Chapitre 15

Les limites du formalisme

15.1 Tarski : l'indéfinissabilité de la vérité

Nous avons vu, à la page 52 que le concept de vérité obéit à un principe de disquotation : Dire d'une phrase qu'elle est vraie est la dire. Alfred Tarski l'a formulé en sa célèbre « Convention T » :

(CT) « p » est vrai si et seulement si p

À la gauche de cette équivalence matérielle, on trouve une phrase du métalangage, à sa droite une phrase du langage-objet.

15.2 Russell : les paradoxes sémantiques

à venir

15.3 La théorie des ensembles

Une fonction qui relie deux ensembles, $f : A \to B$, est une relation, qui est telle que le choix de a détermine celui de b. Une relation est un ensemble de paires dont le premier membre appartient à A et le deuxième à B ($\{\langle a, b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$). Pour qu'une telle relation est une fonction, il faut qu'il n'est pas le cas qu'on a $\langle a, b'\rangle$ et $\langle a, b''\rangle$ pour deux $b', b'' \in B$ différents :

$$(f(a) = b' \wedge f(a) = b'') \to b' = b''\}$$

Pour qu'une relation soit une fonction, la valeur doit être déterminée par l'argument.

Les fonctions peuvent avoir des propriétés supplémentaires :

- Une fonction $f : A \to B$ est injective si elle n'assigne pas la même valeur à deux membres de A ; si non seulement l'argument détermine la valeur mais la valeur détermine également l'argument. Tout élément de B admet au plus un antécédent par f dans A.
- Une fonction $f : A \to B$ est surjective si elle assigne chaque membre de B à un argument dans A ; si chaque membre de B est 'visé' par la fonction. Tout élément de B est l'image par f d'au

moin un élément de A.

- Une fonction est appellée “bijective” si elle est à la fois injective et surjective.

Soit $f : A \to B$ une fonction :

(1) f est injective $:\Longleftrightarrow$ $\forall a_1, a_2 \in A(f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$

(2) f est surjective $:\Longleftrightarrow$ $\forall b \in B \exists a \in A(f(a) = b)$

La bijectivité établit une correspondance dite “un-à-un” entre son domaine (A) et son co-domaine (B) : à chaque $b \in B$ correspond exactement un $a \in A$ et inversément.

Nous pouvons établir le théorème suivant :

Théorème 89. *Une fonction $f : A \to B$ est bijective si et seulement si elle détermine une fonction réciproque.*

15.4 L’axiomatisation de l’arithmétique

à venir

15.5 L’incomplétude des systèmes formels : les théorèmes de Gödel

Voici un exemple simplifié de ce que signifie le théorème de Gödel, autrement dit l’insuffisance des procédés mécaniques de la logique dans le raisonnement mathématique. Supposons qu’on ait pu construire une machine qui, étant donnée une formule, répond « vrai » si elle est capable de prouver que la formule est vraie, « faux » si elle est capable de prouver que la formule est fausse, et rien du tout sinon. Soumettons lui la phrase : « La machine ne répond pas « vrai » à cette phrase »

La machine ne peut pas répondre « vrai », car si elle répond « vrai », la phrase est fausse, et la machine ne donne que des réponses justes.

La machine ne peut pas répondre « faux », car si elle répond « faux », la phrase est vraie, et la machine ne donne que des réponses justes.

Conclusion : la machine ne dit rien. Et nous, alors, nous pouvons affirmer que donc la phrase est vraie ! Ce que la machine ne peut pas faire. On ne peut donc pas résumer les découvertes mathématiques à des procédés purement mécaniques !

Une autre version, toujours informelle, est la suivante. Tout système consistant dans lequel nous pouvons parler des nombres naturelles, est incomplet. Car nous pouvons formuler, dans un tel système, une phrase qui dit d’elle même qu’elle ne peut pas être prouvée :

(**G**) G n’est pas prouvable.

Si la phrase est fausse, alors elle est prouvable est le système est incorrect parce qu’il prouve une phrase fausse.

Si la phrase est vraie, alors elle n'est pas prouvable et alors le système ne prouve pas toutes les phrases vraies.

L'essentiel de la preuve de Gödel de l'incomplétude de l'arithmetique consist en un codage de la syntaxe, qui permet au système axiomatique de parler de ses propres phrases, et de dire d'elles qu'elles sont prouvables ou pas.

15.6 Deuxième théorème de Gödel

à venir

15.7 La logique de prouvabilité

Le système de la logique de prouvabilité est appelé **GL** (après Gödel et Löb) et consiste en **K** avec le schéma d'axiomes suivant :

(GL) $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$

En voici quelques propriétés :

(i) « $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ » est un théorème de **GL**.
(ii) « $\Box p \rightarrow p$ » n'est pas un théorème de **GL**
(iii) « $\Box(\Box p \rightarrow p) \leftrightarrow \Box p$ » est un théorème de **GL**.
(iv) « $((\Box p \rightarrow p) \wedge \Box(\Box p \rightarrow p)) \rightarrow p$ » est un théorème de **GL**.
(v) « $\Box\Diamond p \leftrightarrow \Box(q \wedge \neg q)$ » est un théorème de **GL**.

Si nous abrégions par « $\mathsf{Bew}\, p$ » l'assertion que « p » peut être prouvé dans une formalisation de l'arithmétique de Peano PA, nous pouvons prouver en métamathématiques les assertions suivantes :

(i) Si nous avons $\mathsf{PA} \vdash p$, nous pouvons prouver $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Bew}\ p$.
(ii) $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Bew}\ (\ulcorner p \rightarrow q \urcorner) \rightarrow (\mathsf{Bew}\ (\ulcorner p \urcorner) \rightarrow \mathsf{Bew}\ (\ulcorner q \urcorner)$

« $\mathsf{Bew}\ \ldots$ », interprété comme opérateur modal, est donc au moins aussi fort que le système **K**.

Dans sa preuve de l'incomplétude de l'arithmétique, Gödel montrait le 'lemme diagonal' suivant :

(iii) Si $F(x)$ est un prédicat du langage de PA avec aucune autre variable libre que x, il existe une phrase p de ce langage tel que $\mathsf{PA} \vdash p \leftrightarrow F(\ulcorner p \urcorner)$.

Il s'ensuit le premier théorème d'incomplétude :

Théorème 90 (Incomplétude de l'arithmétique)**.** *Si* PA *est consistant, elle est incomplète : il existe une phrase qui peut être formulée dans son langage mais qui est indécidable (ne peut ni être prouvé ni être déprouvé).*

Preuve « $\neg\mathsf{Bew}\ (x)$ » est un prédicat avec une seule variable libre, donc il existe une phrase tel que $\mathsf{PA} \vdash p \leftrightarrow \neg\mathsf{Bew}\ (\ulcorner p \urcorner)$. Si cette phrase était prouvable $\mathsf{PA} \vdash p$, alors nous aurions par MP que $\mathsf{PA} \vdash \neg\mathsf{Bew}\ (\ulcorner p \urcorner)$, ce qui contredit $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Bew}\ (\ulcorner p \urcorner)$ que nous obtenons de (i). Si PA ne prouve pas de contradiction, « p » n'est pas prouvable et alors « $\mathsf{Bew}\ (\ulcorner p \urcorner)$ » est faux. Si « $\neg p$ » était prouvable, alors « $\mathsf{Bew}\ (\ulcorner p \urcorner)$ » le serait aussi (par la direction de droite à gauche du lemme diagonal) : donc une fausseté pourrait être prouvé. Donc ni $\mathsf{PA} \vdash p$ ni $\mathsf{PA} \vdash \neg p$. $\Box$

M.H. Löb a prouvé en 1954 :

(iv) Si $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Bew}(\ulcorner p \urcorner) \to p$, alors $\mathsf{PA} \vdash p$.

On obtient le deuxième théorème d'incomplétude comme conséquence immédiate :

Théorème 91 (Deuxième théorème d'incomplétude). *Si* PA *est consistant, alors* $\mathsf{PA} \nvdash \neg\mathsf{Bew}(\ulcorner p \wedge \neg p \urcorner)$.

PREUVE Si PA prouvait sa propre consistance, $\mathsf{PA} \vdash \neg\mathsf{Bew}(\ulcorner p \wedge \neg p \urcorner)$, alors $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Bew}(\ulcorner p \wedge \neg p \urcorner) \to (p \wedge \neg p)$, d'où s'ensuit par le théorème de Löb que $\mathsf{PA} \vdash p \wedge \neg p$, ce qui le rendait inconsistant. $\square$

Points à retenir

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.

Chapitre 16

Exercices

16.1 Formalisation, validité

1. (2 points) Formalisez le discours suivant :

   Si les Etats-Unis n'attaquent pas l'Iran et que le prix de l'essence augmente, la Syrie attaque Israël. Si la Syrie n'attaque pas Israël, le Liban le fera. Si les Etats-Unis n'attaquent pas l'Iran, le prix de l'essence augmente ou la Syrie attaque Israël. Si la Syrie attaque Israël, alors les Etats-Unis attaquent l'Iran.
2. (1 point) Au cours d'une discussion, Sam me dit que mon argument est faux. En me disant cela, Sam se trompe. Pourquoi ?
3. (1 point) Sam sait que si Maria aime Paul, alors elle sera déçue. Joséphine, la soeur de Maria, connaît les sentiments de Maria pour Paul. Joséphine aime Paul, et pour cette raison elle lui ment à chaque fois qu'il lui demande quels sont les sentiments de Maria à son égard. Paul a posé la question à Joséphine. Cette dernière lui a répondu que Maria ne l'aime pas. Est-ce que Maria sera déçue ?
4. (4 points) Lesquels des arguments suivants sont valides (tels qu'il est impossible que les prémisses sont vraies et la conclusion fausse) ?
   (a) Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage ; je serai heureux et sage ; alors j'étudie la logique.
   (b) Napoléon était allemand ; les allemands sont européens ; donc Napoléon était européen.
   (c) Napoléon était allemand ; les allemands sont asiatiques ; donc Napoléon était asiatique.
   (d) Napoléon était français ; tous les français sont européens ; donc Hitler était Autrichien.
   (e) Si Napoléon avait était chinois, alors il aurait été asiatique ; Napoléon n'était pas asiatique ; donc il n'était pas chinois.
   (f) Le réalisme naïf nous amène à la physique et la physique, si elle est vraie, montre que le réalisme naïf est faux. Donc le réalisme naïf, s'il est vrai, est faux ; alors il est faux (Russell, *Inquiry into Meaning and Truth*).
   (g) S'il pleut, on annulera le pique-nique. S'il ne pleut pas, Marie insistera pour aller à la plage, alors le pique-nique sera annulé. Ou bien il pleuvra ou bien il ne pleuvra pas. Donc le pique-nique sera annulé.
   (h) « Dieu existe. » – « Pourquoi ? » – « La Bible le dit. » – « Mais pourquoi penses-tu que tout ce qui est dans la Bible est vrai ? » – « Parce que la bible est la parole de Dieu. » – « Et comment sais-tu cela ? » – « C'est ce qui est dit dans la bible. »
5. (3 points) En respectant la convention qui veut que l'on forme le nom d'une expression en plaçant

ce mot entre guillemets (et selon la fiction qu'il n'y a pas d'autre usage des guillemets), lesquelles des phrases suivantes expriment des propositions vraies ?

   (a) L'*Iliade* a originalement été écrite en français.
   (b) « L'*Iliade* » est un poème épique.
   (c) Soit l'expression « philosophie » commence par des guillemets, soit « « philosophie » » ne le fait pas.
   (d) 2+2=4 est une vérité mathématique.
   (e) « Paris » et « la capitale de la France » mentionnent la même ville.
   (f) « le 42ème président des Etats-Unis » est « le mari de Hillary Clinton ».
   (g) La phrase qui précède ne parle pas de Bill Clinton.

6. (3 points) Mettez des guillemets de telle sorte que le résultat soit sensé :
   (a) Même si x est la 24ème lettre de l'alphabet, quelques savants ont dit que x est l'inconnu.
   (b) Bien que Aristote soit un nom d'Aristote et que Aristote soit un nom d'Aristote, Aristote n'est le nom de personne.
   (c) Philipp est mon nom et bien que je sache ce qu'est la philosophie, je n'ai jamais compris ce que les gens veulent dire par philosophie.
   (d) Italo Svevo est un pseudonyme de Ettore Schmitz.
   (e) Dans la langue française,
   n'est-il pas amusant de constater que
   mot est bien un mot
   que nom est un mot et un nom
   que adjectif est un mot, un nom et un adjectif
   tandis qu'adverbe n'est pas un adverbe
7. (1 point) Utilisez la distinction entre la sémantique et la pragmatique pour expliquer la différence entre les deux assertions « Il pleut, et elle fait une promenade. » et « Il pleut, mais elle fait une promenade. ».
8. (2 points) Décrivez deux différences fondamentales entre des langues naturelles et des langues formelles.
9. (3 points) Est-ce que les arguments suivants sont valides ? Si oui, sont-ils *logiquement* valides ?
   (a) Tom est célibataire ou anarchiste. Il n'est pas anarchiste. Donc il est célibataire.
   (b) Tom est célibataire ou végétarien. Il n'est pas végétarien. Donc il n'est pas marié.
   (c) Tom est célibataire et banquier. Il n'est pas célibataire. Donc il n'est pas communiste.

16.2 Les connecteurs propositionnels

1. (2 points) Une erreur s'est glissée dans chacune des tables de vérité suivantes. Laquelle ?
   (a) Première table :

p	q	$\neg p$	$q \rightarrow \neg p$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

   (b) Deuxième table :