Chapitre 8

La syllogistique

8.1 Les syllogismes classiques

Nous avons vu (à la p. 35) que la logique propositionnelle ne nous permet pas de reconnaître la validité des inférences comme

(1)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les philosophes sont des hommes.}\\ \text{Tous les hommes sont mortels.}\end{array}}{\text{Tous les philosophes sont mortels.}}$$

La première étape vers une formalisation des inférences comme (1) a été faite dans la logique traditionnelle, appelée « syllogistique », dérivée des œuvres d'Aristote, en particulier de son traité *De l'interprétation* (Aristote 2000a). La syllogistique a dominé la logique pendant plus de 2000 ans.[1] Immanuel Kant pensait que la logique était sortie « close et achevée » du cerveau d'Aristote (« geschlossen und vollendet », *Critique de la raison pure*, 1786 (Kant 2001), B VIII) et ce ne fut qu'avec Frege que l'on eut la preuve de son erreur.

Nous remarquons que la validité de (1) n'est pas dû aux occurrences de « hommes », « mortel » et « philosophe », mais est partagée non seulement par l'inférence suivante :

(2)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les pingouins sont des animaux.}\\ \text{Tous les animaux sont maudits.}\end{array}}{\text{Tous les pingouins sont maudits.}}$$

mais aussi des inférences plus compliquées de la même forme :

(3)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les amis de mon grand-père qui vit en Australie sont soit des kangourous,}\\ \text{soit des admirateurs de la lune.}\\ \text{Tous les kangourous et les admirateurs de la lune adorent chaque vache qui rit}\\ \text{et qui n'est ni bête ni rose.}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Tous les amis de mon grand-père qui vit en Australie adorent chaque vache}\\ \text{qui rit et qui n'est ni bête ni rose.}\end{array}}$$

Nous formalisons alors (1) utilisant des abréviations schématiques pour les expressions remplaçables :

1. Il y avait néanmoins d'autres traditions. Par exemple, les Stoïciens, Petrus Hispanus et Duns Scot ont étudié la logique propositionnelle (cf. Łukasiewicz 1935).

(4)
$$\frac{\text{Tous les } S \text{ sont } M. \quad \text{Tous les } M \text{ sont } P.}{\text{Tous les } S \text{ sont } P.}$$

La syllogistique étudie le comportement logique des expressions comme « tous les S sont P » qui représentent la squelette logique des inférences comme (1).

La syllogistique distingue quatre formes de phrases dites « catégorielles », une phrase catégorielle étant composée d'un sujet, d'une copule et d'un prédicat.

SaP	**SiP**	**SeP**	**SoP**
« tous les S sont P »	« quelques S sont P »	« Aucun S n'est P »	« Quelques S ne sont pas P »
« tous les philosophes sont mortels »	« quelques chats sont des animaux »	« Aucun homme n' est blanc. »	« Quelques chats ne sont pas jolis. »
jugement affirmatif jugement général	jugement affirmatif jugement particulier	jugement négatif jugement général	jugement négatif jugement particulier

Les quatre types **a**, **i**, **e**, **o** (qu'on peut s'imaginer dérivés de « **a**ff**i**rmo » (« je maintiens ») et « n**e**g**o** » (« je conteste »)) se distinguent par les relations qui subsistent entre les (ensemble d') objets tombant sous le concept de sujet « S » (son extension) et (l'ensemble de) ceux qui tombent sous le concept de prédicat « P » : dans le cas d'un jugement général affirmatif (« **SaP** »), cette relation est celle d'inclusion ; dans le cas d'un jugement particulier affirmatif (« **SiP** ») celle d'intersection ; dans le cas d'un jugement général négatif (« **SeP** »), les extensions sont disjointes ; et dans le cas d'un jugement particulier négatif (« **SoP** ») la relation est celle de non-inclusion.

Il importe peu, en conséquence, que nous utilisions ordinairement le pluriel pour exprimer les jugements des types **i** et **o** : pour que « quelques pingouins sont heureux » soit vraie, par exemple, il suffit qu'un seul pingouin soit heureux.

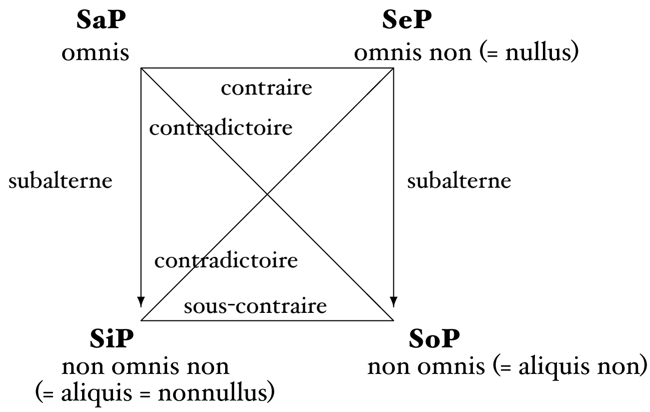
Nous voyons donc que seules les extensions comptent : d'autres manières d'exprimer une phrase catégorielle du type **SaP** (« tous les S sont (des) P ») seraient « tout ce qui est S est P », « chaque S est un P », « les S sont P sans exception », « seulement des P sont des S ». Pour exprimer une relation du type **SiP** (« quelques S sont (des) P »), on peut dire « quelque chose est et un S et un P », « il y a des S qui sont P », « il y a des P qui sont des S », « il y a des SP » (des pingouins heureux, par exemple). Pour un jugement général négatif (**SeP**) (« aucun S n'est P ») , on peut dire « aucune chose est et un S et un P », « rien de S est P », « aucun P n'est S », « les SP n'existent pas » (les pingouins heureux, par exemple).

Afin de formaliser le maximum de phrases sous une forme catégorielle, on peut souvent se servir de re-formulations. « Je ne vais nulle part en avion où je peux aller en train », par exemple, peut être reformulée comme ayant la forme **SeP** : « aucun endroit où je vais en avion est tel que j'y puisse aller en train ». La phrase « tout le monde dans la salle parle français » devient « toutes les personnes dans la salle sont des locuteurs du français » (**SaP**), « je veux aller où tu vas » devient « tout endroit où tu vas est un endroit où je veux aller aussi » (**SaP**) et « quand il pleut, la rue est mouillée » devient « tous les instants pendant lesquels il pleut sont des instants pendant lesquels la rue est mouillée » (**SaP**). Parfois cette transformation est loin d'être évidente, comme le montre la transformation de « je l'ai connu avant qu'il ne se soit ruiné » en « quelques instants avant qu'il ne se soit ruiné sont des instants où je l'ai connu ». Il n'y a pas non plus de règle générale, comme le montre le fait que « Un chevalier est présent » est clairement de la forme **SiP**, bien que « Un irlandais est roux » émette probablement un jugement du type **SaP**.

L'explication de la distinction entre les quatre formes de phrases catégorielles que nous venons de donner était en termes de relations mathématiques entre les extensions des concepts qui les composent.

D'autres explications, cependant, sont possible. Nous pourrions, comme nous l'avons fait dans la table ci-dessus, parler de quatre types de *jugements* différents. Nous sommes assez familier avec les jugements particuliers et universals, le jugement qu'un irlandais est roux étant universal, en dépit de sa forme grammaticale singulière. Mais que dire des jugements affirmatifs et négatifs ? Frege (1918b) a donné un argument célèbre contre l'existence de jugements négatifs (cf. Frege (1971c) pour une traduction française) :

Les quatre types de jugements catégoriels se trouvent dans un carré d'oppositions (cf. p. 62) :



Comme dans le cas des carrés d'oppositions pour la logique propositionnelle, la relation de contradiction implique que l'une des phrases qu'elle relie est la négation de l'autre. Les phrases contraires, cependant, se distinguent par une négation interne :[2] elles ne peuvent pas toutes les deux être vraies, mais elles peuvent être toutes les deux fausses ; il n'est pas possible que tous les S soient P et qu'il ne soit pas le cas que tous les S soient des P (au moins s'il y a des S),[3] mais il est possible qu'il y ait des S qui soient des P (et donc que « tous les S ne sont pas des P » soit fausse) et des S qui ne soient pas des P (et donc que « tous les S sont des P » soit également fausse). La relation de subalternation est simplement la relation de conséquence : si tous les S sont P (et s'il y a des S), alors il n'est pas vrai qu'il n'est pas le cas qu'aucun S n'est P ; si aucun S n'est P (et s'il y a des S), alors il n'est pas le cas que tous les S soient P. La sub-contrariété, finalement, correspond à la vérité logique (= validité) de la disjonction. S'il y a des S (ce qui est présupposé tout le long), alors un exemplaire particulier de ces S est ou bien P ou bien il n'est pas P. S'il est P, alors il n'est pas vrai qu'aucun S ne soit P ; s'il n'est pas P, alors il n'est pas vrai que tous les S soient P. Alors au moins une des deux possibilités « non omnis non » ou « non omnis » est vraie.

La syllogistique ne distingue les phrases catégorielles que par leur qualité (affirmative ou négative) et par leur quantité (générale ou particulière). Néanmoins, elle est capable de formaliser un bon nombre d'inférences intuitivement valides.

8.2 Les formes valides du raisonnement syllogistique

La syllogistique distingue les inférences directes des inférences indirectes. Les inférences directes n'ont qu'une seule prémisse. trois d'entre elles sont des conversion, qui changent l'ordre du terme sujet et

2. A l'aide des négations internes et externes, nous pouvons définir chaque coin du carré en termes d'un seul : au lieu de « omnis », « omnis non », « non omnis » et « non omnis non » (dans le sens des aiguilles d'une montre), nous aurions pu mettre « nullus non »/ « nullus »/ « non nullus non »/ « non nullus » ou « non aliquis non »/ « non aliquis »/ « aliquis non »/ « aliquis ».

3. Nous reviendrons à cette présupposition du raisonnement syllogistique à la p. 156.

du terme prédicat :[4]

« Conversio simplex » $\dfrac{\mathbf{AiB}}{\mathbf{BiA}} \qquad \dfrac{\mathbf{AeB}}{\mathbf{BeA}}$

« Conversio per accidens » $\dfrac{\mathbf{AaB}}{\mathbf{BiA}} \qquad \dfrac{\mathbf{AeB}}{\mathbf{BoA}}$

« Conversio per contrapositionem » $\dfrac{\mathbf{AaB}}{(\overline{\mathbf{B}})\mathbf{a}(\overline{\mathbf{A}})} \qquad \dfrac{\mathbf{AoB}}{(\overline{\mathbf{B}})\mathbf{o}(\overline{\mathbf{A}})}$

Mis à part ces trois conversion, nous pouvons affaiblir les deux propositions catégorielles universelles aux particulières et nous avons un analogue de la conversion :

« Réduction de quantité » $\dfrac{\mathbf{AaB}}{\mathbf{AiB}} \qquad \dfrac{\mathbf{AeB}}{\mathbf{AoB}}$

« obversio » $\dfrac{\mathbf{AaB}}{\mathbf{Ae}(\overline{\mathbf{B}})} \qquad \dfrac{\mathbf{AiB}}{\mathbf{Ao}(\overline{\mathbf{B}})} \qquad \dfrac{\mathbf{AeB}}{\mathbf{Aa}(\overline{\mathbf{B}})} \qquad \dfrac{\mathbf{AoB}}{\mathbf{Ai}(\overline{\mathbf{B}})}$

L'expression « $(\overline{A})$ » dénote la 'négation' du terme général « A », c'est-à-dire l'expression qui a comme extension le complément de l'extension de « A » : tout ce qui n'est pas A est $(\overline{A})$ et tout ce qui n'est pas $(\overline{A})$ est A.[5] « $(\overline{\text{pingouin}})$ », par exemple, a comme extension tous les non-pingouins, c'est-à-dire toutes les choses qui ne sont pas des pingouins (le complément de l'ensemble de tous les pingouins).

Les inférences indirectes consistent en deux prémisses – une prémisse majeure (« praemissa maior ») et une prémisse mineure (« praemissa minor ») – et une conclusion qui contiennent au total trois termes généraux : le sujet « S » de la conclusion (« terminus minor »), le prédicat « P » de la conclusion (« terminus maior ») et le concept appelé « moyen » « M ». Elles se distinguent en quatre schémas qui s'appellent « figures » :

	première figure	deuxième figure	troisième figure	quatrième figure
praemissa maior	$M\ P$	$P\ M$	$M\ P$	$P\ M$
praemissa minor	$S\ M$	$S\ M$	$M\ S$	$M\ S$
conclusio	$S\ P$	$S\ P$	$S\ P$	$S\ P$

Puisqu'on a quatre possibilités pour relier « S » à « P » (et « M » à « S » etc.) – à savoir **a**, **i**, **o** et **e** –, on obtient pour chaque figure 64 (= 4 · 4 · 4) schémas d'inférence, appelés « modes ». De ces 256 modes (64 par figure), tous ne sont pas valides ; il n'y a que 24 modes qui sont valides, 19 dits « forts » et 5 dits « faibles » (un mode est appelé « faible » si la conclusion est plus faible qu'elle ne devrait l'être par rapport aux prémisses). Pour la première figure, on a 4 modes forts valides :

a-a-a « Barbara »	**e-a-e** « Celarent »
Tous les hommes sont mortels. Tous les philosophes sont des hommes. Tous les philosophes sont mortels.	Aucune martre n'est un ours. Toutes les outres sont des martres. Aucune outre n'est un ours.

4. Nous pouvons nous rappeler des prémisses qui peuvent être ‹ converti › à l'aide d'un ‹ poème › de Petrus Hispanus : « Simpliciter f**e**c**i** convertitur, **e**v**a** per acci, **a**st**o** per contra, sic fit conversio tota. » (Hispanus (1947: I.21), cité d'après Prior (1955: 109)).

5. Je mets « négation » entre guillemets simples parce que les noms généraux comme « pingouin » n'admettent pas, à strictement parler, de négation (puisqu'ils ne sont pas prédicatives).

a-i-i « Darii »	**e-i-o** « Ferio »
Tous les ours polaires sont blancs. Quelques ours sont des ours polaires. Quelques ours sont blancs.	Aucun griffon n'est un basset. Quelques chiens sont des griffons. Quelques chiens ne sont pas des bassets.

Les noms comme « Barbara » (pour l'inférence qui correspond au schéma **a-a-a**) ont été inventés au Moyen Âge. Pour la deuxième figure, on a également quatre modes forts qui sont valides :

e-a-e « Cesare »	**a-e-e** « Camestres »
Aucun mammifère n'est un oiseau. Tous les vautours sont des oiseaux. Aucun vautour n'est un mammifère.	Tous les vautours sont des oiseaux. Aucun mammifère n'est un oiseau. Aucun mammifère n'est un vautour.

e-i-o « Festino »	**a-o-o** « Baroco »
Aucun vautour n'est un basset. Quelques chiens sont des bassets. Quelques chiens ne sont pas des vautours.	Tous les bassets sont des chiens. Quelques chats ne sont pas des chiens. Quelques chats ne sont pas des bassets.

Il y a six modes forts valides pour la troisième figure :

a-a-i « Darapti »	**e-a-o** « Felapton »
Tous les bassets sont mortels. Tous les bassets sont des chiens. Quelques chiens sont mortels.	Aucune martre n'est un ours. Toutes les martres sont des chiens. Quelques chiens ne sont pas des ours.

i-a-i « Disamis »	**a-i-i** « Datisi »
Quelques ours polaires sont blancs. Tous les ours polaires sont des ours. Quelques ours sont blancs.	Tous les chiens sont mortels. Quelques chiens sont des griffons. Quelques griffons sont mortels.

o-a-o « Bocardo »	**e-i-o** « Ferison »
Quelques chiens ne sont pas des griffons. Tous les chiens sont des animaux. Quelques animaux ne sont pas des griffons.	Aucun chien n'est un oiseau. Quelques chiens sont des griffons. Quelques griffons ne sont pas des oiseaux.

Il y a cinq modes forts valides pour la quatrième figure :

a-a-i « Bamalip »	**a-e-e** « Calemes »
Tous les bassets sont des chiens. Tous les chiens sont des mammifères. Quelques mammifères sont des bassets.	Toutes les martres sont des chiens. Aucun chien est un poisson. Aucun poisson est une martre.

i-a-i « Dimatis »	e-a-o « Fesapo »
Quelques chiens sont des bassets. Tous les bassets sont des mammifères. Quelques mammifères sont des chiens.	Aucun basset n'est un vautour. Tous les vautours sont des oiseaux. Quelques oiseaux ne sont pas des bassets.

e-i-o « Fresison »
Aucun chien n'est un oiseau. Quelques oiseaux sont des vautours. Quelques vautours ne sont pas des chiens.

Nous voyons maintenant que l'inférence (1) était du type **a-a-a** (« Barbara »), (2) du type **e-i-o** (« Ferio ») et (3) du type **e-a-e** (« Cesare »).

Les noms des modes forts valides étaient combinés en des ‹ poèmes› mnémotechniques (cf. Hispanus 1947: IV.17) :

> Barbara, Celarent primae, Darii Ferioque.
> Cesare, Camestres, Festino, Baroco secundae.
> Tertia grande sonans recitat : Darapti, Felapton,
> Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison. Quartae sunt :
> Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison.

Comme la *réduction de quantité* est une inférence directe valide qui nous mène des jugements généraux aux jugements particuliers correspondants, on a pour chaque mode fort valide qui a une conclusion générale un mode faible correspondant : pour la première figure, ceci nous donne « Barbari » et « Celaront », pour la deuxième « Cesaro » et « Camestros » et pour la quatrième « Calemos ».

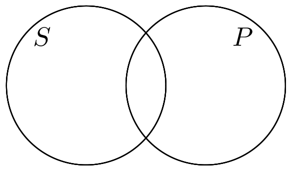
8.3 Les diagrammes de Venn

Bien que système de syllogistique peut être axiomatisé,[6] nous ne disposons d'aucune méthode générale pour déterminer si une inférence donnée est valide ou non. Tout ce que nous pouvons faire pour déterminer la validité d'un syllogisme donné c'est d'essayer de le réduire à une des 24 formes valides. Cependant nous avons déjà remarqué (à la p. 144) que les quatre formes de phrases catégorielles correspondent à des relations entre les extensions des termes. Si nous utilisons « $\mathsf{ext}(S)$ » pour désigner l'extension de « S », nous pouvons représenter ces quatre relations ainsi :

SaP	$\Longleftrightarrow$	$\mathsf{ext}(S) \subset \mathsf{ext}(P)$	(inclusion : « S est un sous-ensemble de P »)
SiP	$\Longleftrightarrow$	$\mathsf{ext}(S) \cap \mathsf{ext}(P) \neq \emptyset$	(intersection : « il y a des SP »)
SeP	$\Longleftrightarrow$	$\mathsf{ext}(S) \cap \mathsf{ext}(P) = \emptyset$	(non-intersection : « il n'y a pas de SP »)
SoP	$\Longleftrightarrow$	$\mathsf{ext}(S) \not\subset \mathsf{ext}(P)$	(non-inclusion : « il y a des S qui ne sont pas des P »)

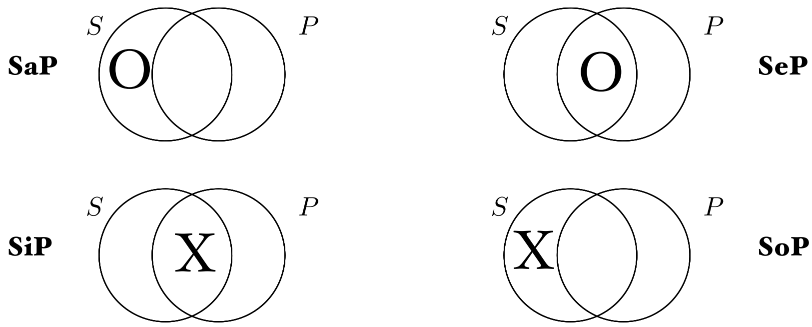
6. Lukasiewicz (cf. 1934b: 373 et 1957: 46, 88) donne une axiomatisation qui consiste d'une axiomatisation de la logique propositionnelle (cf. p. 81) et des quatre axiomes suivantes :
1. Tout A est un A.
2. Quelques A sont des A.
3. Si tout A est un B et tout B est un C, alors tout A est un C. (« Barbara »)
4. Si tout A est un B et quelques A sont des C, alors quelques C sont des B. (« Datisi »)

John Venn (1880) a développé une méthode de vérifier la validité d'un syllogisme ‹ directement› en termes des extensions de ces termes. Nous pouvons symboliser les quatre types de phrases catégorielles par des diagrammes appelés « diagrammes de Venn » :



Ce diagramme nous montre une répartition de toutes les choses en quatre classes : les choses qui sont S et P se trouvent dans l'intersection des deux cercles, les choses qui sont S mais qui ne sont pas P se trouvent dans la partie du cercle de gauche qui a une forme de lune, choses qui sont P mais qui ne sont pas S se trouvent dans la partie droite du cercle droit et enfin les choses qui ne sont ni S ni P se trouvent en dehors des deux cercles. Un diagramme de Venn à deux cercles représente ainsi une catégorisation de tout ce qui existe en quatre catégories : les SP, les $\neg S$ et P, les S et $\neg P$ et les $\neg S \neg P$.

Dans ce diagramme, les quatre formes catégorielles sont représentées comme suit :

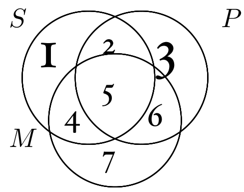


Le grand « O » signifie que la partie dans laquelle il se trouve est vide : il n'y a rien qui n'est S mais qui n'est pas P dans le cas SaP ; il n'y a rien qui n'est S et à la fois P dans le cas **SeP**. Le grand « X » signifie que la partie dans laquelle il se trouve n'est pas vide : il y a des choses qui sont S et P dans le cas **SiP** ; il y a des choses qui sont S mais pas P dans le cas **SoP**.

Que **SaP** et **SoP**, et également **SiP** et **SeP**, forment des paires contradictoires se montre par le fait que le diagramme du premier a un « X » où celui du deuxième a un « O » et vice versa. La contrariété de **SaP** et **SeP** vient du fait que le cercle S devient vide si on combine les deux « O » dans un diagramme ; et la sub-contrariété de **SiP** et **SoP** réside dans le fait qu'il n'y a aucun S si les deux sont fausses. Dans la syllogistique classique, il est toujours présupposé que les extensions des termes généraux considérés ne sont pas vides.

La validité des inférences directes (toujours sous la supposition que le terme sujet et le terme prédicat soient vraies d'au moins une chose et donc que les cercles entiers ne sont jamais entièrement vides) peut également être vérifiée à l'aide de diagrammes de Venn. La *conversio simplex*, par exemple, correspond au fait que les diagrammes pour **SiP** et **SeP** sont symétriques (on peut changer les dénominations « S » et « P » sans changer ce que nous dit le diagramme), la *réduction de quantité* au fait qu'aucun cercle ne devient jamais vide, etc.

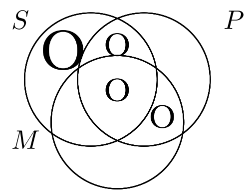
Pour tester la validité des syllogismes indirectes, nous pouvons encore utiliser les diagrammes de Venn, cette fois avec trois cercles :



Nous mettons les « X » et « O » pour les prémisses et examinons le diagramme pour voir s'il rend vraie la conclusion. Pour **e-a-e**, par exemple, nous obtenons par cette méthode :

Aucun P n'est M.
Tous les S sont M.

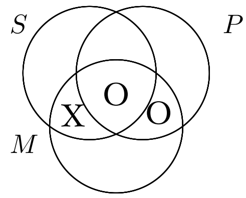
Aucun S n'est P.



Pour la première prémisse, nous avons mis « O » dans les cases 5 et 6, pour la deuxième prémisse « O » dans les cases 1 et 2. La conclusion est vraie s'il y a des «O» dans les cases 2 et 5, ce qui est le cas dans notre diagramme. La conclusion « Aucun S n'est P » s'ensuit, puisque l'intersection entre les extensions de « S » et de « P » est vide. Par la même méthode, nous pouvons vérifier les autres inférences, par exemple **e-i-o** :

Aucun M n'est P.
Quelques S sont M.

Quelques S ne sont pas P.



Du fait que nous avons fait un « X » en dehors de l'extension de « P », mais à l'intérieur de l'extension de « S », nous voyons que la conclusion s'ensuit.

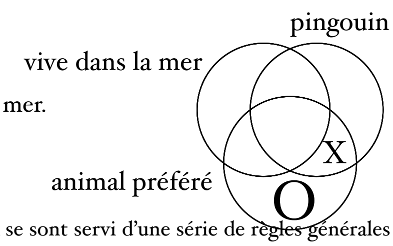
8.4 Les limites de la syllogistique

Nous avons déjà remarqué quelques limites de la syllogistique (cf. p. 148) : elle ne nous procure aucune méthode mécanique pour déterminer la validité ou non-validité d'une inférence donnée sinon celle de vérifier si ou non l'inférence correspond à l'un des 24 modes valides [7] et elle nous oblige à trouver des re-formulations alambiquées pour beaucoup de phrases du langage naturel.

Bien que les diagrammes de Venn nous donnent une méthode simple et intuitive pour vérifier la validité des syllogismes, ils nous montrent également d'autres limites de la syllogistique. Considérons l'inférence suivante :

Tous mes animaux préférés sont soit des pingouins, soit vivent dans la mer.
Mes animaux préférés ne vivent pas tous dans la mer.

Quelques pingouins ne vivent pas dans la mer.

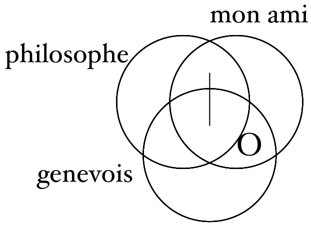


7. C'est en raison de l'absence d'une telle méthode que les logiciens médiévaux se sont servi d'une série de règles générales telles que :
   - Tout syllogisme valide a une prémisse universelle.
   - Tout syllogisme valide avec une prémisse particulière a une conclusion particulière.
   - Tout syllogisme valide avec une prémisse négative a une conclusion négative.

Ces conditions sont nécessaires, mais pas suffisantes : elle nous aident à vérifier de tester un ‹ soupçon › que tel ou tel argument est un syllogisme valide, mais ne nous permettent pas d'en trouver.

Le diagramme montre que l'inférence est valide, bien qu'il n'y ait pas de syllogisme correspondant. C'est pourquoi la méthode des diagrammes de Venn dépasse les limites de la syllogistique : elle nous permet d'établir la validité des inférences qui sont considérées non valides par la syllogistique. Une petite modification de la méthode des diagrammes (modification apportée par Lewis (1918)) nous permet d'élargir cette classe d'inférences. Nous utiliserons une ligne pour signifier qu'au moins l'une d'un certain nombre de parties d'un diagramme de Venn n'est pas vide – une ligne reliant deux parties correspond donc à un jugement existentiel et disjonctif.

$$\frac{\text{Tous mes amis genevois sont des philosophes.}\quad \text{Quelques-uns de mes amis sont soit des philosophes, soit des genevois.}}{\text{Quelques-uns de mes amis sont des philosophes.}}$$



La ligne horizontale reliant les extensions de « philosophe et genevois et ami » et de « philosophe et non-genevois et ami » veut dire qu'une de ces deux régions n'est pas vide – il y a au moins une chose qui est ou bien ami-philosophe-genevois ou bien ami-philosophe-non-genevois. Parce que la ligne se trouve dans l'intersection des extensions de « philosophe » et de « ami », la conclusion s'ensuit.

Un désavantage commun à la syllogistique et aux diagrammes de Venn est que les deux méthodes sont limitées à un nombre très restreint de prédicats : la syllogistique ne se concerne que de trois (abrégés par « S », « M » et « P ») et il est impossible de représenter plus de trois cercles qui se recoupent tous les uns les autres (essayez). La syllogistique, reconnaissant que quatre types de phrases, nous oblige souvent de donner une forme ‹ logique› peut intuitive à des phrases ordinaires : « Nous avons visité le musée, mais il était fermé », par exemple, devient « tous les instants pendant lesquels nous avons visité le musée sont des instants pendant lesquels il était fermé ».

Un autre désavantage est le suivant : il est impossible en syllogistique ou par des diagrammes de Venn de représenter des arguments qui mélangent des quantificateurs et des connecteurs propositionnels comme le fait le suivant :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Si tous mes amis sur MSN sont en philo, quelques amis ne sont pas sur MSN.}\\ \text{Soit tous mes amis sont sur MSN, soit tous mes amis sont en philo.}\end{array}}{\text{Si tous mes amis en philo sont sur MSN, alors quelques amis qui ne sont pas en philo y sont aussi.}}$$

Cette inférence a la forme suivante (« $F(\ldots)$ » abrège « ... est un ami », « $G(\ldots)$ » abrège « ... est en philosophie » et « $H(\ldots)$ » abrège « ... est inscrit sur MSN ») :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les } F \text{ qui sont } H \text{ sont } G \ \rightarrow\ \text{Quelques } F \text{ ne sont pas } H.\\ \text{Tous les } F \text{ sont } H \ \vee\ \text{Tous les } F \text{ sont } G.\end{array}}{\text{Tous les } F \text{ qui sont } G \text{ sont } H \ \rightarrow\ \text{Quelques } F \text{ qui ne sont pas } G \text{ sont } H.}$$

Nous pouvons nous convaincre de sa validité : supposons que tous les F qui sont G sont aussi H, mais qu'aucun F qui n'est pas G soit H (fausseté de la conclusion). Nous savons donc que tous les F qui sont H sont aussi G, ce qui établit l'antécédent de la première prémisse. Son conséquent, par contre, doit être faux. Par la deuxième prémisse, nous savons que soit tous les F sont H, soit tous les F sont G. Dans le premier cas, quelques F sont H est le conséquent de la première prémisse est donc faux. Dans le deuxième cas, tous les F sont G, et donc aussi H, par l'antécédent de la conclusion. Dans la logique des prédicats, nous formalisons cette inférence comme suit :

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x((Fx \wedge Hx) \rightarrow Gx) \quad \rightarrow \ \exists x(Fx \wedge \neg Hx) \\ \forall x(Fx \rightarrow Hx) \ \vee \ \forall x(Fx \rightarrow Gx)\end{array}}{\forall x((Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx) \ \rightarrow \ \exists x(Fx \wedge \neg Gx \wedge Hx)}$$

En utilisant les équivalences « $\forall x(\phi(x)) \Leftrightarrow \neg\exists x(\neg\phi(x))$ » et « $\ulcorner\neg(\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \Leftrightarrow \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ », nous pouvons transformer les formules en :

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x((Fx \wedge Hx) \rightarrow Gx) \quad \rightarrow \ \neg\forall x(Fx \rightarrow Hx) \\ \forall x(Fx \rightarrow Hx) \ \vee \ \forall x(Fx \rightarrow Gx)\end{array}}{\forall x((Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx) \ \rightarrow \ \neg\forall x((Fx \wedge Hx) \rightarrow Gx)}$$

A présent, nous n'avons encore aucun moyen de combiner les méthodes de la logique propositionnelle avec notre analyse des phrases quantifiées (contenant des expressions comme « tous », « quelque » ou « aucun »).

Le diagnostic de ces défauts communs à la syllogistique et à la méthode des diagrammes de Venn est le suivant :

1. Elles ne reconnaissent pas la distinction cruciale entre les prédicats et les noms et ne nous permettent pas de formaliser des inférences telles que « Tous les philosophes sont heureux ; Sam est un philosophe ; donc Sam est heureux ».
2. Elles ne s'appliquent qu'à des prédicats appelés « unaires » (qui résultent d'une phrase par le remplacement d'un seul nom par des points) et non pas à des prédicats à plusieurs places, comme nous utilisons dans l'inférence « Marie est mon amie ; donc j'ai une amie ».

L'avantage principale de la logique moderne des prédicats est qu'elle nous permet de surpasser ces deux restrictions artificielles.

8.5 Les phrases ouvertes et leur satisfaction

Pour rendre valide des inférences comme,

(5)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les hommes sont mortels.} \\ \text{Socrate est un homme.}\end{array}}{\text{Socrate est mortel.}}$$

la syllogistique nous force à reconnaître des concepts sujet et prédicat tel que « chose identique à Socrate » (la prémisse mineure est alors du type SaP).[8] Nous pouvons nous demander si de telles concepts correspondent réellement à des propriétés d'objets.[9] Formalisant « Socrate est un homme » comme « toutes les choses socratisantes sont des hommes », nous n'introduisons non seulement le prédicat bizarre « socratiser » (être le maître de Platon, être le héros des dialogues platoniciens, le premier

8. Il y a d'autres options : Hispanus (1947: 12.27) dit que le 'syllogisme' « tout homme est tout homme ; Socrate est un homme ; donc Socrate est tout homme » est un syllogisme du type « Darii ».

9. Dans son fameux article « On What There Is » (1948, traduction française : 2004), Willard van Orman Quine s'est servi de prédicats similaires pour résoudre le problème posé par l'intelligibilité d'assertions contenant des noms propres vides comme « Pégase ». Ce problème, qu'il appelle « la barbe de Platon » est que quelqu'un qui affirme que Pégase n'existe pas semble se contredire, puisque l'existence d'un référent pour « Pégase » semble être requis pour la vérité de la phrase « Pégase n'existe pas » (comme pour toute autre phrase contenant le nom « Pégase »). La solution de Quine est de remplacer le nom par un prédicat et de formuler la phrase comme « L'unique chose qui pégase n'existe pas » ($\forall x(x \text{ pégase} \rightarrow \neg\exists y(x = y))$) ou encore « il n'y a pas de chose qui pégase » ($\neg\exists x(x \text{ pégase})$).

philosophes à boire la ciguë etc.), mais nous nous engageons à l'existence d'au moins une chose socratisante. Il semble bien possible, cependant, que Socrate aurait pu exister sans avoir les attributs communément attribué à lui. Dans ce cas-ci, « Socrate est un homme » serait toujours vraie, mais « toutes les choses socratisantes sont des hommes » devenait faux (puisque la syllogistique présuppose que ses termes sont vrais d'au moins une chose).

Il semble qu'une distinction nette doit être faite entre des expressions comme « Socrate » (que nous appellerons « termes singuliers ») qui ont comme fonction sémantique de *se référer* à exactement une chose au monde, et des expressions comme « ...est un homme » (que nous appellerons « prédicats ») qui sont *vraies de* ou sont *satisfaites par* une ou plusieurs choses.[10] C'était l'élaboration d'un concept général de prédicat qui permettait à Gottlob Frege de surpasser les limites expressives de la logique traditionnelle.[11]

Le concept fondamental qui caractérise la logique moderne a été introduit par Gottlob Frege dans son *Idéographie* : c'est celui d'une *fonction*.[12] Frege était insatisfait avec l'analyse de la grammaire classique pour plusieurs raison, dont par exemple son incapacité de rendre compte de la vacuité de la transformation de « Marc aime Marie » à « Marie est aimée par Marc » – même si ces deux phrases affirment la même chose, elles le font par deux prédications différentes.[13] Frege (1892a) a substitué, aux notions traditionnelles de « prédicat » et de « sujet », des notions plus larges : celles de « fonction » et d'« argument » (traduction française : Frege (1971b)). Considérons les expressions suivantes :

(F1) $15 \cdot 1^2 + 1$
(F2) $15 \cdot 2^2 + 2$
(F3) $15 \cdot 3^2 + 3$
(F4) $15 \cdot 4^2 + 4$
(F5) $15 \cdot 5^2 + 5$

Dans toutes ces expressions, nous reconnaissons facilement (l'expression de) la même fonction, que nous pouvons représenter comme suit :

$\mathbf{F}'$ $15 \cdot x^2 + x$

$\mathbf{F}''$ $15 \cdot (\ldots)^2 + (\ldots)$

L'argument (chacun des nombres 1, 2, 3, 4 et 5 dans les exemples (**F1**) à (**F5**)) n'appartient pas, à proprement parler, à la représentation de la fonction : il est représenté par trois points. Les trois points représentent une « lacune » et marquent l'endroit où la fonction a besoin d'un argument pour former un tout complet. « Former un tout complet », dans le cas de (**F1**) à (**F5**), veut dire « représenter un nombre » : « $15 \cdot x^2 + x$ » représente la fonction, mais pas de nombre ; « $15 \cdot 3^2 + 3$ », par contre, représente un nombre précis (à savoir 138) – c'est le résultat de l'*application* de la fonction à l'argument 3. Dans d'autres utilisations des fonctions, « former un tout complet » peut vouloir dire autre chose, par exemple « faire une affirmation qui est soit vraie soit fausse » : « $15 = x^2 + x$ » n'est ni vraie ni fausse, mais « $15 = 3^2 + 3$ » est fausse.

L'idée principale de Frege était de concevoir des prédicats comme un certain type de fonctions, fonc-

10. Bien qu'il avait plusieurs tentatives pendant le Moyen Âge de développer une théorie des phrases singulières et en particulier de la référence des termes (*suppositio*, opposé à la *significatio*), John Stuart Mill (1895: i.ii.5) était le premier à faire une distinction nette entre des termes « connotatives » (descriptifs, comme « homme ») et dénotatives (non-descriptifs, comme « Socrate »). Nous reviendrons sur la théorie des termes singuliers dans le ch. 9.4.

11. Il a été remarqué par Peirce (1932: 328, 1933: 459) que les noms communs de la syllogistique deviennent superflus dès que nous disposons de prédicats.

12. Nous avons introduit la notion mathématique d'une fonction en n. 24 à la p. 46. Nous reviendrons sur ce sujet à la p. 174 et sur les propriétés mathématiques des fonctions en tant qu'ensembles dans le ch. 15.3.

13. Nous rencontrerons, le long des prochaines leçons, d'autres raisons de ne pas nous laisser guider par la forme grammaticale superficielle des énoncés quand nous essayons de les formaliser dans le langage de la logique des prédicats.

tions qui prennent un nom pour en faire une phrase. Un prédicat sera alors représenté par une expression comme « $15 = x^2 + x$ » (« être tel que le résultat de l'addition du carré du nombre avec lui-même donne 15 »).

Nous avons remarqué que nous obtenons des prédicats en effaçant des noms d'une phrase et que nous pouvons effacer plusieurs noms d'une même phrase. Dans ces cas, il faut tenir compte de la diversité des noms effacés. Si nous obtenons « ... aime $\cdots$ » de « Julie aime Marc » et nous nous demandons si ce prédicat est vrai de Julie et Marc, l'ordre des noms de ces deux personnes est crucial, puisqu'il est tout à fait possible que Julie aime Marc sans que Marc aime Julie. C'est pourquoi il faut distinguer les positions des arguments, par exemple, en ajoutant des indices aux trois points : « $..._1$ aime $..._2$ » (ce qui est différent de « $..._2$ aime $..._1$ »), « $..._1$ est entre $..._2$ et $..._3$ » (ce qui est différent de « $..._1$ est entre $..._3$ et $..._2$ », « $..._2$ est entre $..._1$ et $..._3$ », « $..._2$ est entre $..._3$ et $..._1$ », « $..._3$ est entre $..._1$ et $..._2$ » et de « $..._3$ est entre $..._2$ et $..._1$ »). Nous pouvons ainsi distinguer les occurrences de lacunes *coordonnées* de celles qui ne le sont pas : dans « $15 \cdot (\ldots_1)^2 + (\ldots_1)$ » les deux lacunes sont coordonnées (et doivent, par conséquent, être remplies par le même nombre), bien que dans « $15 \cdot (\ldots_1)^2 + (\ldots_2)$ » elles ne le sont pas : dans ce deuxième cas, elles peuvent (mais ne doivent pas) être remplies par de différents nombres. « $15 \cdot 3^2 + 3$ » est donc le résultat des application des deux fonctions, mais « $15 \cdot 3^2 + 4$ » n'est une application que de la deuxième.

Une manière plus simple et plus efficace d'obtenir le même effet qu'avec des trois points est de remplacer les trois points par ce qu'on appelle des *« variables »*, représentées par des lettres « x », « y », « z », « w », etc. Nous adoptons la convention que « x » représente toujours la première insertion possible dans la phrase, « y » la deuxième etc. Nous pouvons donc dire que le prédicat (il ne s'agit pas d'une phrase !) « x aime y » est vrai de Julie et Marc (dans cet ordre), mais peut être faux de Marc et Julie. En d'autres termes, le prédicat est vrai de la paire ⟨ Julie, Marc ⟩, mais ne l'est peut-être pas de la paire ⟨ Marc, Julie ⟩. Une paire se distingue d'un ensemble de deux membres par le fait qu'elle est ordonnée, c'est-à-dire qu'on peut parler de son premier et de son second membre.[14]

Comme une phrase (en logique en tout cas) peut être d'une longueur arbitraire (bien que finie), il n'y a pas de limites au nombre de noms qu'elle peut contenir.[15] Nous obtenons ainsi des prédicats d'une *adicité* (ou valence) arbitraire, l'adicité d'un prédicat étant le nombre de noms qu'il lui faut pour former une phrase. C'est pourquoi nous ne pouvons pas nous contenter des paires, mais devons parler des séquences arbitraires.[16] La relation que nous exprimons par « ... est vrai de... », cependant, n'est pas seulement une relation qui subsiste entre des prédicats et des choses, mais entre des prédicats et des séquences de choses.

Au lieu de dire qu'un prédicat résulte d'une phrase en effaçant un ou plusieurs noms, nous aurions aussi pu dire qu'un nom[17] est ce qui peut se combiner avec un prédicat pour former une phrase. C'est dans cette perspective-là que nous appelons un prédicat (dans le sens logique de ce mot) une *« phrase*

14. Cela ne veut pas dire que les paires ne sont pas des ensembles. Il existent différentes manières de définir des paires comme des ensembles d'un type particulier. On peut, par exemple, dire avec Kuratowski que la paire $\langle a, b\rangle$ est l'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ ou avec Wiener que c'est l'ensemble $\{\{a, \emptyset\}, \{b\}\}$. La différence importante entre paires et ensembles réside dans les conditions d'identité : deux ensembles sont identiques s'ils contiennent et seulement s'ils contiennent les mêmes membres ; deux paires (ou plus généralement deux séquences) sont identiques si elles contiennent et seulement si elles contiennent les mêmes membres *dans le même ordre*. « $\{a, b\}$ » et « $\{b, a\}$ » désignent le même ensemble, mais $\langle a, b\rangle$ et $\langle b, a\rangle$ sont deux paires différentes ; $\{a, a\}$ est identique à $\{a\}$, mais $\langle a, a\rangle$ est différent de $\langle a\rangle$ (ce qui se vérifie facilement avec les deux définitions données).

15. « x est un philosophe » et « x aime x » sont des prédicats unaires (d'une adicité 1), « x est le frère de y » et « x aime y » des prédicats binaires (d'une adicité 2), « x est entre y et z » un prédicats ternaire (d'une adicité 3) et ainsi de suite.

16. La notion de « séquence » est une généralisation de celle de « paire ». La différence entre séquences et ensembles est que les premières viennent avec un ordre et non pas les secondes. Nous pouvons définir une séquence à trois place, par exemple, comme une paire d'un individu et d'une paire : $\langle x, y, z\rangle := \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$.

17. Plus exactement : un terme singulier. Un terme singulier est une expression qui désigne au plus un objet. Nous reviendrons sur cette notion dans le ch. 9.4.

ouverte ». « ... est un philosophe », par exemple, est une phrase ouverte dans le sens que cette expression contient une lacune (représenté par les trois points) et que cette lacune doit être remplie pour que l'expression devienne une phrase (qui sera vraie si le nom inséré désigne un philosophe et fausse autrement).[18] Une phrase ouverte, malgré son nom, n'est pas une phrase ; elle est ni vraie ni fausse – elle est vraie ou fausse *de* quelque choses. Quand elle est vraie d'un certain objets ou de certains objets, nous disons que ces objets *satisfont* la phrase. Comme nous allons voir dans le ch. 9.3, cette notion de « *satisfaction* » est la notion clef de la sémantique de la logique des prédicats.

8.6 Les objets et leur existence

Une variable, nous l'avons dit, représente une lacune dans une phrase ouverte. Dans la logique des prédicats, il y a deux manières d'obtenir une phrase complète (ou : une phrase *tout court*) d'une phrase ouverte qui contient une seule variable « x » :

1. par le remplacement de « x » par une expression comme « Socrate » ;
2. par un quantificateur qui lie toutes les occurrences de « x » dans la phrase en question.

Par la première méthode, nous obtenons « Socrate est un philosophe » à partir de la phrase ouverte « x est un philosophe » ; par la deuxième méthode, nous obtenons « quelqu'un est un philosophe » et « tout le monde est un philosophe » de la même phrase. Représentant « Socrate » par « a » et « x est un philosophe » par « $F(x)$ », nous pouvons formaliser ces trois possibilités comme suit :

– « Fa » (« Socrate est un philosophe ») ;
– « $\exists x(Fx)$ » (« Quelqu'un est un philosophe ») ;
– « $\forall x(Fx)$ » (« Tout le monde est un philosophe »).

Dans « $\exists x(Fx)$ » et « $\forall x(Fx)$ », la deuxième occurrence de la variable « x » est liée par un quantificateur (existentiel dans la première, universel dans la deuxième phrase). Dans ce cas, nous parlons d'une « variable sous une assignation de valeurs ». Une variable sous une assignation de valeurs ne représente plus une lacune, mais représente un objet – quoique arbitraire.[19]

Même si une variable sous une assignation de valeurs peut être considérée comme terme singulier (expression désignant au plus une chose), il faut quand même distinguer les quantificateurs des noms propres et des descriptions définies. L'absence de distinction entre noms et quantificateurs donne facilement lieu à des raisonnements fallacieux :

(a) Tom est venu. Donc quelqu'un est venu.

(b) Personne n'est venu. Donc quelqu'un est venu.

Le premier argument est valide, le second non, même si, d'un point de vue syllogistique, ils ont la même forme logique.[20]

---

18. Dans le langage ordinaire, il n'est pas le cas en général que la phrase est fausse si le nom inséré désigne quelque chose d'autre qu'un philosophe : il est au moins contestable que « le nombre 2 est un philosophe », « Pégase est un philosophe » soient fausses ou que leurs négations soient vraies. La possibilité que la phrase devienne du non-sens existe également. Suivant Frege, nous supposerons par la suite que ce n'est pas le cas pour notre langage formel, c'est-à-dire que tout prédicat est *entièrement défini* – que pour tout objet dont nous voulons parler, il est ou bien vrai de cet objet ou bien faux de cet objet. Nous traiterons, en d'autres termes, le non-sens comme fausseté. Nous reviendrons sur ce phénomène à la p. 176.

19. Nous reviendrons sur cette notion problématique d' « individu arbitraire » au ch. 12.1.

20. Si vous n'êtes pas convaincus par cet exemple, en raison de la négation « n' » qui suit « personne » dans la deuxième phrase, considérez l'exemple suivant :

(b') Quelqu'un est venu, et quelqu'un s'est excusé de ne pas venir. Donc quelqu'un est venu et s'est excusé de ne pas venir.

Déjà les scolastiques ont remarqué que nous ne pouvons pas inférer de « Platon et Socrate disent quelque chose de vrai » qu'il y ait quelque chose de vrai dit par Platon et par Socrate (Hispanus (cf. 1947: 12.35–36), cité d'après Prior (1955: 152)).

Le problème avec (b) est lié à un autre défaut de la syllogistique : elle est forcée de traiter « … existe » comme un prédicat ordinaire, une thèse qui soutient souvent des arguments dits ontologiques pour l'existence de Dieu et qui a été critiquée par Kant (1787: 598, 626, 627).[21] Le problème avec les arguments ontologiques pour l'existence de Dieu est qu'ils ne sont valides que si beaucoup d'autres arguments le sont aussi, par exemple l'argument en faveur de l'existence d'une chose qui a toutes les propriétés exprimées par un prédicat en français qui commence avec « e ».

Une autre raison pour ne pas traiter « … existe » de prédicat ordinaire est la validité du schéma d'inférences suivant :

(6) $$\frac{Fa}{\exists x(Fx)}$$

Si a est F, alors il y a au moins une chose qui est F. Nous appelons une telle inférence « généralisation existentielle » (GE).[22] Si nous substituons « … n'existe pas » à « $F\ldots$ », nous arrivons à des instances bizarres de ce schéma d'inférences telle que la suivante :

(7) $$\frac{\text{Pégase n'existe pas.}}{\exists x(x \text{ n'existe pas})}$$

Mais comment lire la conclusion ? « Il y a au moins une chose qui n'existe pas » semble être une contradiction, bien que la prémisse semble vraie. Il semble préférable de ne pas être obligé d'affirmer de telles phrases d'une cohérence douteuse. Cette inférence ne semble donc pas valide : nous ne pouvons pas, du fait que Pégase n'existe pas, inférer qu'il y a des choses qui n'existent pas.[23]

Nous retrouvons le même phénomène chez des phrases du type « tous les F sont G », que nous formalisons en logique des prédicats par « $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ ». Comment formaliser par exemple « Les licornes n'existent pas » ? Essayons

$$\text{Les licornes n'existent pas} \quad \rightsquigarrow \quad \forall x(x \text{ est un licorne} \rightarrow x \text{ n'existe pas})$$

Nous avons déjà remarqué, à la p. 145, qu'une phrase affirmative universelle en syllogistique présuppose que le terme sujet n'est pas vide – c'est-à-dire qu'une phrase du type **SaP** implique une du type **SiP**. Ceci veut dire que si toutes les licornes (S) ont la propriété de non-existence (P), alors quelques licornes ont cette propriété – encore une autre manière de dire qu'il y a des choses qui n'existent pas.

Ce n'est pas le seul problème soulevé par les présuppositions existentielles de la syllogistique. Vu la présupposition de la syllogistique que les termes utilisées ne sont pas vides, nous n'aurions pas seulement

21. Cf. aussi la discussion chez Kneale (1936). Un argument ontologique pour l'existence de Dieu est par exemple le suivant :

P1 Dieu a toutes les perfections.

P2 L'existence est une perfection.

C Donc, Dieu existe.

Voici une formalisation utilisant la logique de deuxième ordre qui quantifie sur les prédicats et dont on discutera dans la section 12.5 (à la p. 238) :

P1 $\forall F$ (F est une perfection $\rightarrow$ Dieu est F)

P2 $\exists F$ (F est une perfection $\wedge \forall x$ ($Fx \leftrightarrow x$ existe))

C′ $\exists F$ (Dieu est F $\wedge \forall x(Fx \leftrightarrow x$ existe))

C Dieu existe.

22. Nous reviendrons sur ces règles dans le calcul de déduction naturelle pour la logique des prédicats (cf. 229 dans le ch. 12).

23. Cf. n. 9. Cette observation a également motivée le développement des logiques dites « libres » qui n'acceptent pas la validité de (GE) et plus généralement ne présupposent pas que les noms utilisés dans leur langages ne soient pas vides (aient un référent). Cf. Lambert (2002) pour en savoir plus.

(8) $$\frac{\text{Les licornes n'existent pas.}}{\forall x(x \text{ est un licorne} \rightarrow x \text{ n'existe pas})}$$

mais également

(9) $$\frac{\text{Les licornes n'existent pas.}}{\forall x(x \text{ est un licorne} \rightarrow x \text{ existe})}$$

De la phrase initiale nous pouvons donc conclure que tous les licornes à la fois existent et n'existent pas – d'où nous pouvons encore conclure qu'il ne peut pas y avoir de licornes, contrairement à la présupposition de la syllogistique. La présupposition de la syllogistique que toutes les termes utilisés ne sont pas vides n'est pas seulement une restriction considérable de son utilité pour formaliser des inférences, [24], mais nous amène dans des contradictions. [25]

La solution à ces problèmes adoptée par la logique des prédicats est double : [26]

- ne pas traiter « … existe » comme prédicat ordinaire ;
- ne pas présupposer que les prédicats utilisées sont vraies d'au moins une chose.

Contrairement à la syllogistique, toutes les formules de la même forme que « $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ » sont alors valides s'il n'y a pas de F, peu importe le « G » en question. Elles sont valides parce qu'il n'est pas possible qu'elles soient fausses : s'il n'y a pas de F, il est impossible d'en trouver un qui ne soit pas G.

Si « … existe » n'est pas un prédicat ordinaire, alors comment comprendre des phrases qui disent qu'une certaine chose existe ou n'existe pas ? Frege concevait « … existe » comme prédicat de deuxième ordre, [27] et cette solution est communément acceptée aujourd'hui. Dire que a existe ou que des F existent revient donc à dire que certaines phrases ouvertes sont vraies d'au moins une chose :

(10)	a existe	$\rightsquigarrow$	$\exists x(x = a)$
(11)	des F existent	$\rightsquigarrow$	$\exists x(Fx)$

La phrase ouverte dans (10) est « … est identique à a », [28] celle dans (11) est « … est F » – (10) est lue « il y a un x tel qu'il est a » ou « a existe », (11) est lu « il y a des F » ou encore « ils existent des F » – dont le nom quantificateur *« existentiel »*.

24. Cf. par ex. : « In order to justify Aristotle's doctrine as a whole it is necessary […] to suppose that he assumed application for *all* the general terms with which he dealt. To a modern logician this seems a rather curious restriction of the scope of logic. » (Kneale et Kneale (1962: 60) ; cf. également Bocheński (1956: 257ff.))

25. Une autre conséquence de cette présupposition est que la syllogistique rend valides des inférences qui ne le sont pas : sous la présupposition que « licorne » ne soit pas vide, nous pouvons par exemple déduire de « tous les chasseurs chassent une licorne » et de « il y a plus de chasseurs que de licornes » qu'il y a au moins une licorne qui est chassée par (au moins) deux chasseurs. Mais clairement cette conclusion ne s'ensuit pas – elle reste fausse même si les prémisses sont vraies.

26. Une ré-interprétation des phrases catégorielles sans implications d'existence a été donnée par Franz Brentano (1874: ??) (livre 2, chapitre 7, §15) qui ré-interprète « **SaP** » comme « rien n'est à la fois un A et n'est pas un B » (« $\neg\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$ »), « **SeP** » comme « rien n'est à la fois un A et un B » (« $\neg\exists x(Ax \wedge Bx)$ »), « **SiP** » comme « quelque chose est à la fois un A et un B » (« $\exists x(Ax \wedge Bx)$ ») et « **SoP** » comme « quelque chose est à la fois un A et n'est pas un B » (« $\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$ ») (Prior 1955: 166). C'est un premier pas dans la bonne direction, même si nous perdons la validité de beaucoup de syllogismes classiques.

27. Un prédicat de deuxième ordre est un prédicat qui s'applique à des prédicats, comme par ex. « x est un prédicat ». Cf. le ch. 9.6 pour le traitement des quantificateurs dans la grammaire catégorique et le ch. 12.5 pour savoir plus sur les prédicats de deuxième ordre.

28. Nous utilisons « $=$ » comme relation d'identité dans le langage objet de la logique de prédicats, et « $=$ » pour la relation d'identité dans le métalangage que nous utilisons pour donner sa sémantique (cf. p. 195).

Pour dire que Pégase n'existe pas ou qu'il n'y a pas de licornes, nous pouvons dire le suivant :

(12)	a n'existe pas	$\rightsquigarrow$	$\neg\exists x(x = a)$
(13)	les F n'existent pas	$\rightsquigarrow$	$\neg\exists x(Fx)$
(14)	il n'y a pas de F	$\rightsquigarrow$	$\neg\exists x(Fx)$

(12) dit qu'il n'y a aucune chose dont la phrase ouverte « $x = a$ » est vraie ; (13) dit qu'il n'y a aucune chose qui ne satisfait « Fx ». Le fait que « les F n'existent pas » et « il n'y a pas de F » reçoivent la même formalisation montre encore une fois que la logique de prédicats ne fait pas les présuppositions existentielles souvent implicites dans le langage naturel : en disant que les F n'existent pas, je ne parle pas *des* F (ce que je ferais avec une autre phrase comme « les F sont des animaux »).

C'est la quantification qui nous sert de faire des affirmations d'existence et de non-existence dans la logique des prédicats : une quantification existentielle est vraie ssi. la phrase ouverte quantifiée est satisfaite par au moins un objet dans le domaine de quantification ; une quantification universelle est vraie ssi. elle est satisfaites par toutes ces objets. Le domaine de quantification peut être varié, ce qui nous permet de surpasser un autre désavantage de la syllogistique. Celle-ci ne nous permet pas de traiter explicitement d'un phénomène très commun du langage ordinaire : dans la plus grande partie des assertions générales, la généralité est implicitement restreinte. Formulé en termes de quantification, on parle d'une restriction implicite du domaine de quantification.[29] Quand je dis, par exemple, que tous parlent anglais, je ne veux pas parler d'une table ; je n'accepte pas le fait que la table ne parle pas anglais comme objection à mon assertion. Quand je dis qu'il ne reste plus de bière froide, je ne parle que des bières de mon appartement, et non pas de toutes les bières du monde. Cette restriction du domaine de quantification est facilement formalisée dans le langage des quantificateurs, mais ne peut pas être capturée formellement par le langage de la syllogistique.

8.7 Les relations et leur quantification

Une phrase ouverte, nous l'avons dit, est une fonction d'objets et de séquences d'objets à des valeurs de vérité. En tant que fonction, elle est essentiellement ‹ incomplète ›, dans le sens qu'elle a besoin d'arguments pour donner une phrase complète qui peut être évaluée comme vraie ou fausse. Nous avons introduit des variables, « x » et « y », pour distinguer les différentes lacunes dans une phrase ouverte, et nous avons dit que les phrases ouvertes ne sont ni vraies ni fausses, mais vraies ou fausses *de* quelques objets ou de séquences d'objets. Soit $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ une telle séquence, et « $\ldots x_1 \ldots x_2 \ldots x_n \ldots$ » une phrase ouverte contenant des occurrences libres de n variables différentes. Dans le cas où nous recevons une phrase vraie en substituant « a_1 » pour « x_1 », « a_2 » pour « x_2 » et ainsi de suite, nous disons que la séquence *satisfait* la phrase ouverte – la fonction nous donne la valeur **v** pour cette séquence d'objets.[30]

L'utilité des variables vient du fait qu'elles peuvent être liées par des quantificateurs. Le quantificateur existentiel, par exemple, lie la variable « x » dans la phrase suivante :

(15) $\exists x$ (j'adore x)

(15) est une phrase complète qui est vraie si et seulement si j'adore quelque chose.

29. Nous reviendrons sur ce concept central au chapitre 9.7.

30. C'est cette notion de satisfaction que nous utiliserons, à la p. 201 (cf. déf. 53) pour définir « ...est vrai sous une assignation de valeurs » dans la sémantique formelle de la logique des prédicats (cf. aussi p. 155).

Un quantificateur ne peut lier que les variables qui se trouvent dans sa portée, c'est-à-dire à l'intérieur de la phrase ouverte qu'il précède. Pour dire que j'adore un philosophe, il faut dire

(16) $\exists x$ (j'adore x $\wedge$ x est un philosophe)

parce que l'expression suivante :

(17) $\exists x$ (j'adore x) $\wedge$ x est un philosophe

est une phrase ouverte qui est vraie d'un objet si et seulement si deux conditions sont satisfaites : que cet objet soit un philosophe et que j'adore quelque chose (autre qu'un philosophe, peut-être).

Dans le cas où plusieurs occurrences de la même variable se trouvent à la portée d'un quantificateur, celui-ci coordonne leur valeurs : quelle que soit l'assignation qui rend vraie la phrase ouverte, c'est une assignation qui assigne le même individu à toutes les occurrences de la même variable. Pour donner un exemple, si le quantificateur existentiel précédant une phrase ouverte me donne le droit de choisir un objet dont la phrase ouverte est vraie, ce choix doit être fixé comme constant pour cette phrase ouverte toute entière : je dois garder mon choix pour *toute* la phrase ouverte en question.

(16), par exemple, dit qu'il y a un seul objet adoré par moi et, en même temps, un philosophe. Pour avoir droit à deux choix indépendants, j'ai besoin de deux quantificateurs :

(18) $\exists x$ (j'adore x) $\wedge$ $\exists x$ (x est un philosophe)

(18) fait une assertion beaucoup plus faible que (16) – à savoir que j'adore quelqu'un et qu'il y a au moins un philosophe. Les deux occurrences de la variable « x » dans (18) sont indépendantes – nous aurions aussi pu écrire :

(19) $\exists x$ (j'adore x) $\wedge$ $\exists y$ (y est un philosophe)

D'un point de vue logique, il n'y a aucune différence entre (18) et (19). Dans (16), à l'inverse, les deux occurrences des variables sont liées – si on voulait substituer « x » par « y », on obtiendrait

(20) $\exists y$ (j'adore y $\wedge$ y est un philosophe)

Comme (19) et (18), (20) et (16) ne diffèrent pas du point de vue logique. Les variables ne servent qu'à indiquer les lacunes dans les phrases ouvertes et de lier ces lacunes par des quantificateurs – elles n'ont aucune valeur sémantique indépendante. Seules les propriétés relationnelles des différentes variables distinguent ces dernières (entre elles) : la phrase ouverte « x aime x », par exemple, est vraie de toutes les choses qui s'aiment elles-mêmes – la phrase « x aime y » est aussi vraie de ces choses (puisque nous pouvons assigner « x » et « y » au même individu), mais elle est également vraie de toutes les paires dont le premier membre aime le second.[31]

C'est parce que plusieurs occurrences libres de la même variable prennent leurs valeurs de manière co-ordonnée que nous pouvons traiter, par les moyens de la logique des prédicats, d'autres cas d'ambiguïté qui ne peuvent pas être à l'aide des ressources de la syllogistique. Considérons la phrase suivante :

(21) Marc a travaillé pour un homme qui a tué le deuxième mari de la soeur jumelle de Marc.

31. Comme nous l'avons remarqué à plusieurs reprises, l'ordre des variables peut devenir crucial. Si « Rxy » représente « x est un parent de y » (et que l'univers du discours compte tous les êtres humains), « $\forall x \exists y(Rxy)$ » est la phrase vraie « tout le monde a un parent ». « $\forall y \exists x(Rxy)$ », par contre, veut dire que tout le monde est un parent, ce qui est faux.

Analysé à l'aide de la syllogistique, le terme général qui est, dans (21), prédiqué de Marc est « …ancien employé de l'assassin du deuxième mari de sa propre soeur jumelle ». Cependant, le problème avec ce terme est qu'il donne facilement lieu à des raisonnements fallacieux : le fait, par exemple, qu'il s'applique également à deux individus, Marc et Marie, n'entraîne pas que Marc et Marie aient travaillé chez la même personne, ni qu'ils soient eux-mêmes jumeaux. La cause en est la réflexivité de « propre » dans « sa propre soeur jumelle ». Nous trouvons la même ambiguïté dans la clause relative qu'exprime également ce qui, dans (21), est prédiqué de Marc :

(22) qui a travaillé pour un homme qui a tué le deuxième mari de sa soeur jumelle

L'ambiguïté dans (22) réside dans le fait que le pronom possessif « sa » peut référer aux deux occurrences du pronom relatif « qui », avec une préférence pour le deuxième qui lui est plus proche. L'usage des variables à la place des pronoms résout ces problèmes :

(23) …est un x tel que x a travaillé pour un homme qui a tué
le deuxième mari de la soeur jumelle de x

Nous avons donc trouvé, dans le langage ordinaire, des analogues aux occurrences libres de variables : les pronoms dont l'antécédent n'a été ni exprimé ni même implicitement présupposé.

Voilà quelques autres exemples de l'usage du langage de la logique des prédicats :

« Anna est une vache »	$\rightsquigarrow$	Fa
« Anna rit »	$\rightsquigarrow$	Ga
« Anna est une vache qui rit »	$\rightsquigarrow$	$Fa \wedge Ga$
« Il y a une vache »	$\rightsquigarrow$	$\exists x Fx$
« Il y a une vache qui rit »	$\rightsquigarrow$	$\exists x(Fx \wedge Gx)$
« Il y a une vache et il y a quelque chose qui rit »	$\rightsquigarrow$	$\exists x Fx \wedge \exists y Gy$
« Toute chose est une vache »	$\rightsquigarrow$	$\forall x Fx$
« Toute vache rit »	$\rightsquigarrow$	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$

Un quantificateur quantifie une phrase ouverte, qui peut être logiquement complexe, et qui est appelée « *la portée* » du quantificateur en question. La portée du quantificateur existentiel dans « $\exists x Fx$ », par exemple, est la phrase ouverte « Fx », et la portée du quantificateur universel dans « $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ » est « $Fx \rightarrow Gx$ ». Ce sont les différentes portées des quantificateurs existentiels qui distinguent nos formalisations de « Il y a une vache qui rit » (ce qui est faux) et de « Il y a une vache et il y a quelque chose qui rit » (ce qui est vrai) respectivement.

C'est cette construction qui permet à la logique des prédicats de surmonter la difficulté principale que rencontre la syllogistique : la généralité multiple. C'est également dû à cette notion importante que la logique des prédicats (c'est-à-dire de *tous* les prédicats) surpasse celle des prédicats unaires possède un pouvoir expressif beaucoup plus grand que cette dernière.[32]

Aux variables dans notre langage formel correspondent, dans le langage naturel, une variété d'expressions, notamment les pronoms anaphoriques. Dans beaucoup de cas, l'usage des anaphores donne naissance

32. Pour la logique des prédicats unaires, cf. le ch. 10.5. Le prix à payer pour ce gain d'expressivité, cependant, sera l'indécidabilité de la logique des prédicats (que nous prouverons dans la leçon 11, cf. p. 225), phénomène que nous ne retrouvons pas dans la logique des prédicats unaires

à des ambiguïtés et des tournures peu idiomatiques (comme, par exemple, « ce que le premier a dit au deuxième était tel que le troisième a pensé que le deuxième avait raison d'être fâché du premier »). Le fait que le langage naturel ne représente pas toujours correctement la « forme logique » d'une phrase n'est pas un simple désavantage, mais peut mener à des conséquences désastreuses, comme le montre l'exemple suivant.[33] Considérons les phrases suivantes :

(i) Tous les garçons aiment une fille.

(ii) Ce monsieur a écrit un livre sur tout.

Ces deux exemples sont des cas d'ambiguïtés structurelles : aucun constituant n'est ambigu lexicalement et pourtant la phrase complète est ambiguë. La syllogistique n'a pas les ressources qui permettent d'enlever l'ambiguïté puisqu'elle nous force à classifier chaque phrase comme étant ou bien particulière ou bien universelle.

Dans la logique des prédicats, cependant, nous pouvons réitérer des quantificateurs. « ... aime $\cdots$ », par exemple, est un prédicat doublement incomplet et donc nécessite deux quantifications différentes. Afin de le compléter partiellement, nous pouvons, par exemple, quantifier sur la deuxième position argumentale. Nous obtenons « $\exists y$(... aime y) » – une expression qui est toujours incomplète : un objet satisfait ce prédicat juste au cas où il aime quelque chose ; s'il y a et seulement s'il y a quelque chose qui est aimé par cet objet. Le prédicat « $\exists y$(... aime y) » est donc équivalent à « ... aime quelque chose ». Nous pouvons maintenant le compléter : « $\forall x(\exists y(x$ aime $y))$ » – une phrase qui dit que tout objet est tel que cet objet aime quelque chose – une interprétation qui laisse ouverte la possibilité que différents objets aiment différentes choses.

Nous pouvons, cependant, inverser l'ordre de ces deux étapes et obtenir un résultat différent : au lieu de d'abord quantifier existentiellement sur la deuxième position argumentale, nous pouvons d'abord lier la première position par un quantificateur universel. Ainsi nous obtenons « $\forall x(x$ aime ...) », une phrase ouverte qui est vraie d'un objet si et seulement si cet objet est aimé par tout le monde. Si nous quantifions existentiellement la position de la variable libre, nous arrivons à « $\exists y(\forall x(x$ aime $y))$ » – une phrase qui dit qu'il y a quelque chose qui est aimé par tout le monde ; que tout le monde aime la même chose. Nous sommes donc arrivés à une représentation logique de la phrase structurellement ambiguë : nous avons distingué deux formes logiques différentes que l'on peut donner à **(i)**.

Imaginons que **(i)** est dit d'un groupe comprenant deux garçons et deux filles. L'ambiguïté de **(i)** réside dans le fait que deux scénarios différents peuvent rendre la phrase vraie : dans un scénario, tous les garçons aiment une fille – Paul aime Marie et Marcel aime Pauline. Dans un deuxième scénario, non seulement tous les garçons sont amoureux mais ils sont en plus tous amoureux de la même fille : Paul et Marcel aiment Pauline et personne n'aime Marie. Il y a donc une seule fille qui est aimée par tous les garçons. Ce dernier scénario correspond à la deuxième des deux interprétations suivantes de (i) :

(i′) $\forall x$ (x est un garçon $\rightarrow$ $\exists y(y$ est une fille $\wedge$ x aime y))

(i″) $\exists y$ (y est une fille $\wedge$ $\forall x(x$ est un garçon $\rightarrow$ x aime y))

La différence logique entre ces deux phrases est que dans la première, **(i′)**, le quantificateur existentiel se trouve dans la portée du quantificateur universel bien que dans la deuxième, **(i″)**, le quantificateur universel se trouve dans la portée du quantificateur existentiel. Dans **(i′)**, nous nous trouvons dans la portée du quantificateur universel lorsque nous choisissons un y qui rend vraie la phrase ouverte : nous pouvons faire dépendre notre choix du x de la valeur de « y » en question. Dans **(i″)**, cependant, nous n'avons pas cette liberté : le y doit être choisi tout au début et il est dit de ce y que tous les x l'aiment.

Nous donnerons le même diagnostic de la phrase suivante :

33. Frege notamment considérait le langage ordinaire comme essentiellement imparfait, une source inévitable de tromperies.

(ex) Toute personne est amoureuse de quelqu'un.

Avant même de se demander si la phrase (**ex**) est vraie, il faut la comprendre. Mais qu'est-ce qu'elle dit ? Il y a deux possibilités :

(dist) $\forall x\, \exists y\ (x \text{ aime } y)$

(**dist**) veut dire que, pour toute personne, on trouve une autre personne (qui, cependant, peut être la même)[34] telle que la première aime la deuxième. Comparez ceci à la phrase suivante :

(coll) $\exists y\, \forall x\ (x \text{ aime } y)$

(**coll**) dit qu'il y a une personne qui est telle que tout le monde l'aime, un/une bien-aimé(e) universel(le). On peut très bien s'imaginer des situations (contre-factuelles) où (**dist**) est vraie mais (**coll**) est fausse. L'ambiguïté de (**ex**) entre (**dist**) et (**coll**) montre que le langage ordinaire n'arrive pas très bien à distinguer des anaphores et des références implicites, un travail qui, dans des langues formelles, est fait par les variables et les quantificateurs. Nous pouvons ainsi distinguer la situation où nous arrivons à trouver, pour toute personne (∀) une personne (∃) aimée par elle, de la situation (beaucoup plus rare) où une seule personne (∃) est aimée par tout le monde (∀). La différence entre (**dist**) et (**coll**) est alors une différence de priorité de choix : dans (**dist**), nous pouvons faire notre choix d'aimé en fonction de l'amant en question, bien que pour (**coll**) nous devons choisir une seule personne qui sera aimée par tous.[35]

Le même type d'ambiguïté se trouve dans le cas de **(ii)** : ou bien le monsieur en question a écrit un livre qui traite de toutes les choses **(ii″)**, ou bien, sur n'importe quel sujet, ce monsieur a écrit au moins un livre **(ii′)** :

(ii′) $\forall x\ (\exists y(y \text{ est un livre de ce monsieur } \wedge y \text{ est sur } x))$

(ii″) $\exists y\ (\forall x(y \text{ est un livre de ce monsieur } \wedge y \text{ est sur } x))$

La première phrase dit que le monsieur, le long de sa carrière, a publié sur tous les sujets ; la deuxième qu'il a publié un livre qui traite de tout.

On remarque une conséquence sémantique : **(i″)** implique **(i′)** et **(ii″)** implique **(ii′)** – si tous les garçons aiment la même fille, tous les garçons aiment au moins une fille ; quelqu'un qui a publié un livre qui traite de tout a publié sur tous les sujets. La conséquence logique converse, cependant, n'obtient pas : il est très bien possible que tous les garçons sont amoureux, mais ne sont pas amoureux de la même fille, et que le monsieur a publié sur tout, mais a traité de différents sujets dans différents livres. Utilisant la sémantique formelle que nous allons développer au ch. 10.2, nous avons donc le suivant, pour toute structure $\mathcal{A}$ et toute assignation de valeurs h :

$$\mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x_1 \forall x_2\ (\phi) \urcorner \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x_2 \exists x_1\ (\phi) \urcorner$$

34. Il ne faut pas oublier cette possibilité : le fait que nous formalisons une phrase avec des variables *ne nous oblige pas* de leurs assigner différentes valeurs. « x aime x », par exemple, peut être vrai de ⟨ Marc, Marc ⟩, (**ex**) peut être vrai si tout le monde s'aime, mais n'aime personne d'autre que soi-même.

35. La distinction cruciale entre « ∀∃ » et « ∃∀ » n'est pas seulement importante pour l'analyse du langage ordinaire, mais peut aussi jouer un rôle important en mathématiques. Ce n'était qu'au 19ème siècle que les mathématiciens ont réussi. à distinguer nettement la continuité « simple » de la continuité dite « uniforme » qui impose des restrictions plus sévères. Pour être continue, une fonction doit être « régulière » localement ($\forall \epsilon\ \exists \delta\ (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$) : chaque différence entre ses valeurs peut être ‹ capturée› par une différence entre les arguments ; pour être continue uniformément, elle doit être régulière globalement ($\exists \delta\ \forall \epsilon\ (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$) : quoique la différence entre les valeurs, une seule mesure de différence la capture. Le premier s'ensuit du deuxième mais l'inverse n'est pas vrai : il y a des fonctions qui sont continues sans être continue uniformément. Par contre, toute fonction continue uniformément est automatiquement continue.

La converse, par contre, n'est pas vraie : du fait que nous trouvons un y pour tout x nous ne pouvons pas conclure que le même y va faire l'affaire pour tous les x.

Points à retenir

1. Nous obtenons des prédicats (ou phrases ouvertes) des phrases en effaçant un ou plusieurs termes singuliers.
2. La syllogistique classique distingue quatre types de phrases : **SaP**, **SiP**, **SeP**, **SoP**.
3. Ces quatre types de phrases correspondent à des relations entre les extensions des termes « S » et « P ».
4. Ces relations peuvent être symbolisées à l'aide de diagrammes de Venn ; on peut ainsi vérifier, par exemple, le carré des oppositions.
5. Les inférences valides de la syllogistiques sont des inférences directes ou indirectes ; des dernières il y en a 19 principales que l'on peut mémoriser à l'aide des noms comme « Barbara », « Ferio », « Cesare » et « Felapton ».
6. Les diagrammes de Venn dépassent déjà les limites de la syllogistique.
7. Les défauts principaux de la syllogistique et des diagrammes de Venn sont :
   (a) ils ne peuvent pas être combinées avec la logique propositionnelle ;
   (b) ils ne font pas de distinction entre termes singuliers et prédicats ; par conséquent, elles ne traitent de phrases existentielles que si on introduit des prédicats qui ne sont vrais d'un seul individu ;
   (c) ils ne laissent pas de place pour une ‹ logique des relations›, ne s'appliquant qu'à des prédicats unaires.
8. Les prédicats ne sont ni vrais ni faux, mais vrais ou faux *de* certains choses ; les choses les satisfont de la même manière comme les arguments satisfont les fonctions.
9. Les variables indiquent des lacunes dans les phrases ouvertes ; les quantificateurs servent à en former des phrases complètes.
10. La formalisation à l'aide de variables permet de traiter la généralité multiple et d'expliquer la distinction entre « Tout le monde aime quelqu'un » et « Quelqu'un est aime par tout le monde ».