Chapitre 4

La méthode axiomatique

4.1 Déductibilité syntaxique vs. validité sémantique

En utilisant les tables de vérité pour déterminer la validité ou la non-validité d'un argument, nous avons supposé que les phrases sont vraies ou fausses, c'est-à-dire qu'elles possèdent l'une ou l'autre de ces valeurs de vérité. La méthode des tables de vérité est une méthode *sémantique* précisément parce qu'il est fait référence à des propriétés (la vérité et la fausseté) qui sont ‹ extérieures› à la phrase, au sens où ces propriétés supposent l'existence d'un monde distinct de la phrase, un monde sur lequel ‹ porte› la phrase.

Il existe toutefois une autre méthode, dite *syntaxique*, permettant de tester la validité d'un argument, qui ne suppose pas d'emblée que les phrases aient une valeur de vérité. L'idée centrale consiste à essayer de *dériver* ou de *déduire* la conclusion de l'argument en partant de ses prémisses et en procédant *pas à pas*, au moyen de règles déterminées, jusqu'à sa conclusion.

Pour mieux comprendre cette méthode de *dérivation*, il est utile de considérer une métaphore empruntée aux échecs : les prémisses constituent les positions initiales des pièces sur l'échiquier ; les règles de dérivation correspondent aux règles qui permettent de déplacer les pièces et de poursuivre le jeu, et la conclusion correspond aux positions des pièces sur l'échiquier après un certain temps de jeu. Les règles des échecs sont ‹ syntaxiques› parce que vous n'avez pas besoin de savoir que telle pièce est le roi, ou telle autre le fou, pour apprendre à les manipuler. (En l'occurrence, l'interprétation ‹ monarchique› des échecs est parfaitement conventionnelle.)

Par conséquent, nous pouvons distinguer trois degré d'abstraction linguistique qui correspondent à différents niveaux de formalisation :

1.	« La terre tourne »	signification	vérité
2.	« p »	–	vérité
3.	ϕ	–	–

Le premier niveau correspond au langage naturel, dans lequel les phrases sont douées de sens et ont des conditions de vérité. Le second niveau correspond aux phrases sur lesquelles porte la méthode sémantique, qui ont des conditions de vérité mais qui ne sont que des variables sans signification déterminée. C'est à ce niveau-là qu'on examine les schémas (‹ squelettes›) d'inférences dont on établit la validité par des tables de vérité. Le troisième niveau, dans lequel on fait abstraction non seulement de la signification des phrases, mais aussi de leur vérité ou fausseté, correspond aux phrases sur lesquelles porte la méthode syntaxique, et sont considérées comme de purs symboles sans signification déterminée et sans valeur de vérité particulière. De plus, le niveau (1) est formalisé par le niveau (2), qui est à son tour formalisé par le niveau (3).

Qu'une phrase puisse ou non être dérivée d'autres phrases est une question qui concerne uniquement la syntaxe : il s'agit de la question de savoir s'il est possible de manipuler les symboles représentant les phrases appelées « prémisses », selon certaines règles purement structurelles, de manière à arriver à des symboles représentant une autre phrase, appelée « conclusion ». Cette question est du même ordre que celle de savoir si, selon les règles du jeu, telle ou telle position peut être atteinte par telle ou telle pièce d'échec se trouvant dans telle ou telle position. Bien qu'elle admette en principe une réponse mécanique, une telle réponse (comme c'est le cas pour les échecs) est souvent loin d'être triviale : souvent, il faut souvent faire preuve d'ingéniosité.

Nous utiliserons le symbole « $\vdash$ » pour signifier la conséquence au sens syntaxique, c'est-à-dire la *déductibilité* (ou dérivabilité), et établirons plusieurs correspondances entre cette relation de dérivabilité $\vdash$ et la relation de conséquence logique (ou validité) $\models$. Nous devons au préalable fournir une définition rigoureuse du langage formel de la logique des phrases.

4.2 Le langage de la logique propositionnelle

Pour avoir une idée claire de ce que sera la syntaxe de notre logique propositionnelle, nous devons d'abord définir son langage formel de manière plus rigoureuse que précédemment (cf. p. 33) :

Définition 2 (Alphabet). *L'alphabet du langage $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle classique se compose des signes suivants :*

A1 *des phrases atomiques « p_0 », « p_1 », « p_2 » ... (une infinité dénombrable) ;*[1]

A2 *les connecteurs « $\neg \ldots$ » (« ne-pas »), « $\ldots \wedge \cdots$ » (« et »), « $\ldots \vee \cdots$ » (« ou »), « $\ldots \rightarrow \cdots$ » (« si-alors ») et « $\ldots \leftrightarrow \cdots$ » (« ssi. ») ;*

A3 *des symboles auxiliaires : parenthèses, virgules.*

Au lieu de « p_0 », nous écrivons parfois « p », pour « p_1 » « q », « r » pour « p_2 » etc.

Cette définition (2) nous permet de définir $\mathcal{L}$, notre langage formel de la logique des phrases. Nous déterminons ainsi quelles phrases font partie de ce language, en définissant ce qu'est une formule bien-formée de $\mathcal{L}$:

Définition 3 (Formules). *Une formule propositionnelle est définie de manière récursive comme suit :*

B1 *Toute phrase atomique de la forme « p_i » (pour n'importe quel $i \in \mathbb{N}$) est une formule propositionnelle.*

B2 *Si ϕ est une formule propositionnelle, alors $\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$ est une formule propositionnelle.*

B3 *Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \vee \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ et $\ulcorner(\phi \leftrightarrow \psi)\urcorner$ sont des formules propositionnelles.*

Comme au préalable, nous utilisons des minuscules grecques « ϕ », « ψ », « χ », ... pour les noms des formules arbitraires (pas nécessairement atomiques). Il s'agit des noms métalinguistiques : « ϕ » ne fait

1. Les phrases atomiques sont souvent appelées « phrases variables », pour indiquer qu'elles sont considérées comme variables dans les schémas d'inférence. Puisque nous introduirons plus tard (à la p. 154 dans le chapitre 8) les variables (souvent appelées « variables individuelles ») de la logique des prédicats, qui sont d'un autre type (elles peuvent, par exemple, être liées par des quantificateurs etc.), j'évite cette dénomination trompeuse. La signification exacte de « infinité dénombrable » est expliquée à la p. 366 de l'appendice.

pas partie de $\mathcal{L}$, notre langage-objet, mais nous sert à parler *de* ses formules. L'ensemble de toutes les formules du langage $\mathcal{L}$ est dénoté par « $\mathsf{Fml}(\mathcal{L})$ ». Les demi-crochets de Quine sont utilisés pour parler de toutes les formules ayant une forme particulière. « $\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$ », par exemple, est un nom pour une formule arbitraire qui consiste en une parenthèse, un signe de négation, une phrase (simple ou complexe) et encore une parenthèse : « $(\neg p_1)$ », mais aussi « $(\neg\neg p_1)$ » et « $(\neg(p_0 \wedge p_1))$ » en sont des exemples. [2]

Pour rendre nos formules plus faciles à lire, nous adoptons les conventions suivantes :

- « $\neg$ » relie son argument plus fortement que « $\wedge$ » et « $\vee$ » : quand il précède une seule proposition, le connecteur « $\neg$ » sera donc écrit sans parenthèses. Au lieu de « $\neg(p) \wedge \neg(p \vee q)$ », nous écrivons donc « $\neg p \wedge \neg(p \vee q)$ ».
- Pour des occurrences répétées de « $\wedge$ » et « $\vee$ », on adoptera la convention « groupement à gauche » : les parenthèses qui se ferment vers la gauche sont implicites. Nous écrivons donc « $(p \wedge q \wedge r)$ » pour « $((p \wedge q) \wedge r)$ ».
- Les parenthèses extérieures (qui ne sont ni précédées ni suivies d'un connecteur) sont implicites. Au lieu de « $(p \wedge q)$ », nous écrivons « $p \wedge q$ ».

On peut omettre davantage de parenthèses en donnant des priorités aux connecteurs, dans l'ordre suivant : « $\leftrightarrow$ », « $\rightarrow$ », « $\wedge$ », « $\vee$ », « $\neg$ ». Ainsi, « $\neg p \wedge q$ » correspond à « $(\neg p) \wedge q$ », « $(p \vee q \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$ » à « $((p \vee q) \rightarrow r)) \leftrightarrow (((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee r)$ » etc.

Nous pouvons également définir ce qu'est une théorie :

Définition 4 (Théories)**.** *Une théorie est un ensemble (fini ou infini) de formules propositionnelles.*

Nous abrégeons des théories par « Th_1 », « Th_2 » etc. Pour ne parler que d'une seule théorie, nous utilisons « Th ». Notons qu'une théorie Th peut avoir un seul membre, p. ex. $\mathsf{Th} = \{\phi\}$, ou être vide $\mathsf{Th} = \emptyset$.

Notons que ces définitions étaient purement syntaxique : nous n'avons fait aucune référence aux significations ou valeurs de vérité des formules propositionnelles. Nous avons seulement considéré leur forme et la manière dont elles sont construites à partir des phrases simples.

L'avantage d'une définition syntaxique rigoureuse de notre langue est qu'elle nous permet de revenir sur la question d'interdéfinissabilité des connecteurs. Nous avons déjà vu de quelle manière nous pouvions définir « $\wedge$ » en termes de « $\vee$ » et de « $\neg$ » grâce aux lois de Morgan. Nous allons à présent avoir un résultat plus radical : il est possible de définir *tous* les connecteurs binaires à partir d'un seul. Mais pour y parvenir, nous devons d'abord élargir (temporairement) notre langage.

Considérons le connecteur « $|$ », appelé « barre de Sheffer » (« Sheffer's stroke ») (Scheffer 1913). Il est défini par la table de vérité suivante :

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi\vert\psi\urcorner$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

On voit que $\ulcorner\phi|\psi\urcorner$ représente la ‹ non-conjonction› de ϕ et de ψ ; $\ulcorner\phi|\psi\urcorner$ veut dire que ϕ est incompa-

2. De manière encore plus mathématique, la définition (3) stipule que l'ensemble des formules bien-formées $\mathsf{Fml}(\mathcal{L})$ soit « fermé » sous certaines opérations, à savoir la négation, la conjonction, la disjonction et l'implication : si ϕ et ψ appartiennent à $\mathsf{Fml}(\mathcal{L})$, alors il en va de même pour toutes les formules que nous pouvons obtenir de ϕ et ψ par les opérations de négation, conjonction, disjonction et implication (cf. 92 pour une définition de « clôture déductive »).

tible avec ψ, et qu'au moins l'une de ces deux formules (peut-être les deux) est fausse. « | » correspond donc, comme signe du langage-objet, à la relation métalinguistique de contrariété ; $\ulcorner\phi|\psi\urcorner$ est équivalente (logiquement) à $\ulcorner\neg\phi \vee \neg\psi\urcorner$ et à $\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$.

Ajoutons « | » à notre langue de la manière suivante.

Définition 5. *Soit $\mathcal{L}$ la langue définie par les définitions (2) et (3). Nous construisons une langue $\mathcal{L}^*$ en ajoutant à (2) la clause*

- *« | » (« est incompatible avec »)*

et en ajoutant à (3) la clause

- *Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi|\psi)\urcorner$ est une formule propositionnelle.*

Nous pouvons montrer que dans $\mathcal{L}^*$, tous les autres connecteurs sont définissables à partir de « | » :

$$
\begin{array}{rcl}
\ulcorner\neg\phi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\phi|\phi\urcorner \\
\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi|\psi)|(\phi|\psi)\urcorner \\
\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner((\phi|\phi)|(\psi|\psi))\urcorner \\
\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi|(\psi|\psi))\urcorner \\
\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner((\phi|(\psi|\psi)) \mid ((\phi|\phi)|\psi)) \;\mid\; (\psi|(\phi|\phi)) \mid ((\psi|\psi)|\phi)\urcorner
\end{array}
$$

Ces définitions peuvent être dites « correctes » dans le sens qu'il s'agit réellement d'équivalences logiques ; c'est-à-dire que les formules à droite du signe de définition ont la même table de vérité que celles de gauche, ce qui garantit leur intersubstituabilité dans tous les contextes extensionnels.[3]

4.3 Un peu d'histoire

La logique classique moderne, telle qu'elle est enseignée dans ce cours, repose sur les travaux de *Gottlob Frege* (1848–1925), mathématicien et philosophe allemand de la deuxième moitié du 19ème siècle. Frege a observé que les raisonnements des mathématiciens de son temps étaient ‹ intuitifs› dans le sens où ils utilisaient des connecteurs 'logiques' (« donc », « il s'ensuit que », « par conséquent » etc.) pour marquer les différentes étapes de leurs raisonnements sans pour autant être capables d'en donner une

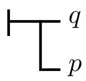
3. En fait, il suffit de montrer la définissabilité de « ¬ » et de « ∨ » en termes de « | ». La définissabilité des autres s'ensuit alors comme suit :

$$
\begin{array}{rcl}
\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \\
 & :\Longleftrightarrow & \ulcorner(((\phi|\phi)|(\psi|\psi))|((\phi|\phi)|(\psi|\psi))) \mid (((\phi|\phi)|(\psi|\psi))|((\phi|\phi)|(\psi|\psi)))\urcorner \\
\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\neg(\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \\
 & :\Longleftrightarrow & \ulcorner((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \mid ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi)))\urcorner \\
\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)\urcorner \\
 & :\Longleftrightarrow & \ulcorner(\; ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \mid ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \;\mid \\
 & & \quad ((\psi|(\phi|\phi))|(\psi|(\phi|\phi))) \mid ((\psi|(\phi|\phi))|(\psi|(\phi|\phi))) \;\;) \quad \mid \\
 & & (\; ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \mid ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \;\mid \\
 & & \quad ((\psi|(\phi|\phi))|(\psi|(\phi|\phi))) \mid ((\psi|(\phi|\phi))|(\psi|(\phi|\phi))) \;\;)\urcorner
\end{array}
$$

Il est clair que les équivalences non-abrégées pour l'implication et l'équivalence sont parfaitement illisibles et qu'une logique qui n'opérerait qu'avec la barre de Sheffer serait impossible à pratiquer (et difficile à enseigner). Son importance réside dans le fait que l'on puisse définir la négation et la conjonction à partir de « | » – la définissabilité des autres connecteurs s'ensuit, puisque tous les autres connecteurs sont eux-mêmes définissables à partir de « ¬ » et « ∧ ».

justification méticuleuse. Ils sautaient, pour ainsi dire, des étapes. Le problème que pose cette méthode de raccourcis, bien qu'elle soit certainement pratique dans l'enseignement des mathématiques et inévitable dans la vie mathématique de tous les jours, est qu'il est très difficile, lorsqu'une preuve n'aboutit pas ou qu'un résultat paradoxal est obtenu, d'identifier l'endroit exact où le raisonnement prend la mauvaise route et où l'erreur a été commise. En insistant sur le fait que les raisonnements en mathématiques devaient être sans lacunes, tels que chaque assertion s'ensuive logiquement des précédentes, Frege a développé, dans son idéographie (Frege 1879),[4] ce qui est aujourd'hui considéré comme la logique classique, propositionnelle et des prédicats.

Frege n'était pas le seul, mais le plus méticuleux, des pionniers des mathématiques modernes. L'italien Giuseppe Peano (1858–1932) et l'américain C.S. Peirce (1839–1914) en sont d'autres.[5] Frege utilisait une notation bi-dimensionnelle qui, bien qu'elle ait eu certaines avantages, s'est avérée trop compliquée par la suite. Pour une implication matérielle « $p \to q$ », Frege écrivait, par exemple, la formule suivante :



La formule commence par un trait vertical, appelé « trait de jugement » (*« Urteilsstrich »*), qui signifie que l'implication est non seulement entretenue ou supposée, mais également affirmée.[6] Le trait horizontal suivant est appelé « trait de contenu » (*« Inhaltsstrich »*). Il indique que la formule qui suit exprime une phrase sensée, à savoir un contenu susceptible d'être soit vrai, soit faux.

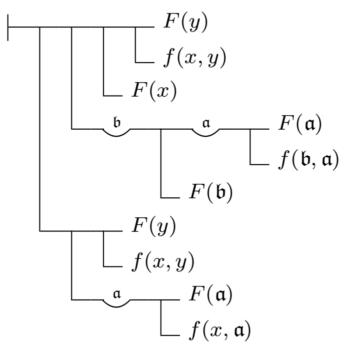
Mis à part la notation bi-dimensionnelle de Frege,[7] il y a la notation ‹ algébrique› de George Boole (où

4. Le développement d'une notation formelle de la pensée est une tentative de réaliser l'idée de Leibniz d'une langue caractéristique universelle. Sur son histoire, cf. Barnes (2002).

5. Frege avait, bien sûr, d'autres prédécesseurs, notamment les deux mathématiciens anglais, George Boole (1815–1864), l'inventeur de l'algèbre Booléenne et Auguste de Morgan (1806–1871), qui a été le premier à remarquer que la logique d'Aristote était incapable de justifier les inférences basées sur des propriétés de relations (par exemple l'inférence de « Sam aime Marie » à « Sam aime quelqu'un » et à « Marie est aimée par quelqu'un ») et en a développé une logique. S'inspirant du raisonnement algébrique, Boole a classifié les connecteurs propositionnels d'après leurs effets sur des ensembles. Cette « algèbre de la logique » fut perfectionnée par Jevons, Venn, Schröder et Whitehead.

6. Wittgenstein, dans le *Tractatus*, a accusé le 'trait de jugement' d'introduire un élément étranger au formalisme : d'après lui, la logique ne s'occupe point de la question de savoir si ses phrases sont affirmées ou non. Frege avait argumenté qu'il était nécessaire de considérer toutes les prémisses comme affirmées pour distinguer le discours scientifique (qui cherche à découvrir des vérités, y inclut les vérités logiques) du discours tenu sur scène, Wittgenstein (1921: §4.442) a avancé que les acteurs, pour convaincre leur public, utilisaient eux-aussi le trait de jugement.

7. Pour un exemple plus compliqué de la logique des prédicats (théorème 71 de la *Begriffsschrift*) :



Dans notre notation (future), ceci est équivalent à la formule $(\forall a(f(x,a) \to F(a)) \to (f(x,y) \to F(y))) \to (\forall b(F(b) \to \forall a(f(b,a) \to F(a))) \to (F(x) \to (f(x,y) \to F(y))))$

la négation « $\neg p$ » est exprimée par une barre « $\overline{p}$ » [8] et la notation dite « polonaise » de Jan Łukasiewicz, qui permet de supprimer toute ponctuation sans risquer l'équivoque (cf. par ex. Łukasiewicz et Tarski 1930: 31–32). [9] Aujourd'hui on utilise généralement un composé de la notation de Peano (qui contenait un simple point « . » pour la conjonction) et celle des logiciens et philosophes anglais Bertrand Russell et Alfred North Whitehead (qui utilisaient « $\supset$ » pour l'implication matérielle et « $\equiv$ » pour l'équivalence matérielle ; la flèche « $\rightarrow$ » vient de Hilbert).

Même si Frege a été le philosophe-mathématicien le plus important à sortir la logique du dogmatisme aristotélicien et à la libérer du paradigme stérile de la syllogistique qui l'avait dominée pendant plus de deux mille ans, ses travaux n'ont pas été reconnus durant sa vie. C'est l'œuvre volumineuse *Principia Mathematica* de Russell et Whitehead (Russell et Whitehead 1910) qui mit sa contribution en lumière.

Dès le début du développement d'une logique capable de formaliser les raisonnements des mathématiciens, elle a été utilisée pour l'axiomatisation de l'arithmétique (cf. Frege (1884) et Dedekind (1888)). Les deux volumes des *Grundgesetze* (« lois fondamentales de l'arithmétique »), Frege (1893) et Frege (1903)) ont achevé ce travail. Ce qui n'était jusqu'à la fin du 19ème siècle qu'une étude de certaines entités élusives qu'on appelait des « nombres » est alors devenue une science, fondée sur une base solide. Il était finalement possible de donner des réponses à des questions aussi fondamentales que « qu'est-ce qu'un nombre ? », « sous quelles conditions « n » (p. ex. : « 2+2 ») et « m » (p. ex. : « 4 ») dénotent-ils le même nombre ? », « en quel sens les nombres naturels font-ils partie des nombres rationnels ? », etc.

En dérivant les théorèmes mathématiques d'axiomes purement logiques, par des preuves qui suivent des règles d'inférence logiques, Frege avait une motivation philosophique dans son projet de poser les mathématiques sur une base logique. Contre Kant, il voulait montrer que les phrases mathématiques n'étaient pas synthétiques : Kant, dans sa *Critique de la Raison Pure* (Kant 1781 1787), affirmait que les mathématiciens dérivent leurs connaissances de la construction de concepts, c'est-à-dire de l'intuition qui leur est donnée *a priori*, indépendamment de la perception. Contre Kant, Frege maintenait que les mathématiques étaient aussi analytiques (et a priori) que les lois logiques dont ils peuvent être dérivés. Cette position en philosophie des mathématiques, qui conçoit les mathématiques comme réductibles à la logique, a reçu le nom de *« logicisme »*.

C'était dans le premier volume des « lois fondamentales de l'arithmétique » (Frege 1893) que Bertrand Russell (1872–1970) a découvert ce qu'on appelle aujourd'hui le « paradoxe de Russell ». Russell, dans une lettre écrite à Frege en 1902, a remarqué que les axiomes que Frege avait donné pour l'arithmétique (en particulier son fameux axiome V qui dit que toute condition (prédicat) détermine un ensemble) permettaient la formation de l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. Il en dérivait une contradiction, montrant ainsi que les axiomes de Frege ne pouvaient pas tous être vrais. [10]

Un ensemble tel que $\{x \mid x$ est un nombre naturel $\}$ ou $\{x \mid x$ est une vache suisse $\}$ ne se contient pas lui-même, puisqu'un ensemble n'est pas un nombre ni une vache suisse. Un ensemble tel que $\{x \mid x$ est un ensemble $\}$, cependant, *est* un membre de lui-même. Pour dériver le paradoxe, construisons

8. Cette notion permet une formulation très élégante des lois de Morgan comme ‹ loi d'élimination des barres doubles› :

$$\ulcorner(\overline{\phi \wedge \psi})\urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner(\overline{\overline{\phi} \vee \overline{\psi}})\urcorner$$
$$\ulcorner(\overline{\phi \vee \psi})\urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner(\overline{\overline{\phi} \wedge \overline{\psi}})\urcorner$$

9. Dans la notation polonaise, les connecteurs sont représentés par des lettres qui précèdent immédiatement ce sur quoi ils portent. L'opérateur principal est donc toujours placé en tête. Si « N » représente la négation, « A » la disjonction, « K » la conjonction et « C » l'implication, « $\neg p \vee q$ » devient « $ANpq$ », « $\neg(p \vee q)$ » devient « $NApq$ », « $((p \vee q) \wedge \neg r) \rightarrow \neg(p \vee q)$ » devient « $CKCApqrNrNApq$ » (ce qui se ‹ décompose› en « $C(K(C(Apq)r)Nr)(N(Apq))$ » sans univoque) etc.

10. Nous reviendrons sur le paradoxe de Russell à la p. 259 du ch. 15.

maintenant l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes :

$$a \;:=\; \{x \mid x \notin x\}$$

Nous pouvons maintenant formuler la question de savoir si a se contient lui-même, c'est-à-dire si $a \in a$. Aucune réponse cohérente à cette question ne peut être donnée :

R1 Si a se contient lui-même ($a \in a$), alors a satisfait la condition qui définit cet ensemble : alors a est l'un des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes (c'est-à-dire que a est un ensemble x tel que $x \notin x$). Alors il ne se contient pas lui-même.

R2 Si, à l'inverse, a ne se contient pas lui-même ($a \notin a$), alors a satisfait la condition de ne pas se contenir lui-même (c'est-à-dire que a est un x tel que $x \notin x$) ; comme cette condition définit quels ensembles appartiennent à a, alors a se contient lui-même.

Nous obtenons alors une preuve de l'assertion suivante :

$$a \in a \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \notin a$$

a se contient lui-même si (**R1**) et seulement si (**R2**) a ne se contient pas lui-même. Il s'agit d'une contradiction. On peut donc inférer, par réduction à l'absurde, qu'au moins une des prémisses desquelles la contradiction a été inférée doit être fausse. Comme ces prémisses étaient les axiomes du système de Frege, la contradiction a montré que ces axiomes ne pouvaient pas tous être vrais.

Frege a été anéanti par cette découverte de Russell ; il a essayé de rectifier son système dans le deuxième volume des *Grundgesetze* (Frege 1903) (cette tentative a reçu le nom « Frege's Way Out »), mais il n'en était pas satisfait. Par la suite, il a abandonné son logicisme et en fut affligé jusqu'à sa mort.[11] Ses changements ont été attestés inadéquats par Leśniewski en 1938 (cf. Quine 1955).

Une conclusion qu'on tirait du paradoxe de Russell était que certains ensembles sont trop 'grands' pour pouvoir appartenir à d'autres ensembles : les ensembles ne peuvent pas tous être membre d'autres ensembles. La théorie des ensembles, développée à la fin du 19ème siècle par le mathématicien Georg Cantor (Cantor 1883: cf. par ex.), a dû reconnaître ce qu'on appelle des « classes propres », c'est-à-dire des entités qui, comme les ensembles ordinaires, contiennent des membres, mais qui ne peuvent pas eux-mêmes être membres d'autres ensembles. Mais comment les exclure ?

Russell et Whitehead, dans les *Principia Mathematica*, ont développé ce qu'on appelle une « théorie des types ». De manière analogue à la distinction entre langage-objet et métalangage, ils attribuaient à chaque expression ce qu'on appelle « un type » de la manière suivante : Les choses qui ne sont pas des ensembles sont du type 0, les ensembles qui ne contiennent que des choses qui ne sont pas des ensembles sont du type 1, les ensembles qui ne contiennent que des entités du type 0 et 1 sont du type 2 etc. Ils stipulaient qu'une expression de la forme « $x \in y$ » n'est bien formée que si l'entité dénotée par « x » est d'un type inférieur au type de l'entité dénotée par « y », excluant ainsi l'auto-référentialité dans « $a \in a$ » qu'il voyaient comme source du paradoxe.

Un autre approche consistait dans une théorie axiomatique. Le mathématicien Ernst Zermelo (1908) a formulé des axiomes pour la théorie des ensembles, de manière à ce qu'ils ne permettent pas de

11. Certains philosophes ont tenté de réanimer le logicisme au cours de ces vingt dernières années en développant l'arithmétique sur la base d'un axiome plus faible que le fameux axiome V de Frege, à savoir le principe de Hume. Le principe de Hume dit que deux concepts déterminent le même nombre si et seulement si les choses dans leurs extensions se trouvent dans une correspondance bijective : « couteau sur la table » et « fourchette sur la table » sont équinumériques (déterminent le même nombre) ssi. pour toute fourchette, il y a un coûteau sur la table, et vice versa. L'intérêt philosophique de ce projet porte alors sur la question de savoir en quel sens le principe de Hume mérite d'être appelé « principe logique » (cf. Wright 1983; Hale et Wright 2001). Nous reviendrons au Néo-Fregéanisme à la p.. **??**.

construire le paradoxe de Russell.[12] Il était donc possible de remplacer la notion intuitive d'ensemble (une sorte de collection d'objets dans laquelle on fait abstraction de tout ce qui leur est particulier) par une définition rigoureuse : on appelle « ensemble » tout ce qui satisfait les axiomes d'une certaine théorie Th, appelée « théorie des ensembles ». La notion intuitive (et ‹ sémantique›) a donc été remplacée par une notion purement structuraliste (‹ syntaxique›).[13] Impressionné par Frege et par son développement d'une notion purement syntaxique de preuve dont la correction peut être vérifiée mécaniquement, le mathématicien allemand David Hilbert (1862–1943) a fondé une école de philosophie des mathématiques, aujourd'hui appelée *« formalisme »*. Le formaliste considère les mathématiques et la logique comme des manières de manipuler des symboles en suivant certaines règles. Les mathématiques que les réalistes prennent pour une science d'une réalité abstraite et éternelle d'objets mathématiques sont considérées par les formalistes comme une activité linguistique.

Le formalisme fut fortement influencé par le développement de différentes géométries. Kant pensait que la géométrie euclidienne était la science de l'espace et qu'elle était présupposée par tous nos jugements spatiaux. En fait, beaucoup de nos jugements en géométrie sont basés sur la perception, et ses axiomes (comme, par exemple, le 5ème axiome d'Euclide qui dit que par un point a donné extérieur à une droite d donnée, il ne passe qu'une seule droite parallèle à d) semblent évident. Pourtant, au cours du 19ème siècle, Lobachevsky notamment avait réussi. à construire des géométries sans cet axiome. On découvrait qu'en dehors de la géométrie euclidienne, il existait d'autres systèmes d'axiomes non équivalents, mais qui traitaient également de notions géométriques comme « point », « ligne », « parallèle » etc. Comme ces systèmes d'axiomes étaient également consistants, la question se posa de savoir si ces différents systèmes étaient des théories rivales portant sur le même domaine, en donnant une description soit vraie soit fausse d'une réalité indépendante ou s'il s'agissait plutôt de différents langages qui définissaient leurs notions de manière implicite et ne se trouvaient pas en désaccord. Les formalistes ont pris la deuxième voie et ont décidé de considérer les mathématiques comme construction de systèmes formels qui définissent eux-mêmes le domaine dont ils parlent. Hilbert défendait la position selon laquelle il n'existe pas de contenu intuitif à « point », « ligne », « parallèle » etc. mis à part des significations que les définitions purement structuralistes leur attribuaient dans le cadre d'une géométrie axiomatique (cf. Hilbert 1899).

Hilbert a fondé les métamathématiques, une science qui utilise les outils et les méthodes de la logique et des mathématiques ordinaires pour parler des systèmes formels. Au lieu de développer telle et telle axiomatisation d'un domaine mathématique (comme la logique propositionnelle, des prédicats, l'arithmétique ou la géométrie), les métamathématiques étudient de telles axiomatisations et essayent d'en établir des propriétés telles que la consistance, la complétude, la décidabilité etc. Hilbert a formulé un programme de ‹ méta-mathématisation› des mathématiques en 1920. Ce « programme de Hilbert » essayait de montrer que la totalité des mathématiques pouvait être déduite d'un système d'axiomes et démontré être consistant.

Cependant, ce programme fut heurté par l'annonce d'une découverte historique du jeune logicien autrichien Kurt Gödel qui, en 1931, a démontré l'incomplétude de l'arithmétique (Gödel 1931). Gödel démontrait que tout système formel consistant et susceptible de formaliser en son sein l'arithmétique des nombres entiers, est incomplet. Autrement dit, il permet la formulation d'une formule qui – d'après

12. Ces axiomes sont présentés à la p. 260.

13. Pour mieux comprendre l'approche ‹ structuraliste›, considérons les axiomes de Peano pour l'arithmétique qui stipulent que les nombres naturels constituent une progression : 0 est un nombre naturel, et tout nombre successeur (« +1 ») d'un nombre naturel est un nombre naturel (cf. p. 366). Le problème avec ces axiomes est que mis à part la série que nous reconnaissons intuitivement comme celle des nombres naturels, à savoir $\langle 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$, beaucoup d'autres progressions les satisfont, par ex. les nombres paires $\langle 0, 2, 4, 6, \ldots \rangle$. Dans ce cas, un structuraliste défendrait la position selon laquelle nous n'avons aucune raison d'attribuer le nom de « nombres naturels » à la première progression sans l'attribuer à la deuxième.

le système – exprime une phrase vraie mais qui ne peut pas être démontrée dans ce système.[14]

En lien avec le paradoxe de Russell, d'autres problèmes, des paradoxes sémantiques tels que le paradoxe du menteur, ont également été soulevés :

(M) (**M**) est une phrase fausse.

(**M**) est une phrase qui s'appelle « (**M**) » et parle donc d'elle-même. Si (**M**) est vraie, alors elle est ce qu'elle dit, alors elle est fausse. A l'inverse, si (**M**) est fausse, alors elle est ce qu'elle dit, alors elle vraie. On a donc une preuve de la contradiction suivante :

(**M**) est vraie $\Longleftrightarrow$ (**M**) est fausse.

Il semblait donc qu'un prédicat aussi fondamental que « ... est vrai » est contradictoire. En 1933, le logicien et métamathématicien Alfred Tarski (1933), issu de la fameuse école polonaise de logique (Twardowski, Łukasiewicz, Adjukiewicz, Kotarbiński, Leśniewski), est parvenu à donner une définition non-contradictoire de « ... est vrai », en faisant la distinction entre langage-objet et métalangage. Ce fut le début de la sémantique systématique.[15]

Outre le logicisme de Frege et le formalisme de Hilbert, une troisième tradition en philosophie des mathématiques a émergé au début du 20ème siècle, à savoir l'*intuitionnisme* du logicien hollandais Lutinez Egbertus Jan Brouwer (1881–1966). Brouwer (1918) et son étudiant Arendt Heyting (1956) adhéraient à une philosophie constructiviste qui rejetait les preuves non-constructives. Un exemple d'une preuve non-constructive est une preuve qui démontre une disjonction $\ulcorner\phi\vee\psi\urcorner$ sans pour autant montrer lequel des disjoints est vrai.[16] Les intuitionnistes ont également rejeté le principe du tiers exclu. Ce rejet était justifié par leur interprétation de la disjonction : prouver que $p \vee q$, pour les intuitionnistes, veut dire prouver soit que p soit que q : nous ne pouvons pas prouver une disjonction sans prouver au moins un des disjoints. Ils ont également donné une interprétation dite « prouvabiliste » à la négation ; prouver que $\neg p$, c'est prouver qu'on ne peut pas prouver que p. C'est pour cette raison qu'ils rejetaient le tiers exclu : il existe de nombreux cas dans lesquels on n'arrive ni à prouver que p ni à prouver que $\neg p$. L'école des intuitionnistes a donc développé sa propre logique (la logique dite « intuitionniste »), dans laquelle $\ulcorner\phi \vee \neg\phi\urcorner$ n'est pas un théorème.

Au centre de cette grande renaissance que la logique et les mathématiques ont connues entre 1879 et 1931 se trouvaient donc les notions que l'on discutera par la suite : la distinction entre la syntaxe et la

14. Nous reviendrons sur cette découverte au chapitre 15 (p. 260 et suivantes).

15. Nous retournerons au paradoxe du menteur à la p. 259 et à la théorie de la vérité de Tarski dans le ch. 15.1.

16. Une telle preuve est celle que l'on a déjà rencontrée dans la première leçon (p. 12) :

Théorème 6. *Il y a des nombres irrationnels (= non-rationnels) a et b tels que a^b est rationnel.*

Preuve Considérons le nombre réel $c := \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Soit $c \in \mathbb{Q}$, soit $c \notin \mathbb{Q}$ (le principe du tiers exclu). Dans les deux cas, il y a des nombres irrationnels a et b tels que a^b est rationnel.

1. $c \in \mathbb{Q}$. Alors $a := \sqrt{2}$ et $b := \sqrt{2}$, comme $\sqrt{2}$ est irrationnel. $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = c$ est, sous cette supposition, un nombre rationnel.
2. $c \notin \mathbb{Q}$. Alors $a := c$ et $b := \sqrt{2}$ (c et $\sqrt{2}$ sont irrationnels sous cette supposition). $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = (\sqrt{2})^2 = 2$ est un nombre rationnel.

Nous concluons, par la règle d'inférence qu'on appelle « élimination de la disjonction » (cf. p. 112), que l'affirmation est prouvée. □

Cette preuve ne nous apprend pas quels sont les nombres irrationnels spécifiques a et b tels que a^b est rationnel. Elle montre qu'il doit y en avoir, sans pour autant nous en fournir d'exemplaires particuliers. C'est pour cette raison-ci qu'elle est appelée « non-constructiviste » : elle ne nous permet pas de 'construire' des nombres concrets qui prouvent l'affirmation.

sémantique, les notions purement syntaxiques d'un calcul (un système axiomatique) et d'une preuve (un raisonnement à l'intérieur d'un tel système).

4.4 Ce qu'est un calcul

Si on entend par « logique » un ensemble de phrases considérées comme valides (par rapport à cette logique) ou une relation de conséquence logique particulière, un calcul est un système formel qui *axiomatise* cet ensemble de phrases ou cette relation de conséquence. Une telle axiomatisation consiste en la différentiation de deux types de phrases : d'*axiomes* et de *théorèmes* – telles que les théorèmes peuvent être déduits des axiomes. Les axiomes forment le noyau de la formalisation ; typiquement, ils postulent que la relation de conséquence a certaines propriétés particulières. Les théorèmes nous permettent d'évaluer la qualité d'une axiomatisation particulière ; ils sont des phrases dérivées du calcul à l'aide des règles d'inférence permises dans ce calcul.

Le calcul, lui aussi, n'est rien d'autre qu'un ensemble de phrases ; c'est une entité purement syntaxique, comme une langue, et comme une langue il est construit à l'aide d'une définition récursive – à la différence qu'il ne s'agit pas d'une définition de « formule bien formée » (cf. p. 33), mais d'une définition de « théorème ». Les axiomes correspondent aux phrases atomiques (= la base de la récursion) et les théorèmes aux formules bien formées :

Définition 7 (Calcul). *Un calcul est un ensemble de formules propositionnelles déterminé par un ensemble de formules propositionnelles qui sont appelées « axiomes » et des règles d'inférence. Un élément de cet ensemble est appelé « théorème ». Ce qu'est un théorème est déterminé par la définition récursive suivante :*

- *Tout axiome est un théorème.*
- *Une formule propositionnelle obtenue par l'application d'une règle d'inférence à des théorèmes est un théorème.*
- *Rien d'autre n'est un théorème.*

On peut dire qu'un calcul est un ensemble de formules généré par les règles d'inférence sur la base des axiomes. [17] Les règles d'inférence sont des schémas d'inférences ayant la forme suivante :

(1) $$\frac{\phi, \psi, \chi, \ldots}{\xi}$$

Les formules ϕ, ψ, χ, ... sont appelées « *prémisses* » de la règle d'inférence, la formule ξ « *conclusion* ». A ce stade, il n'est pas requis que ces règles d'inférence soient valides ou que ces prémisses soient vraies. Il ne s'agit pas ici de notions sémantiques, mais d'une pure manipulation syntaxique de symboles. [18] Une règle d'inférence nous permet de 'générer' des théorèmes à partir des axiomes : dire que (1), par exemple, est une règle d'inférence d'un certain calcul, est dire que toute formule ξ obtenue en remplaçant ϕ, ψ et χ par des théorèmes du calcul est un théorème.

Pour dire qu'une formule propositionnelle ϕ est un théorème d'un calcul particulier HC, nous écrivons « $\mathsf{HC} \vdash \phi$ ». « $\vdash$ », on l'a dit, représente la relation de *déductibilité* : « $\mathsf{HC} \vdash \phi$ » veut dire que ϕ peut être déduite des axiomes du calcul HC – c'est à dire qu'il y a dans HC une preuve dont ϕ est la conclusion. Mais qu'entendons-nous par cette notion de preuve ?

17. Il s'agit à nouveau d'une condition de clôture d'un ensemble telle que celle que nous avons rencontré dans la n. 2 à la p. 71

18. Cependant, pour que le calcul soit *correct* par rapport à une sémantique particulière, il est requis que les axiomes soient des tautologies et que les règles d'inférence soient valides. Nous reviendrons sur cette question (de la correction du calcul) par la suite (cf. par ex. p. 129)

4.5 La notion de preuve

La notion syntaxique la plus importante de la logique est celle de *preuve*. Ce fut en clarifiant la notion de preuve que Frege a apporté sa contribution la plus importante au développement moderne des mathématiques et de la logique. Une preuve est une séquence de formules bien formées qui satisfait quelques critères purement syntaxiques.

Une preuve est relative à un certain calcul. Une séquence de formules propositionnelles est une preuve d'un certain calcul si elle ne consiste qu'en : soit (i) des formules qui sont des axiomes, soit (ii) des formules pouvant être obtenues en appliquant une règle d'inférence à des formules qui la précèdent dans la séquence. « $\mathsf{HC} \vdash \phi$ » signifie qu'il y a une preuve, dans HC, dont ϕ est la conclusion : il y a une séquence de formules dont ϕ est le dernier membre et qui ne contient que des axiomes de HC ou des formules obtenues par les règles d'inférence propres à HC.

On peut inférer ou déduire des phrases non seulement à partir d'un calcul, mais aussi à partir d'une théorie. ϕ peut être inférée d'une théorie Th par rapport à un calcul HC si on peut construire, en appliquant des règles d'inférence de HC aux membres de Th et aux axiomes de HC, une preuve qui a ϕ comme conclusion. La théorie en question peut alors être conçue comme un calcul élargi par d'autres axiomes. Nous avons ainsi une définition 'officielle' de preuve :

Définition 8 (Preuve dans HC)**.** *Une preuve, dans un calcul* HC *et à partir d'une théorie* Th*, est une séquence finie de phrases* $\langle \phi_1, \ldots \phi_n \rangle$ *telle qu'on a, pour tout* i *entre* 1 *et* n *(*$1 \leq i \leq n$*) que* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \cup \{\phi_1, \ldots, \phi_{i-1}\} \vdash \phi_i$.

Etant donné que la théorie Th en question peut être vide, cette définition nous fournit aussi la notion de preuve dans un certain calcul HC.

Il est important de noter qu'une preuve est toujours une séquence *finie* de formules. Une preuve, étant une séquence de formules, constitue un discours réalisable en principe par un logicien, mathématicien ou philosophe humain (donc ayant une période de vie finie). Nous pouvons maintenant définir le signe « $\vdash$ » représentant la relation de déductibilité :

Définition 9 (Déductibilité dans HC)**.** *Si* HC *est un calcul,* Th *une théorie et* ϕ *une formule propositionnelle, nous définissons «* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *» (quel que soit le nombre naturel* $n \in \mathbb{N}$*) par induction mathématique sur les nombres naturels :*

- *Si* ϕ *est un axiome de* HC*, alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
- *Si* ϕ *est un membre de* Th*, alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
- *Si nous avons* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{m_i} \psi_i$ *(avec* $m_i < n$*) pour toutes les prémisses* ψ_i *d'une règle d'inférence de* HC*, alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour la conclusion* ϕ *de cette règle d'inférence.*

Le nombre n dans « $\vdash^n$ » nous indique la longueur de la preuve.[19] « $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ » veut dire qu'il existe, dans HC et à partir de Th, une preuve de n étapes de ϕ. (1) et (2) dans la définition (9) signifient qu'à n'importe quelle étape, on peut considérer les axiomes et les phrases de la théorie comme prouvés (ils ont une preuve ‹ de longueur 0›). (3) nous permet de prouver une phrase qui s'ensuit par une règle d'inférence de phrases prouvées à des étapes antérieures. Nous écrivons « $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi$ » pour dire qu'il y a un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ (qu'il y a une preuve d'une certaine longueur).

19. Il ne s'agit pas toujours de la longueur minimale : si nous avons $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^2 p$, par exemple, nous aurions également $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^3 p$, $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^4 p$ etc. Cette caractéristique correspond au fait que nous pouvons toujours prolonger des preuves en rajoutant des étapes superflues (par exemple des dérivations de « $p \rightarrow p$ »). Nous n'aurions pas, par contre, $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^1 p$ si $\mathsf{Th} = \{$ « p », « $p \rightarrow q$ » $\}$ – parce que dans ce cas-ci la plus courte preuve possible (par *modus ponens*) aura deux étapes.

Voici un exemple : la séquence des trois phrases $\langle$ « $p \to q$ » , « p » , « q » $\rangle$ est une preuve relative à une théorie $\mathsf{Th} = \{$ « $p \to q$ », « p »$\}$ et un calcul HC qui reconnaît *modus ponens* comme règle d'inférence :

$$\begin{aligned}
&\mathsf{HC} \cup \{ «p \to q», \ «p»\} \vdash^0 p \to q \\
&\mathsf{HC} \cup \{ «p \to q», \ «p»\} \vdash^1 p \\
&\mathsf{HC} \cup \{ «p \to q», \ «p»\} \vdash^2 q
\end{aligned}$$

Dans les deux premières lignes, nous appliquons les conditions (1), (2) et la définition (9) : « $p \to q$ » et « p » sont les deux membres de Th et nous pouvons donc les prouver ‹ gratuitement ›. Dans la troisième ligne, nous réalisons la condition (3) : la règle *modus ponens*, appliquée aux deux premières lignes, nous permet d'inférer « q ».

On a utilisé dans la définition de « $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ » une procédure de preuve très commune en méta-mathématiques (ou métalogique), à savoir une *preuve par induction (mathématique)*. Une preuve par induction exploite le fait que les nombres naturels $\mathbb{N}$ forment une progression : on prouve, par induction, que tout nombre $n \in \mathbb{N}$ a une certaine propriété F en montrant que le nombre 0 a cette propriété et que, si un nombre n l'a, alors son successeur $n+1$ l'a aussi On a donc montré par les deux premières conditions que $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^0 \phi$ si ϕ est un axiome ou un membre de Th et que si on a $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \psi_i$ pour toutes les prémisses ψ_i d'une inférence valide, on a $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{n+1} \phi$ pour sa conclusion ϕ. [20]

On voit que les notions de « calcul », « axiome », « théorème » et « preuve » sont des notions purement syntaxiques : elles s'appliquent à des formules propositionnelles uniquement en vertu de leurs formes et indépendamment de leurs significations ou valeurs de vérité.

4.6 Un calcul pour la logique propositionnelle

Nous allons maintenant considérer une axiomatisation particulière de la logique propositionnelle. Cette axiomatisation consiste en une infinité d'axiomes – heureusement, beaucoup de ces axiomes sont de la même forme. C'est pourquoi nous donnons les axiomes comme *schémas*, ce qui veut dire que toutes les formules propositionnelles de $\mathcal{L}$ ayant la même forme que les formules qu'on énumère dans la suite sont des axiomes de notre calcul HC.

Définition 10 (HC). *Le calcul* HC *a comme axiomes toutes les formules de* $\mathcal{L}$ *qui ont la forme d'un des schémas suivants :*

20. Nous rencontrerons encore quelques preuves par induction mathématique : elles ont toutes en commun qu'elle prouvent
1. qu'un certain caractéristique est possédé par un des membres de la progression (cette étape de la preuve est appelée « base de l'induction ») ;
2. que le caractéristique en question est ‹ hérité› par les membres successifs dans la progression : si le n-ième membre le possède, alors le $(n+1)$-ième le possède aussi (ce qui est appelé le « pas de l'induction »). Dans cette preuve, nous supposons que la conclusion voulue est vraie de n (« hypothèse de l'induction ») et la prouvons pour $n+1$.

H₁	$\ulcorner\phi \rightarrow \phi\urcorner$	*réflexivité*
H₂	$\ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))\urcorner$	*transitivité*
H₃	$\ulcorner((\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))\urcorner$	*conditionaliser l'antécédent*
H₄	$\ulcorner(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi)\urcorner$	*augmenter l'antécédent*
H₅	$\ulcorner\phi \rightarrow (\phi \vee \psi)\urcorner$	*introduire « $\vee$ » à droite*
H₆	$\ulcorner\psi \rightarrow (\phi \vee \psi)\urcorner$	*introduire « $\vee$ » à gauche*
H₇	$\ulcorner(\phi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \chi))\urcorner$	*alternative*
H₈	$\ulcorner(\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi\urcorner$	*éliminer « $\wedge$ » à droite*
H₉	$\ulcorner(\phi \wedge \psi) \rightarrow \psi\urcorner$	*éliminer « $\wedge$ » à gauche*
H₁₀	$\ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \wedge \chi)))\urcorner$	*composition*
H₁₁	$\ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)\urcorner$	*conversion*
H₁₂	$\ulcorner\phi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \psi)\urcorner$	*ex falso quodlibet*
H₁₃	$\ulcorner(\phi \rightarrow (\phi \wedge \neg\phi)) \rightarrow \neg\phi\urcorner$	*reductio ad absurdum*
H₁₄	$\ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \leftrightarrow \psi)\urcorner$	*introduire « $\leftrightarrow$ »*
H₁₅	$\ulcorner(\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))\urcorner$	*éliminer « $\leftrightarrow$ »*
H₁₆	$\ulcorner\phi \vee \neg\phi\urcorner$	*tautologie*

La seule règle d'inférence de HC *est modus ponens* MP *:* $\dfrac{\phi, \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner}{\psi}$.

MP signifie : si une implication matérielle $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ et son antécédent ϕ ont été prouvés, alors le conséquent ψ de cette implication matérielle peut aussi être considéré comme prouvé.

Il y a plusieurs calculs équivalents pour la logique des phrases.[21] Celui que nous avons donné n'est ni le plus court ni le plus simple, mais il est à mon avis l'un des plus pratiques pour obtenir des preuves.

Dire que ces axiomes sont des schémas signifie que toute phrase pouvant être dénotée par l'un des noms complexes donnés est un axiome du calcul : « $p \rightarrow p$ », par exemple, est un axiome parce que cette phrase

21. En 1879, Frege fut le premier à axiomatiser la logique propositionnelle et à fournir des règles formelles d'inférence. Bertrand Russell a ensuite développé plusieurs calculs. Dans son article « The theory of implication » (Russell 1906), Russell a donné les schémas d'axiomes suivants :

1 $\ulcorner\phi \rightarrow \phi\urcorner$
2 $\ulcorner\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \psi)\urcorner$
3 $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))\urcorner$
4 $\ulcorner(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))\urcorner$
5 $\ulcorner(\neg\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \phi)\urcorner$
6 $\ulcorner(\phi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow \neg\phi\urcorner$
7 $\ulcorner(\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\phi)\urcorner$

Dans les *Principia Mathematica*, Russell et Whitehead ont proposé :

1 $\ulcorner(\phi \vee \phi) \rightarrow \phi\urcorner$
2 $\ulcorner\psi \rightarrow (\phi \vee \psi)\urcorner$
3 $\ulcorner(\phi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \phi)\urcorner$
4 $\ulcorner(\phi \vee (\psi \vee \chi)) \rightarrow (\psi \vee (\phi \vee \chi))\urcorner$
5 $\ulcorner(\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow (\phi \vee \chi))\urcorner$

Hilbert et Ackermann ont montré que l'axiome 4 n'était pas indépendant (c'est-à-dire qu'il pouvait être déduit des autres). Un autre système axiomatique est celui de Łukasiewicz (1929) :

1 $\ulcorner(\phi \vee \phi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))\urcorner$
2 $\ulcorner\phi \rightarrow (\neg\phi \vee \psi)\urcorner$
3 $\ulcorner(\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi\urcorner$

On voit alors qu'il est parfaitement possible qu'une phrase qui est un théorème dans un calcul soit un axiome dans un autre. Bien qu'ils se distinguent par leurs axiomes, ces calculs sont tous équivalents dans le sens qu'ils permettent la dérivation des mêmes phrases (et qu'ils ont en conséquence les mêmes théorèmes).

complexe est de la même forme que le schéma $\ulcorner\phi \to \phi\urcorner$. Nous disons alors que la phrase complexe est une *instance* du schéma. La phrase « $(q \wedge r) \to (q \wedge r)$ » est un axiome parce qu'elle est de cette même forme (une instance du même schéma), « $(p \vee ((q \wedge (r \leftrightarrow s)) \to t) \to (p \vee ((q \wedge (r \leftrightarrow s)) \to t)$ » l'est aussi, et ainsi de suite.[22] On peut donc constater que HC contient une infinité d'axiomes. De la même manière, les phrases « $p \leftrightarrow p$ », « $(p\wedge q) \leftrightarrow (p\wedge q)$ », « $(p\vee((q\wedge(r \leftrightarrow s)) \to t) \leftrightarrow (p\vee((q\wedge(r \leftrightarrow s)) \to t)$ » sont des théorèmes parce qu'ils peuvent, par MP, être déduits des instances des schémas d'axiomes $\mathbf{H_{14}}$ et $\mathbf{H_1}$.

L'équivalence des différentes axiomatisations de la logique des phrases signifie qu'elles ne se distinguent que par le choix de leurs axiomes : elles ont la même règle d'inférence et se composent des mêmes théorèmes. Opérer un choix parmi ces différents types d'axiomatisation est donc une question pratique, indépendante de considérations purement logiques. Le fameux logicien français Jean Nicod (duquel l'Institut Nicod à Paris a tiré son nom) a montré que la barre de Sheffer permet la formulation d'un calcul équivalent à HC qui n'a qu'un seul axiome (cf. Nicod 1917–1920) :[23]

$$\ulcorner(\phi|(\psi|\chi)) \quad | \quad ((\xi|(\xi|\xi)) \,|\, ((\rho|\psi) \,|\, ((\phi|\rho)|(\phi|\rho))))\urcorner$$

Les axiomes que nous venons de donner dans notre calcul HC ne forment pas une axiomatisation indépendante. Il serait possible de dériver certains de ces axiomes à partir des autres.

4.7 Les preuves dans/sur le calcul

Considérons quelques preuves dans ce calcul. Pour commencer, nous démontrons que la disjonction est commutative, c'est-à-dire que toute phrase ayant la même forme que « $(p \vee q) \to (q \vee p)$ » est un théorème :[24]

(1)	HC $\vdash p \to (q \vee p)$	$\mathbf{H_6}$
(2)	HC $\vdash q \to (q \vee p)$	$\mathbf{H_5}$
(3)	HC $\vdash (p \to (q \vee p)) \to ((q \to (q \vee p)) \to ((p \vee q) \to (q \vee p)))$	$\mathbf{H_7}$
(4)	HC $\vdash (q \to (q \vee p)) \to ((p \vee q) \to (q \vee p))$	(MP) de (1) et (3)
(5)	HC $\vdash (p \vee q) \to (q \vee p)$	(MP) de (2) et (4)

Nous énumérons les lignes de la preuve dans la colonne de gauche pour une référence future. Dans la colonne de droite, nous indiquons soit le numéro du schéma d'axiomes dont la ligne en est une instance, soit la règle d'inférence utilisée et les lignes auxquelles elle a été appliquée. Dans la troisième ligne, par exemple, nous avons substitué χ dans $\mathbf{H_7}$ par « $q \vee p$ ». La difficulté principale avec les preuves dans les calculs est de savoir quelles sont les formules qu'il faut substituer dans les schémas d'axiomes pour être ensuite capable de déduire la conclusion voulue avec MP.

Il est évident qu'une preuve comme celle de la commutativité de la disjonction est purement formelle : il s'agit d'une manipulation de symboles qui ne fait aucune référence à leurs significations. Nous aurions pu argumenter la commutativité de la disjonction d'une autre manière : de manière sémantique,

22. Une autre manière de formuler un calcul est de spécifier les axiomes utilisant des abréviations pour des phrases « p » et « q » et d'adopter une règle d'inférence supplémentaire de *substitution* qui dit que tout résultat d'une substitution d'une phrase par une autre dans un théorème donne lieu à un théorème.

23. Wajsberg et Łukasiewicz ont aussi établi chacun un système d'un seul axiome. Leurs systèmes ont l'avantage supplémentaire de ne contenir que quatre phrases différentes.

24. Nous relâcherons par la suite nos règles strictes sur l'usage des guillemets. « HC $\vdash p \vee \neg p$ », par exemple, est une phrase qui appartient au métalangage (elle dit *de* la phrase « $p \vee \neg p$ » qu'elle peut être dérivée dans HC). Nous l'écrivons sans guillemets pour ne pas trop nous compliquer la vie.

en considérant que la table de vérité donnée pour « $\vee$ » était symétrique et qu'on pouvait librement échanger « p » pour « q » sans aucune altération dans la table de vérité,[25] ou encore par un argument pragmatique, en argumentant que l'usage du « ou » inclusif dans le langage ordinaire ne distingue pas l'ordre des disjoints.[26] La preuve syntaxique est particulière en ce qu'elle est une application complètement mécanique de schémas d'axiomes et de règles d'inférence, application qui peut être vérifiée par un ordinateur. Etant donné que les schémas d'axiomes $\mathbf{H_5}$, $\mathbf{H_6}$ et $\mathbf{H_7}$ stipulent un certain rôle pour le signe « $\vee$ », ce signe s'applique à deux phrases quel que soit leur ordre respectif – peu importent les autres aspects de sa signification.

Il n'est pas tout à fait correct, par conséquent, de dire que ce qu'on a prouvé par la preuve purement syntaxique était la commutativité de la disjonction. Au sens restreint, tout ce qu'on a prouvé est que toute formule $\ulcorner(\phi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \phi))\urcorner$ est un théorème du calcul HC. Parler d'une preuve à propos de la *disjonction*, présuppose déjà une certaine interprétation de ce signe « $\vee$ », qui n'est pas forcée par le calcul, mais compatible avec lui. Jusqu'à maintenant, tout ce que nous avons pu dériver de HC à propos de « $\vee$ » est que quelque soit la relation signifiée par « $\vee$ » (son interprétation), elle sera commutative.

Nous voyons qu'un calcul peut admettre différentes interprétations. Si ce n'était que pour l'axiome $\mathbf{H_7}$, « $\vee$ » pourrait aussi signifier la conjonction. Les axiomes ne spécifient que des conditions nécessaires pour qu'une interprétation des symboles qu'ils contiennent soit admissible ou acceptable. Même la conjonction d'un grand nombre de conditions nécessaires ne constitue pas toujours une condition suffisante. Dans un tel cas, on dirait que le calcul HC n'a pas de *modèle* unique, un modèle étant une structure mathématique (comme, par exemple, notre système de connecteurs propositionnels donné par les tables de vérité) dont nous nous servons pour interpréter un calcul purement syntaxique.[27] Les axiomes restent indéterminés parmi différentes interprétations sans en spécifier une comme la seule correcte.[28]

Puisque le raisonnement sémantique 'par modèles' nous est souvent beaucoup plus naturel que la manipulation purement syntaxique de symboles non-interprétés, les preuves dans les calculs axiomatiques deviennent vite assez compliquées.[29] Pour une preuve plus compliquée, voici une démonstration que « $(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ » est un théorème :

25. Les deux conditions sont équivalentes : échanger la première et la quatrième ligne et la deuxième et la troisième revient à remplacer « p » par « q » et vice versa.

26. Ce dernier argument serait difficile à faire : il semble que les disjoints ne sont pas échangeable dans « il gagne mille euro par mois ou même plus », par exemple – un autre exemple qui montre à quel point nous idéalisons le langage naturel en logique.

27. L'interprétation de « $\vee$ » comme conjonction, compatible avec $\mathbf{H_7}$, poserait des problèmes avec $\mathbf{H_5}$ et $\mathbf{H_6}$, mais rien ne nous garantit qu'il y aura toujours assez d'autres axiomes pour parvenir à une interprétation unique.

28. Nous adoptons donc en logique un point de vue structuraliste (cf. p. 75) : aucun théorème de la logique propositionnelle saura distinguer une interprétation de « $\vee$ » comme « où » d'une interprétation qui lit « $p \vee q$ » comme « p ou q et soit il pleut soit il ne pleut pas ».

29. C'est aussi pour cela qu'on a donné des noms aux différents schémas d'axiomes (comme « réflexivité » pour l'axiome $\mathbf{H1}$) – ces noms ne font pas partie du calcul ‹ officiel›, mais nous servent à mieux retenir les schémas et à faciliter leur utilisation.

(1)	HC $\vdash p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$	$\mathbf{H_{12}}$
(2)	HC $\vdash (p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow ((p \wedge \neg p) \rightarrow q)$	$\mathbf{H_4}$
(3)	HC $\vdash (p \wedge \neg p) \rightarrow q$	(MP) de (1) et (2)
(4)	HC $\vdash (\neg p \wedge p) \rightarrow p$	$\mathbf{H_9}$
(5)	HC $\vdash (\neg p \wedge p) \rightarrow \neg p$	$\mathbf{H_8}$
(6)	HC $\vdash ((\neg p \wedge p) \rightarrow p) \rightarrow (((\neg p \wedge p) \rightarrow \neg p) \rightarrow ((\neg p \wedge p) \rightarrow (p \wedge \neg p)))$	$\mathbf{H_{10}}$
(7)	HC $\vdash ((\neg p \wedge p) \rightarrow \neg p) \rightarrow ((\neg p \wedge p) \rightarrow (p \wedge \neg p))$	(MP) de (4) et (6)
(8)	HC $\vdash (\neg p \wedge p) \rightarrow (p \wedge \neg p)$	(MP) de (5) et (7)
(9)	HC $\vdash ((\neg p \wedge p) \rightarrow (p \wedge \neg p)) \rightarrow (((p \wedge \neg p) \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \wedge p) \rightarrow q))$	$\mathbf{H_2}$
(10)	HC $\vdash ((p \wedge \neg p) \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \wedge p) \rightarrow q))$	(MP) de (8) et (9)
(11)	HC $\vdash (\neg p \wedge p) \rightarrow q)$	(MP) de (3) et (10)
(12)	HC $\vdash (\neg p \wedge p) \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow (p \rightarrow q))$	$\mathbf{H_3}$
(13)	HC $\vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$	(MP) de (11) et (12)
(14)	HC $\vdash ((q \wedge p) \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow q))$	$\mathbf{H_3}$
(15)	HC $\vdash (q \wedge p) \rightarrow q$	$\mathbf{H_8}$
(16)	HC $\vdash q \rightarrow (p \rightarrow q)$	(MP) de (14) et (15)
(17)	HC $\vdash (\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)))$	$\mathbf{H_7}$
(18)	HC $\vdash (q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q))$	(MP) de (13) et (17)
(19)	HC $\vdash (\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$	(MP) de (16) et (18)

On voit dans cette preuve que de nombreuses étapes intermédiaires sont nécessaires pour prouver des phrases à première vue 'triviales' comme l'équivalence entre $\ulcorner \neg\phi \vee \psi \urcorner$ et $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$. Les huit premières lignes, par exemple, servent à établir la commutativité de la conjonction ; à la ligne 11 on a l'équivalent de l'affirmation que n'importe quelle phrase s'ensuit d'une contradiction.

Notre exemple montre aussi qu'il est assez pénible de faire des preuves dans un calcul. L'utilité principale de ces calculs ne réside cependant pas dans leur application pour faire des preuves, mais dans le fait que ces preuves sont parfaitement mécaniques : pour tester, par exemple, que la preuve donnée pour $\ulcorner (\neg\phi \vee \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi) \urcorner$ est correcte il suffit de vérifier que les instances des schémas d'axiomes en soient réellement des instances et que la règle MP ait été appliquée correctement – c'est un travail qu'un ordinateur peut faire. Les calculs trouvent donc leur principale utilité dans la *vérification* de preuves.

Un autre point fort des calculs est qu'il est relativement simple d'établir des théorèmes métamathématiques qui prouvent qu'un certain calcul a une certaine propriété métamathématique. Un théorème métamathématique sur HC n'est pas un théorème de HC, mais un théorème obtenu par des méthodes de preuves 'ordinaires' en mathématique qui parlent *de* HC et en établissent des propriétés. En faisant ces preuves, nous opérons dans un métalangage par rapport au langage de HC et nous mentionnons ses formules.

Par exemple, nous pouvons prouver (dans le métalangage) que si HC peut prouver (dans le langage-objet) deux implications matérielles telles que le conséquent du premier est l'antécédent du deuxième, alors HC peut également prouver l'implication matérielle du conséquent du deuxième par l'antécédent du premier (cf. 2 en bas). On peut également prouver que s'il y a deux preuves pour deux phrases, il y aura aussi une preuve pour la phrase complexe qui est leur conjonction (cf. 3). La première preuve établit la transitivité de la relation de déductibilité $\vdash$ de HC, la seconde que l'on peut combiner deux preuves dans une seule preuve.[30]

30. Dans la leçon 3 (p. 65), nous avons établit un résultat similaire pour la relation *sémantique* $\models$ de conséquence logique. Nous reviendrons sur ce parallélisme dans le chapitre 7.

Théorème 11. *Soient ϕ, ψ, χ des formules propositionnelles :*

(2) $\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi$ & $\mathsf{HC} \vdash \psi \to \chi$ $\Longrightarrow$ $\mathsf{HC} \vdash \phi \to \chi$ [31]

(3) $\mathsf{HC} \vdash \phi$ & $\mathsf{HC} \vdash \psi$ $\Longrightarrow$ $\mathsf{HC} \vdash \phi \wedge \psi$

Preuve

Preuve de (2) : L'antécédent de (2) signifie qu'il y a des nombres n_1 et n_2 tels que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1} \phi \to \psi \qquad \mathsf{HC} \vdash^{n_2} \psi \to \chi$$

Un des deux nombres n_1 et n_2 n'est pas plus grand que l'autre. Supposons que $n_2 \leq n_1$. Nous devons démontrer qu'il existe un nombre n_3 tel que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_3} \phi \to \chi$$

Par **H₂**, nous savons que

$$\mathsf{HC} \vdash^{0} (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$$

Avec (MP), nous pouvons donc dériver à partir de « $\mathsf{HC} \vdash^{n_1} \phi \to \psi$ » :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1+1} (\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi)$$

Avec (MP), nous dérivons à partir de ceci et de « $\mathsf{HC} \vdash^{n_2} \psi \to \chi$ » ce dont nous avons besoin pour prouver (2) :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1+2} \phi \to \chi$$

Preuve de (3) : L'antécédent de (3), « $\mathsf{HC} \vdash \phi$ & $\mathsf{HC} \vdash \psi$ », signifie qu'il y a des nombres n_1 et n_2 tels que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1} \phi \qquad \mathsf{HC} \vdash^{n_2} \psi$$

Supposons que $n_2 \leq n_1$. Nous devons démontrer qu'il y a un nombre n_3 tel que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_3} \phi \wedge \psi$$

Par **H₁**, nous savons que

$$\mathsf{HC} \vdash^{0} (\phi \wedge \psi) \to (\phi \wedge \psi)$$

Par **H₃**, nous savons également que

$$\mathsf{HC} \vdash^{0} ((\phi \wedge \psi) \to (\phi \wedge \psi)) \to (\phi \to (\psi \to (\phi \wedge \psi)))$$

En appliquant (MP) à ces deux théorèmes, nous obtenons :

$$\mathsf{HC} \vdash^{1} \phi \to (\psi \to (\phi \wedge \psi))$$

31. Notez l'utilisation des signes « & » et « $\Longrightarrow$ » qui appartiennent au métalangage.

A partir de cette ligne et de « $\mathsf{HC} \vdash^{n_1} \phi$ », nous dérivons par (MP) :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1+1} \psi \rightarrow (\phi \wedge \psi)$$

A partir de cette ligne et de « $\mathsf{HC} \vdash^{n_2} \psi$ », nous dérivons par (MP) :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1+2} \phi \wedge \psi$$

□

Cette preuve n'est pas faite *dans* le calcul HC : elle explique comment nous pouvons manipuler des preuves de ce calcul pour en obtenir d'autres. Elle établit ainsi un résultat en métamathématique : elle ne prouve pas de théorème (de HC), mais montre que si des phrases de telles formes sont des théorèmes, alors une autre phrase d'une autre forme l'est également. Elle nous montre ce que nous pouvons achever avec notre outil purement syntaxique HC.

En nous montrant comment combiner les deux preuves de ϕ et ψ en une preuve de $\ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner$, notre preuve en métamathématique profite du fait que les preuves à l'intérieur de HC sont purement mécaniques. C'est parce qu'elles se font toujours de la même manière que nous pouvons les généraliser. Raisonnant de manière abstraite sur la forme de ces preuves, nous démontrons par quelles manières nous pouvons les changer, toute en préservant leur caractère démonstratif. Raisonnant dans un métalangage, nous avons ainsi établi notre premier résultat métamathématique.

Points à retenir

1. Mis à part la méthode sémantique des tables de vérité, il existe une méthode syntaxique, qui ne fait pas seulement abstraction des significations des phrases, mais aussi de leurs valeurs de vérité.
2. Il est possible de définir la syntaxe de la langue $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle de manière rigoureuse.
3. Tous les connecteurs de la logique propositionnelle sont définissables par un seul, la barre de Sheffer.
4. La logique moderne pris sa source dans les travaux de Frege (*Idéographie*, 1879) et les travaux de Russell et Whitehead (*Principia Mathematica*, 1910).
5. La révolution en logique a rendu possible d'importants progrès en mathématiques (axiomatisation de l'arithmétique et de la géométrie) et leur a ajouté deux nouvelles branches, les métamathématiques (étude des calculs formels, Hilbert) et la théorie des ensembles (Cantor, Zermelo).
6. Dans la première moitié du 20ème siècle, les trois grands courants en philosophie des mathématiques étaient le logicisme de Frege (les mathématiques comme partie de la logique), le formalisme de Hilbert (les mathématiques comme manipulation des symboles) et l'intuitionnisme de Brouwer et Heyting (constructivisme, rejet du tiers exclu).
7. Un calcul consiste en des axiomes et des règles d'inférences qui permettent de déduire des théorèmes à partir des axiomes.
8. Il est possible de définir de manière purement syntaxique ce qu'est une preuve (dans un certain calcul).
9. La logique propositionnelle peut être axiomatisée de différentes manières.
10. Il faut distinguer les preuves dans le calcul (qui se font par les règles d'inférences et des substitutions dans des axiomes) et les preuves sur le calcul (qui parlent, par exemple, en général de l'existence de certaines preuves) qui se font par les méthodes mathématiques 'ordinaires'.