

Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe

Einführungskurs Logik, Universität Bern, Frühlingsemester 2009

an der Prüfung am 26. Mai zur Verfügung stehendes Material

Philipp Keller philipp.keller@unige.ch

Syntax

Die Sprache der Aussagenlogik

Definition 1. Die Alphabet der formalen Sprache \mathcal{L} der klassischen Aussagenlogik besteht aus folgenden Zeichen:

- den einfachen (atomaren) Sätzen " p_0 ", " p_1 ", " p_2 " ... (abzählbar unendlich viele)
- den aussagenlogischen Junktoren " \neg " ("es ist nicht der Fall, dass"), " $\dots \wedge \dots$ " ("und"), " $\dots \vee \dots$ " ("oder"), " $\dots \rightarrow \dots$ " ("wenn-dann") und " $\dots \leftrightarrow \dots$ " ("gdw.")
- Klammern und Kommata

Definition 2. Eine wohlgeformte Formel der Sprache \mathcal{L} ist entweder:

- ein atomarer Satz " p_i " ($i \in \mathbb{N}$); oder
- von der Form $\neg \phi$, wobei ϕ eine wohlgeformte Formel ist; oder
- von der Form $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \psi$ oder $\phi \leftrightarrow \psi$, wobei ϕ und ψ wohlgeformte Formeln sind.

Definition 3. Eine Theorie Th ist eine (endliche oder unendliche) Menge wohlgeformter Formeln.

Die Sprache der Prädikatenlogik

Definition 4. Die Alphabet der Sprache \mathcal{L}^+ der klassischen Prädikatenlogik besteht aus den folgenden Zeichen:

1. den folgenden logischen Zeichen:
 - (a) den Junktoren " \neg " ("nicht"), " $\dots \wedge \dots$ " ("und"), " $\dots \vee \dots$ " ("oder"), " $\dots \rightarrow \dots$ " ("wenn-dann") und " $\dots \leftrightarrow \dots$ " ("gdw.");
 - (b) den Quantoren " $\forall x(\dots x \dots)$ " ("für jedes x ") und " $\exists x(\dots x \dots)$ " ("es gibt mindestens ein x ");
 - (c) dem Identitätszeichen: " $\dots = \dots$ " ("...ist identisch mit...");
 - (d) den Individuenvariablen: " x_i " für jedes $i \in \mathbb{N}$;
2. den folgenden nicht-logischen Zeichen:
 - (a) den Relationszeichen: " R_i " für jedes $i \in \mathbf{I}$;
 - (b) den Funktionszeichen: " f_i " für jedes $i \in \mathbf{J}$;
 - (c) den Individuenkonstanten: " c_i " für jedes $i \in \mathbf{K}$;
3. den Hilfszeichen: Klammern, Kommata.

Definition 5. Die Terme der Sprache $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ sind durch folgende rekursive Definition festgelegt:

1. Jede Individuenvariable " x_i " ist ein Term.
2. Jede Individuenkonstante " c_i " ist ein Term.
3. Wenn " t_1 ", " t_2 ", ..., " t_n " Terme sind, $j \in \mathbf{J}$ und $n = \mu(j)$, dann ist auch " $f_j(t_1, t_2, \dots, t_n)$ " ein Term.

Definition 6. ϕ ist eine atomare Formel der Sprache $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ gdw.:

1. ϕ ist von der Form " $t_1 t_2$ " für zwei Terme " t_1 " und " t_2 "; oder
2. ϕ ist von der Form " $R_i(t_1, t_2, \dots, t_{\lambda(i)})$ " für Terme " t_1 ", " t_2 ", ..., " $t_{\lambda(i)}$ ", $j \in \mathbf{J}$;

Definition 7. ϕ ist eine wohlgeformte Formel der Sprache $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ gdw.:

1. ϕ ist eine atomare Formel; oder
2. ϕ ist von der Form $\neg \psi$ für eine wohlgeformte Formel ψ ; oder

3. ϕ ist von der Form $\ulcorner(\psi \wedge \chi)\urcorner, \ulcorner(\psi \vee \chi)\urcorner, \ulcorner(\psi \rightarrow \chi)\urcorner$ oder $\ulcorner(\psi \leftrightarrow \chi)\urcorner$, für wohlgeformte Formeln ψ und χ ; oder
4. ϕ ist von der Form $\ulcorner\forall x_i(\psi)\urcorner$ oder $\ulcorner\exists x_i(\psi)\urcorner$ für eine wohlgeformte Formel ψ und eine Variable " x_i ", $i \in \mathbb{N}$.

Definition 8. Sei ϕ eine wohlgeformte Formel und " x_i " eine Variable. Wir sagen, dass " x_i " frei in ϕ vorkommt gdw. eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. ϕ ist eine atomare Formel und enthält " x_i "; oder
2. ϕ ist von der Form $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ und " x_i " kommt frei vor in ψ ; oder
3. ϕ ist von der Form $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner, \ulcorner\psi \vee \chi\urcorner, \ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ ou $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ und " x_i " kommt entweder in ψ oder in χ frei vor;
4. ϕ ist von der Form $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ und $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner, i \neq j$ und " x_i " kommt in ψ frei vor.

Definition 9. Ein Satz ist eine wohlgeformte Formel, in der keine Variable frei vorkommt.

Definition 10. Sei ϕ eine Formel, die eine Quantifikation der Variable " x " enthält (" $\forall x$ " oder " $\exists x$ "). Wir nennen die kleinste Formel nach der Quantifikation den Geltungsbereich des Quantors.

Beweistheorie

Definition 11. Ein Kalkül ist eine Menge wohlgeformter Formeln (der sog. "Theoreme"), die durch eine Menge sog. "Axiome" und den Schlussregeln folgendermassen festgelegt ist:

1. Jedes Axiom ist ein Theorem.
2. Das Resultat der Anwendung einer Schlussregel auf Theoreme ist auch ein Theorem.
3. Es gibt keine anderen Theoreme.

Definition 12. Ein Beweis, in einem Kalkül HK und ausgehend von einer Theorie Th, ist eine endliche Sequenz von Sätzen $\langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle$, in der jeder Satz aus den vorhergehenden ableitbar ist; d.h. es gilt für alle $i, 1 \leq i \leq n$: $\text{HK} \cup \text{Th} \cup \{\phi_1, \dots, \phi_{i-1}\} \vdash \phi_i$.

Definition 13. Wenn HK ein Kalkül, Th eine Theorie und ϕ eine wohlgeformte Formel ist, definieren wir " $\text{HK} \cup \text{Th} \vdash^n \phi$ " (für jede beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$) durch mathematische Induktion über die natürlichen Zahlen:

1. Wenn ϕ ein Axiom von HK ist, dann $\text{HK} \cup \text{Th} \vdash^n \phi$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
2. Wenn ϕ ein Element von Th ist, dann $\text{HK} \cup \text{Th} \vdash^n \phi$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
3. Wenn $\text{HK} \cup \text{Th} \vdash^{m_i} \psi_i$ (mit $m_i < n$) für jede der Prämissen ψ_i einer Schlussregel des Kalküls HK, dann $\text{HK} \cup \text{Th} \vdash^n \phi$ für die Konklusion ϕ dieser Schlussregel.

Semantik

Wahrheitstabellen für die Aussagenlogik

ϕ	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$
V	F
F	V

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Die Semantik der Aussagenlogik

Definition 14. Eine atomare aussagenlogische Interpretation I^* ist eine Funktion, die jeder atomaren Formel " p_i ", $i \in \mathbb{N}$, von \mathcal{L} genau einen der beiden Wahrheitswerte \mathbf{w} oder \mathbf{f} zuweist: $I^* : \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$

Definition 15. Gegeben eine atomare aussagenlogische Interpretation I^* , definieren wir eine aussagenlogische Interpretation I (eine Funktion $I : \text{Fml}(\mathcal{L}) \rightarrow \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$) wie folgt:

I1 Wenn ϕ ein atomarer Satz " p " ist, dann $I(\phi) := I^*(p)$

I2 $I(\neg\phi) := \begin{cases} \mathbf{w} & \text{wenn } I(\phi) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & \text{wenn } I(\phi) = \mathbf{w} \end{cases}$

I3 $I(\phi \wedge \psi) := \begin{cases} \mathbf{w} & \text{wenn } I(\phi) = \mathbf{w} \text{ und } I(\psi) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f} & \text{wenn } I(\phi) = \mathbf{f} \text{ oder } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I4 $I(\phi \vee \psi) := \begin{cases} \mathbf{w} & \text{wenn } I(\phi) = \mathbf{w} \text{ oder } I(\psi) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f} & \text{wenn } I(\phi) = \mathbf{f} \text{ und } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I5 $I(\phi \rightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{w} & \text{wenn } I(\phi) = \mathbf{f} \text{ oder } I(\psi) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f} & \text{wenn } I(\phi) = \mathbf{w} \text{ und } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I6 $I(\phi \leftrightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{w} & \text{wenn } I(\phi) = I(\psi) \\ \mathbf{f} & \text{wenn } I(\phi) \neq I(\psi) \end{cases}$

Definition 16. Seien ϕ und ψ Formeln der Aussagenlogik:

ϕ ist erfüllbar	$:\Leftrightarrow$	$\exists I (I(\phi) = \mathbf{w})$
ϕ ist eine Tautologie	$:\Leftrightarrow$	$\forall I (I(\phi) = \mathbf{w})$
ϕ ist eine Kontradiktion	$:\Leftrightarrow$	$\forall I (I(\phi) = \mathbf{f})$
ϕ ist eine logische Folgerung aus ψ	$:\Leftrightarrow$	$\forall I (I(\phi) = \mathbf{w} \Rightarrow I(\psi) = \mathbf{w})$

Die Semantik der Prädikatenlogik

Definition 17. Sei $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ eine Sprache der Prädikatenlogik. Eine Struktur \mathcal{A} für \mathcal{L}^+ besteht aus:

1. einer nicht-leeren Menge $|\mathcal{A}|$, die wir "Diskursuniversum" oder "Quantifikationsbereich" von \mathcal{A} nennen;
2. eine Interpretation aller Relationszeichen, d.i. eine Funktion, die jedem $i \in \mathbf{I}$ eine Relation $R_i^{\mathcal{A}}$ auf $|\mathcal{A}|$ mit $\lambda(i)$ Argumentstellen zuordnet (d.h. eine Teilmenge $R_i^{\mathcal{A}} \subset |\mathcal{A}|^{\lambda(i)}$);
3. eine Interpretation aller Funktionszeichen, d.i. eine Funktion, die jedem $j \in \mathbf{J}$ eine Funktion $f_j^{\mathcal{A}}$ auf $|\mathcal{A}|$ mit $\mu(j)$ Argumentstellen zuordnet (d.h. eine Funktion $f_j^{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}|^{\mu(j)} \rightarrow |\mathcal{A}|$);
4. eine Interpretation aller Individuenkonstanten, d.i. eine Funktion, die jedem $k \in \mathbf{K}$ ein fixes Element $c_k^{\mathcal{A}} \in |\mathcal{A}|$ des Quantifikationsbereichs zuordnet.

Definition 18. Sei \mathcal{L}^+ eine Sprache der Prädikatenlogik und \mathcal{A} eine Struktur für \mathcal{L}^+ . Eine Wertzuordnung für \mathcal{L}^+ ist eine Funktion h die jeder Variable x_i ($i \in \mathbb{N}$) genau ein Element des Quantifikationsbereichs zuordnet: $h : \text{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}|$.

Definition 19. Sei \mathcal{L}^+ eine Sprache der Prädikatenlogik, \mathcal{A} eine Struktur für \mathcal{L}^+ und $h : \text{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}|$ eine Wertzuordnung. Das Referenzobjekt $\bar{h}(t)$ eines singulären Terms " t " der Sprache \mathcal{L}^+ unter dieser Wertzuordnung wird wie folgt definiert:

1. wenn " t " eine Variable ist, dann ist $\bar{h}(t)$ schlicht $h(t)$;
2. wenn " t " eine Individuenkonstante " c_k ", dann ist $\bar{h}(t)$ die Interpretation dieser Konstante $c_k^{\mathcal{A}}$;
3. wenn " t " ein Term der Form " $f_j(t_1, \dots, t_{\mu(j)})$ " ist, dann ist $\bar{h}(t)$ der Wert der Funktion für die Interpretationen der Argumente $f_j^{\mathcal{A}}(\bar{h}(t_1), \dots, \bar{h}(t_{\mu(j)}))$.

Definition 20. Sei \mathcal{L}^+ eine prädikatenlogische Sprache, \mathcal{A} eine Struktur für \mathcal{L}^+ und $h : \text{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}|$ eine Wertzuordnung. Wir nennen eine wohlgeformte Formel ϕ von \mathcal{L}^+ wahr unter der Wertzuordnung h oder sagen, dass die Wertzuordnung h die Formel ϕ erfüllt (abgekürzt: " $\mathcal{A} \models_h \phi$ ") gdw. eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

S1	ϕ ist von der Form " $t_1 = t_2$ "	und	$\bar{h}(t_1) = \bar{h}(t_2)$
S2	ϕ ist von der Form " $R_i(t_1, \dots, t_{\lambda(i)})$ "	et.	$R_i^{\mathcal{A}}(\bar{h}(t_1), \dots, \bar{h}(t_{\lambda(i)}))$
S3	ϕ ist von der Form " $\neg\psi$ "	und	$\mathcal{A} \not\models_h \psi$
S4	ϕ ist von der Form " $\psi \wedge \chi$ "	und	$\mathcal{A} \models_h \psi$ und $\mathcal{A} \models_h \chi$
S5	ϕ ist von der Form " $\psi \vee \chi$ "	und	entweder $\mathcal{A} \models_h \psi$ oder $\mathcal{A} \models_h \chi$
S6	ϕ ist von der Form " $\psi \rightarrow \chi$ "	und	entweder $\mathcal{A} \not\models_h \psi$ oder $\mathcal{A} \models_h \chi$
S7	ϕ ist von der Form " $\psi \leftrightarrow \chi$ "	und	$\mathcal{A} \models_h \psi$ gdw. $\mathcal{A} \models_h \chi$
S8	ϕ ist von der Form " $\forall x_i(\psi)$ "	und	$\mathcal{A} \models_{h(x_i/a)} \psi$ für alle $a \in \mathcal{A} $
S9	ϕ ist von der Form " $\exists x_i(\psi)$ "	und	$\mathcal{A} \models_{h(x_i/a)} \psi$ für mindestens ein $a \in \mathcal{A} $

Definition 21. Sei \mathcal{L}^+ eine Sprache der Prädikatenlogik, \mathcal{A} eine Struktur für \mathcal{L}^+ , $h : \text{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}|$ eine Wertzuordnung und " x_i " eine Variable von \mathcal{L}^+ . Wir definieren die an der Stelle " x_i " variierte Wertzuordnung – auch " $h(x_i/a)$ " genannt – wie folgt:

$$h\left(\begin{matrix} x_i \\ a \end{matrix}\right)(x_j) := \begin{cases} h(x_j) & i \neq j \\ a & i = j \end{cases}$$

Definition 22. Sei \mathcal{L}^+ eine prädikatenlogische Sprache und \mathcal{A} eine Struktur für \mathcal{L}^+ . Wir nennen eine wohlgeformte Formel ϕ von \mathcal{L}^+ "wahr in der Struktur \mathcal{A} " gdw. ϕ unter allen Wertzuordnungen von \mathcal{L}^+ wahr ist:

$$\mathcal{A} \models \phi \quad :\Leftrightarrow \quad \text{für jedes } h : \text{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}| : \mathcal{A} \models_h \phi$$

Wenn ϕ in einer Struktur \mathcal{A} wahr ist, nennen wir \mathcal{A} ein "Modell" von ϕ .

Definition 23. Sei \mathcal{L}^+ eine prädikatenlogische Sprache. Wir nennen eine wohlgeformte Formel ϕ von \mathcal{L}^+ "gültig" bzw. eine "logische Wahrheit" (der Prädikatenlogik) gdw. ϕ in allen Strukturen von \mathcal{L}^+ wahr ist:

$$\models \phi \quad :\Leftrightarrow \quad \text{für jedes } \mathcal{A} : \mathcal{A} \models \phi$$

Definition 24. Sei \mathcal{L}^+ eine prädikatenlogische Sprache. Wir nennen eine wohlgeformte Formel ϕ eine "semantische Konsequenz" oder "semantische Folge" einer Menge Σ von Formeln gdw. ϕ in allen Strukturen wahr ist, in denen alle Formeln der Menge Σ wahr sind:

$$\Sigma \models \phi \quad :\Leftrightarrow \quad \text{für jedes } \mathcal{A} : \text{si } \mathcal{A} \models \psi \text{ für alle Formeln } \psi \in \Sigma, \text{ dann } \mathcal{A} \models \phi$$

Axiomatische Kalküle

Ein axiomatischer Kalkül für die Aussagenlogik

Definition 25. Der Kalkül HK hat als Axiome alle wohlgeformte Formeln der Sprache \mathcal{L} , die die Form eines der folgenden Axiomenschemata haben:

H₁	$\vdash \phi \rightarrow \phi$	Reflexivität
H₂	$\vdash (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$	Transitivität
H₃	$\vdash ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$	'Antecedens konditionalisieren'
H₄	$\vdash (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$	'Antecedens erweitern'
H₅	$\vdash \phi \rightarrow (\phi \vee \psi)$	" \vee " rechts einführen'
H₆	$\vdash \psi \rightarrow (\phi \vee \psi)$	" \vee " links einführen'
H₇	$\vdash (\phi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \chi))$	'Alternative'
H₈	$\vdash (\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi$	" \wedge " rechts eliminieren'
H₉	$\vdash (\phi \wedge \psi) \rightarrow \psi$	" \wedge " links eliminieren'

H_{I0}	$\lceil (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \wedge \chi))) \rceil$	“ \wedge ” einführen’
H_{I1}	$\lceil (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \rceil$	Kontraposition
H_{I2}	$\lceil \phi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \psi) \rceil$	ex falso quodlibet
H_{I3}	$\lceil (\phi \rightarrow (\phi \wedge \neg\phi)) \rightarrow \neg\phi \rceil$	reductio ad absurdum
H_{I4}	$\lceil ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \leftrightarrow \psi) \rceil$	“ \leftrightarrow ” einführen’
H_{I5}	$\lceil (\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \rceil$	“ \leftrightarrow ” eliminieren’
H_{I6}	$\lceil \phi \vee \neg\phi \rceil$	Tautologie

Die einzige Schlussregel von $\mathcal{L}\text{-HK}$ ist der Modus Ponens MP: $\frac{\phi, \lceil \phi \rightarrow \psi \rceil}{\psi}$.

Ein axiomatischer Kalkül für die Prädikatenlogik

Definition 26 (HK^+). Die Axiome des Kalküls HK^+ für die Prädikatenlogik sind die folgenden Formeln von \mathcal{L}^+ :

TP alle Formeln, die die logische Form einer aussagenlogischen Tautologie haben;

ID alle Formeln, die die Form eines der folgenden Identitätsaxiome haben (für die Variablen “ x ”, “ y ”, “ z ”, “ w ”, “ x_1 ”, “ x_2 ”, ..., “ $x_{\lambda(i)}$ ”, “ y_1 ”, “ y_2 ”, ..., “ $y_{\lambda(i)}$ ”, “ z_1 ”, “ z_2 ”, ..., “ $z_{\mu(j)}$ ”, “ w_1 ”, “ w_2 ”, ..., “ $w_{\mu(j)}$ ” und alle $i \in \mathbf{I}$, $j \in \mathbf{J}$):

ID₁	$x = x$	Reflexivität
ID₂	$y = z \rightarrow (y = w \rightarrow z = w)$	Konfluenz
ID₃	$(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_{\lambda(i)} = y_{\lambda(i)}) \rightarrow (R_i(x_1, \dots, x_{\lambda(i)}) \rightarrow R_i(y_1, \dots, y_{\lambda(i)}))$	Ununterscheidbarkeit
ID₄	$(z_1 = w_1 \wedge \dots \wedge z_{\mu(j)} = w_{\mu(j)}) \rightarrow f_j(z_1, \dots, z_{\mu(j)}) = f_j(w_1, \dots, w_{\mu(j)})$	Funktionalität

QU alle Formeln ϕ , die die Form einer der folgenden Formeln haben (wo ϕ und ψ beliebige Formeln sind, so dass “ t ” für “ x ” in ψ frei ist und “ x ” in ϕ nicht frei vorkommt):

Qu	$\forall x(\psi) \rightarrow \psi(x/t)$	Instanziierung
Qu₂	$\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \forall x\psi)$	Simplifikation

HK^+ hat zwei Schlussregeln:

MP die erste Schlussregel von $\mathcal{L}\text{-HK}^+$ ist Modus Ponens (MP):

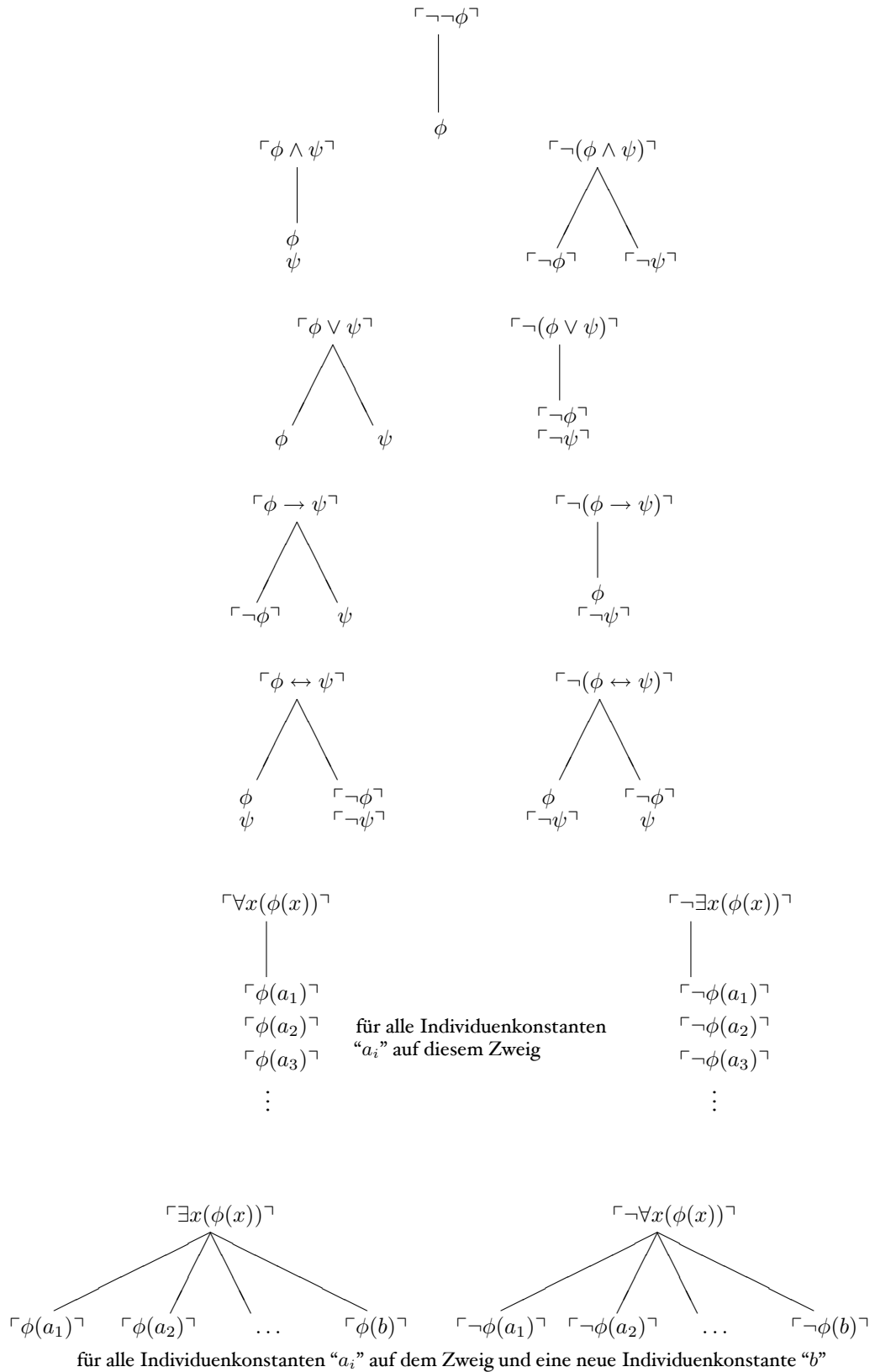
$$\frac{\phi, \lceil \phi \rightarrow \psi \rceil}{\psi}$$

\forall die zweite Schlussregel von $\mathcal{L}\text{-HK}^+$ heisst “Generalisation” oder “ \forall ”:

$$\frac{\phi \rightarrow \psi}{\phi \rightarrow \forall x(\psi)} \quad \text{wenn “}x\text{” in } \phi \text{ nicht frei vorkommt}$$

Die Baummethode

Konstruktionsregeln für Bäume:



Die Methode der natürlichen Deduktion

Die Annahme-Regel

n	ϕ	$\vdash^* \phi$	Annahme
----------	--------	-----------------	---------

Modus ponens (modus ponendo ponens)

m		$\vdash \lceil \phi \rightarrow \psi \rceil$	
\vdots		\vdots	
n		$\vdash \phi$	
\vdots		\vdots	
o		$\vdash \psi$	aus (m) und (n) mit (MP)

Modus tollens (modus tollendo tollens)

m		$\vdash \lceil \phi \rightarrow \psi \rceil$	
\vdots		\vdots	
n		$\vdash \lceil \neg \psi \rceil$	
\vdots		\vdots	
o		$\vdash \lceil \neg \phi \rceil$	aus (m) und (n) mit (MT)

Konditionaler Beweis

m	ϕ	$\vdash^* \phi$	Annahme
\vdots		\vdots	
n	ϕ	$\vdash^* \psi$	
\vdots		\vdots	
o		$\vdash \lceil \phi \rightarrow \psi \rceil$	aus (m) und (n) mit (KB)

Einführung und Elimination der doppelten Negation

m		$\vdash \lceil \neg \neg \phi \rceil$	
\vdots		\vdots	
n		$\vdash \phi$	aus (m) mit (DN)

m		$\vdash \phi$	
\vdots		\vdots	
n		$\vdash \lceil \neg \neg \phi \rceil$	aus (m) mit (DN)

Reductio ad absurdum

m	ϕ	$\vdash^* \phi$	Annahme
\vdots		\vdots	
n	ϕ	$\vdash^* \psi$	
\vdots		\vdots	
o	ϕ	$\vdash^* \lceil \neg \psi \rceil$	
\vdots		\vdots	
p		$\vdash \lceil \neg \phi \rceil$	aus (m), (n) und (o) mit (RAA)

Einführung der Konjunktion

m	$\vdash \phi$	
\vdots	\vdots	
n	$\vdash \psi$	
\vdots	\vdots	
o	$\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$	aus (m) und (n) mit (\wedge I)

Elimination der Konjunktion

m	$\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$	
\vdots	\vdots	
n	$\vdash \phi$	aus (m) mit (\wedge E)

m	$\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$	
\vdots	\vdots	
n	$\vdash \psi$	aus (m) mit (\wedge E)

Einführung der materialen Äquivalenz

m	$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	
\vdots	\vdots	
n	$\vdash \ulcorner \psi \rightarrow \phi \urcorner$	
\vdots	\vdots	
o	$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	aus (m) und (n) mit (\leftrightarrow I)

Elimination der materialen Äquivalenz

m	$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	
\vdots	\vdots	
n	$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	aus (m) mit (\leftrightarrow E)

m	$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	
\vdots	\vdots	
n	$\vdash \ulcorner \psi \rightarrow \phi \urcorner$	aus (m) mit (\leftrightarrow E)

Einführung der Disjunktion

m	$\vdash \phi$	
\vdots	\vdots	
n	$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	aus (m) mit (\vee I)

m	$\vdash \psi$	
\vdots	\vdots	
n	$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	aus (m) mit (\vee I)

Elimination der Disjunktion

m		$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	
⋮		⋮	
n	ϕ	$\vdash^* \phi$	Annahme
⋮		⋮	
o	ϕ	$\vdash^* \chi$	
⋮		⋮	
p	ψ	$\vdash^* \psi$	Annahme
⋮		⋮	
q	ψ	$\vdash^* \chi$	
⋮		⋮	
r		$\vdash \chi$	aus (m), (n), (o), (p) und (q) mit ($\vee E$)

Elimination des Allquantors

Bedingung: “t” muss frei sein für “x” in ϕ , d.h. “t” darf sich in $\ulcorner \phi(x/t) \urcorner$ nicht im Geltungsbereich eines “x” bindenden Quantors befinden.

m		$\vdash \ulcorner \forall x(\phi) \urcorner$	
⋮		⋮	
n		$\vdash \ulcorner \phi(x/t) \urcorner$	aus (m) mit (US)

Einführung des Existenzquantors

Bedingung: “t” muss frei sein für “x” in ϕ , d.h. “t” darf sich in $\ulcorner \phi(x/t) \urcorner$ nicht im Geltungsbereich eines “x” bindenden Quantors befinden.

m		$\vdash \ulcorner \phi(x/t) \urcorner$	
⋮		⋮	
n		$\vdash \ulcorner \exists x(\phi) \urcorner$	aus (m) mit (EG)

Einführung des Allquantors

Bedingung: “a” kommt in keiner Prämisse oder Annahme vor, von der der Beweis von $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ abhängt.

m		$\vdash \ulcorner \phi(a) \urcorner$	
⋮		⋮	
n		$\vdash \ulcorner \forall x(\phi(a/x)) \urcorner$	aus (m) mit (UG)

Elimination des Existenzquantors

Bedingung: “a” kommt nicht in ψ und in keiner Annahme (ausser $\ulcorner \phi(a) \urcorner$) vor, von der der Beweis von ψ aus $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ abhängt.

m		$\vdash \ulcorner \exists x(\phi(a/x)) \urcorner$	
⋮		⋮	
n		$\ulcorner \phi(a) \urcorner \quad \vdash^* \ulcorner \phi(a) \urcorner$	Annahme
⋮		⋮	
o		$\ulcorner \phi(a) \urcorner \quad \vdash^* \psi$	
⋮		⋮	
p		$\vdash \psi$	aus (m), (n) et (o) mit (ES)