Chapitre 9

La logique des prédicats

9.1 Quelques inférences valides de la logique des prédicats

La logique propositionnelle nous permet de formaliser des inférences qui reposent sur le comportement logique des connecteurs propositionnels. Ces connecteurs relient des phrases et en forment des phrases complexes. Dans le langage naturel, cependant, il est également possible de formuler d'autres inférences que la tradition a également considérées comme inférences logiques. En voici quelques exemples :

(1)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les philosophes sont des hommes.}\\ \text{Tous les hommes sont mortels.}\end{array}}{\text{Tous les philosophes sont mortels.}}$$

(2)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Aucun philosophe n'est méchant.}\\ \text{Quelques logiciens sont des philosophes.}\end{array}}{\text{Quelques logiciens ne sont pas méchants.}}$$

(3)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Aucun homme n'est parfait.}\\ \text{Tous les philosophes sont des hommes.}\end{array}}{\text{Aucun philosophe n'est parfait.}}$$

Dans les trois cas, nous retrouvons toutes les caractéristiques des inférences logiques : la validité de ces inférences ne semble dépendre que de quelques mots qu'on peut appeler « logiques », comme « tous », « aucun » et « quelques » ; toutes les inférences ayant la même forme que (1), (2) et (3) sont également valides ; et leur validité ne dépend pas du fait qu'il y ait ou non des êtres humains immortels ou parfaits ou des philosophes méchants.

La logique propositionnelle ne nous permet pas d'expliquer la validité de ces inférences, car elle ne prend pas en compte la structure interne des phrases simples qu'elle traite : elle traite les « p » et les « q » comme atomes et n'en analyse pas la structure interne. L'inférence (1), par exemple, serait formalisée comme « p ; q ; donc, r » – ce qui ne correspond pas à un schéma d'inférences valide de la logique propositionnelle.

Pour formaliser les trois inférences et expliquer leur validité, il faut utiliser la notion de prédicat. Soit « H » une abréviation pour « … est un homme », « M » pour « … est mortel » et « P » pour « … est un philosophe » (où les lacunes indiquent les places où il faudrait insérer un nom pour obtenir une phrase). Étant donné ces abréviations, nous sommes en mesure de représenter (1) comme suit :

(4)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les } S \text{ sont } M.\\ \text{Tous les } M \text{ sont } P.\end{array}}{\text{Tous les } S \text{ sont } P.}$$

Peu importe ce que nous substituons pour « H », « P » et « M » : nous obtenons des inférences valides, comme, par exemple, la suivante :

(5)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les pingouins sont des animaux.}\\ \text{Tous les animaux sont maudits.}\end{array}}{\text{Tous les pingouins sont maudits.}}$$

Nous avons utilisé « H », « P » et « M » pour remplacer des prédicats. Mais qu'est-ce qu'un prédicat ? Observons d'abord qu'il n'y a pas de différence, d'un point de vue logique, entre « Aucun homme n'est parfait », « Il n'y a pas d'homme parfait » et « Aucun homme n'est une chose parfaite ». Nous n'utilisons donc pas la notion grammaticale de « prédicat ». On remarque aussi que les prédicats substitués à la place de « H », « P » et « M » peuvent être de complexité quelconque ;[1] en particulier, les prédicats peuvent être logiquement complexes, c'est-à-dire conjonctives, disjonctives, négatives et implicatives. C'est pour cela que nous devons souvent choisir l'expression inélégante « ...est un x tel que ...x $\cdots$ » pour les lire.

Il est important de ne pas confondre un prédicat (dans le sens que la logique donne à ce terme) avec le terme général qu'il peut contenir. « Pingouin », par exemple, est un terme général, mais le prédicat correspondant est « ... est un pingouin » – le prédicat est ce qui, avec un nom, forme une phrase.[2] Nous pouvons obtenir un prédicat à partir de n'importe quelle phrase, en remplaçant au moins un nom dans cette dernière par trois points.[3] De la phrase

(6) Robert est l'animal préféré de Sam.

nous obtenons les prédicats « ... est l'animal préféré de Sam », « Robert est l'animal préféré de ... » (ce qui, pour des raisons de lisibilité, est parfois transformé en « ... est tel que Robert est son animal préféré ») et finalement aussi le prédicat binaire « ... est un animal préféré de $\cdots$ ». Nous reviendrons plus tard sur les particularités de ce troisième prédicat.

La caractéristique logique la plus importante des prédicats est qu'ils peuvent être dits *vrais de* certaines choses. Le prédicat « ... est un pingouin », par exemple, est vrai de tous les pingouins et n'est vrai de rien d'autre. Nous appellerons l'ensemble de toutes les choses dont un prédicat est vrai *l'extension* de ce prédicat. L'extension du prédicat « ... est un pingouin », par exemple, est l'ensemble de tous les pingouins, l'extension du prédicat « ... est un pingouin heureux » est l'ensemble de tous les pingouins heureux (qui est un sous-ensemble de l'ensemble de tous les pingouins) et ainsi de suite. L'extension

1. Nous avons vu à la p. 143, que non seulement (1), mais l'argument suivant est également valide :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les amis de mon grand-père qui vit en Australie sont soit des kangourous,}\\ \text{soit des admirateurs de la lune.}\\ \text{Tous les kangourous et les admirateurs de la lune adorent chaque vache qui rit}\\ \text{et qui n'est ni bête ni rose.}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Tous les amis de mon grand-père qui vit en Australie adorent chaque vache}\\ \text{qui rit et qui n'est ni bête ni rose.}\end{array}}$$

2. C'est pour cette raison que nous appelons les prédicats « prédicatifs » ou, suivant Frege, « insaturés ».

3. Utilisant la distinction que nous introduirons à la p. 178 entre types et tokens, nous pourrons dire qu'il s'agit ici d'un nom dans le sens de nom-token.

d'un prédicat peut contenir un seul ou même aucun membre. L'extension de « ... est un satellite de la terre » ne contient que la lune, et l'extension de « ... est une licorne » est l'ensemble vide $\emptyset$.

L'extension joue le même rôle pour les prédicats que la valeur de vérité pour les phrases : dans une logique extensionnelle, on ne s'intéresse qu'aux extensions des prédicats, aux dénotations des termes singuliers et à la valeur de vérité des phrases. En logique des prédicats, une phrase singulière simple sera vraie si et seulement si la dénotation (ou le référent) du terme singulier appartient à l'ensemble qui est l'extension du prédicat. « Sam est un pingouin heureux », par exemple, est vrai si et seulement si Sam (le référent de « Sam ») est un membre de l'ensemble de tous les pingouins heureux (qui est l'extension du prédicat « x est un pingouin heureux »). Cette relation de satisfaction entre des prédicats et des choses doit être nettement distinguée de la propriété des phrases d'être vraies ou fausses.

Le premier à clairement faire cette distinction était le philosophe-mathématicien-logicien Gottlob Frege.

9.2 Frege et la philosophie du langage

Bien que l'idée (ou plutôt l'utopie) d'une idéographie ait été répandue au 19ème siècle (pour son histoire, cf. Barnes (2002)), Frege fut le premier à l'élaborer rigoureusement et à l'aide d'un symbolisme logique. Sa « Begriffsschrift » ou « idéographie » (traduit en français par Corine Besson : (Frege 1999)) fut le premier système de la logique de prédicats. Bien que Frege utilisait un formalisme bi-dimensionnel que beaucoup disent anachroniques, sa théorie est restée valable et essentiellement correcte jusqu'à nos jours.

Sa motivation en l'arrière-plan de l'idéographie étaient les questions d'une part quel est le fondement des vérités arithmétiques et d'autre part de quelle manière il est possible de les saisir. Frege était convaincu que l'arithmétique faisait partie de la logique, puisque, comme la logique, elle s'appliquait à tout. Frege s'intéressait aussi aux justifications des fondations de l'arithmétique : en les réduisant à des fondements logiques, il voulait montrer que l'arithmétique était digne de notre croyance. Pour le montrer, Frege devait :

(i) établir un système de logique (l'idéographie), trouver des axiomes plausibles et des règles d'inférences (Frege 1879) ;
(ii) réduire les nombres et le prédicat « ...est un nombre » à la logique (Frege 1884) ;
(iii) montrer que les axiomes de Peano qui formalisent l'arithmétique[4] sont des cas spéciaux des règles logiques (Frege 1893 1903).

Frege en était à la dernière étape de son programme lorsqu'il échouait avec la découverte du paradoxe de Russell (cf. p. 259). Presque aussi important que son programme logiciste étaient les théories en philosophie du langage qu'il développait sur le chemin.

C'était en connexion avec (i) que Frege formulait la première théorie sémantique moderne en 1892. Elle est une théorie sémantique en ce qu'elle donne une réponse à la question de savoir en quoi consiste la signification des expressions bien-formées d'une langue.[5]

Par « nom propre » (« *Eigenname* »), Frege entend une expression qui désigne (au plus) un objet (« nom

4. Nous reviendrons à ces axiomes à la p. 366 et suivants.

5. Frege était également le premier à noter l'importance cruciale de la distinction entre l'usage et la mention de mots (cf. ch. 1.7). Selon Frege, beaucoup d'erreurs et confusions en arithmétique naissent d'une confusion entre des nombres et leurs noms (appelés « numéraux ») : « 5 », « V », « le nombre qui suit 4 », « la racine carrée positive de 25 » sont tous des expressions qui désignent un seul nombre, c'est-à-dire le nombre 5.

propre » chez Frege correspond donc à ce que nous appelons aujourd'hui « terme singulier »).[6] Pour Frege, il y a trois catégories fondamentales syntaxiques : (i) les énoncés (phrases déclaratives), (ii) les noms propres qui désignent un objet individuel, (iii) les prédicats comme « ...sait bien conduire sa voiture », « ...est un cheval », « ...court dans la rue », « ...est plus grand que moi » etc. qui désignent des concepts.[7]

Dans « Sens et dénotation », Frege (1892b) fait la distinction entre le sens (« Sinn », « sense ») et la référence (ou dénotation, « Bedeutung », « reference ») d'un terme singulier (cf. Frege (1971d) pour une traduction française). Selon lui, un terme singulier comme « le président des Etats-Unis » a comme référent un individu spécifique, c'est-à-dire Barack Hussein Obama dans notre cas, et comme sens une condition que cet individu doit remplir pour être le référent du terme. Comme il traite les énoncés (phrases déclaratives) comme noms propres de valeurs de vérité (des 'objets logiques' qui sont le Vrai **v** et le Faux **f**), la distinction s'applique également au niveau des phrases : le référent d'une phrase est soit le Vrai, soit le Faux, et son sens est ce que Frege appelle une « pensée » (*« Gedanke »*). La pensée exprimée par une phrase simple est composée des sens des expressions (noms et prédicats) qu'elle contient.[8]

Les termes singuliers, pour Frege (1892b), ont deux propriétés sémantiques : un sens et une dénotation. La dénotation est la chose même (Elisabeth II pour « la reine d'Angleterre », le mathématicien de Jena pour « Gottlob Frege », la ville même pour « Paris » etc.). Le sens, selon Frege, est « le mode par lequel l'objet est donné par le nom ». Dans quel sens peut-on dire que « 5 » et « V » nous « donnent » le nombre 5 dans un certain mode ? La différence de modes est plus visible, p. ex. dans le cas de « la reine d'Angleterre » et « la mère du Prince Charles », expressions qui nous donnent Elisabeth II de différentes manières. Mais pourquoi ne pourrait-on pas expliquer cette différence comme différence *entre les signes* ? Parce que, selon Frege, une expression n'a une dénotation qu'en tant qu'elle est titulaire d'un ‹ parcours › qui nous porte à sa dénotation (et ce ‹ parcours› peut être appelé « sens » de l'expression en question). Considérons la différence entre les deux phrases suivantes :

(I1) la reine d'Angleterre = Elisabeth II

Cet énoncé d'identité ne nous donne l'information selon laquelle la reine d'Angleterre est Elizabeth II que si nous comprenons les deux noms utilisés. Comparons **(??)** à la phrase suivante, et feignons une ignorance de la philosophie médiévale :

(I2) le Docteur Subtile = Duns Scot

L'information qui nous est apportée par **(??)** est que la personne qui l'énonce a l'intention d'utiliser ces deux expressions comme noms propres et qu'elle les utilise pour désigner la même chose. Selon Frege, la bonne explication de ce phénomène est que, dans un certain sens, ce n'est pas l'expression qui a une dénotation, mais l'expression ne donne une dénotation qu'à quelqu'un qui la saisit, c'est-à-dire qui comprend son sens. En somme, une expression n'est attachée à sa dénotation que par l'intermédiaire de son sens.

Or, deux expressions différentes peuvent avoir le même sens : « Pferd », « horse », « caballo », « cheval » ont le même sens (c'est-à-dire qu'elles sont synonymes) ; il va de même pour les mots « cheval » et « destrier »,

6. Dans la terminologie contemporaine, on réutilise « nom propre » pour une sous-espèce de termes singuliers, i.e. pour des expressions comme « Gottlob Frege » et « Genève ». Ils se distinguent d'autres termes singuliers, appelés « descriptions définis », comme « l'homme le plus riche de Paris », « le nombre qui suit 4 ». Cf. le ch. 9.4 à la p. 179 ci-dessous.

7. Les noms communs comme « cheval », contrairement à la tradition, ne sont considérés que comme des parties des prédicats. Il faut prendre en compte qu'il y a aussi des noms propres vides comme « le plus grand nombre » et « la volonté générale ».

8. Nous avons introduit ce principe de compositionalité à la p. 19.

ainsi que pour « et » et « mais ». Les différences entre « et » et « mais » sont des différences de tonalité qui relèvent de la pragmatique, c'est-à-dire des différences qui peuvent se perdre même dans une bonne traduction. La troisième chose, mis à part le sens et la dénotation, est la représentation qui peut être rattachée à une expression (ou plutôt à un usage particulier d'une expression) – qui, cependant, n'est pas une propriété sémantique. Son rôle n'est pas sémantique, mais plutôt d'ordre pragmatique. Selon Frege, une représentation est « une image interne qui s'est constituée sur la base des souvenirs des impressions sensibles que j'ai éprouvées et d'activités, internes et externes, que j'ai effectuées ». En considérant la représentation comme propriété non-sémantique, Frege voulait rendre la sémantique purement objective, et également accessible à tout le monde. La représentation, contrairement au sens, est subjective, c'est-à-dire qu'elle varie – en principe au moins – parmi les individus et selon les différentes expériences que ces individus avaient avec la chose dénotée. Le langage, cependant, doit être capable d'exprimer un contenu objectif pour que la communication soit possible (autrement, selon Frege, on devrait dire « mon théorème de Pythagore », « ton théorème de Pythagore » etc.). Mais la communication et la transmission de notions sont possibles (le contenu du théorème de Pythagore est transmis d'une génération à l'autre). Par conséquent la signification doit être objective et ne peut pas concerner les représentations.

Il semble cependant possible que différentes personnes attachent des sens différents à un mot : pour moi, le sens d' « Aristote » est donné par « le maître d'Alexandre le Grand », pour quelqu'un d'autre, par « l'auteur de la *Métaphysique* ». Dans une note de fin de page (n. 2) qui se trouve parmi les plus énigmatiques dans l'histoire de la philosophie, Frege (1892b) dit que dans certaines bornes de telles variations de sens sont « tolérables ». Même si on admet ceci, il reste vrai qu'il est *possible* que différentes personnes attachent le même sens aux mêmes expressions, tandis qu'il est impossible en principe que différentes personnes associent la même image à une expression. La métaphore utilisée par Frege pour expliquer les relations entre dénotation, sens et représentation dans Frege (1892b) est celle de la lunette : Si j'observe la lune par une lunette, on a affaire à (i) la lune, (ii) une image de la lune dans la lunette, et (iii) une image de la lune sur ma rétine, dans mon œil. (iii) qui correspond à la représentation, dépend de la constitution de mon œil et est donc subjective ou idiosyncratique. (ii), qui correspond au sens, *peut* être le même pour différents observateurs, même si elle est relative dans le sens où elle dépend de la perspective choisie pour la lunette et même s'il y a d'autres façons possibles de voir la lune. (i), finalement, qui correspond à la dénotation, est entièrement objective et ne dépend d'aucune manière de ses observateurs.

Frege (1892b) justifie l'introduction du concept de sens avec la considération suivante : Pour savoir que l'énoncé

(I3) le ministre français de l'Intérieur en 2005 = Nicolas Paul Stéphane Sárközy de Nagy-Bocsa

est vrai, il n'est pas seulement nécessaire de comprendre les deux noms propres utilisés,[9] Il semble que **(??)** se trouve tout à fait au même niveau comme :

(I6) Nicolas Sarkozy = Nicolas Sarkozy

9. Ceci pourrait impliquer d'autres énoncés d'identité, comme

(I4) Nicolas Paul Stéphane Sárközy de Nagy-Bocsa = Nicolas Sarkozy

mais il faut aussi savoir qui est le ministre français de l'Intérieur en 2005. Or, il y a un autre énoncé d'identité, proche de **(??)**, pour la compréhension duquel cela n'est pas nécessaire :

(I5) le ministre français de l'Intérieur en 2005 = le ministre français de l'Intérieur en 2005

Il y a une autre différence entre les énoncés (I3) et (I6) (et entre (I4) et (I5)) : (I3) nous donne une information, nous informe d'un fait empirique que nous aurions pu ignorer. (I3) est appelé « a posteriori », parce qu'il ne peut être su que sur la base de l'expérience (ex. : « Le chocolat est sucré », « Paris est une plus grande ville que Marseille », « Eau = H_2O »). (I6), d'autre part, nous informe soit d'une banalité soit de rien du tout. Il est vrai pour tout nom propre « a » que $a = a$. Nous le savons « a priori », puisque nous n'avons pas besoin d'expérience pour le savoir, et parce que nous pouvons nous convaincre de sa vérité par la raison pure (ex. : « 2+2=4 », « tout célibataire est non-marié », « si Sam est plus grand que Maria et Maria est plus grande que Christine, alors Sam est plus grand que Christine »). Il faut entreprendre un long voyage pour trouver que « la solution de l'énigme de la vie = 17 », mais on sait dès le départ que « 17 = 17 » et que « la solution de l'énigme de la vie = la solution de l'énigme de la vie ». [10]

Mais comment une affirmation d'identité peut-elle être vraie et a posteriori (informative) en même temps ? La différence entre les deux affirmations d'identité (I1) et (I2), si les deux sont vraies, ne peut pas concerner les référents des deux expressions utilisées. Un autre aspect de la signification des nombres propres doit alors être responsable pour la différence en ‹ valeur cognitive› entre (I1) et (I2). [11] C'est cet autre aspect que Frege appelle le « sens » d'un nom propre et qu'il identifie à la fois avec sa ‹ valeur cognitive› (« *Erkenntniswert* ») et avec la ‹ manière dont le référent est donné › (« *Gegebenheitsweise der Bedeutung* »).

Frege distinguait donc des phrases – analytiques – comme (I6) des phrases – synthétiques – comme (I3). Une phrase est analytique si et seulement si elle est vraie ou fausse en vertu de sa signification (et donc de la signification des mots qu'elle contient) (ex. « tout célibataire est non-marié », « un mari est un homme », « un chat noir est un chat »). Une phrase est synthétique, par contre, si on ne peut ignorer sa vérité même si on comprend sa signification (ex. « Il fait beau », « Je m'appelle Philipp »).

Frege identifiait la référence (la dénotation ou l'extension) d'une phrase à sa valeur de vérité et le sens à ce qu'il appelle « une pensée » (« ein Gedanke »). C'est pour cette raison qu'une logique est dite « extensionelle » si elle ne concerne que les valeurs de vérité des phrases qu'elle traite et non pas leurs significations.

La dénotation d'un énoncé est une valeur de vérité, c'est-à-dire soit le Vrai, soit le Faux. Pour Frege, le Vrai et le Faux sont des objets (non-physiques, bien sûr) et ils sont les seules valeurs de vérité. Frege donne des arguments pour la thèse selon laquelle *il est possible* de prendre la valeur de vérité comme dénotation d'une phrase. Ses arguments sont basés sur le principe de compositionnalité : la dénotation d'une expression complexe comme l'est un énoncé est une fonction des dénotations de ses parties : si on remplace une partie de l'énoncé par une autre ayant la même dénotation, la dénotation de l'énoncé ne devrait pas changer. Ainsi, ce qui ne change pas si on remplace dans un énoncé une partie avec une expression qui a la même dénotation est la valeur de vérité : les expressions ayant les mêmes dénotations peuvent être substituées les unes pour les autres *salva veritate* (en préservant la valeur de vérité de la phrase en question). La pensée exprimée, cependant, peut changer comme on le voit dans l'exemple suivant :

(I7) L'étoile du matin est un corps illuminé par le Soleil.

Si on remplace « l'étoile du matin » avec l'expression « l'étoile du soir » qui a la même dénotation (la planète Venus), on obtient :

10. Une connaissance est dite « a priori » si sa justification (ou au moins une de ses justifications possible) ‹ ne dépend pas de nos sens›, c'est-à-dire ne fait pas recours à des connaissances que nous avons acquises à travers un de nos cinq sens. Une connaissance qui est justifiable par des considérations non-empiriques (« dans la chaise-longue ») est dite « a posteriori ».

11. Cette inférence reste sur quelques présuppositions tacites.

(I8) L'étoile du soir est un corps illuminé par le Soleil.

(I7) et (??) ont la même dénotation, mais ils expriment des pensées différentes. Alors la pensée ne peut pas être la dénotation d'un énoncé. Ce qui ne change pas entre (I7) et (I8), cependant, est la valeur de vérité. Si (I7) est vraie, (I8) l'est également, si (I7) est faux, le même vaut pour (I8) ((I7) et (I8) sont matériellement équivalents). Frege ne prouve pas que rien d'autre n'est constant entre (I7) et (I8) et, plus généralement, dans tous les remplacements qui préservent la dénotation. Il ne démontre donc pas que la dénotation d'un énoncé est une valeur de vérité. Il montre seulement que ce ne peut être la pensée exprimée et que la valeur de vérité satisfait le critère le plus important pour qualifier comme dénotation d'un énoncé (de rester invariant malgré des remplacements de parties par d'autres expressions qui ont la même dénotation). Le deuxième argument de Frege réside dans l'observation selon laquelle nous nous intéressons aux dénotations des termes quand nous voulons connaître la valeur de vérité d'un énoncé ; nous retrouvons ici la distinction principale entre les énoncés assertoriques et ceux de la fiction :

(I9) Ulysse débarque à Ithaque.

En lisant l'Odyssée, on ne se demande pas si « Ulysse » a bien une dénotation, c'est-à-dire si Ulysse a existé. Si on se demande, cependant, quelle est la valeur de vérité de (I9) (en lisant l'Odyssée comme texte historique), il devient important de savoir si « Ulysse » a une dénotation.

L'identification de la dénotation des phrases avec leurs valeurs de vérité a comme conséquence que toutes les phrases vraies ont la même dénotation, c'est-à-dire le Vrai, et toutes les phrases fausses dénotent le Faux. Frege l'assume, en disant que ce qui nous intéresse dans l' énoncé, ce n'est pas juste sa dénotation, mais le rapport entre son sens et cette dernière, la manière dont le Vrai (ou le Faux) nous est donné par une phrase. La valeur de vérité n'est que le but, la fin du parcours qui nous intéresse et qui est le sens de l'énoncé.

Le sens d'un énoncé est la pensée exprimée par l'énoncé.[12] Frege (1918a) affirme encore une fois qu'aussi dans le cas des énoncés, les sens (c'est-à-dire les pensées) sont objectifs, même s'ils ne sont pas physiques. Ils existent dans ce que Frege appelle « un troisième règne », un ciel platonicien d'objets abstraits qui sont objectifs, mais non-physiques. Les pensées peuvent être saisies et exprimées, mais elles n'appartiennent à personne. Comme les entités mentales, les concepts et les pensées ne sont pas perceptibles, mais ils diffèrent d'elles en étant publiques, objectifs et non pas subjectifs. Une pensée est vraie ou fausse indépendamment du fait qu'on le sache ou qu'elle ait été saisie ou exprimée.[13] Les lois de Kepler étaient vraies avant la naissance de Kepler et, si elles sont vraies, elles le resteront pour toujours (malheureusement elles sont fausses, comme a fini par le démontrer Einstein).

Bien qu'elle soit assez intuitive, la thèse de Frege que la signification des noms propres a une composante descriptive (le sens) soulève de graves problèmes. Discutons-en de quelques uns.

Un premier problème est intimement lié à la question de savoir comment il faut concevoir le sens Frégéen. Appelons une phrase « analytique » s'il est suffisant de la comprendre pour reconnaître sa vérité ou fausseté. Il semble alors que si nous saissisons le sens des expressions d'une phrase que nous comprenons, beaucoup de phrases deviennent analytiques qui intuitivement ne le sont pas. Supposons que le sens du nom propre « Aristote » est donné par « l'élève le plus célèbre de Platon ». Que dire alors

12. Et c'est dans ce sens-là qu'on peut dire que pour Frege une pensée est un ‹ mode de donation › d'une valeur de vérité.

13. Frege fait une distinction traditionnelle (qui se retrouve chez les Stoïciens et Descartes) entre saisir une pensée et juger. Un jugement est l'assertion d'une pensée, mais on peut saisir une pensée sans l'affirmer, p. ex. en posant une question. Le sens de « Marseille est en France. » et « Est-ce que Marseille est en France ? » est le même, mais la force des deux phrases est différentes. Une assertion a une force assertorique, et une question a une force interrogative. Comme nous avons vu à la p. 105, la force assertorique distingue également les assertions des suppositions.

de la phrase suivante :

(I10) Aristote est l'élève le plus célèbre de Platon.

Est-ce que (**I10**) est analytique ? a priori ? Il n'est pas clair comment Frege aurait pu le nier. Cependant, nous n'arrivons ni par reflexion sur le sens des mots ni par raisonnement a priori à établir si vraiment Aristote était l'élève le plus célèbre de Platon. Une manière de rendre cette critique plus perspicace est de considérer l'énoncé suivant :

(I11) Aristote aurait pu ne pas être l'élève le plus célèbre de Platon.

(**I11**), comme nous le dit Kripke (1972), est vrai – mais comment le peut-il être d'après la théorie de Frege ? [14]

La théorie de Frege soulève un autre problème. Elle doit traiter de contre-exemples apparents contre le principe de compositionnalité tel le suivant :

(I12) Copernic croyait que [les orbites des planètes étaient des cercles].

La phrase entière (**I12**) est vraie, même si le sous-énoncé « les orbites des planètes sont des cercles » est faux (ce sont des ellipses). Mais si on remplace le sous-énoncé par un autre qui a la même dénotation (le Faux) on obtient un énoncé faux :

(I13) Copernic croyait que [la Lune était une poêle].

Le principe de compositionnalité est donc violé dans le cas des expressions comme « Copernic croyait que … », qu'on appelle, suivant Russell, « attitudes propositionnelles » (puisqu'elles expriment, selon une certaine théorie, des attitudes envers des propositions, conçues comme objets abstraits comme les pensées Fregéennes). La réaction de Frege est de conserver le principe de compositionnalité en réinterprétant ces contextes : dans ces contextes-ci (qu'il appelle « contextes indirects ») la dénotation des mots est leur sens ordinaire. [15] Ils ont donc leur sens comme « dénotation indirecte » (dénotation dans des contextes indirectes). La preuve, de l'avis de Frege, est que dans les remplacements par des expressions qui ont le même sens, la valeur de vérité du tout ne change pas.

(I14) Copernic croyait que [les parcours des planètes étaient circulaires].

(**I14**), où on a remplacé le sous-énoncé par un autre qui a le même sens, a la même valeur de vérité que (**I12**) (le Vrai dans ce cas). [16]

---

14. Nous reviendrons à la critique référentialiste de Frege et en particulier à cet argument appelé « modal » de Kripke, dans le ch. 12.4.

15. Frege ne dit presque rien sur le sens indirect, sauf le suivant : « […] Dans ce cas, la proposition subordonnée a pour dénotation une pensée et non une valeur de vérité ; son sens n'est pas une pensée, c'est le sens des mots « la pensée que… », et ce sens représente une partie seulement du sens de la proposition complexe tout entière. » (Frege 1971d: 112-113) La question était abordée par Church dans son article « A Formulation of the Logic of Sense and Denotation » Church (1951 1973 1974); Salmon (1993).

16. Plus précisement, la structure de l'argument de Frege pour la thèse selon laquelle la dénotation indirecte est le sens direct est la suivante :

1. le principe de compositionalité (appliqué à la dénotation et aux énoncés) : la dénotation d'un énoncé est une fonction des dénotations de ses parties.
2. (**I12**) et (**I13**) ont différentes dénotations (le Vrai et le Faux).
3. Donc, ils doivent contenir des parties a et b telles que la dénotation de a est différente de celle de b.
4. Les seules parties a et b desquels cela pourrait être vrai sont les sous-énoncés qui spécifient le contenu de la croyance de Kepler.

Deux problèmes principaux surviennent alors avec cette théorie de dénotation indirecte : (i) L'idée que les mots n'ont pas la même dénotation dans tous les contextes est contre-intuitive. (ii) Frege ne dit pas clairement ce que c'est pour deux expressions d'avoir le même sens (il ne donne pas de critères de synonymie) et il est alors difficile de savoir quand deux expressions ont la même dénotation indirecte.

Selon la théorie Fregéenne des prédicats, la dénotation d'un prédicat comme « …est une femme », « …est un animal », « …aime … », « …est le frère de … » est un concept. Un concept est une fonction dont la valeur est une valeur de vérité. Le concept dénoté par « …est un homme », par exemple, est une fonction qui prend comme arguments des choses et qui donne comme valeur le Vrai si la chose qu'elle a pris comme argument était un homme, et elle donne comme valeur le Faux dans tous les autres cas (c'est-à-dire dans tous les cas où son argument n'était pas un homme). Comparons la fonction mathématique :

$f(x) \equiv x^2$ [17] $\qquad f(3) = 9$

à la fonction suivante :

$f(x) \equiv x$ est un homme $\qquad (\ldots$ est un homme$)$ (Socrate) $=$ le Vrai

$(\ldots$ est un homme$)$ (la ville de Paris) $=$ le Faux

$(\ldots$ est un homme$)$ (Xanthippe) $=$ le Faux

Les fonctions, dont les concepts constituent une sous-espèce, sont des entités incomplètes dites « non-saturées » qui ont besoin d'un ou de plusieurs objets (d'un ou de plusieurs arguments) pour être complètes. Ce qui caractérise les concepts tient au fait que ce sont des fonctions qui nous donnent des valeurs de vérité (c'est-à-dire soit le Vrai, soit le Faux) comme étant leurs valeurs de vérité.

Cette notion de « fonction » est importante surtout en mathématiques mais également dans la logique des prédicats (cf. p. 46). Une fonction peut être conçue de deux manières :

– Considérée de manière *extensionnelle*, une fonction d'un ensemble de choses A à un ensemble de choses B (qui peut, mais ne doit pas être le même que A) est un ensemble de paires $\langle a_i, b_i \rangle$ tels que les premiers membres (les a_i) appartiennent à A, les deuxièmes (les b_i) à B, et tels qu'un seul a_i ne se trouve en paire qu'avec un seul b_i. [18]
– Considérée de manière *intensionnelle*, une fonction est une règle qui pour chaque argument détermine une valeur. Elle est alors une certaine procédure qui nous prend quelque chose comme ‹ input›et l'utilise pour déterminer le ‹ output›.

Vu de manière extensionnelle, une fonction est une certaine relation entre des membres de A et les membres de B. Mais il n'est pas le cas que toute relation est une fonction. Pour être fonctionnelle, une relation doit être telle que le premier relatum *détermine* le deuxième. « x aime y », par exemple, est une relation qui a comme extension l'ensemble de paires $\langle a, b \rangle$ tels que a aime b. Pour que cette relation soit également une fonction, il devrait être le cas que tout le monde n'aime qu'une seule personne –

5. Donc, la dénotation de a doit être différente de la dénotation de b.
6. Les dénotations « ordinaires » de a et b sont leurs valeurs de vérité qui sont identiques.
7. Donc, a et b ne peuvent pas avoir leurs valeurs de vérité comme dénotations.
8. La seule autre chose qui distingue a et b est leur sens, la pensée qu'ils expriment.
9. Donc, la dénotation de a (b) est la pensée exprimée par a (b).

17. Nous utilisons ici « $\equiv$ » pour exprimer une identité entre des fonctions : deux fonctions sont identiques ssi. elles correspondent au même ensemble, c'est-à-dire si elles associent aux mêmes arguments les mêmes valeurs.

18. C'est à dire que le a_i *détermine* le b_i dans le sens suivant : qu'il n'arrive jamais que nous avons $\langle a_i, b_j \rangle$ et $\langle a_i, b_k \rangle$ avec deux b_j et b_k différents.

que l'aimé soit déterminé par l'amant. Ce n'est que dans ce cas que « la personne aimée par x » dénote, pour toute valeur de x, une personne unique.

Une fonction $f : A \rightarrow B$ est alors une relation (un ensemble de paires dont le premier membre appartient à A et le deuxième à B ($\{\langle a, b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$), qui est telle que le choix de a détermine celui de b : il n'est pas le cas qu'on a $\langle a, b'\rangle$ et $\langle a, b''\rangle$ pour deux $b', b'' \in B$ différents :

$$(f(a) = b' \wedge f(a) = b'') \quad \rightarrow \quad b' = b''$$

Toute fonction est une relation et donc un sous-ensemble du produit cartésien de son domaine et de son codomaine. Une relation binaire qui relie des éléments d'un ensemble A et d'un ensemble B est un sous-ensemble de $A \times B$, c'est-à-dire un ensemble de paires $\{\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, \dots\}$ telles que tous les a_i sont des membres de A et tous les b_i sont des membres de B. Une telle relation est une *fonction* si et seulement si le membre de A détermine uniquement le membre de B de son paire, c'est-à-dire ssi. $a_1 = a_2 \rightarrow b_1 = b_2$ et ainsi de suite pour les autres paires. Comme le membre de B est détérminé sans univoque par son correspondant dans A, on écrit « $f(a_i)$ » pour b_i. Une fonction $f : A \rightarrow B$ avec domaine A et codomaine B est une relation, c'est-à-dire un sous-ensemble de $A \times B$ qui satisfait cette condition supplémentaire.

Nous n'avons pas seulement des fonctions à un argument, mais des fonctions de toute adicité quelconque : « l'aimé commun de x et y », par exemple, détermine une personne en fonction des préférences sentimentales de *deux* personnes. Dans ce cas-ci, le fonction sera un sous-ensemble du produit cartésien de *trois* ensembles.

Frege n'avait pas encore à sa disposition cette conception ‹ ensembliste › de la notion de « fonction », mais la considérait comme une généralisation du concept « concept » (*Begriff*). Pour Frege, un concept n'est donc pas une entité linguistique, mais quelque chose qui appartient au monde. Elle n'appartient pas au monde physique, bien entendu, mais à un troisième monde, l' »endroit » où se trouvent les objets abstraits. L'application d'un concept à quelque chose qui le sature (un objet) est donc un processus ontologique, qui nous donne une entité, un objet, qui est soit le Vrai, soit le Faux.

Un concept ne doit pas être confondu avec son extension, qui est appelé son « parcours de ses valeurs » (*Wertverlauf*). Le parcours des valeurs du concept HOMME qui est dénoté par le prédicat « ...est un homme » peut être décrit comme suit (où « $\top$ » dénote le Vrai, et « $\bot$ » dénote le Faux) :

(WV) ⟨ Socrate, $\top$⟩, ⟨ la ville de Paris, $\bot$⟩, ⟨ Xanthippe, $\bot$⟩, ⟨ Platon, $\top$⟩, ⟨ le numéro 2, $\bot$⟩, ⟨ la couleur vert, $\bot$⟩, ⟨ Maddox, $\top$⟩, ⟨ l'homme le plus riche au monde, $\top$⟩, ...

De manière équivalente, on peut écrire :

(WV') { Socrate, Platon, Maddox, l'homme le plus riche au monde, ...}

(**WV'**) est ce qu'on avait, avant Frege, traditionnellement considéré comme l'*extension* du concept HOMME. A partir de Carnap (1947), l'extension était normalement considérée comme la dénotation d'un prédicat. « ...est un homme » était donc conçu comme le prédicat qui a l'ensemble spécifié par (**WV'**) comme dénotation.

Ce n'était pas l'avis de Frege. Pour Frege, concevoir la dénotation d'un prédicat comme un concept était la seule manière de rendre compte de l'unité de la proposition, c'est-à-dire du fait que la signification d'un énoncé est un tout intégral qui résulte de la composition de ses constituants. Frege s'est demandé comment quelque chose de saturé comme l'est un parcours de valeurs pourrait se relier à quelque chose d'autre de complet (un objet) ? Comment les deux pourraient tenir ensemble ? Frege n'a vu aucune possibilité et en a donc conclu qu'il fallait quelque chose de non-saturé (non seulement au niveau des expressions mais) également au niveau ontologique, le niveau de la dénotation.

Le sens d'un prédicat est une manière de concevoir la fonction qui est le concept dénoté par ce prédicat. Prenons comme exemples :

$$2 \cdot x \cdot x + 2 \qquad\qquad 2(x^2 + 1)$$

Selon Frege, ces deux expressions dénotent le même concept, mais elles ont des sens différents. Elles nous donnent le même concept (la même fonction) mais de deux manières différentes.

Pour la logique traditionnelle, les expressions n'ayant pas la structure nom–prédicat comme « tout homme est mortel » posaient problème. Frege les a résolues d'un coup de génie, en donnant une forme conditionnelle à ces énoncés :

« Tout homme est mortel. » $\rightsquigarrow$ « Si une chose est un homme, alors cette chose est mortelle. »

Dans l'analyse de Frege, le sujet grammatical (« tout homme ») ne coïncide plus avec le sujet logique (toutes les choses). La phrase, contrairement aux apparences, ne prédique que conditionnellement de toute chose [19] que si elle est un homme, alors elle est mortelle. La forme logique ne coïncide donc pas avec la forme superficielle de l'énoncé en question. La forme logique d'un énoncé exhibe ses conditions de vérité : elle ne concerne que ce qui, pour Frege, est crucial à l'interprétation de n'importe quel énoncé, c'est-à-dire la manière dont cet énoncé dénote sa dénotation (une valeur de vérité), c'est-à-dire au sens de l'énoncé (la pensée qu'il exprime).

Plusieurs questions se posent :

- Comment peut-on être sûr d'arriver à un niveau où le langage ne nous trompe pas mais où il nous sert comme indice de sa vraie forme logique ?
- Comment savoir si telle ou telle formule est la vraie forme logique d'un énoncé ? Comment reconnaître cette vraie forme logique ?

Frege était convaincu qu'un langage idéal, où il n'y a pas de différence entre forme grammaticale et forme logique, était possible, et il croyait que son idéographie était une bonne approximation d'une telle langue.

La sémantique contemporaine est une sémantique référentialiste (qui s'occupe principalement d'assigner des référents à des expressions). Dans sa version la plus naïve, une telle sémantique se limite à cette tâche principale. Frege critiquait cette théorie en ajoutant un autre niveau, celui du sens. Ses arguments principaux étaient les suivants :

1. Le problème des énoncés d'identité vrais comme « Superman = Clark Kent » (« Superman c'est Clark Kent »). Une sémantique naïve n'a que deux choix pour analyser un tel énoncé vrai : soit on parle d'une seule et même chose Superman / Clark Kent (et dit d'elle qu'elle est identique à elle-même), soit on parle des expressions (et dit que les deux expressions dénotent la même chose). Mais, intuitivement, une information spécifique est exprimée par cet énoncé (ce qui exclut la première option) qui n'est pas seulement une information sur notre langage (ce qui exclut la deuxième option).
2. Le problème des énoncés fictionnels et des noms propres vides : « Superman c'est Clark Kent » nous donne une information même si nous savons très bien que cette personne n'existe pas. L'absence de référent n'empêche pas qu'il y ait quelque chose que l'on saisit lorsqu'on comprend

19. Les quantificateurs, c'est-à-dire $\forall x$ (« pour n'importe quel x ») et $\exists y$ (« il y a au moins un y tel que »), sont eux-mêmes des concepts, notamment des concepts de deuxième ordre, c'est-à-dire des concepts qui s'appliquent à et sont saturés par des concepts (cf. n. **??** à la p. **??**).

une phrase qui contient un tel nom propre vide. La même chose vaut pour des noms fictionnels comme « Ulysse ».

3. Le problème de l'attribution des croyances : On ne veut pas attribuer à des personnes manifestement rationnelles des croyances irrationnelles. Lois Lane admire Superman, mais elle n'aime pas trop Clark Kent. Elle a donc toutes sortes d'attitudes qui seraient, selon la sémantique naïve, des attitudes contradictoires, en particulier des croyances : elle croit que Superman peut voler, et que Clark Kent ne le peut pas. La théorie du sens, en associant différents contenus conceptuels avec les deux mots, nous permet de dire que Lois Lane a des croyances à propos de la même chose (Clark Kent, c'est-à-dire Superman), mais sous deux modes différents.
4. Le problème des énoncés existentiels : Si le référent était le seul contenu d'un nom propre, les énoncés d'existence comme « Superman existe » ou « Superman n'existe pas » n'auraient un contenu que si Superman existait. Il semble, cependant, que ces énoncés aient un contenu qui dépasse le niveau du référent seul.

Nous reviendrons sur la critique de cette théorie dans le ch. 12.4. Avant de nous pencher sur les objections philosophiques, cependant, nous examinerons l'utilité de cette théorie pour la sémantique formelle de la logique des prédicats.

9.3 Être vrai et être vrai de

Pour dire qu'une phrase ouverte est satisfaite par (ou vraie d') un certain individu, nous formons ce que nous appellerons une *« phrase singulière »*. Une phrase singulière est une phrase qui contient un nom d'au moins un individu particulier et prédique un prédicat de cet individu (ou une relation de plusieurs individus).[20] Pour dire que Sam est triste, par exemple, nous disons que Sam satisfait la phrase ouverte « … est triste » ou que cette phrase ouverte est vraie de Sam. Pour désigner Sam nous utilisons dans la logique des prédicats ce qu'on appelle une *« constante individuelle »*, par exemple « a ». Pour dire que a satisfait la phrase ouverte « Fx », nous appliquons la fonction représentée par « Fx » à un argument, représenté par une constante individuelle :

(7) Fa

(7) est la forme générale d'une phrase simple dans la logique des prédicats et consiste de trois éléments : un constante individuelle (un terme singulier, « a »), un prédicat (une phrase ouverte, « Fx »), et l'application de la fonction dénotée par « Fx » à l'argument a (représentée par la juxtaposition de « F » et « a »).

Selon son interprétation fregéenne, la phrase singulière (7) désigne la valeur de la fonction Fx pour l'argument a – comme les prédicats sont des fonctions d'individus à des valeurs de vérité, cette valeur est **v**, le Vrai, si Sam est triste, et elle est **f**, le Faux, s'il n'est pas le cas que Sam est triste.

Il y a cependant d'autres phrases que les phrases singulières. Quand je dis que tous les pingouins sont heureux, par exemple, ou qu'il y a un philosophe irlandais, je ne parle d'aucun pingouin et d'aucun philosophe en particulier. Il n'y a pas d'individu spécifique dont je prédique être un pingouin heureux ou un philosophe irlandais. Nous appellerons de telles phrases qui ne sont pas singulières des *« phrases générales »*.

20. Nous appelons « individu » n'importe quelle chose dénotée par une constante individuelle. Même si normalement nos individus sont des « substances premières » dans le sens Aristotélicien du terme (Sam, sa maison, ses dents et le bout de viande qui se trouve entre eux), rien ne nous empêche de traiter comme individus des évènements (son mariage), des tropes (la blancheur non-répétable de son visave), des espèces (homo sapiens sapiens) ou substances secondes (l'humanité).

C'est pour le traitement des phrases générales que nous utilisons des quantificateurs et des variables. Pour dire que le prédicat « x est un philosophe irlandais » est vrai d'au moins une chose, je quantifie existentiellement sur l'occurrence de la variable « x » dans cette phrase ouverte, obtenant « $\exists x(x$ est un philosophe irlandais) ». Pour dire que le prédicat « x est heureux » est vrai de tous les pingouins, je coordonne l'occurrence de « x » dans « x est heureux » avec l'occurrence de « x » dans « x est un pingouin » en quantifiant les *deux* occurrences par le *même* quantificateur : « $\forall x(x$ est un pingouin $\rightarrow x$ est heureux) ».

C'est dans le fait qu'elle rende possible une telle coordination que réside l'utilité de la quantification. Dans le langage naturelle, nous obtenons le même effet avec les pronoms. Examinons l'exemple suivant :

(I15) Sam adore Maria. Malheureusement, il n'est venu qu'une fois qu'elle était déjà partie.

Grâce à l'accord du genre, nous comprenons que c'est Sam qui est venu quand Maria était déjà partie. Mais ceci n'est pas possible dans l'exemple suivant :

(I16) Maria voulait voir sa soeur. Malheureusement, elle n'est venue qu'une fois qu'elle était déjà partie.

Par (**I16**), nous ne savons pas si Maria ou sa soeur est partie. Pour désambiguer de telles phrases, nous sommes souvent forcés à utiliser des locutions peu élégantes :

(I17) Maria voulait voir sa soeur. Malheuresement, elle n'est venue qu'une fois que cette dernière était déjà partie.

Les variables nous permettent une désambiguation plus élégante :

(I18) Maria (x) voulait voir sa soeur (y). Malheureusement, x n'est venue qu'une fois que y était déjà partie.

Les variables nous donnent ainsi un moyen efficace de rendre compte des liens anaphoriques entre termes singuliers : elles nous disent quels termes ‹ héritent› leurs référents de quels autres.

Les variables nous permettent également de construire des prédicats complexes.

Utilisant les mêmes signes que pour les connecteurs propositionnelles, nous pouvons former des prédicats complexes à partir des prédicats simples, remplaçant les conditions de vérité (pour des phrases) par des conditions de satisfaction (pour des prédicats) : [21]

C$\neg$: Un objet a satisfait « $\neg Fx$ » si et seulement si a ne satisfait pas « Fx ».

C$\wedge$: Un objet a satisfait « $Fx \wedge Gx$ » si et seulement si a satisfait « Fx » et a satisfait « Gx ».

C$\vee$: Un objet a satisfait « $Fx \vee Gx$ » si et seulement si soit a satisfait « Fx », soit a satisfait « Gx ».

C $\rightarrow$: Un objet a satisfait « $Fx \rightarrow Gx$ » si et seulement si soit a ne satisfait pas « Fx », soit a satisfait « Gx ».

C $\leftrightarrow$: Un objet a satisfait « $Fx \leftrightarrow Gx$ » si et seulement si soit a satisfait « Fx » et « Gx », soit ne satisfait ni « Fx » ni « Gx ».

Au niveau de leurs extensions, ces conditions de satisfaction correspondent à des opérations entre des ensembles : la négation d'un prédicat aura comme extension le *complément* de l'extension du prédicat nié, la conjonction l'intersection des extensions des deux disjoints et la disjonction leur union.

Comme les phrases ouvertes ne sont ni vraies ni fausses, mais seulement vraies ou fausses *de* certains objets, la sémantique des connecteurs qui les relient ne peut pas être donnée par des tables de vérité.

21. Nous ferons ceci avec beaucoup plus de rigueur dans le ch. 10.2, utilisant la notion clef d' « interprétation ».

C'est pourquoi nous utilisons un autre concept fondamental de la sémantique, celui de satisfaction, pour expliquer leurs significations : la condition **C**$\wedge$, par exemple, donne la signification (c'est-à-dire les conditions de satisfaction) du prédicat complexe « $Fx \vee Gx$ » en termes de la signification (les conditions de satisfactions) des deux prédicats simples « Fx » et « Gx » : [22] le principe de compositionalité ne s'applique alors pas aux phrases entières, mais à des phrases ouvertes.

La condition **C**$\neg$ a une importance particulière. C'est elle qui garantit que nos prédicats sont entièrement définis (ce que nous avons déjà observé à la p. 155) : que pour tout objet dont nous voulons parler, le prédicat en question est ou bien vrai de cet objet ou bien faux de cet objet. Ceci nous oblige, par exemple, de compter comme fausses des phrases comme « César est impair », et comme vraies des phrases comme « Il n'est pas le cas que César est impair » et « Soit César est impair soit il ne l'est pas ».

Combinant les prédicats plus simples en des prédicats plus complexes, il est d'une importance crucial de tenir compte de l'identité ou de la diversité des variables. Il existe une grande différence entre le prédicat à deux places « x aime y » et le prédicat à une place « x aime y ». Le premier est satisfait par des paires d'objets qui sont telles que leur premier membre aime leur deuxième membre. Le deuxième est satisfait par des objets qui s'aiment eux-mêmes. Cette différence doit être maintenue même dans le cas où la paire qui satisfait le premier prédicat contient la même chose deux fois : si Sam aime Marie, et Marie s'aime lui-même, les deux paires $\langle$ Sam, Marie $\rangle$ et $\langle$ Marie, Marie $\rangle$ ont en commun qu'elles sont liées par une relation d'amour. Nous pouvons alors conclure qu'il y a deux personnes qui aiment Maria, ou que Sam aime une personne qui s'aime elle-même. Comment pouvons nous expliquer cette différence entre « x aime y » et « x aime x » si les variables n'ont pas de propriétés sémantiques intrinsèques et s'il n'y a pas, par conséquent, de distinction entre les deux phrases ouvertes « x chante » et « y chante » ?

Nous devons faire une distinction entre ce que nous appelerons les « mot-tokens » et les « mot-types ». « Mot », en effet, est ambigu, et les deux sens correspondent aux deux réponses possible à la question de savoir combien de mots se trouvent dans le carré suivant :

Robinson Robinson

Dans un premier sens de « mot », la réponse à la question est « 2 », dans un autre elle est « 1 » : j'ai écrit le *même* mot *deux* fois. Il s'agit d'un seul *type* (« mot-type »), mais de deux *token* (« mot-token »). [23] Le compteur de 'mots' de mon logiciel de texte compte les mot-tokens, bien que l'annonce sur mon dictionnaire qu'il contient 20000 'mots' compte les mot-types.

La distinction entre types et tokens est d'une importance particulière pour l'interprétation des variables. Un quantificateur relie et quantifie sur toutes les tokens de la variable-type qui le suit qui se trouvent dans sa portée. Dans « $\exists x(Fx \wedge Gx \wedge Hy)$ », par exemple, les variable-tokens qui suivent « F » et « G » sont liées par le quantificateur existentiel, bien que la variable-token qui suit « H » ne l'est pas, puisqu'elle appartient à un autre type. C'est en comptant les variable-types que nous disons que les phrases ouvertes « x aime y » et « x trouve y chez z » ne contiennent que des occurrences libres de variables, et « x aime y » et « x change » qu'une seule.

22. Comme dans le cas des phrases, nous voulons à strictement parler donner les conditions de satisfaction pour *n'importe quel* prédicat conjonctif, quoi que soit sa complexité logique. C'est pourquoi nous utiliserons des lettres grecques (« $\phi(x)$ », « $\psi(x, y)$ » etc.) dans notre traitement rigoureux dans la prochaine leçon.

23. Des ambiguïtes de ce type se trouvent dans beaucoup de contextes. Si on me demande, par exemple, combien de plantes j'ai dans mon jardin, combien de séries télé-visées j'ai vu dans ma vie et combien de livres j'ai sur ma bibliothèque, mes réponses varieront en fonction de si je compte les types ou les tokens.

9.4 Les termes singuliers

Une lacune dans une phrase ouverte indique la place où un terme singulier fut été enlevé et les quantificateurs nous servent à quantifier sur ces lacunes, en disant que toutes les choses satisfont ou au moins une chose satisfait la phrase ouverte en question. Mais que sont ces termes singuliers ?

Nous avons dit (à la p. 16) qu'un terme singulier est une expression qui, en vertu de sa forme logique, ne désigne qu'au plus un objet, chose qui est appelée son « référent » ou, plus généralement, sa « désignation ». Selon la classification traditionnelle d'Aristote, c'est ce dont quelque chose (un prédicat) est prédiqué ou dit et ce qui ne peut pas être dit d'autre chose (de la manière d'un prédicat). Le propre d'un terme singulier est sa relation de désignation ou de référence à un et un seul objet précis. Les variables, sous une assignation de valeurs, reçoivent aussi une désignation et peuvent ainsi également être comptées sous la catégorie des termes singuliers. À part les variables, nous reconnaissons au moins trois autres types de termes singuliers : les noms propres. les indexicaux et les descriptions définies.

Les noms propres, comme « Maria », « Paris » et « Frege » désignent au plus un individu. Dans beaucoup de cas, ils sont introduits par un acte de baptême qui établit une relation avec leur référent. Ils ne nous servent qu'à parler de leur référent et ne nous fournissent aucune autre information sur ce dernier. Dans le cas où un nom propre n'a pas de référent, le nom ne remplit pas sa fonction : il est dénué d'intérêt et appelé *vide*.

Les descriptions définies, par contre, désignent leur référent par l'intermédiaire de leur contenu descriptif : même si nous ne savons peut-être pas qui est la personne la plus riche au monde, nous savons au moins que le référent de « la personne la plus riche au monde » est la personne la plus riche au monde, qu'elle est plus riche que moi, qu'elle est une personne etc. Nous déduirons cette information du contenu descriptif de cette description définie.

Parmi les termes singuliers, la philosophie du langage distingue au moins trois sous-espèces d'expressions : un nom propre, comme « Sam » ou « Paris », est une expression qui se réfère « directement » à un objet ; [24] une expression indexicale, comme « ceci », « je » ou « maintenant », désigne son référent par l'intermédiaire d'un contexte d'énonciation ; [25] et une description définie comme « le roi actuel de France » et « l'homme dans le coin » désigne au moyen de son contenu descriptif (le prédicat à l'aide duquel il est formé, « ... est le roi actuel de France », « ... est l'homme dans le coin »). En logique des prédicats, nous ne formalisons par des constantes individuelles que des noms propres.

Nous pouvons distinguer ces différentes catégories de termes singuliers par rapport à la question si leurs référents peuvent varier avec le contexte d'énonciation et le contexte de l'évaluation. Le contexte de l'énonciation est celui du locuteur : il détermine par exemple le référent de « je ». Comme nous l'avons déjà vu à la p. 21, les langues naturelles contiennent souvent des expressions dites « indexicales ». Le contexte de l'évaluation est la situation par rapport à laquelle l'énonciation est évaluée : [26] « l'homme le plus grand dans la salle » désigne différentes personnes par rapport à différentes salles. Nous distinguons ainsi

1. noms propres (« Sam ») : leurs référents ne varient ni avec le contexte d'énonciation ni avec celui de l'évaluation ; [27]

24. Ceci a été contestée par beaucoup de philosophes de langage, en particulier par Frege (1892b) (traduction française : Frege (1971d)). Je suis ici la thèse célèbre de Saul Kripke (1972) que les noms sont des « désignateurs rigides » (traduction française : Kripke (1982)). On reviendra au ch. 14.6 sur cette thèse controversée.

25. Ceci, au moins, d'après l'analyse classique et communément accepté qu'en a donné David Kaplan (1989).

26. Nous reviendrons à ces notions en rapport avec la sémantique dite « bi-dimensionnelle » au ch. 14.7.

27. D'après Kripke. Mais quoi dire des « noms propres descriptifs » comme « Rolling Stones » ou « la vierge Marie » ? Cf. Corazza (2002) pour une sorte de réponse.

2. descriptions définis (« la lune de la terre », « le maître de Platon ») : leurs référents varient avec le contexte de l'évaluation, mais pas avec le contexte de l'énonciation ; [28]
3. les indexicaux (« je », « tu », « maintenant », « ici ») : les référents varient avec le contexte d'énonciation, mais pas avec celui de l'évaluation ; [29]
4. les démonstratives (« celui-ci », « cet homme-là ») : les référents varient avec le contexte de l'énonciation (référence à l'objet salient), mais pas avec le contexte de l'évaluation.

Russell (1905) appelle « descriptions indéfinies » des expressions comme « un homme », « un chat » et « descriptions définies » des expressions comme « la reine d'Angleterre », « mon oncle » etc. (que nous rangeons parmi les termes singuliers). Selon Russell le traitement fregéen des descriptions définies les traite de la même manière que ce que nous appelons « noms propres », c'est-à-dire des expressions comme « Scott » et « Russell »), entraîne des violations du principe de compositionnalité :

P1 Georges IV voulait savoir si Scott était l'auteur de *Waverley*.

P2 L'auteur de *Waverley* = Scott.

C Donc, Georges IV voulait savoir si Scott était Scott.

Le problème est que (**P1**) est tout à fait possible (*Waverley* est paru sous forme anonyme), et que (**P2**) est vraie, mais que (**C**) est très probablement fausse. La réponse de Frege à ce problème, comme nous l'avons vu à la p. 170, c'est que les expressions « Scott » et « l'auteur de *Waverley* », bien qu'ils aient la même dénotation, n'ont pas la même dénotation indirecte (le même sens) et que donc (**P2**) ne suffit pas pour légitimer la transition de (**P1**) à (**C**).

Russell, rejetant la notion de sens, ne pouvait pas adapter cette solution au problème posé par l'inférence invalide. Il lui fallait donc une autre solution. Son idée était que penser les descriptions comme ayant des valeurs sémantiques précises était en général une erreur – il proposait donc de traiter « un homme » et « la reine d'Angleterre » de la même façon que Frege avait traité l'expression « tout homme ».

Rappelons l'analyse fregéenne des descriptions indéfinies :

Il y a un homme chauve.		
Il y a des hommes qui sont chauves.	$\rightsquigarrow$	$\exists x(x \text{ est un homme} \wedge x \text{ est chauve})$
Certains hommes sont chauves.		

Les trois expressions de la colonne de gauche ont la même forme logique. Dans cette forme logique, il n'y a aucune expression qui ne corresponde à l'expression « un homme » en tant que telle.[30] Russell appliquait le même traitement – *contre* Frege – également à des descriptions définies. Il analysait donc les trois phrases suivantes de la même façon :

J'ai rencontré un homme.	$\rightsquigarrow$	$\exists x(x \text{ est un homme} \wedge \text{j'ai rencontré } x)$
L'actuelle reine d'Angleterre est riche.	$\rightsquigarrow$	$\exists x(x \text{ est reine d'Angleterre}$
		$\wedge \text{ toute reine d'Angleterre} = x \wedge x \text{ est riche.})$
L'actuelle reine de France est riche.	$\rightsquigarrow$	$\exists x(x \text{ est reine de la France}$
		$\wedge \text{ toute reine de la France} = x \wedge x \text{ est riche.})$

28. Avec l'exception des descriptions définis « rigidifiées » comme « la lune actuelle de la terre », et peut-être aussi des descriptions définis utilisées « référentiellement » : « l'homme avec le martini », dans une situation où il n'y a qu'une personne mâle buvant un liquide transparent (cf. Donnellan 1966).

29. Mais quoi dire de « je suis ici maintenant », « demain n'est pas aujourd'hui » ? Cf. Kaplan (1989) pour un argument qu'il s'y agit de tautologies de la logique des indexicaux.

30. On a « ...est un homme », mais cette expression est un prédicat et n'est pas une description indéfinie.

L'analyse d'une utilisation d'une description définie donnée par Russell lui donne donc trois parties :

Il y a une reine d'Angleterre	$\exists x$(x est reine d'Angleterre	condition d'existence
Il n'y en a qu'une seule.	toute reine d'Angleterre $= x$	condition d'unicité[31]
Elle est riche.	x est riche)	prédication

Il n'y a aucun constituant dans la forme logique de « la reine d'Angleterre est riche » qui ne corresponde à « la reine d'Angleterre ». Le sujet logique (l'objet sur lequel porte la prédication) de cette phrase n'est donc pas la reine d'Angleterre. La phrase ne parle pas de Elisabeth II, l'actuelle reine d'Angleterre. La spécificité de cette analyse se montre surtout dans l'application à des descriptions définies n'ayant pas de dénotation. S'il n'y a pas de reine de France, alors « L'actuelle reine de France est riche. » est fausse – et toute autre proposition à propos de la reine de France l'est aussi. Si au contraire on traitait « l'actuelle reine de France » comme un nom, comme le proposait Frege, on serait obligé de dire que« L'actuelle reine de France est riche. » n'est ni vraie, ni fausse : on ne saurait trouver la reine de France ni parmi les objets qui sont riches, ni parmi ceux qui ne sont pas riches. Donc, dit Russell, le principe du tiers exclu serait violé.

Quelle valeur de vérité faut-il attribuer à une phrase comme :

(8) Le roi de France est chauve.

Russell (1905) répondait à cette question en donnant la forme logique suivante à (8) :

(9) $\exists x(RFx \wedge Cx \wedge \forall y(RFy \rightarrow x = y))$

Traduit littéralement, (9) dit qu'il y a un individu qui est le roi de France (RF) et qui est chauve (C), et que tout individu y qui est le roi de France est identique à x. (8) est donc interprétée comme disant qu'il y a au moins un roi de France et qu'il est chauve et est donc faux si, comme c'est le cas, la France est une république.

La solution que Russell rejette est exactement celle que Frege choisit. Selon Frege, on *présuppose* normalement que les termes singuliers utilisés ont une dénotation ;[32] dans une langue idéale et parfaite, il serait assuré que toute expression a une dénotation. Si la présupposition que tous les termes singuliers utilisés ont une dénotation n'est pas satisfaite, les propositions en question (« la reine de la France est chauve », « la reine de la France n'est pas chauve ») ne sont ni vraies ni fausses. Si on acceptait l'analyse de Russell, nier l'énoncé « l'actuelle reine de France est riche » serait affirmer « soit l'actuelle reine de France n'est pas riche, soit « l'actuelle reine de France » n'a pas de dénotation ». Mais ceci paraît peu plausible. Nous ne pouvons pas à la fois nier que certains termes ont des dénotations et contester les affirmations qui utilisent ces termes.

Il y a donc deux solutions : une solution « superficialiste », celle de Frege, qui traite « l'actuelle reine de la France » comme un constituant véritable de « L'actuelle reine de France est chauve », et une solution « profondiste », celle de Russell, où l'expression « la reine de la France » n'apparaît pas comme constituante (logique, au moins) de la phrase en question.

Contre la solution superficielle, on peut remarquer qu'il serait assez bizarre que le langage, qui a évolué sous des pressions et influences très diverses, montre sa forme logique à la surface. Contre la solution

31. Plus formellement, nous pouvons spécifier cette deuxième condition comme suivant : $\forall y$(y est reine de l'Angleterre $\rightarrow y = x$) (pour tout y, si y est reine d'Angleterre, alors $y = x$; toutes les reines d'Angleterre sont identiques à x).

32. C'est Strawson qui a défendu cette analyse fregéenne des présuppositions existentielles contre Russell (cf. Strawson 1950 1961).

profondiste, on peut remarquer que sa tentative de rendre le langage raisonnable en corrigeant ses 'fautes' et le rendre conforme à une ontologie plausible et acceptable présuppose que le langage soit, au fond, 'raisonnable'. Mais il serait tout à fait surprenant que le langage, qui s'est formé il y a des milliers d'années sous la pression de toutes sortes de circonstances, soit raisonnable, c'est-à-dire conforme à nos critères actuels de rationalité.

Les descriptions définies présentent un autre problème. Considérons :

(Y1) Je croyais votre yacht plus grand qu'il ne l'est.

(Y2) Il est possible qu'il y ait plus d'hommes qu'il y en a.

(Y3) Il me semble que le nombre des planètes est plus grand que 9.

A première vue, ces trois affirmations sont sensibles et pourraient être vraies. Mais toutes permettent une interprétation selon laquelle elles sont fausses :

(Y1') Je croyais que la taille de votre yacht $\neq$ la taille de votre yacht.

(Y2') Il est possible que le nombre des hommes $>$ le nombre des hommes.

(Y3') Il me semble que 8>9.

Heureusement, elles permettent, cependant, aussi une autre interprétation :

(Y1") La taille de votre yacht $= n$ et je croyais que la taille de votre yacht $\neq n$.

(Y2") Le nombre des hommes $= n$ et il est possible que le nombre des hommes $> n$.

(Y3") Il me semble que le nombre des planètes >9.

On dit que (**Y1'**), (**Y2'**) et (**Y3'**) donnent une interprétation « étroite » (« narrow scope ») aux occurrences « la taille de votre yacht », « le nombre des hommes », « le nombre des planètes » dans (**Y1**), (**Y2**), (**Y3**) respectivement (l'interprètent comme des occurrences *primaires* dans la terminologie de Russell), tandis que (**Y1"**), (**Y2"**) et (**Y3"**) en donnent une interprétation « large » (« wide scope ») et l'interprètent comme des occurrences *secondaires*.

Selon Russell, une telle ambiguïté se montre aussi avec les descriptions définies qui manquent de dénotation. Considérons encore une fois la phrase (8) :

(8) Le roi de France est chauve.

Nous avons vu que Russell (1905) a donné la forme logique (9) à (8) :

(9) $\exists x(RFx \land Cx \land \forall y(RFy \to x = y))$

Qu'arrive-t-il maintenant si nous formons la négation de (8) :

(10) Le roi de France n'est pas chauve.

Pour formaliser (10), nous avons le choix entre deux options :

(11) $\neg\exists x(RFx \land Cx \land \forall y(RFy \to x = y))$

(« Il n'est pas le cas qu'il y a un unique roi de France et qu'il est chauve. »). La phrase serait donc vraie et l'occurrence de « le roi de France » serait secondaire (« wide scope »). Mais on pourrait formaliser (10) aussi ainsi :

(12) $\exists x(RFx \wedge \neg Cx \wedge \forall y(RFy \rightarrow x = y))$

(« Il y a un unique roi de France qui n'est pas chauve. ») Cette phrase, où « le roi de France » a une occurrence primaire (« narrow scope »), est fausse. Le roi de France n'est ni chauve ni non-chauve puisqu'il n'existe pas :

> By the law of excluded middle, either « A is B » or « A is not B » must be true. Hence either « the present King of France is bald » or « the present King of France is not bald » must be true. Yet if we enumerated the things that are bald, and then the things that are not bald, we should not find the present King of France in either list. Hegelians, who love a synthesis, will probably conclude that he wears a wig. (Russell 1905: 485)

Russell en tirait la conclusion que toutes les propositions à propos du roi de France peuvent être traitées comme fausses :

> Thus all propositions in which « the King of France » has a primary occurrence are false ; the denials of such propositions are true, but in them « the King of France » has a secondary occurrence. Thus we escape the conclusion that the King of France has a wig. (Russell 1905: 490)

9.5 La formalisation dans la logique des prédicats

La combinaison avec un nom n'est pas la seule manière dont une phrase ouverte peut devenir une phrase et être vraie ou fausse. Considérons les phrases suivantes :

A1 Tous les philosophes sont mortels.

B1 Il n'y a rien d'entièrement noir qui est entièrement rouge.

C1 Quelques pingouins sont heureux.

D1 Quelques animaux ne sont pas des pingouins.

Les phrases **A1** à **D1** sont complètes mais ne contiennent pas de nom : elles expriment des phrases générales (qui correspondent aux quatre types de phrases catégorielles étudiés en syllogistique). Nous discernons des connecteurs, par exemple une négation dans **D1**. Ces connecteurs, cependant, ne relient pas des phrases entières mais des prédicats, des phrases ouvertes. Quels sont les connecteurs dans **A1** et **B1** ? Les réformulations suivantes nous montrent qu'il s'agit des implications (**A1** et **B1**) et des conjonctions (**C1** et **D1**) :

A2 Si quelqu'un est un philosophe, alors il est mortel.

B2 Si une chose est entièrement noir, alors elle n'est pas entièrement rouge.

C2 Il y a au moins un pingouin et il est heureux.

D2 Il y a au moins un animal et il n'est pas un pingouin.

A2 à **D2** nous montrent également que les phrases ouvertes liées par des connecteurs ne peuvent pas être évaluées de manière indépendante des autres, puisqu'elles contiennent des pronoms (« il » dans **A2**, **C2** et dans **D2**, « elle » dans **B2**) qui dépendent, pour leurs valeurs sémantiques, de leurs antécédents dans le reste de la phrase. Ces pronoms, comme nous le verrons plus tard, correspondent à des variables dont les valeurs sont coordonnées par le quantificateur qui les gouverne.

---

32. Traduction française : « ... ».

32. Traduction française : « ... ».

Si nous interprétons nos phrases modèles à l'aide de la notion de satisfaction, nous obtenons les phrases métalinguistiques suivantes :

A3 Toutes les choses qui satisfont « ... est un philosophe » satisfont également « ... est mortel ».

B3 Toutes les choses qui satisfont « ... est entièrement noir » ne satisfont pas « ... est entièrement rouge ».

C3 Il y a des choses qui satisfont « ... est un pingouin » et « ... est heureux ».

D3 Il y a des choses qui satisfont « ... est un animal », mais qui ne satisfont pas « ... est un pingouin ».

Toutes ces phrases commencent par une tournure que nous appellerons « quantificateur » : pour exprimer des quantificateurs, nous préférons normalement les tournures suivantes, qui réduisent le nombre de tournures ‹ logiques› de quatre (« tous », « quelques », « aucun », « quelques ne ... pas ») à deux (« tous » et « il y a ») :

A4 Tout ce qui est un philosophe est mortel.

B4 Tout ce qui est entièrement noir n'est pas entièrement rouge.

C4 Il y a des pingouins heureux.

D4 Il y a des animaux qui ne sont pas des pingouins.

Suivant le modèle de **A2** à **D2**, nous pouvons introduire des variables pour remplacer les pronoms et rendre perspicace la manière dont les phrases ouvertes sont liées par des connecteurs :

A5 Pour tout x, si x est un philosophe, alors x est mortel.

B5 Pour tout x, si x est entièrement noir, alors x n'est pas entièrement rouge.

C5 Il y a des x tels que x est un pingouin et x est heureux.

D5 Il y a des x tels que x est un animal et x n'est pas un pingouin.

Nous retrouvons des connecteurs propositionnels (« $\rightarrow$ » dans (**A5**) et (**B5**), « $\wedge$ » dans (**C5**) et (**D5**), « $\neg$ » dans (**B5**) et (**D5**)) qui ne relient pas des phrases, mais des phrases ouvertes. Le résultat de leur application à des phrases ouvertes est une autre phrase ouverte, logiquement complexe – les connecteurs propositionnels forment des prédicats complexes à partir de prédicats plus simples.

Bien qu'elles ne contiennent pas de noms, les phrases (**A1**) à (**D1**) (et (**A2**) à (**D2**) etc.) sont néanmoins complètes : elles peuvent être vraies ou fausses et n'ont pas besoin d'être complétées par des noms. Le mécanisme qui en est responsable est appelé *« quantification »* et représenté par les deux tournures « pour tout » (abrégée par « $\forall$ » et appelée « quantificateur universel ») et « il existe au moins un » (abrégée par « $\exists$ » et appelée « quantificateur existentiel »).[33] Ces quantificateurs prennent une phrase ouverte et forment une phrase complète, exprimant que tous ou certains objets satisfont les phrases ouvertes en question. La traduction de nos exemples serait la suivante :

A6 $\forall x$ (si x est un philosophe, alors x est mortel)

B6 $\forall x$ (si x est entièrement noir, alors x n'est pas entièrement rouge)

C6 $\exists x$ (x est un pingouin et x est heureux).

D6 $\exists x$ (x est un animal et x n'est pas un pingouin)

En introduisant les connecteurs et en abrégeant les prédicats, nous obtenons les phrases suivantes comme résultat final de notre essai de formalisation :[34]

33. Il existe d'autres manières d'abréger les quantificateurs. Pour le quantificateur universel, on utilise parfois « $(x)(\ldots x \ldots)$ », « $\bigvee x(\ldots x \ldots)$ » et, en la notation dite « polonaise », « $\Pi x(\ldots x \ldots)$ » au lieu de « $\forall x(\ldots x \ldots)$ ». Pour le quantificateur existentiel, on trouve « $E(x)(\ldots x \ldots)$ », « $\bigwedge x(\ldots x \ldots)$ » et « $\Sigma x(\ldots x \ldots)$ » à la place de « $\exists x(\ldots x \ldots)$ ».

34. Nous utilisons « $\mathbf{Ph}(x)$ » pour « ... est un philosophe », « $\mathbf{M}(x)$ » pour « ... est mortel », « $\mathbf{rouge}(x)$ » pour « ... est entièrement rouge », « $\mathbf{noir}(x)$ » pour « ... est entièrement noir », « $\mathbf{A}(x)$ » pour « ... est un animal », « $\mathbf{P}(x)$ » pour « ... est un pingouin » et « $\mathbf{H}(x)$ » pour « ... est heureux ».

A7 $\forall x\ (\mathbf{Ph}(x) \rightarrow \mathbf{M}(x))$

B7 $\forall x\ (\mathbf{noir}(x) \rightarrow \neg\mathbf{rouge}(x))$

C7 $\exists x\ (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{H}(x))$

D7 $\exists x\ (\mathbf{A}(x) \wedge \neg\mathbf{P}(x))$

Nous observons que nous pouvons appliquer les transformations habituelles aux connecteurs reliant les phrases ouvertes. Les lois de Morgan, la définition de « $\rightarrow$ » en termes de « $\vee$ » et de « $\neg$ » et l'élimination de la double négation nous assurent, par exemple, que les phrases suivantes sont logiquement équivalentes aux phrases **A7**, **B7**, **C7** et **D7** respectivement :

A8 $\forall x\ \neg(\mathbf{Ph}(x) \wedge \neg\mathbf{M}(x))$

B8 $\forall x\ \neg(\mathbf{noir}(x) \wedge \mathbf{rouge}(x))$

C8 $\exists x\ \neg(\neg\mathbf{P}(x) \vee \neg\mathbf{H}(x))$

D8 $\exists x\ \neg(\neg\mathbf{A}(x) \vee \mathbf{P}(x))$

Il est important de distinguer les négations internes, qui portent sur les phrases ouvertes, des négations externes, qui portent sur des phrases complètes. Qu'est-ce qui arrive si nous ajoutons des négations externes à ces phrases ? La négation de **A8**, par exemple, dirait qu'il n'est pas le cas que tous les x sont tels qu'ils sont ni philosophes ni immortels – qu'il y a, par conséquent, au moins un x qui n'est ni philosophe ni immortel. La négation de **C8** dirait qu'il n'y a pas de x qui ne satisfait pas la phrase ouverte « x n'est pas un pingouin ou x n'est pas heureux » – et donc que tous les x la satisfont, que tous les x sont soit autre que des pingouins, soit ne sont pas heureux.

Dans le langage de la logique de prédicats, nous distinguons les variables telles que « x », « y », « z », ... des constantes individuelles telles que « a », « b », « Maria », « Sam ». La différence est que « a » et « Maria » dénotent un individu particulier, tandis que « x » et « y » dénotent des individus « arbitraires ».[35] Dans le langage ordinaire, les pronoms, les expressions anaphoriques et des expressions comme « tel que » correspondent aux variables. La formalisation d'une phrase du langage ordinaire dans la logique des prédicats se fait donc en deux étapes :

1. Nous construisons d'abord une phrase synonyme qui représente plus clairement la forme logique de la phrase initiale :

« Tout existe. »	$\rightsquigarrow$	« Toute chose est telle qu'elle existe. »
« Tout homme est mortel. »	$\rightsquigarrow$	« Tout est tel que si c'est un homme, il est mortel. »
« Sam entre et rit. »	$\rightsquigarrow$	« Il y a quelque chose tel que cette chose est Sam et cette chose entre et rit. »

2. Nous introduisons ensuite des variables pour rendre ces dépendances encore plus explicites :

« Toute chose est telle qu'elle existe. »	$\rightsquigarrow$	$\forall x(x \text{ existe})$
« Tout est tel que si c'est un homme, il est mortel. »	$\rightsquigarrow$	$\forall x(x \text{ est un homme} \rightarrow x \text{ est mortel})$
« Il y a qqch. tel qui est Sam, entre et rit. »	$\rightsquigarrow$	$\exists x(x = \text{Sam} \wedge x \text{ entre} \wedge x \text{ rit})$

Nous remarquons une équivalence logique propre aux quantificateurs : dire que tous les pingouins sont heureux revient à dire qu'il n'y a pas de pingouins qui ne sont pas heureux ; dire qu'il y a des pingouin

35. Nous reviendrons sur cette notion problématique d' « individu arbitraire » au ch. 12.1.

romantiques revient à dire qu'il n'est pas le cas qu'aucun pingouin n'est romantique. Tous les F sont G si et seulement s'il n'y a pas de F qui n'est pas G. Il y a un F si seulement s'il n'est pas le cas que toutes les choses soient $\neg F$. Une phrase de la même forme que « $\forall x(\ldots x \ldots)$ » est donc équivalente logiquement à une phrase de la même forme que « $\neg\exists x\neg(\ldots x \ldots)$ », et le même raisonnement vaut pour les phrases de la même forme que « $\exists x(\ldots x \ldots)$ » et de « $\neg\forall x\neg(\ldots x \ldots)$ ». Il n'était donc pas nécessaire d'introduire les deux quantificateurs dans le lenage : l'introduction d'un seul aurait déjà nous donnée les ressources pour définir l'autre.[36]

Cette *dualité* des quantificateurs s'explique par leurs relations à des conjonctions et disjonctions. L'affirmation universelle, de tous les pingouins, qu'ils sont heureux revient à dire que a (le plus petit pingouin) est heureux *et* que b est heureux, ...*et* que a_{100023} (le plus grand pingouin) est également heureux. De la même manière, une affirmation existentielle correspond à une disjonction : dire qu'il y ait un pingouin heureux revient à dire que soit le premier, soit le deuxième, soit le n-ième est heureux.[37]

La dualité des quantificateur peut donc être vu comme ‹ extension› de la dualité entre conjonction et disjonction, capturée par les lois de Morgan : comme nous pouvons ‹ faire entrer› une négation à une conjonction si nous nions les conjoints et en font la disjonction, nous pouvons ‹ faire entrer› une négation à une quantification universelle si nous nions la phrase quantifiée et la quantifions existentiellement : comme $\wedge$ correspond à $\neg\vee\neg$, $\forall$ correspond à $\neg\exists\neg$. Schématiquement, en utilisant $\ulcorner\phi(x)\urcorner$ comme nom de n'importe quelle phrase qui contient une occurrence de la variable « x », nous obtenons ceci :

$$\begin{array}{lcl} \ulcorner\forall x\ (\phi(x))\urcorner & \iff & \ulcorner\neg\exists x\ \neg(\phi(x))\urcorner \\ \ulcorner\exists x\ (\phi(x))\urcorner & \iff & \ulcorner\neg\forall x\ \neg(\phi(x))\urcorner \end{array}$$

En nous servant des négations dites « externes », qui portent sur des phrases complètes, nous pouvons donc formaliser les quatre phrases considérées à l'aide d'un seul quantificateur :

36. Nous avons remarqué un phénomène similaire dans la logique propositionnelle dans le ch. 3.7.

37. Cette « correspondance » est compliquée par deux facteurs : elle n'est valide que pour les domaines de quantification finis, premièrement, et présuppose une condition de clôture deuxièment. S'il y avait une infinité de pingouins, en effet, la 'conjonction' ou 'disjonction' devenait infinie, ce qui est exclut par notre définition de « formule bien formé » pour le langage de la logique des prédicats (cf. déf. 46 à la p. 197). La nécessité d'une condition de clotûre devient évidente quand on considère que les inférences

(13) $$\frac{Ga \wedge Gb \wedge \ldots \wedge Gz}{\forall x(Fx \rightarrow Gx)}$$

et

(14) $$\frac{\exists x(Fx \wedge Gx)}{Ga \vee Gb \vee \ldots \vee Gz}$$

ne sont pas valides, même si nous réuississons en effet d'enumérer tous les F par « a », « b », ..., « z ». La raison pour ceci est simplement qu'il est toujours possible qu'il y ait plus de F que ceux qui existent en réalité, et que nous requérons pour la validité la transmission *nécessaire* de la vérité des prémisses à la conclusion. Nous sommes donc obligés de rajouter une prémisse supplémentaire aux deux inférences, stipulant que notre énumeration est en effet exhaustive :

(15) $$\frac{\begin{array}{c} Ga \wedge Gb \wedge \ldots \wedge Gz \\ \forall x(Fx \rightarrow (x = a \vee x = b \vee \ldots \vee x = z)) \end{array}}{\forall x(Fx \rightarrow Gx)}$$

(16) $$\frac{\begin{array}{c} \exists x(Fx \wedge Gx) \\ \forall x(Fx \rightarrow (x = a \vee x = b \vee \ldots \vee x = z)) \end{array}}{Ga \vee Gb \vee \ldots \vee Gz}$$

A9	$\forall x(\mathbf{Ph}(x) \to \mathbf{M}(x))$	**A10**	$\neg\exists x(\mathbf{Ph}(x) \wedge \neg\mathbf{M}(x))$
B9	$\forall x(\mathbf{noir}(x) \to \neg\mathbf{rouge}(x))$	**B10**	$\neg\exists x(\mathbf{noir}(x) \wedge \mathbf{rouge}(x))$
C9	$\neg\forall x(\mathbf{P}(x) \to \neg\mathbf{H}(x))$	**C10**	$\exists x(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{H}(x))$
D9	$\neg\forall x(\mathbf{A}(x) \to \mathbf{P}(x))$	**D10**	$\exists x(\mathbf{A}(x) \wedge \neg\mathbf{P}(x))$

L'équivalence logique entre « $\forall x(\ldots x \ldots)$ » et « $\neg\exists x\neg(\ldots x \ldots)$ » a une autre conséquence : elle implique que le quantificateur universel n'a pas d'engagement existentiel – que nous ne pouvons pas conclure du fait que tous les F sont G qu'il y a des F.[38] Cela s'explique par l'équivalence mentionnée : s'il n'y a pas de F, il n'y a pas de F qui sont G et il n'y a pas non plus de F qui sont $\neg G$. Par conséquent « $\neg\exists x(Fx \wedge Gx)$ » et « $\neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$ » sont des phrases vraies. Ces phrases, cependant, sont équivalentes à « $\forall x(Fx \to \neg Gx)$ » et à « $\forall x(Fx \to Gx)$ » respectivement. Étant donné qu'il n'y a pas de licornes, « toutes les licornes sont bleues » et « toutes les licornes ne sont pas bleues » sont deux phrases également vraies.

Il est donc significatif que nous formalisions « tous les F sont G » par « $\forall x(Fx \to Gx)$ », utilisant l'implication pour restreindre le choix des x en question. Il est également significatif que nous formalisons « il y a des F qui sont des G » ou « quelques F sont des G » par « $\exists x(Fx \wedge Gx)$ », utilisant la conjonction plutôt que, par exemple, l'implication. Étant donné l'interdéfinissabilité des connecteurs, « $\exists x(Fx \to Gx)$ » est équivalente à « $\exists x(\neg Fx \vee Gx)$ », une phrase qui n'affirme pas qu'il y a des F.

Vu le gain en expressivité, la formalisation en logique des prédicats est plus difficile que celle en logique propositionelle. Considérons par exemple le phénomène de généralité multiple (ch. 8.7). La formalisation des phrases du langage ordinaire exhibant une généralité multiple en termes d'une langue de la logique de prédicats est souvent compliquée par le fait que le langage ordinaire contient beaucoup d'occurrences d'une généralité implicite, comme dans l'exemple suivant :

(**i**) Toutes les filles bien-élevées aiment un prince.

Comparée à d'autres phrases comme « toutes les filles bien-élevées aiment leur père » vs. « toutes les filles bien-élevées aiment leurs pères », (**i**) n'est pas ambigüe entre « $\forall\exists$ » et « $\exists\forall$ », mais plutôt entre les deux phrases suivantes :

($\mathbf{i}'$)	$\forall x((Fx \wedge Bx) \to \exists y(Py \wedge Axy))$	toutes les filles bien-élevées aiment quelque prince
($\mathbf{i}''$)	$\forall x((Fx \wedge Bx) \to \forall y(Py \to Axy))$	toutes les filles bien-élevées aiment n'importe quel prince

Pour illustrer d'autres difficultés, considérons les raisonnements fallacieux suivants :

F1 Bleu est la couleur du ciel. La couleur du ciel change. Donc bleu change.

F2 Les apôtres sont douze. Jean est un apôtre. Donc Jean est douze.

F3 Les hommes sont disséminés un peu partout sur la Terre. Jacques est un homme. Donc Jacques est disséminé un peu partout sur la Terre.

A propos de la première inférence (**F1**), il faut faire la distinction entre descriptions définis et noms propres, puisque c'étaient précisément des exemples comme celui-ci qui avaient motivés Bertrand Russell (1905) pour sa théorie des descriptions définis (traduction française : Russell (1989)).

L'inférence (**F1**) est valide dans la logique des prédicats standard si nous la formalisons comme suit :[39]

(17)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{bleu} = \text{la couleur de ciel}\\ \text{change(la couleur du ciel)}\end{array}}{\text{change(bleu)}}$$

38. Nous avons vu à la p. 145 que ce charactéristique distingue la logique des prédicats de la syllogistique.

39. Il faut remarquer, cependant, que la logique des prédicats standard ne considère que des prédicats de premier ordre. La formalisation donnée est donc incorrecte pour plus d'une raison.

(17) est valide parce qu'une et la même chose ne peut pas satisfaire et en même temps ne pas satisfaire la même phrase ouverte « … change ».

La théorie des descriptions définies de Russell nous conseille, cependant, de ne pas formaliser la première prémisse comme l'affirmation d'une identité, « bleu = la couleur de ciel », mais comme une prédication « la couleur de ciel(bleu) » – disant de la couleur bleu (une propriété), qu'elle satisfait la phrase ouverte « … est la couleur de ciel ». Comme nous l'avons vu, Russell nous conseille de formaliser une description définie comme « le roi de la France » comme suit

$$\text{« Le roi de la France est chauve. »} \quad \rightsquigarrow \quad \exists! x(x \text{ est roi de la France} \wedge x \text{ est chauve})$$ [40]

Cette formalisation a l'avantage considérable de nous permettre une distinction entre deux interprétations de « Le roi de la France n'est pas chauve », une qui implique qu'il est poilu (et donc existe), une autre qui dit seulement que la phrase « le roi de la France est chauve » est fausse :

$$\begin{array}{rcl} \text{« Le roi de la France, il n'est pas chauve. »} & \rightsquigarrow & \exists! x(x \text{ est roi de la France} \wedge \neg(x \text{ est chauve})) \\ \text{« Il n'est pas le cas que : le rdF est chauve. »} & \rightsquigarrow & \neg\exists! x(x \text{ est roi de la France} \wedge x \text{ est chauve}) \end{array}$$

Dans la deuxième inférence (**F2**), nous avons affaire à un prédicat numérique « … sont douze », qui pose les mêmes problèmes que le prédicat « … existe » (cf. p. 156 et le ch. 11.5). Nous ne pouvons donc pas les formaliser comme prédicats ordinaires, puisque autrement l'inférence suivante serait valide :

$$(18) \qquad \frac{\begin{array}{c}\forall x(x \text{ est un apôtre} \rightarrow x \text{ est douze}) \\ (\ldots\text{est un apôtre})\ \text{Jean}\end{array}}{(\ldots\text{est douze})\ \text{Jean}}$$

Comme « …existe », les prédicats numériques doivent être formalisés à l'aide du quantificateur existentiel :

il y a au moins un F	$\rightsquigarrow$	$\exists x(Fx)$
il y a au maximum un F	$\rightsquigarrow$	$\forall x \forall y\,((Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y)$
il y a exactement un F	$\rightsquigarrow$	$\exists x\,(Fx\ \wedge \forall y\,(Fy \rightarrow y = x))$ [41]
il y a au moins deux F	$\rightsquigarrow$	$\exists x \exists y\,(Fx \wedge Fy\ \wedge\ x \neq y)$
il y a au maximum deux F	$\rightsquigarrow$	$\forall x \forall y \forall z((Fx \wedge Fy \wedge Fz) \rightarrow (x = y \vee y = z \vee x = z))$
il y a exactement deux F	$\rightsquigarrow$	$\exists x \exists y\,(Fx \wedge Fy\ \wedge\ x \neq y\ \wedge\ \forall z\,(Fz \rightarrow (x = z \vee y = z)))$
il y a au moins trois F	$\rightsquigarrow$	$\exists x \exists y \exists z\,(Fx \wedge Fy \wedge Fz\ \wedge\ x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$
il y a exactement trois F	$\rightsquigarrow$	$\exists x \exists y \exists z\,(Fx \wedge Fy \wedge Fz\ \wedge\ x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge$ $\forall w(Fw \rightarrow (w = x \vee w = y \vee w = z)))$

La troisième inférence (**F3**), finalement, est la plus difficile à exclure : le diagnostic est que « … être disséminé » est un prédicat dit « collectif » qui s'applique à une pluralité et ne peut pas être défini en termes de prédicats qui s'appliquent aux membres de cette pluralité.[42] Considérons les exemples suivants :

40. Nous utilisons ici « $\exists! x(\phi(x))$ » pour dire qu'il existe *exactement* une chose qui ϕ. Dans le langage naturel, « il y a un qui …x… » est souvent ambigüe entre « $\exists x(\phi(x))$ » et « $\exists! x(\phi(x))$ ». Dans le cas de « il y a un philosophe irlandais », la bonne formulation utilise « $\exists$ », dans « il a un enfant » elle utilise « $\exists!$ », mais « il a fait une faute » (sans intonation particulière) peut être ambigüe entre les deux.

42. Á la suite de Boolos (1984), différents auteurs ont développé une « logique plurielle », qui introduit des constantes individuelles pour des pluralités (cf. par. ex. McKay 2006). Nous reviendrons sur cette « quantification plurielle » au ch. 12.6.

Russell et Whitehead sont des hommes.	$\Leftrightarrow$	Russell est un homme $\wedge$ Whitehead est un homme
Russell et Whitehead ont écrit les *Principia*.	$\not\Leftrightarrow$	Russell a écrit les *Principia* $\wedge$ Whitehead a écrit les *Principia*

Le fait que la deuxième équivalence ne fonctionne pas montre que « … a écrit les *Principia* », contrairement a « … est un homme », est un prédicat collectif : être co-auteur ne veut pas dire être auteur, mais être membre d'un collectif d'hommes veut dire être un homme. C'est parce qu'il s'agit d'un prédicat collectif que nous ne pouvons pas formaliser la première prémisse de (**F3**) comme :

$\forall x$ (x est un homme $\rightarrow$ x est disséminé un peu partout sur la Terre)

9.6 Une classification des expressions

La logique propositionnelle, nous l'avons dit, traite des phrases et des connecteurs, la logique des prédicats traite des prédicats, des quantificateurs et des constantes individuelles. Nous avons également dit qu'une phrase est ce qui est exprimé par une phrase complète qui peut être vraie ou fausse et qu'un prédicat est tiré d'une phrase après l'effacement d'un ou de plusieurs noms. Nous devons maintenant être un peu plus précis.

La notion « proposition », qui est une notion philosophique, ne coïncide pas avec la notion « phrase », qui est une notion grammaticale. Une phrase peut être complète du point de vue grammatical sans pour autant exprimer une proposition : « J'ai faim », pour être vraie ou fausse, a besoin d'être complétée par le contexte de l'énonciation pour attribuer une référence indexicale à « je » ; dans certains contextes, cette phrase exprime la phrase qu'un certain individu, a, a faim, dans d'autres qu'un autre individu, b, a faim. Une phrase peut aussi être complexe et ainsi exprimer une phrase complexe qui contient plusieurs phrases simples. Le critère d'identification des phrases est leur capacité à être vraies ou fausses. Parallèlement à ce critère sémantique, il existe un critère purement syntaxique : une phrase (au sens logique) est une entité linguistique qui peut être combinée avec une négation externe (« il n'est pas le cas que … »).

Les différences entre les points de vue grammatical et logique se multiplient quand on prend en compte la structure interne des phrases, comme nous le faisons dans la logique des prédicats. La grammaire classique distingue des noms propres, des noms communs, des verbes, des particules, des prépositions, des adverbes et des adjectifs. La logique des prédicats ne reconnaît, cependant, que des connecteurs propositionnels, des quantificateurs, des prédicats et des termes singuliers. Les connecteurs sont les concepts formels qui nous servent à former des phrases complexes à partir de phrases simples. Un prédicat est une expression qui nous sert à attribuer une propriété. Cette propriété peut être une propriété d'une ou de plusieurs choses ; un prédicat unaire (qui résulte d'une phrase en effaçant (plusieurs occurrences d') un seul nom) attribue une propriété monadique, un prédicat binaire (tertiaire, …) une propriété relationnelle. Syntaxiquement, un prédicat est une expression qui peut être combinée avec une négation interne, « … n'est pas tel que … », qui prend un prédicat (dans sa deuxième position) et en fait un autre.

Une représentation claire et exhaustive de représenter ces différences grammaticales nous est fournie par la grammaire dite « catégorielle » (cf. Gardies 1975) qui représente les phrases par « S » et les termes singuliers par « N ». Nous pouvons dire qu'un connecteur propositionnel binaire est une expression de la catégorie **S/SS**, parce qu'il prend deux phrases pour en faire une, plus complexe : [43]

43. Un avantage de la notation de la grammaire catégorielle est qu'elle nous permet de calculer le type syntaxique de la

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Il pleut} & \text{et} & \text{Je suis triste} \\
\mathbf{S} & \mathbf{S}/\mathbf{SS} & \mathbf{S} \\
\hline
 & \text{Il pleut et je suis triste} & \\
 & \mathbf{S} &
\end{array}
$$

Les autres connecteurs propositionnels binaires, « ou », « si-alors », « si et seulement si », s'appliquent également à deux phrases et en forment une phrase complexe. La négation externe s'applique cependant qu'à une seule phrase et est donc du type $\mathbf{S}/\mathbf{S}$.

Un prédicat unaire, d'après notre définition, est une expression qui forme, avec un terme singulier, une phrase complète, ce qui correspond au type $\mathbf{S}/\mathbf{N}$:

$$
\begin{array}{cc}
\text{Sam} & \text{... est triste} \\
\mathbf{N} & \mathbf{S}/\mathbf{N} \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{\text{Sam est triste.}} \\
\multicolumn{2}{c}{\mathbf{S}}
\end{array}
$$

Les prédicats binaires seront du type $\mathbf{S}/\mathbf{NN}$, les prédicats ternaires du type $\mathbf{S}/\mathbf{NNN}$ et ainsi de suite. Cette notation nous montre comment un prédicat binaire, combiné avec un seul terme singulier, devient un prédicat unaire (dit « relationnel », parce qu'il est obtenu d'une relation) :

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Sam} & \text{... aime} \cdots & \text{Maria} \\
 & \mathbf{S}/\mathbf{NN} & \mathbf{N} \\
\hline
 & \multicolumn{2}{c}{\text{... aime Maria}} \\
\mathbf{N} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{S}/\mathbf{N}} \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{\text{Sam aime Maria}} & \\
\multicolumn{2}{c}{\mathbf{S}} &
\end{array}
$$

L'expression « ... aime $\cdots$ » du type $\mathbf{S}/\mathbf{NN}$ a été partiellement complétée par le nom « Maria » (du type $\mathbf{N}$), ce qui produit une expression du type $\mathbf{S}/\mathbf{N}$. La relation exprimée par « ... aime $\cdots$ » est une propriété de la paire $\langle$ Sam, Maria $\rangle$, mais la propriété monadique exprimée par « ... aime Maria » est une propriété de Sam.

La grammaire catégorielle nous permet aussi de symboliser l'autre usage que nous avons fait des connecteurs qui était de relier non pas des phrases ou phrases complètes, mais des phrases ouvertes :

$$
\begin{array}{cccc}
\text{Sam} & \text{... est triste} & \text{et} & \text{... marié} \\
 & \mathbf{S}/\mathbf{N} & (\mathbf{S}/\mathbf{N})/(\mathbf{S}/\mathbf{N})(\mathbf{S}/\mathbf{N}) & \mathbf{S}/\mathbf{N} \\
\hline
 & \multicolumn{3}{c}{\text{... est triste et marié}} \\
\mathbf{N} & \multicolumn{3}{c}{\mathbf{S}/\mathbf{N}} \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{\text{Sam est triste et marié}} & & \\
\multicolumn{2}{c}{\mathbf{S}} & &
\end{array}
$$

Le connecteur « $\wedge$ » dans cette phrase est du type $(\mathbf{S}/\mathbf{N})/(\mathbf{S}/\mathbf{N})(\mathbf{S}/\mathbf{N})$ – il prend deux phrases ouvertes et en forme une phrase ouverte. Nous voyons donc qu'à strictement parler, les connecteurs du langage de la logique des prédicats *ne sont pas les mêmes* que les connecteurs du langage de la logique propositionnelle. La conjonction qui appartient à ce dernier langage, par exemple, est du type $\mathbf{S}/\mathbf{SS}$, bien que la conjonction dans la logique des prédicats peut être des deux types $\mathbf{S}/\mathbf{SS}$ et $(\mathbf{S}/\mathbf{N})/(\mathbf{S}/\mathbf{N})(\mathbf{S}/\mathbf{N})$.

---

juxtaposition de deux expressions arbitraires : la combinaison d'une expression du type $\mathbf{S}/\mathbf{SS}$ avec deux expressions du type $\mathbf{S}$ serait du type $\mathbf{S}$. La combinaison d'une telle expression avec une expression du type $\mathbf{N}$ sera mal-formée.

La grammaire catégorielle nous permet de représenter facilement des prédicats de deuxième et troisième ordre. Un prédicat est dit « de premier ordre » s'il s'applique à des noms d'objets, c'est-à-dire à des expressions qui représentent des choses qui ne sont ni des propriétés ni des relations, mais des individus. C'est de ces prédicats que l'on a parlé jusqu'à maintenant. Un prédicat de deuxième ordre est un prédicat qui s'applique à des propriétés et à des relations et qui se combine avec des prédicats – les expressions, par exemple, « ... est un prédicat » et « ... s'applique à un nom d'un objet pour former une phrase » sont des prédicats de deuxième ordre.[44] Comme un prédicat (unaire) de premier ordre est du type $\mathbf{S}/\mathbf{N}$, un prédicat de deuxième ordre sera du type $\mathbf{S}/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$. Il y a également des prédicats de troisième ordre ($\mathbf{S}/(\mathbf{S}/(\mathbf{S}/\mathbf{N}))$), de quatrième ordre, etc.

L'interprétation sémantique des prédicats de deuxième et de troisième ordre se fait plus intuitivement en termes d'ensembles. Supposons que la totalité des choses pour lesquelles nous disposons de noms ou dont nous voulons parler forme un ensemble D, notre *univers de discours* et notre *domaine de quantification*. Un prédicat, nous l'avons vu, est vrai de certaines de ces choses – son extension sera alors un sous-ensemble de D. Si nous identifions des prédicats ayant la même extension, nous pouvons dire que n'importe quel sous-ensemble de D (n'importe quel membre de $\mathcal{P}(D)$, c'est-à-dire de l'ensemble de tous les sous-ensembles de D) définit (ou correspond à) un prédicat – le prédicat qui est vrai de tous les objets et seulement des objets qui se trouvent dans le sous-ensemble de D en question.[45]

Si les prédicats de premier ordre sont des membres de $\mathcal{P}(D)$ (les sous-ensembles de D), les prédicats de deuxième ordre sont des membres de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(D))$ – ils sont vrais de certains prédicats (de certains sous-ensembles de D) et faux d'autres ; ils ont donc comme extensions des ensembles de sous-ensembles. Nous voyons par cette analogie que la similarité entre les différents ordres de prédicats et les différents types dans la théorie des ensembles n'est pas que superficielle, mais qu'elle est basés sur une vraie correspondence dans la grammaire catégorielle.

Cependant, les prédicats ‹ ordinaires› de deuxième ordre ne sont pas les seuls à tomber sous la catégorie $\mathbf{S}/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$: comme nous l'avons vu à la p. **??**, les autres expressions qui tombent sous ce type sont les quantificateurs de premier ordre. Les quantificateurs prennent des phrases ouvertes pour en faire des phrases complètes. Les phrases ouvertes peuvent être de différents ordres, selon qu'elles sont vraies (ou fausses) d'objets ou vraies (ou fausses) de prédicats ou vraies (ou fausses) de prédicats de prédicats etc. Les deux quantificateurs de la logique des prédicats, le quantificateur universel « $\forall x(\ldots x \ldots)$ » et le quantificateur existentiel « $\exists x(\ldots x \ldots)$ », ne prennent que des prédicats ou phrases ouvertes de premier ordre – ils quantifient sur des objets et sont, pour cette raison, appelés « objectuels » :

Il y a quelqu'un		... est triste
$\mathbf{S}/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$		$\mathbf{S}/\mathbf{N}$
	Il y a quelqu'un qui est triste.	
	$\mathbf{S}$	

Les quantificateurs de premier ordre sont de la même catégorie que les prédicats de deuxième ordre. Une logique ne contenant dans son langage que des quantificateurs qui s'appliquent à des phrases ouvertes de premier ordre (et qui sont, en conséquence, eux-mêmes de deuxième ordre) est appelée elle-même « de premier ordre ». La logique classique des prédicats est la logique des prédicats de premier ordre et c'est elle que nous allons étudier.

44. Nous parlerons dans le ch. 12.5 de la logique des prédicats de deuxième ordre.

45. Dans le cas où ce sous-ensemble est fini, nous pouvons facilement formuler un tel prédicat comme une disjonction d'identités : au sous-ensemble $\{a, b, c\}$, par exemple, correspondra le prédicat « $(x = a \vee x = b \vee x = c) \wedge \forall y((y \neq a \wedge y \neq b \wedge y \neq c) \rightarrow y \neq x)$ ».

9.7 Les quantificateurs

Nous avons vu comment nous pouvons nous servir du mécanisme de la quantification pour exprimer des phrases générales. Cette introduction de quantificateurs rend notre langage plus expressif. Supposons que nous voulons dire que tous les hommes sont mortels et l'exprimer dans notre langage. Vu qu'il n'y a qu'un nombre fini d'êtres humains (présents ou passés, au moins), nous pourrions énoncer la longue conjonction suivante :

Sylvie est mortelle $\wedge$ Sam est mortel $\wedge$ Marie est mortelle $\wedge$ Rosemarie est mortelle $\wedge$ Jean-Claude est mortel $\wedge$ Kevin est mortel $\wedge$ Roberta est mortelle $\wedge$ John est mortel $\wedge$ Claudia est mortelle $\wedge$ Robert est mortel $\wedge$ Philipp est mortel $\wedge$ ...

– une phrase certainement très longue, mais finie et bien-formée selon la logique propositionnelle. Si nous arrivons à énumérer tous les hommes, nous obtenons une phrase qui est vraie si et seulement si tous les hommes sont mortels. Si je dis qu'il y a, parmi ce nombre finis d'êtres humains, un que j'aime, je pourrais énoncer une disjonction :

j'aime Sylvie $\vee$ j'aime Sam $\vee$ j'aime Marie $\vee$ j'aime Rosemarie $\vee$ j'aime Jean-Claude $\vee$ j'aime Kevin $\vee$ j'aime Roberta $\vee$ j'aime John $\vee$ j'aime Claudia $\vee$ j'aime Robert $\vee$ j'aime Philipp $\vee$ ...

Néanmoins, une telle procédure, en plus de son caractère rébarbatif, aurait au moins trois autres désavantages majeurs :

1. La longue conjonction est équivalente logiquement à « tous les hommes sont mortels » seulement s'il n'y a qu'un nombre fini d'hommes.
2. La longue conjonction est équivalente logiquement à « tous les hommes sont mortels » seulement si tous les hommes ont des noms.
3. Lorsque nous parlons de tous les hommes, notre énonciation a un aspect général : nous ne voulons pas dire qu'il n'y a qu'un nombre fini d'hommes ou que nous connaissons un nom pour chaque homme qui existe ou existait, mais nous voulons parler de la totalité des hommes, indépendamment des membres particuliers qu'elle contient.

L'usage du quantificateur universel « $\forall$ » ne tombe sous aucune de ces restrictions. Pour dire que tous les hommes sont mortels, nous disons simplement : [46]

(19) $\forall x$ (x est un homme $\rightarrow$ x est mortel)

Dans la phrase (19), nous ne parlons d'aucun homme en particulier : le quantificateur universel prend ses valeurs dans tout l'univers du discours. Nous notons deux conséquences de cette généralité : premièrement, (19) est 'confirmée' par tous les pingouins – parce que tout pingouin satisfait la phrase ouverte

46. Il y a plusieurs façons de lire la phrase (19) :
1. Les hommes sont mortels.
2. Un humain est mortel.
3. Chaque homme est mortel.
4. Quiconque est un homme est mortel.

Nous utiliserons parfois la locution « tous les x sont tels que, si x est un homme, alors x est mortel » qui rend plus visible la forme logique.

« $\neg$ (x est un homme) $\vee$ (x est mortel) ».[47] Deuxièmement, (19) est vraie s'il n'y a pas d'hommes ; dû à la signification de « $\rightarrow$ », la phrase ouverte complexe est vraie de tout objet dont l'antécédent est faux.

La quantification est intimément liée au concept de « univers de discours » ou « domaine de quantification ». « $\forall x(Fx)$ » signifie que tous les éléments du domaine de quantification ont la propriété exprimée par le prédicat « Fx » ; « $\exists x(Fx)$ » signifie qu'il existe au moins un élément du domaine de quantification qui a la propriété exprimée par le prédicat « Fx ». Le domaine de quantification est l'ensemble des choses dont nous parlons[48] – les choses qui peuvent fournir des contre-exemples à nos assertions.

Le domaine de quantification nous fournit une interprétation d'une variable sous une assignation. Assigner une valeur à une variable revient à choisir un élément du domaine de quantification comme valeur pour la variable.

Comme nous avons vu à la p. 158, la quantification dans les langues naturelles est souvent restreinte. Quand je dis, par exemple, qu'il ne reste plus de bière, je ne parle pas de toutes les bières dans l'univers, mais je dis plutôt qu'il n'y a plus de bières *dans mon appartement* : je dis de toutes les choses dans mon appartement qu'elles ne sont pas de bières. Dans la logique de prédicats, ceci correspond à une conditionalisation de mon assertion : « $\forall x(x$ est dans mon appartement $\rightarrow \neg(x$ est une bière$)x)$ ». Il est à remarquer que la quantification dans cette assertion *n'est pas* restreinte : l'affirmation ne parle pas seulement des choses dans mon appartement, mais de toutes les choses (et elle est, en plus, vraie de toutes les choses qui ne sont pas dans mon appartement, même des bières qui se trouvent ailleurs). De manière analogue, la restriction de la quantification existentielle se fait par une conjonction : la formalisation de «

Pour éviter cette conséquence, nous pouvons explicitement restreindre la quantification, comme nous faisons souvent en mathématique : quand je dis qu'il y ait un nombre entre 4 et 6, j'écrirait « $\exists x \in \mathbb{N}(4 < x < 6)$ », où le prédicat « $x \in N$ » n'est vraie que des nombres naturels.[49]

Même si notre langage est devenu plus expressif en incluant des variables et des quantificateurs, qu'est-ce qui s'ensuit sur la logique ? Est-ce que nous serons toujours capable de formaliser comme valides les inférences syllogistiques ? Revenons donc sur les inférences (1), (2) et (3). En formalisant les prémisses et les conclusions dans la logique des prédicats, nous obtenons les inférences :

$$\begin{array}{c}\text{Tous les hommes sont mortels.}\\ \text{Tous les philosophes sont des hommes.}\\ \hline \text{Tous les philosophes sont mortels.}\end{array} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{array}{c}\forall x\ (x \text{ est un homme} \rightarrow\ x \text{ est mortel})\\ \forall x\ (x \text{ est un philosophe} \rightarrow\ x \text{ est un homme})\\ \hline \forall x\ (x \text{ est un philosophe} \rightarrow\ x \text{ est mortel})\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{Aucun philosophe n'est méchant.}\\ \text{Quelques logiciens sont des philosophes.}\\ \hline \text{Quelques logiciens ne sont pas méchants.}\end{array} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{array}{c}\neg\exists x\ (x \text{ est un philosophe} \wedge\ x \text{ est méchant})\\ \exists x\ (x \text{ est un logicien} \wedge\ x \text{ est un philosophe})\\ \hline \exists x\ (x \text{ est un logicien} \wedge\ \neg(x \text{ est méchant}))\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{Aucun philosophe n'est parfait.}\\ \text{Tous les philosophes sont des hommes.}\\ \hline \text{Aucun homme est parfait.}\end{array} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{array}{c}\neg\exists x\ (x \text{ est un philosophe} \wedge\ x \text{ est parfait})\\ \forall x\ (x \text{ est un philosophe} \rightarrow\ x \text{ est un homme})\\ \hline \neg\exists x\ (x \text{ est un homme} \wedge\ x \text{ est parfait})\end{array}$$

47. Je mets « 'confirmée' » en 'scare quotes' puisqu'il s'agit plutôt d'un problème que d'une conséquence désirable pour la théorie de la confirmation.

48. Je dis « ensemble » même si cette notion relève des problématiques. Comme nous prouverons à la p. 260, il ne peut pas y avoir un ensemble universel – un ensemble qui contient tout ce qu'il y a (donc également soi-même). D'après beaucoup (cf. par ex. Williamson 2003), il est cependant parfaitement cohérent de quantifier sur tout ce qu'il y a. Dans une telle théorie, en conséquence, le domaine de quantification ne peut pas être un ensemble.

49. Même dans ce cas, cependant, la différence entre « $\exists x \in \mathbb{N}(4 < x < 6)$ » et « $\exists x(x \in \mathbb{N} \wedge 4 < x < 6)$ » reste notationnelle.

Nous pouvons facilement justifier la validité de ces trois inférences :

(1) : Si nous choisissons, pour vérifier la conclusion, n'importe quel individu a qui est un philosophe, la deuxième prémisse nous dit que cet individu est un homme et la première prémisse nous dit qu'en conséquence il est mortel.

(2) : La deuxième prémisse nous dit qu'il y a un objet, appelons-le « a », qui est logicien et philosophe. Si, contrairement à ce que dit la conclusion, ce a n'était pas seulement un logicien, mais aussi méchant, alors il y aurait, contrairement à ce que dit la première prémisse, un philosophe méchant.

(3) : S'il y avait un philosophe parfait, alors ce philosophe, par la deuxième prémisse, serait un homme et alors, par la première prémisse, il ne serait pas parfait. Donc il n'y a pas de philosophe parfait.

Le but de la prochaine leçon (10) est de formuler une sémantique qui justifie la validité de ces schémas d'inférences.

Points à retenir

1. La logique des prédicats formalise des inférences qui charactérisent le comportement logique des quantificateurs.
2. Une inférence de la logique de prédicats nous apprend qu'un prédicat est *vrai d'* une ou plusieurs choses s'il est vrai de certaines choses.
3. La forme générale d'une phrase simple dans la logique de prédicats est « Fa » – F est considéré comme une fonction qui prend une chose (a, dans notre exemple) et donne une valeur de vérité.
4. Nous pouvons donner des clauses récursives pour expliquer la signification (les conditions de satisfaction) d'un prédicat complexe en termes des significations (conditions de satisfaction) de ses parties.
5. Les prédicats dans la logique des prédicats sont unaires, binaires ou plus généralement n-adiques.
6. Un terme singulier est soit un nom, un indexical, un démonstratif ou une description définie.
7. La grammaire catégorielle charactérise un prédicat par le type $\mathbf{S}/\mathbf{N}$, les connecteurs de phrases par le type $\mathbf{S}/\mathbf{S}$, les connecteurs qui forment des prédicats complexes par le type $(\mathbf{S}/\mathbf{N})/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$ et les quantificateurs de premier ordre par le type $\mathbf{S}/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$.
8. Les quantificateurs sont alors des prédicats de deuxième ordre, bien que, comme les termes singuliers, ils s'appliquent à des prédicats pour en faire des phrases.
9. Le quantificateur universel 'abrège' des conjonctions infinies ; le quantificateur existentiel 'abrège' des disjonctions infinies ; ils sont duales de la même manière que le sont la conjonction et la disjonction.
10. Un quantificateur a un domaine de quantification associé qui limite le choix d'objets pour l'interprétation de la variable qu'il quantifie.