles sémantiques différents
3. principe de l'intrinsèque : si les deux paires de variables $\langle$ « x », « y » $\rangle$ et $\langle$ « x », « x » $\rangle$ ont des rôles sémantiques différents alors « x » et « y » ne peuvent pas avoir le même rôle sémantique

Il est résolu en rejetant le principe que les relations sémantiques sont des relations intrinsèques.

Les indexicaux sont des expressions dont la dénotation varie avec les circonstances de leur énonciation. Il y a des indexicaux personnels (« moi », « je », « nous »), géographiques (« ici », « là-bas »), temporels (« maintenant », « aujourd'hui »). Parfois on inclut dans cette liste les démonstratifs comme « cette table-là », « cet homme-ci », « ce truc-là ». Les indexicaux posent des problèmes pour la sémantique à plusieurs niveaux :

(i) Est-ce qu'ils ont un sens ? Et si oui, lequel ?
(ii) Qu'est-ce qui est constant dans leur usage ?
(iii) Comment décrire leur fonctionnement ?

Kaplan et Perry ont développé une théorie selon laquelle les expressions indexicales ont un *caractère* qui est constant dans leur usage et qui, appliqué à un contexte d'application, détermine leur référent.

Pour voir l'importance de la première question (i), considérons les phrases suivantes :

(E1) Un lion violent s'approche rapidement de *moi*.

(E2) Un lion violent s'approche rapidement de *Philipp Keller*.

(E3) Un lion violent s'approche rapidement de *la personne qui est en train de parler*.

Si je pense (**E1**), cela me fait courir. Si je pense (**E2**) ou (**E3**), je ne me mets pas forcément à courir. Pour voir l'importance de la deuxième question (ii), notons qu'avec

(E4) J'ai faim.

Sam et Maria disent, *dans un certain sens*, la même chose. Il est, par exemple, possible de répondre aux deux par « Moi aussi » et de dire ainsi qu'on a faim. *Dans un autre sens*, cependant, ils disent différentes choses, parce que Maria (si elle le prononce), mais non pas Sam, prendra (**E4**) comme raison pour aller manger.

14.7 La sémantique bi-dimensionnelle

En distinguant les contextes d'évaluation (en horizontale) des contextes d'application (en verticale), nous pouvons donner une sémantique bi-dimensionnelle aux désignateurs rigides :

« Maddox »	Maddox	Maddox	Maddox	« cet enfant baptisé »	Maddox	KM	PK
	KM	KM	KM		Maddox	KM	PK
	PK	PK	PK		Maddox	KM	PK

« moi »	PK	PK	PK	« la personne qui parle »	PK	KM	Maddox
	KM	KM	KM		PK	KM	Maddox
	Maddox	Maddox	Maddox		PK	KM	Maddox

« eau »	H_2O	H_2O	H_2O	« substance aquatique »	H_2O	XYZ	ABC
	XYZ	XYZ	XYZ		H_2O	XYZ	ABC
	ABC	ABC	ABC		H_2O	XYZ	ABC

Points à retenir

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.