Chapitre 5

La méthode des arbres

5.1 La sémantique de la logique propositionnelle

Nous avons introduit dans la leçon 4 une méthode purement syntaxique pour faire des preuves, laquelle nous a permis de déduire des phrases à partir de quelques axiomes d'un calcul. Il nous fallait faire abstraction non seulement des significations de ces phrases, mais aussi de leurs valeurs de vérité. Bien que nous n'ayons aucunement utilisé ce fait, les phrases ainsi prouvées étaient des tautologies (ce que l'on peut aisément prouver par des tables de vérité). On peut donc se demander quelle est la relation entre la méthode des tables de vérité qui nous permet de vérifier si une phrase donnée est une tautologie et la méthode des calculs axiomatiques qui nous permet de dériver, à l'aide de MP, des théorèmes à partir des axiomes $\mathbf{H_1}$ à $\mathbf{H_{16}}$. Pour pouvoir répondre à cette question, nous devons introduire une sémantique rigoureuse pour le langage $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle, dont on a défini la syntaxe dans la leçon 4 (cf. p. 70).

Comme la logique propositionnelle obéit au principe de vérifonctionnalité (cf. p. 37), sa sémantique nous permet d'attribuer des valeurs de vérité, **v** (« vrai ») ou **f** (« faux »), à des formules complexes sur la base des valeurs de vérité des phrases atomiques dont elles sont composées.[1]

Définition 12 (Interprétation propositionnelle atomique)**.** *Une interprétation propositionnelle atomique I^* est une fonction qui assigne à toute phrase atomique « p_i », $i \in \mathbb{N}$, l'une des valeurs de vérité* **v** *ou* **f**. *En formules :* $I^* : \{ \text{« } p_i \text{ »} \mid i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$

La définition 12 ne couvre que le cas des phrases atomiques. La définition générale nous montre comment étendre, par des clauses récursives, une telle interprétation propositionnelle atomique à une interprétation (attribution de valeurs de vérité) de toutes les formules de notre langage :

Définition 13 (Interprétation propositionnelle)**.** *Étant donné une interprétation propositionnelle atomique I^*, nous définissons une interprétation propositionnelle I (qui est une fonction associant à toute formule propositionnelle une et une seule valeur de vérité ; en symboles :* $I : \mathsf{Fml}(\mathcal{L}) \rightarrow \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$*) par des clauses récursives :*

1. J'utilise « **v** » et « **f** » pour indiquer qu'on traite ici les valeurs de vérité comme des 'objets logiques', c'est-à-dire des choses qui peuvent être valeurs de fonctions. Par contre, l'utilisation de « V » et « F » dans les tables de vérité pourrait être paraphrasée de manière à ne pas réifier (traiter comme objets) les valeurs de vérité (cf. n. 7 à la p. 38). Au lieu de dire, par exemple, que « $p \rightarrow q$ » reçoit « F » comme valeur de vérité dans la deuxième ligne de la table de vérité pour cette phrase complexe (phrase qui m'engage à l'existence de valeurs de vérité), on pourrait dire que la phrase est fausse si son antécédent est vrai et son conséquent faux.

I1 *Si ϕ est une phrase atomique «p», $I(\phi) := I^*(«p»)$*

I2 $I(\neg\phi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \textit{si } I(\phi) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & \textit{si } I(\phi) = \mathbf{v} \end{cases}$

I3 $I(\phi \wedge \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \textit{si } I(\phi) = \mathbf{v} \textit{ et } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & \textit{si } I(\phi) = \mathbf{f} \textit{ ou } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I4 $I(\phi \vee \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \textit{si } I(\phi) = \mathbf{v} \textit{ ou } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & \textit{si } I(\phi) = \mathbf{f} \textit{ et } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I5 $I(\phi \rightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \textit{si } I(\phi) = \mathbf{f} \textit{ ou } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & \textit{si } I(\phi) = \mathbf{v} \textit{ et } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I6 $I(\phi \leftrightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \textit{si } I(\phi) = I(\psi) \\ \mathbf{f} & \textit{si } I(\phi) \neq I(\psi) \end{cases}$

On reconnaît, dans la spécification de cette fonction I, le même raisonnement qui nous a permis de définir les connecteurs par des tables de vérité. Les interprétations correspondent aux possibilités logiques, aux lignes dans une table de vérité. Une interprétation atomique I^* qui attribue **v** à « p », à « q » et à « r » et **f** à « s » et à « t » ($I^*(«p») = I^*(«q») = I^*(«r») = \mathbf{v}$ & $I^*(«s») = I^*(«t») = \mathbf{f}$), par exemple, nous donnera une interprétation I qui attribuera **v** à « $p \wedge q$ », à « $p \vee s$ » etc. et **f** à « $p \rightarrow s$ », à « $t \vee s$ » etc. Elle correspond à une possibilité logique dans laquelle « p », « q » et « r » sont vraies et « s » et « t » fausses. Elle correspond aussi à la quatrième ligne dans la table de vérité de ces cinq phrases (qui comporte, au total, 32 lignes) : V-V-V-F-F.

Si une phrase « p » reçoit la valeur **v** sous une interprétation I, nous pouvons dire que cette interprétation *satisfait* la phrase : elle nous montre comment le monde pourrait être si « p » était vraie.

Définition 14 (Satisfaisabilité). *Une formule propositionnelle ϕ est satisfaisable si et seulement si elle est vraie sous au moins une interprétation de ses constituants simples.*

Si une phrase ϕ reçoit la valeur **v** sous une interprétation I, nous pouvons dire que cette interprétation nous montre comment construire un *modèle* de cette phrase : un modèle pour ϕ est une structure (normalement mathématique) dont ϕ, sous une certaine interprétation de ses constituants simples, est une description correcte. La *théorie des modèles* est cette branche de la sémantique formelle qui étudie les interprétations des systèmes formels par des structures mathématiques, souvent construites à l'aide de la théorie des ensembles.

Nous pouvons maintenant donner une définition rigoureuse de la relation de conséquence logique.

Définition 15 (Conséquence logique). *Une formule propositionnelle ψ est une conséquence logique d'une formule propositionnelle ϕ (écrit : « $\phi \models \psi$ ») si et seulement si toute interprétation qui satisfait ϕ satisfait également ψ.*

Si aucune interprétation qui assigne **v** à ϕ n'assigne **f** à ψ, alors il n'y a que des « V » dans la table de vérité pour $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ – il s'agit d'une implication formelle.

Puisqu'une interprétation correspond à une possibilité logique et réciproquement, nous pouvons donner une définition de ce que sont une tautologie et une contradiction en termes d' « interprétation » :

Définition 16 (Tautologie). *Une formule propositionnelle ϕ est une tautologie si et seulement si elle est vraie sous toutes les interprétations. ϕ est une contradiction si et seulement si elle n'est vraie sous aucune interprétation (elle est donc fausse sous toutes les interprétations).*

Nous utilisons le signe « $\models$ » de la conséquence logique pour dire qu'une phrase est une tautologie : « $\models \phi$ » veut dire que ϕ est une conséquence logique de n'importe quelle phrase ou, de manière équivalente, que ϕ est une tautologie.

Utilisant « $\exists \ldots (\cdots\cdots\cdots)$ » pour dire « il y a un ... qui $\cdots$ » et « $\forall \ldots (\cdots\cdots\cdots)$ » pour dire « tous les ... sont $\cdots$ », nous pouvons écrire les trois dernières définitions comme suit :

(1) ϕ est satisfaisable $:\Longleftrightarrow$ $\exists I \; (I(\phi) = \mathbf{v})$

(2) ϕ est une tautologie $:\Longleftrightarrow$ $\forall I \; (I(\phi) = \mathbf{v})$

(3) ϕ est une contradiction $:\Longleftrightarrow$ $\forall I \; (I(\phi) = \mathbf{f})$

(4) ϕ est une conséquence logique de ψ $:\Longleftrightarrow$ $\forall I \; (I(\phi) = \mathbf{v} \Rightarrow I(\psi) = \mathbf{v})$

Bien que toute tautologie (ainsi que toute formule de notre langage) soit composée d'un nombre fini de phrases simples, il y a non seulement une infinité de formules bien formées, mais également une infinité de tautologies.[2] Puisqu'elles sont de grande utilité pour faciliter les preuves, il convient tout de même d'en mentionner quelques-unes en particulier :

T1	$\models \ulcorner(\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi))\urcorner$	analyse de « $\leftrightarrow$ »
T2	$\models \ulcorner(\phi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \vee \psi)\urcorner$	analyse de « $\to$ »
T3	$\models \ulcorner(\phi \to \psi) \leftrightarrow \neg(\phi \wedge \neg\psi)\urcorner$	analyse de « $\to$ »
T4	$\models \ulcorner\neg(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \vee \neg\psi)\urcorner$	de Morgan
T5	$\models \ulcorner\neg(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi)\urcorner$	de Morgan
T6	$\models \ulcorner(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi))\urcorner$	distributivité
T7	$\models \ulcorner(\phi \vee (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi))\urcorner$	distributivité
T8	$\models \ulcorner(\phi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\phi)\urcorner$	conversion
T9	$\models \ulcorner((\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \neg\psi)) \leftrightarrow \neg\phi\urcorner$	réduction à l'absurde
T10	$\models \ulcorner(\phi \to \neg\phi) \leftrightarrow \neg\phi\urcorner$	réduction à l'absurde
T11	$\models \ulcorner(\neg\phi \to \phi) \leftrightarrow \phi\urcorner$	'conséquence miraculeuse'
T12	$\models \ulcorner\psi \to (\phi \to \psi)\urcorner$	verum sequitur ad quodlibet
T13	$\models \ulcorner\neg\phi \to (\phi \to \psi)\urcorner$	ex falso sequitur quodlibet
T14	$\models \ulcorner((\phi \to \psi) \wedge \phi) \to \psi\urcorner$	modus ponendo ponens
T15	$\models \ulcorner((\phi \to \psi) \wedge \neg\psi) \to \neg\phi\urcorner$	modus tollendo tollens
T16	$\models \ulcorner(\neg(\phi \wedge \psi) \wedge \phi) \to \neg\psi\urcorner$	modus ponendo tollens
T17	$\models \ulcorner((\phi \vee \psi) \wedge \neg\phi) \to \psi\urcorner$	modus tollendo ponens
T18	$\models \ulcorner((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) \to (\phi \to \chi)\urcorner$	transitivité de l'implication
T19	$\models \ulcorner\phi \to \phi\urcorner$	'identité'
T20	$\models \ulcorner\phi \vee \neg\phi\urcorner$	tiers exclu
T21	$\models \ulcorner\neg(\phi \wedge \neg\phi)\urcorner$	non-contradiction

Quelques-unes de ces tautologies ont une très longue histoire.[3]

Dans le cas où une équivalence matérielle est tautologique, on parle d' « équivalence logique ». Deux formules qui sont logiquement équivalentes peuvent être substituées l'une à l'autre dans n'importe

2. Pour comprendre cela, il suffit de remarquer que $\ulcorner(\phi \vee \neg\phi) \vee \psi\urcorner$ est une tautologie pour n'importe quelle formule ψ.

3. Notamment la réduction à l'absurde : « Si tu sais que tu es mort, alors tu es mort (car on ne peut savoir une chose fausse) ; si tu sais que tu es mort, alors tu n'es pas mort (car un mort ne sait rien) ; donc, tu ne sais pas que tu es mort. » (un stoïcien, rapporté par Origène ; d'après Blanché (1996: 70–71)). La 'conséquence miraculeuse' (« consequentia mirabilis ») se trouve déjà chez Aristote : « Soit nous devrions philosopher soit nous ne le devrions pas. Si nous le devrions, nous le devrions. Si nous ne le devrions pas, nous le devrions [afin de justifier cette opinion]. Donc dans tous les cas, nous devrions philosopher. » (*Protréptique*) (cité d'après Kneale et Kneale 1962: 97), cf. aussi Kneale (1957) et Blanché (1996: 71).

quelle formule sans affecter sa table de vérité. Nous constatons ainsi que la définition de l'équivalence matérielle en terme d'implication matérielle et la définition de l'implication matérielle en terme de négation et disjonction, ou de négation et conjonction, sont *correctes* : les tautologies **T1**, **T2** et **T3** nous assurent que nous pouvons universellement substituer le *definiendum* au *definiens* (‹ annulant › ainsi notre définition). De même, **T4** et **T5** nous assurent de la correction des lois de Morgan, ainsi que **T6** et **T7** de la correction des lois de distributivité.[4]

Les implications matérielles tautologiques sont des implications formelles, c'est-à-dire des relations de conséquence logique. Elles nous garantissent la correction des règles d'inférence : le fait que $\ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge \phi) \rightarrow \psi\urcorner$ soit une tautologie (**T14**), par exemple, nous montre que la règle *modus ponens* (MP), à partir de vérités, ne produit que des vérités – que le cas que les prémisses de ce schéma d'inférence soient vraies et la conclusion fausse ne peut pas arriver et, par conséquent, que le schéma d'inférence est valide. De même, les autres implications formelles nous assurent de la correction des règles d'inférence dérivées (« dérivées » parce qu'elles n'étaient pas mentionnées dans notre définition initiale du calcul). C'est grâce à (**T8**), par exemple, que nous pouvons passer de $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ à $\ulcorner\neg\psi \rightarrow \neg\phi\urcorner$, ce que nous pouvons adopter comme la règle d'inférence dérivée appelée « conversion » (CP) :[5]

(5) $$\frac{\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner}{\ulcorner\neg\psi \rightarrow \neg\phi\urcorner}\ \text{CP}$$

De telles règles d'inférence dérivées facilitent les preuves dans le calcul parce qu'elles épargnent la pénible tâche qui consiste à chercher les substitutions adéquates dans les axiomes.

Bien que, par exemple, la tautologie **T14** et la règle MP (et **T8** et CP) soient intimement liées (dans la mesure où la première nous assure de la correction de la deuxième), il faut tout de même les distinguer. Les tautologies sont des phrases du langage-objet qui (quoique dénuées de contenu d'après certains philosophes) parlent des objets (dans le sens dans lequel « Soit Socrate est mort, soit il ne l'est pas » parle de Socrate). Les règles, en revanche, sont des énoncés métalinguistiques, parlant de toutes les phrases ayant une certaine forme syntaxique : MP nous dit, par exemple, que de deux formules $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ et ϕ nous pouvons inférer une troisième, à savoir ψ.

Il a été dit que les implications formelles nous permettent de faciliter les preuves à l'aide de règles d'inférence dérivées. Mais est-ce vraiment le cas ? Qu'est-ce qui nous assure que notre méthode purement syntaxique respecte les relations sémantiques ? Afin de répondre à ces questions, il faut traiter de la relation entre « $\vdash$ » et « $\models$ » plus en détail.

5.2 Les relations entre conséquence logique et déductibilité

Nous avons vu que la logique traite de la relation de conséquence et cherche à déterminer quelles phrases s'ensuivent de quelles autres. Nous avons développé des notions précises de conséquence logique ($\models$) et de déductibilité syntaxique ($\vdash$). Maintenant, nous devons nous demander quelles sont les relations entre ces deux 'types' de 'conséquence'. Quel est le rapport entre « $\phi \models \psi$ » (« ψ est une conséquence logique de ϕ ») et « $\phi \vdash \psi$ » (« ψ peut être dérivé de ϕ dans un certain calcul ») ?

Pour notre calcul HC, deux théorèmes importants en métamathématiques (des preuves *sur* le calcul) nous assurent que les deux notions sont équivalentes. D'une part, HC est correct : HC ne prouve que

4. Nous parlons ici de « correction » dans le sens qu'une phrase ou règle d'inférence est « correcte » ssi. elle est ou correspond à une tautologie. On reviendra sur cette notion ci-dessous, cf. p. 129.

5. La conversion est également déjà connue par Aristote, cf. An pr ii, 4 57b1. Elle est bien illustrée dans une chanson d'enfant : « Mon chapeau a trois cornes, et ce qui n'a pas trois cornes n'est pas mon chapeau. »

des tautologies ; d'autre part, HC est aussi complet : HC prouve toutes les tautologies :

théorème de correction : HC est correct : tout théorème est une tautologie.

théorème de complétude : HC est complet : toute tautologie est un théorème.

Nous avons donc la relation suivante (pour n'importe quelle formule propositionnelle ϕ) :

$$\mathsf{HC} \vdash \phi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{HC} \models \phi$$

La direction « $\Longrightarrow$ » est assurée par le théorème de correction et signifie que HC ne prouve pas *trop*, c'est-à-dire ne prouve pas plus que les vérités logiques. La direction inverse, « $\Longleftarrow$ », est assurée par le théorème de complétude : HC prouve assez – en d'autres termes, il n'y a pas de vérités logiques qui ne soient pas prouvables dans HC.

Pris ensemble, les théorèmes de correction et de complétude nous assurent que notre axiomatisation de la logique propositionnelle par le calcul HC est *adéquate* : on a réussi à prouver toutes les phrases que l'on voulait, et pas plus. Ils nous montrent que le calcul syntaxique est en harmonie avec sa sémantique.

Théorème 17 (Correction de HC)**.** *Soient* Th *une théorie et* ϕ *une formule propositionnelle :*

(6) $\quad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{Th} \models \phi$

Preuve Par induction sur tous les nombres naturels n,[6] nous prouvons que :

(HI) $\quad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{Th} \models \phi$

(i) Si $n = 0$, alors soit ϕ est un axiome de HC, soit un élément de Th.[7] Par les tables de vérité, nous prouvons que tous les axiomes $\mathbf{H_1}$ à $\mathbf{H_{16}}$ sont des tautologies. Dans le cas où ϕ est un élément de Th ($\phi \in \mathsf{Th}$), il est évident que $\mathsf{Th} \models \phi$.

(ii) Hypothèse d'induction : Supposons que $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ et que (**HI**) est vraie pour tous les nombres naturels $n' < n$. Si ϕ est un axiome ou un théorème, il est vrai que $\mathsf{Th} \models \phi$ (par (i)). La seule autre possibilité est que l'on ait obtenu ϕ par l'application de MP à deux autres théorèmes. Dans ce cas, il y a une formule ψ et des nombres naturels n' et n'' (les deux $< n$) tels que :

(1) $\quad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{n'} \psi \rightarrow \phi$

(2) $\quad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{n''} \psi$

(3) $\quad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{n} \phi$

Par l'hypothèse d'induction, nous savons que l'affirmation (**HI**) est vraie pour les lignes (1) et (2). Nous avons :

$$\mathsf{Th} \models \psi \rightarrow \phi$$
$$\mathsf{Th} \models \psi$$

---

6. Une preuve par induction sur les nombres naturels montre qu'une certaine phrase est vraie de 0 (« base de l'induction ») et que, si elle est vraie pour n (« hypothèse d'induction »), alors elle est aussi vraie pour $n + 1$ (cette deuxième étape s'appelle le « pas de l'induction »). En montrant ainsi que la phrase est vraie de 0 et qu'elle est héritée par tous les successeurs de 0, nous démontrons que la phrase est vraie de tous les nombres (cf. p. 80).

7. Ceci s'ensuit de la notion même de preuve dans HC.

Puisque nous savons que MP est une règle d'inférence valide, nous pouvons inférer à partir de (3) :

$$\mathsf{Th} \models \phi$$

□

Pour une preuve de correction, il suffit de prouver que les axiomes sont des tautologies et que les règles d'inférence sont valides. Par la définition de la validité, il s'ensuit que tous les théorèmes sont des tautologies.

La complétude d'un calcul est, en général, beaucoup plus difficile à prouver que sa correction. Nous nous limitons donc ici à énoncer le théorème : [8]

Théorème 18 (Complétude de HC)**.** *Soient* Th *une théorie et* ϕ *une formule propositionnelle :*

(7) $\mathsf{Th} \models \phi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi$

Les tautologies sont les formules propositionnelles logiquement valides de la logique propositionnelle. Etant donné que toute interprétation assigne soit **v** soit **f** à une phrase donnée, une contradiction est une phrase dont la négation est une tautologie (et vice versa).

La plus grande partie de nos formules propositionnelles et toutes les phrases (traitées comme) simples ne sont ni des contradictions ni des tautologies. Une tautologie étant une *nécessité* logique et une contradiction étant une *impossibilité* logique, il s'agit donc de phrases *contingentes*, vraies sous quelques interprétations (et dans quelques mondes possibles), mais fausses sous d'autres.

Les théorèmes de correction et de complétude nous montrent que ces notions sémantiques de « tautologie », « contradiction » et « satisfaisabilité » ont des contreparties purement syntaxiques. Dans le calcul HC, nous pouvons dire qu'une phrase est prouvable si elle peut être dérivée des axiomes à l'aide de la règle d'inférence MP. Le théorème de correction limite ce que nous pouvons prouver par le calcul : elle signifie que seules les tautologies peuvent être prouvées, que le calcul ne prouve pas trop. L'inverse, cependant, est également vrai : comme nous allons voir dans la leçon 7 (p. 136), le calcul HC prouve assez : pour toute tautologie, il nous permet de déduire une contradiction à partir de la négation de cette tautologie.

Nous pouvons formuler ces observations de la manière suivante : disons que la *« clôture déductive »* d'une formule propositionnelle ϕ est l'ensemble de toutes les formules qui peuvent être déduites de ϕ à l'aide des axiomes et la règle d'inférence de HC : [9]

Définition 19 (Clôture déductive)**.** *La clôture déductive d'une formule propositionnelle* ϕ *ou d'un ensemble de formules propositionnelles* Σ *est l'ensemble des formules qui en peuvent être déduites :* $\mathsf{clo}(\Sigma) := \{\psi \mid \exists \phi \in \Sigma : \phi \vdash \psi\}$.

La clôture déductive d'une théorie sera alors son ‹ potentiel logique implicite › : appartient à la clôture de ϕ toute phrase que nous pouvons obtenir à partir de ϕ à l'aide d'une méthode syntaxique. [10]

A l'aide de cette nouvelle notion, nous pouvons maintenant définir une ‹ contrepartie syntaxique › à la notion sémantique de contradiction. Cette notion est purement syntaxique parce qu'elle ne concerne que la forme des phrases :

8. Nous donnerons une preuve de la complétude de HC dans la leçon 7 (cf. p. 136). La méthode des arbres que nous introduirons par la suite nous facilitera cette tâche.

9. Nous avons déjà utilisé cette notion dans la n. 2 à la p. 71.

10. Nous remarquons que toute clôture déductive sera un ensemble infini de phrases : $\phi \vdash \phi$, $\phi \vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$, $\phi \vdash \ulcorner \phi \vee \chi \urcorner$ etc.

Définition 20 (Consistance)**.** *Une formule propositionnelle ϕ et un ensemble de formules propositionnelles Σ sont consistants si et seulement si leurs clôtures déductives ne contiennent pas deux phrases des formes ψ et $\ulcorner \neg\psi \urcorner$ respectivement.*

Comme toute phrase fait partie de sa clôture déductive et parce que, si $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ appartient à une clôture déductive, alors ϕ et ψ y appartiennent également, une contradiction sera inconsistante d'après notre définition. Parce que MP ne nous permet pas de déduire une contradiction à partir d'une phrase qui n'est pas elle-même logiquement équivalente à une contradiction, *seulement* des contradictions seront inconsistantes.

Nous pouvons facilement étendre notre définition à des ensembles de phrases : la clôture déductive d'un ensemble de phrases est l'ensemble de toutes les phrases qui peuvent en être déduites ; un ensemble de phrases est consistant si et seulement si sa clôture déductive ne contient pas une phrase et sa négation. La clôture déductive des axiomes de HC est l'ensemble des théorèmes. Une contradiction, nous l'avons vu, nous permet de déduire n'importe quelle phrase : $\ulcorner (\phi \wedge \neg\phi) \rightarrow \psi \urcorner$ est un théorème pour n'importe quelle formule ψ. Au lieu de définir une phrase inconsistante comme phrase dont la clôture déductive contient une phrase et sa négation, nous aurions aussi pu la définir comme phrase dont la clôture déductive est *triviale*, c'est-à-dire contient toute phrase.[11]

Grâce aux théorèmes de correction et de complétude, la notion purement syntaxique de consistance correspond à une notion sémantique : dire qu'une formule propositionnelle est consistante (notion syntaxique) revient à dire qu'elle n'est pas une contradiction (notion sémantique) et donc satisfaisable (cf. la déf. 14 à la p. 88) ; dire que deux formules sont consistantes revient à dire qu'elles ne sont pas contraires, c'est-à-dire qu'elles peuvent être vraies ensemble. La notion syntaxique de consistance correspond donc à la notion sémantique de satisfaisabilité :

Théorème 21 (Adéquation)**.** *Une théorie* Th *est consistante si et seulement s'il y a une interprétation qui rend vraies toutes les formules propositionnelles* $\phi \in \mathsf{Th}$. *Autrement, elle est inconsistante (c'est-à-dire elle est inconsistante si et seulement si aucune interprétation ne rend vraies toutes les formules propositionnelles* $\phi \in \mathsf{Th}$*).*

La consistance est une relation entre des (ensembles de) phrases : on dit qu'une phrase ϕ est consistante avec deux autres phrases, ψ et χ, si et seulement s'il y a une interprétation qui rend vraies les trois phrases ϕ, ψ et χ. La consistance est intimement liée à la relation de conséquence logique : une phrase ϕ est une conséquence logique d'une théorie Th si et seulement si sa négation $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ est inconsistante avec Th. Dans ce cas, toute interprétation qui rend vraie $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ (et qui donc rend fausse ϕ), doit aussi rendre fausse au moins une des prémisses dans Th.

Définition 22 (Conséquence logique d'une théorie)**.** *Une formule propositionnelle ϕ est une conséquence (logique) d'une théorie* Th *(écrit : « $\mathsf{Th} \models \phi$ ») si et seulement si toute interprétation qui rend vraies toutes les formules propositionnelles dans* Th *rend vrai ϕ.*[12]

11. Les dialétheistes, qui acceptent des contradictions vraies, remplacent le principe de non-contradiction par un principe de non-trivialité : au lieu de dire qu'une phrase est prouvable si et seulement si la clôture déductive de sa négation est inconsistante, ils disent qu'elle l'est si et seulement si la clôture déductive de sa négation est non-triviale – c'est-à-dire les deux conditions ne coïncident pas dans une logique qui n'accepte pas le principe de l'*explosion déductive* (ou : *ex falso quodlibet*) qui dit que n'importe quelle formule s'ensuit d'une contradiction.

12. Pour l'écrire formellement :

(8) $$\mathsf{Th} \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall I\ \forall \psi \in \mathsf{Th}\ \ (I(\psi) = \mathbf{v}\ \rightarrow\ I(\phi) = \mathbf{v})$$

Si ϕ est une conséquence de la théorie vide ($\mathsf{Th} = \emptyset$) et s'ensuit donc seulement des axiomes d'un certain calcul, nous écrivons « $\models \phi$ » au lieu de « $\emptyset \models \phi$ ». « $\models \phi$ » veut donc dire que toute interprétation rend vraie ϕ, c'est-à-dire que ϕ est valide ou est une tautologie.

Etant donné que la notion de consistance s'applique à une phrase si et seulement si la négation de cette phrase n'est pas une tautologie, nous avons les relations suivantes :

correction	tout théorème est une tautologie	toute phrase satisfaisable est consistante
complétude	toute tautologie est un théorème	toute phrase consistante est satisfaisable

Il s'agit ici d'une application métalogique de la règle d'inférence de conversion : si tout théorème est une tautologie, tout ce qui n'est pas vrai sous toutes les interprétations (n'est pas une tautologie, donc a une négation satisfaisable) ne peut pas être prouvé (n'est pas un théorème, donc a une négation consistante) ; si toute tautologie est un théorème, tout ce qui ne peut pas être prouvé (a une négation consistante) n'est vrai sous aucune interprétation (a une négation satisfaisable).

L'harmonie entre la syntaxe et la sémantique de la logique propositionnelle nous donne une correspondance parfaite entre les notions sémantiques et syntaxiques :

$$\begin{array}{rcl}
\phi \text{ s'ensuit de } \mathsf{Th} & \Longleftrightarrow & \phi \text{ est une conséquence syntaxique de } \mathsf{Th} \\
\phi \text{ est satisfaisable} & \Longleftrightarrow & \phi \text{ est consistant} \\
\phi \text{ est une contradiction} & \Longleftrightarrow & \phi \text{ est inconsistant} \\
\phi \text{ est une tautologie} & \Longleftrightarrow & \ulcorner \neg\phi \urcorner \text{ est inconsistant} \\
\ulcorner \phi \text{ donc } \psi \urcorner \text{ est un argument valide} & \Longleftrightarrow & \ulcorner \phi \wedge \neg\psi \urcorner \text{ est inconsistant}
\end{array}$$

5.3 La nature de la logique

Nous avons introduit la négation « $\neg$ » par la table de vérité suivante :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Cette table de vérité montre que la valeur de vérité d'une phrase formée d'une négation (comme connecteur principal) et d'une autre phrase plus simple est l'inverse de la valeur de vérité de cette autre phrase. Selon le principe de vérifonctionnalité (cf. p. 37), cette table de vérité détermine complètement la signification de « $\neg$ ». Il y a, cependant, une autre manière de spécifier cette signification, que ceux qui ne pensent pas que la logique est l'étude de quelques vérités (les vérités logiques), mais plutôt qu'elle est l'étude des inférences valides, préfèrent. Selon eux, une logique n'est pas caractérisée par ses tautologies, mais par la relation de conséquence qui rend valides certaines inférences. Les connecteurs propositionnels ne sont pas caractérisés par leurs tables de vérité, mais par les règles d'introduction et d'élimination qui gouvernent leur comportement inférentiel.

Parmi les philosophes qui se sont interrogés sur la nature de la logique, on peut en effet distinguer deux courants : selon un premier courant, la logique essaie de trouver, d'expliquer et de systématiser les tautologies :[13] selon un second courant, elle essaie de formaliser les inférences valides.[14] Le premier

13. Ainsi Blanché, dans son introduction à la logique, dit que la logique (propositionnelle) est la recherche des tautologies (Blanché 1996: 65). Les figures les plus célèbres de ce groupe sont Quine, Tarski et Wittgenstein.

14. Pour ce camp là, nous nous devons surtout de nommer le logicien allemand Gerhard Gentzen.

camp maintient souvent, avec Wittgenstein, que les vérités logiques sont dénuées de contenu (*« sinnlos »*), mais qu'elles ne sont pas dénuées de sens (elles ne sont pas *« unsinnig »*) : quoiqu'elles ne nous informent pas sur le monde (car elles n'excluent aucune possibilité), elles font, en tant que cas limites, partie du langage sensé – « Elles font partie du formalisme. » (Wittgenstein 1921: §4.4611).

La première approche consiste dans l'élaboration d'un calcul qui axiomatise un certain nombre de phrases, appelées « théorèmes ». La seconde approche formalise certaines inférences, des transitions de quelques phrases à d'autres. La première approche réussit si et seulement si les théorèmes (les phrases axiomatisées) sont des tautologies (et il ne reste aucune tautologie qui ne soit pas axiomatisée par le calcul), c'est-à-dire si le calcul est complet et correct ; la seconde approche réussit si et seulement si les inférences formalisées sont valides et suffisent pour capturer tout le raisonnement 'logique' en question.

Les deux projets de recherche peuvent être entrepris de manière sémantique ou de manière syntaxique. Si l'on s'intéresse principalement aux vérités logiques, on cherchera à les axiomatiser à l'aide d'un calcul et à prouver que ce calcul est correct et complet (en bref : adéquat) par rapport à l'ensemble des phrases que l'on voulait axiomatiser.[15] Dans la seconde perspective, qui s'intéresse à la validité des arguments (et à la correction des inférences) plutôt qu'aux vérités logiques (bien que les deux questions soient étroitement liés), on essaie de développer une méthode syntaxique et structurelle de déduction. C'est la méthode de la déduction naturelle, que l'on abordera dans la leçon 6. Une autre méthode est celle des tableaux analytiques, également appelée la « méthode des arbres ». Ces deux méthodes sont syntaxiques : la différence principale entre ces deux techniques et le calcul axiomatique c'est qu'elles comportent de nombreuses règles d'inférence, tandis que le calcul hilbertien n'a normalement qu'une seule règle d'inférence (le plus souvent *modus ponens*), mais de nombreux axiomes.

La méthode de la déduction naturelle a été introduite, d'une part par Jaskowski (1934) et d'autre part par Gentzen (1934). Simultanément, Gentzen a défini un calcul des séquents. Vingt ans plus tard, Beth (1955) a formulé sa méthode des tableaux analytiques et Hintikka (1955) a proposé la méthode des ensembles de vérité (« truth sets ») qui, dans la systématisation de Smullyan (1968), est devenue la méthode des arbres que nous présenterons à la manière de Lepage (1991). Ce n'est que récemment qu'il a été prouvé que le calcul des tableaux analytiques et le calcul des séquents sont équivalents, c'est-à-dire que tout ce qui peut être prouvé par l'une des méthodes peut être également prouvé par l'autre et vice versa.

5.4 La normativité de la logique

Les deux courants se distinguent aussi par leurs positions vis-à-vis la question de la *normativité de la logique*. Comment devons-nous interpréter un schéma d'inférence valide ?

5.5 La méthode des arbres

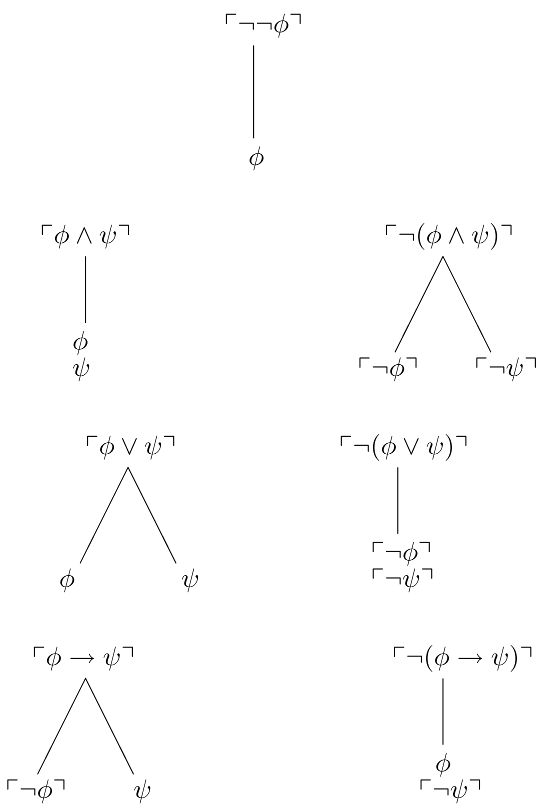
La méthode des arbres est une méthode syntaxique pour prouver certaines phrases. Elle est cependant 'moins' syntaxique que la méthode des calculs axiomatiques parce qu'elle utilise des règles qui se prêtent à une interprétation en termes de tables de vérité. De manière intuitive, un arbre représente les différentes manières comment une phrase donnée peut être vraie : une disjonction, par exemple, peut être vraie soit en vertu du premier, soit en vertu du deuxième disjoint. Une conjonction, par contre,

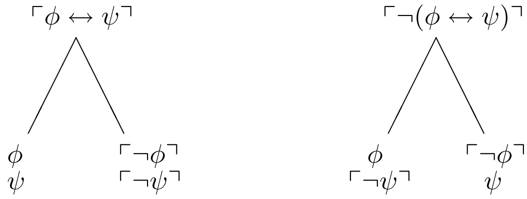
15. Nous parlerons de la correction et la complétude des calculs en général dans la leçon 7.

ne peut être vraie d'une seule manière : pour qu'elle soit vraie, il faut que et le premier et le deuxième conjoint soit vraie. Plus précisément, l'interprétation sémantique de la méthode syntaxique des arbres est basée sur les neuf faits sémantiques suivants :

F1 Si une négation $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ est fausse, alors ϕ est vraie.
F2 Si une conjonction $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ est vraie, alors ϕ et ψ sont vraies.
F3 Si une conjonction $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ est fausse, alors soit ϕ soit ψ est fausse.
F4 Si une disjonction $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$ est vraie, alors soit ϕ, soit ψ est vraie.
F5 Si une disjonction $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$ est fausse, alors ϕ et ψ sont fausses.
F6 Si une implication $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ est vraie, alors soit ϕ est fausse soit ψ est vraie.
F7 Si une implication $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ est fausse, alors ϕ est vraie et ψ est fausse.
F8 Si une équivalence $\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$ est vraie, alors soit ϕ et ψ sont vraies, soit ϕ et ψ sont fausses.
F9 Si une équivalence $\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$ est fausse, alors soit ϕ est vraie et ψ fausse, soit ϕ est fausse et ψ vraie.

De ces neuf faits, nous dérivons des règles pour construire des arbres. **F2**, par exemple, nous dit que nous pouvons décomposer $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ en ϕ et en ψ et les placer sur la même branche : si $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ se trouve sur un chemin de l'arbre, alors ϕ et ψ devront se trouver sur ce même chemin, car si $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ est vraie, ϕ et ψ le sont aussi **F3** nous dit que si $\ulcorner \neg(\phi \wedge \psi) \urcorner$ se trouve sur un chemin, alors soit $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ soit $\ulcorner \neg\psi \urcorner$ devrait se trouver sur le même chemin. Construire un arbre correspondant à une expression complexe consistera à construire des chemins à partir de l'expression initiale en utilisant les règles de construction d'arbres. Les chemins ainsi obtenus dans l'arbre (considérés de bas en haut) seront appelés des « chemins de vérité » : ils représentent des manières dont les phrases initiales peuvent être vraies ensemble. La méthode des arbres nous fournit ainsi un test de consistance, respectant la composition d'une phrase complexe à partir de ses constituantes simples. Les neuf faits **F1** à **F9** mentionnés nous assurent la correction de quelques règles d'inférence. Ils correspondent à neuf règles de construction d'arbres :

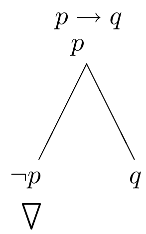




Nous appliquons ces règles de manière itérative, jusqu'à ce qu'aucune des règles ne soit applicable – cela n'est le cas que si les seules phrases non-traitées sont des phrases simples ou des négations de phrases simples. Nous pouvons fermer une branche si et seulement si elle contient n'importe quelle formule propositionnelle, par exemple « p » (ou « $p \wedge (q \vee r)$ »), *et* sa négation « $\neg p$ » (ou « $\neg(p \wedge (q \vee r))$ »). [16] Pour le faire, il n'est pas nécessaire que l'arbre soit entièrement développé : dès que nous trouvons une phrase et sa négation sur une même branche, nous pouvons la fermer.

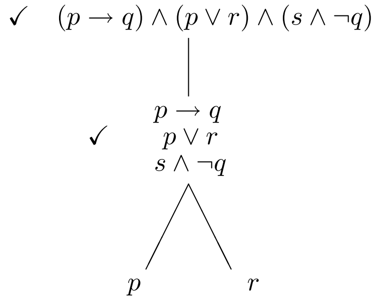
5.6 Le développement syntaxique de la méthode des arbres

Comment interpréter ces arbres ? Leurs règles de construction correspondent à des règles d'inférence. Dans notre nouveau calcul, la règle d'inférence MP, par exemple, correspondra à l'arbre suivant :



Il est aisé d'interpréter cet arbre de manière sémantique : Une implication peut être vraie de deux manières : parce que son antécédent est faux ou parce que son conséquent est vrai. En présence de « p », cependant, nous pouvons exclure la première possibilité – ce que nous faisons en fermant la branche gauche. Le seul chemin de vérité qui reste contiendra « q » : « q » doit être vraie si « $p \rightarrow q$ » et « p » le sont.

Voici un autre exemple. Nous commençons par une conjonction de trois phrases complexes, appliquons la règle de conjonction et développons ensuite la disjonction qui est le deuxième conjoint :



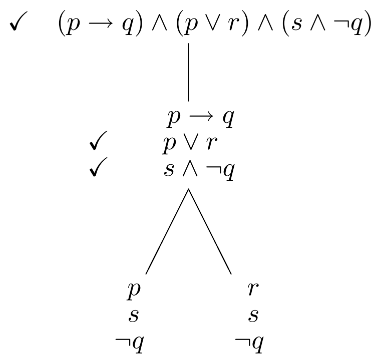
16. Seules les paires de phrases de la forme $\langle\phi, \ulcorner\neg\phi\urcorner\rangle$ comptent comme contradictoires. Il ne serait pas permis, par exemple, de considérer « $\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$ » comme négation de « $p \wedge (q \vee r)$ », même si la formule est logiquement équivalente à cette négation. Dans un calcul syntaxique, tel que l'est la méthode des arbres, seule la *forme* (syntaxique) des phrases peut entrer en considération.

Après avoir appliqué une règle à une formule dans une branche, nous la marquons par le signe « ✓ ». Après chaque application de règle, nous déterminons si nous pouvons déjà fermer une branche. Ici nous ne pouvons pas encore le faire.

En voici une interprétation sémantique : Nous avons commencé avec trois formules qui étaient peut-être toutes vraies. Ce que notre arbre nous apprend, c'est que les trois formules pourraient être vraies de deux manières : la première serait que « $p \rightarrow q$ », « $s \wedge \neg q$ » et « p » soient vrais, et la deuxième que « $p \rightarrow q$ », « $s \wedge \neg q$ » et « r » soient vraies.

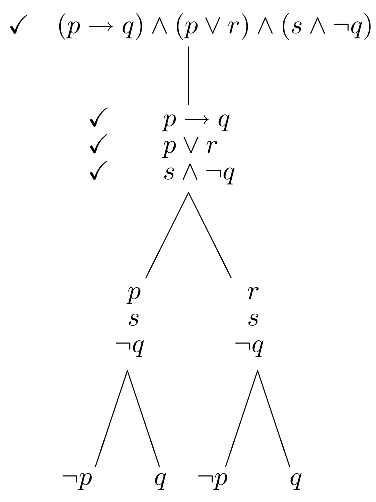
Nous pouvons donner une motivation 'dialogique' à cette interprétation : un arbre représente les choix dialogiques d'un défenseur de la phrase initiale. En défendant la vérité d'une disjonction, par exemple, je peux me contenter de ne défendre que l'un des disjoints ; pour défendre une conjonction, cependant, il faut défendre les deux conjoints etc. Dire qu'une branche se ferme revient à dire que l'argument qui a pris le chemin de vérité correspondant a échoué : la défense n'a pas pu montrer que la phrase initiale pouvait être vraie.

Nous distribuons maintenant la conjonction « $s \wedge \neg q$ » sur les branches (et marquons la troisième formule comme traitée) :

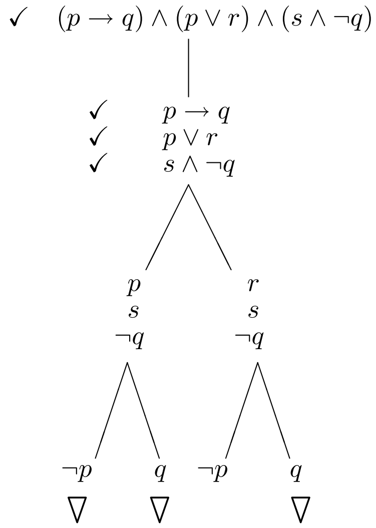


Etant donné que la règle de conjonction nous dit de continuer avec les deux conjoints, il nous faut ajouter « s » et « $\neg q$ » dans chacune des deux branches.

Nous vérifions à nouveau si nous pouvons fermer une branche : nous ne le pouvons pas. Nous appliquons maintenant la règle de l'implication à la première de nos trois formules initiales (l'implication est la seule formule complexe qui nous reste, et donc la seule à laquelle nous pouvons appliquer une règle pour développer davantage l'arbre). Cette règle d'implication nous dit d'ouvrir deux nouvelles branches : l'une avec la négation de l'antécédent et l'autre avec le conséquent. Nous obtenons donc :



Cette fois, nous pouvons fermer quelques-unes de nos quatre branches. Celle de gauche contient « $\neg p$ » et « p », la deuxième en partant de la gauche « q » et « $\neg q$ », et celle qui se trouve tout à droite contient également « q » et « $\neg q$ ». Nous indiquons le fait qu'une branche ait été fermée par le signe « ∇ » :



A ce stade, nous ne pouvons plus développer le tableau, puisque toutes les formules non-précédées du signe « ✓ » sont soit des phrases simples, soit des négations de phrases simples, et que les règles dont nous disposons ne s'appliquent qu'à des phrases complexes. Il ne nous reste donc plus rien à faire.

Il est important de se rappeler que la méthode des arbres est une méthode syntaxique : la preuve d'une phrase par la méthode des arbres est une application mécanique des règles de construction d'arbres et de fermeture des branches qui contiennent une formule propositionnelle simple avec sa négation. La méthode des arbres nous fournit donc un *test de consistance* : la phrase initiale est inconsistante si et seulement si chaque branche de l'arbre se ferme.

Grâce à la complétude et la correction de la méthode des arbres, le test de consistance qu'elle nous fournit est également un teste de satisfaisabilité. Présupposant que la méthode des arbres est une méthode correcte et complète (ce que nous ne démontrons que dans le ch. 7), nous pouvons donc résumer l'utilité de la méthode des arbres comme suit :

1. Une branche entièrement développée correspond à un ‹ chemin de vérité› : elle montre, sous quelle interprétation de ses composantes simples la phrase à l'origine de l'arbre est vraie.
2. Nous pouvons également concevoir une branche comme une stratégie d'argumentation pour défendre la vérité de la phrase à l'origine.
3. Si toutes les branches d'un arbre se ferment, il est logiquement impossible que la formule à l'origine soit vraie : il s'agit d'une contradiction. Dans ce cas (et seulement dans ce cas), sa négation est une tautologie.
4. Par ce fait, la méthode des arbres est une méthode de réduction à l'absurde : en fermant toutes les branches de son arbre, nous montrons qu'une formule est logiquement fausse.

Pour prouver une formule à l'aide de la méthode des arbres, *nous formons sa négation*, développons l'arbre de cette négation et montrons que toutes ses branches se ferment. Soit ϕ une formule quelconque :

1. Si toutes les branches de l'arbre pour $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ se ferment, alors ϕ est une tautologie.
2. Si une branche de l'arbre entièrement développé pour $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ reste ouverte, nous avons trouvé ce que nous appelons un « modèle » pour $\ulcorner \neg\phi \urcorner$, c'est-à-dire une interprétation des composantes simples de ϕ qui rend $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ vrai et ϕ faux ; ϕ n'est alors pas une tautologie.

Si l'arbre se ferme, la formule à l'origine est insatisfaisable ; s'il reste ouvert, elle est satisfaisable.

5.7 L'interprétation sémantique de la méthode des arbres

Bien que la méthode des arbres soit un *calcul*, donc une méthode purement syntaxique de prouver des théorèmes, son avantage principal réside dans le fait que son interprétation sémantique est facile et naturelle. Par l'adéquation entre la syntaxe et la sémantique de la logique propositionnelle, les théorèmes de correction et de complétude de la méthode des arbres nous permettent de donner une interprétation sémantique aux règles de construction d'arbres.[17]

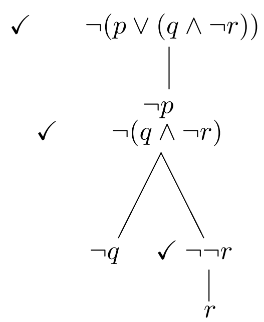
En effet, le fait que nous ayons fermé trois des quatre branches de l'arbre précédent signifie que ces branches ne représentent pas des manières dont les formules initiales pourraient être vraies ensemble. Elles ne correspondent pas à des interprétations qui rendent vraie la formule initiale.

Le tableau nous montre donc qu'il n'y a qu'une seule manière pour les formules initiales d'être vraies ensemble : il faut que les formules sur la seule branche ouverte soient toutes vraies, en d'autres termes que « r », « s », « $\neg q$ » et « $\neg p$ » soient toutes vraies. Dans une table de vérité, cette possibilité logique correspondrait à la ligne F-F-V-V du tableau. Cette ligne représente la possibilité logique sous laquelle la formule initiale est vraie – elle décrit le modèle dans lequel elle est vraie.

Si nous avions fermé toutes les branches, nous saurions que la ou les formule(s) initiale(s) ne pouvai(en)t pas être vraie(s) : il s'agirait d'une contradiction (dans le cas d'une seule phrase) ou d'un ensemble de phrases insatisfaisables.

Nous voyons ainsi que la méthode des arbres peut nous servir de test de *satisfaisabilité* : si une des branches reste ouverte, il y a une possibilité logique pour les phrases initiales d'être vraies ensemble et elles forment donc un ensemble satisfaisable (présupposant la complétude et la correction de la méthode des arbres). Puisqu'une phrase est une contradiction si et seulement si sa négation est une tautologie, la méthode des arbres nous sert également de test pour savoir si ou non une phrase est une tautologie. Si toutes les branches de l'arbre *de sa négation* se ferment, alors elle est une tautologie. Si au moins une branche reste ouverte, il y a une possibilité pour sa négation d'être vraie, et donc une possibilité pour elle d'être fausse. Dans ce cas-là, elle n'est pas une tautologie.

Les arbres nous permettent donc de visualiser les conditions de vérité d'une phrase complexe. Examinons un deuxième exemple :

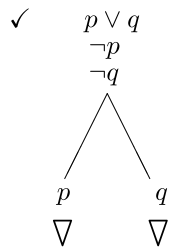


L'application des règles nous permet d'interpréter cet arbre de la façon suivante : « $\neg(p \vee (q \wedge \neg r))$ »

17. Les théorèmes de correction et de complétude doivent être établi pour chaque calcul syntaxique séparément. Nous n'avons montré la correction que pour HC (p. 91) et avons seulement présupposé la complétude. Nous allons prouver la correction de la méthode des arbres et de la complétude des deux systèmes dans la leçon 7.

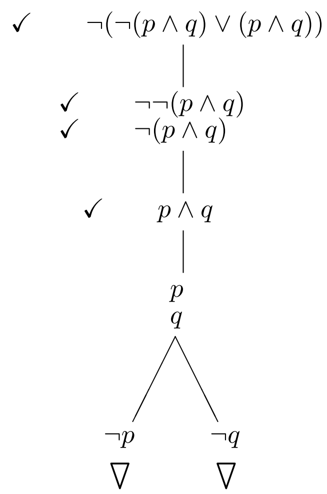
est vraie si et seulement si, soit « $\neg p$ » et « $\neg q$ » sont vraies (la branche à gauche), soit « $\neg p$ » et « r » sont vraies (la branche à droite). Il y a donc deux chemins de vérité complets dans cet arbre, deux manières pour la phrase complexe d'être vraie.

Considérons l'arbre suivant :



Dans cet arbre, aucun chemin ne reste ouvert : la tentative de trouver une manière dont les phrases initiales peuvent être vraies ensemble échoue – ce qui n'étonne pas, étant donné que la vérité d'une disjonction exclut la fausseté de ses deux disjoints.

Une contradiction est caractérisée par le fait que chacun des chemins de son arbre contient une phrase et aussi sa négation. Autrement dit, toutes ses branches se ferment :



Un des chemins de cet arbre contient « p » et « $\neg p$ », l'autre « q » et « $\neg q$ ».[18]

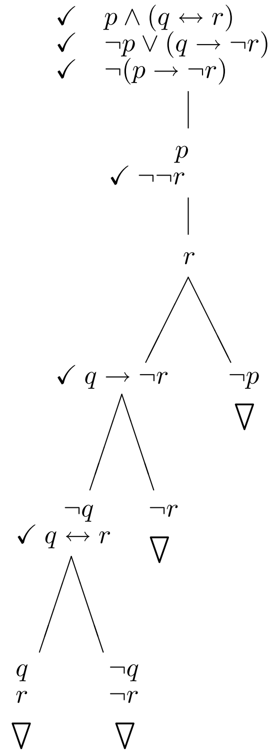
En tant que méthode syntaxique, la méthode des arbres nous permet de *prouver* des phrases : on prouve une phrase en montrant qu'un arbre complet (entièrement développé) *pour sa négation* ne contient que des branches fermées. Interprété sémantiquement, le fait que toutes les branches se ferment signifie qu'il n'y a aucune possibilité pour la phrase initiale d'être vraie, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une contradiction. Puisqu'une phrase est une contradiction si et seulement si sa négation est une tautologie, nous avons une méthode pour tester le caractère tautologique d'une phrase. Il suffit de faire l'arbre *de sa négation* et de voir si toutes les branches se ferment. Si c'est le cas, la phrase initiale est une tautologie ; sinon, elle ne l'est pas.[19]

Un arbre dont toutes les branches se ferment est appelé « fermé ». Une phrase est donc une tautologie si et seulement si sa négation a un arbre fermé. Considérons un autre exemple. Pour prouver que

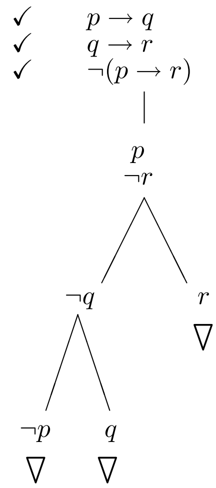
18. Selon l'interprétation ‹ dialogique› de la méthode des arbres (cf. p. 98), la fermeture d'une branche représente le cul-de-sac dans lequel est tombé un interlocuteur qui a choisi cette stratégie pour défendre sa thèse initiale. S'il n'y a que des culs-de-sac, la thèse ne peut pas être défendue.

19. J'explique ici une méthode syntaxique en termes sémantiques, présupposant déjà que la méthode des arbres est correcte et complète par rapport à la sémantique de la logique propositionnelle. Nous n'établirons ce résultat que plus tard, dans la leçon 7.

« $(p \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge \neg p \vee (q \rightarrow \neg r)) \rightarrow (p \rightarrow \neg r)$ », c'est-à-dire pour montrer que cette phrase complexe est un théorème de la méthode des arbres, nous construisons un arbre pour sa négation. Nous appliquons les règles pour l'implication niée et pour la conjonction, et continuons avec les autres règles comme suit :



Les arbres peuvent donc nous servir de critère lors de la détermination du caractère tautologique ou non-tautologique d'une phrase. Une inférence est valide si et seulement si l'implication matérielle de sa conclusion par (la conjonction de) ses prémisses est une tautologie. Nous pouvons donc également utiliser la méthode des arbres pour tester la validité des inférences. Par exemple, pour tester la validité de l'argument « $p \rightarrow q$; $q \rightarrow r$; donc $p \rightarrow r$ » (vérifier si « $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$ » est vraie), nous déterminons si la négation de sa conclusion est consistante avec ses prémisses – s'il existe une possibilité logique que les prémisses soient vraies et la conclusion fausse. Si toutes les branches de l'arbre correspondant à cette implication sont fermées, il n'y a aucune interprétation qui rende vraies à la fois toutes les prémisses et la négation de la conclusion car la négation de la conclusion est inconsistante avec les prémisses. En d'autres termes, toute interprétation qui rend vraie l'ensemble des prémisses rend vraie la conclusion. Par conséquent, l'inférence est valide. Nous construisons l'arbre suivant :



Observant que toutes les branches se ferment, nous concluons qu'il n'y a pas d'interprétation qui rende vraies « $p \to q$ », « $q \to r$ » et « $\neg(p \to q)$ », c'est-à-dire que toute interprétation qui rend vraies « $p \to q$ » et « $q \to r$ » rend également vraie la conclusion de l'argument, « $(p \to q)$ ». L'argument suivant est donc valide :

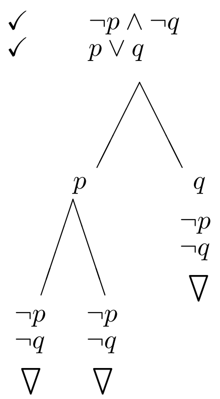
(9) $$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline p \to r \end{array}$$

La méthode des arbres est une méthode efficace permettant de déterminer si un énoncé est une tautologie ou non. L'application d'une règle à une formule a pour résultat de ramener le problème à l'application d'autres règles sur des formules plus courtes. Étant donné qu'au point de départ nous avons un nombre fini de phrases qui possèdent chacune un nombre fini de symboles, après un nombre fini d'étapes, l'arbre sera totalement développé et nous pourrons vérifier si tous les chemins se ferment ou non.

Comme test de validité d'un argument, la méthode des arbres a l'avantage supplémentaire de nous procurer une information cruciale dans le cas où le test échoue : la branche qui reste ouverte nous indique de quelle manière on peut construire un contre-exemple, c'est-à-dire quelle est l'interprétation propositionnelle qui rend vraies les prémisses et fausse la conclusion.

Néanmoins, il faut faire des choix : dans l'application des règles à certaines phrases plutôt que d'autres, on risque de compliquer l'arbre et de devoir répéter les mêmes formules sur différents arbres. En général, il est conseillé de toujours traiter d'abord les phrases qui n'ouvrent pas de nouvelles branches, ce qui évite de devoir répéter la même formule dans des branches différentes. L'ordre de l'application des règles, même s'il peut être important d'un point de vue pratique, est immatériel logiquement : si nous obtenons un arbre fermé par un ordre de procédure, tout autre ordre nous donnera également un arbre fermé.

Il est important de ne pas oublier d'introduire les nouvelles formules *sur toutes les branches ouvertes.* Supposons, par exemple, que je commence, en développant l'arbre suivant, par la disjonction. Je dois mettre les conjoints de la conjonction sur toutes les branches successives :



En guise de résumé, on peut dire que la méthode des arbres met à notre disposition trois tests de fort utiles :

- Comme test de *consistance*, elle nous permet d'établir si une phrase ou un ensemble de phrases est ou non consistant et, dans le cas d'une réponse affirmative, elle nous permet de trouver une interprétation pertinente.

- La méthode des arbres nous permet d'établir si une phrase donnée est ou non une *tautologie* : elle l'est si et seulement si les branches de l'arbre de sa négation sont toutes fermées.
- La méthode des arbres nous permet également de tester la *validité* d'un argument, en vérifiant si l'implication correspondante est ou non une tautologie.

Points à retenir

1. Une interprétation propositionnelle atomique attribue des valeurs de vérité aux phrases simples. Elle est la base pour une interprétation propositionnelle qui attribue des valeurs de vérité à toutes les formules du langage $\mathcal{L}$.
2. Une interprétation propositionnelle correspond à une possibilité logique et à une ligne dans une table de vérité.
3. Les notions sémantiques « tautologie », « contradiction », « satisfaisabilité » et « conséquence logique » peuvent être définies en termes d'interprétations propositionnelles.
4. Un ensemble de phrases est satisfaisable si et seulement s'il y a une interprétation qui rende vraies toutes les phrases de cet ensemble.
5. Un calcul syntaxique (un calcul axiomatique, un calcul d'arbres ou un calcul de la déduction naturelle) est dit « correct » si tous ses théorèmes sont des tautologies.
6. Un tel calcul est dit « complet » si toute tautologie en est un théorème.
7. La méthode des arbres nous fournit un test de consistance : elle nous permet d'établir si oui ou non un ensemble de phrases est consistant. Si l'ensemble en question est effectivement consistant, elle permet également de trouver une interprétation qui rende vraies toutes les phrases de cet ensemble.
8. Prouver une phrase ϕ par la méthode des arbres revient à montrer que toutes les branches de l'arbre de sa négation $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ se ferment.
9. Puisqu'elle est correcte, la méthode des arbres nous permet également d'établir si une phrase ϕ est ou non une tautologie : elle l'est si et seulement si l'arbre de sa négation $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ ne contient que des branches fermées.
10. La méthode des arbres nous permet également de tester un argument pour sa validité, en vérifiant le caractère tautologique de l'implication correspondante.