Zusammenfassung der wichtigsten Punkte

Einführungskurs Logik, Universität Bern, Frühlingssemester 2009

Memento zur Vorbereitung der Prüfung

Philipp Keller `philipp.keller@unige.ch`

Einführung in die Logik

1. Die moderne Logik geht auf Gottlob Frege zurück (*Begriffsschrift*, 1879).
2. In der Philosophie geht es um Argumente.
3. In der Logik geht es um gültige Schlüsse.
4. Die Logik behandelt formale Sprachen, die im Vergleich zu natürlichen Sprachen vereinfacht und in vielerlei Hinsicht idealisiert sind.
5. Die Aussagenlogik behandelt Junktoren, die Sätze verbinden; die Prädikatenlogik behandelt daneben auch Quantoren, Relationen und Funktionen.
6. Die Syntax beschreibt die Form von Ausdrücken, die Semantik ihre Bedeutungen und die Pragmatik ihren Gebrauch.
7. Die Formalisierung von Argumenten ist eine Kunst.
8. Argumente sind nicht wahr oder falsch, sondern gültig oder ungültig.
9. Ein Schluss ist gültig dann und genau dann wenn (gdw.) es unmöglich ist, dass seine Prämissen wahr sind und seine Konklusion falsch ist.
10. Wir müssen Gebrauch (use) und Erwähnung (mention) von Wörtern unterscheiden; Anführungs- und Schlusszeichen sind dann zu setzen, wenn wir von den Wörtern reden wollen und nicht von dem, wofür sie stehen.

Die aussagenlogischen Junktoren

1. Die Aussagenlogik studiert Junktoren, die einfach(er)e Sätze zu komplex(er)en verbinden; die Prädikatenlogik kümmert sich ausserdem um Quantoren, Relationen und Funktionen.
2. Der Hauptjunktor eines komplexen Satzes ist derjenige, der am Schluss ausgewertet wird.
3. Die Syntax bestimmt, welches die wohlgeformten Formeln einer Sprache sind.
4. Die Semantik liefert die Interpretation der Zeichen, indem sie uns ihre Bedeutung angibt.
5. Nach dem Prinzip der Wahrheitsfunktionalität (für die Aussagenlogik) ist der Wahrheitswert eines komplexen Satzes durch die Wahrheitswerte der in ihm enthaltenen atomaren Sätze und durch die sie verbindenden Junktoren (eindeutig) bestimmt.
6. “$\neg p$” ist wahr gdw. “p” nicht wahr ist.
7. “$p \wedge q$” ist wahr gdw. “p” und “q” beide wahr sind.
8. “$p \vee q$” ist wahr gdw. mindestens eines von “p” und “q” wahr ist.
9. “$p \rightarrow q$” ist wahr gdw. entweder “p” falsch oder “q” wahr ist.
10. Eine Wahrheitswerttabelle für einen aussagenlogischen Junktor bestimmt seine Bedeutung, indem sie angibt, wie die Wahrheit eines komplexen, diesen Junktor enthaltenen Satzes von den Wahrheitswerten der in ihm enthaltenen einfach(er)en Sätze abhängt. Alternativ dazu können wir die Bedeutung eines Junktors durch Einführungs- und Eliminationsregeln bestimmen.

Logische Beziehungen und Schlüsse

1. Wir müssen verschiedene Sprachebenen unterscheiden. “Bedeutung”, “Referenz”, “Wahrheit” und “Gültigkeit” sind Ausdrücke der Metasprache; wir verwenden sie, um über die Ausdrücke einer (formalen oder natürlichen) Objektsprache zu reden.
2. Zwei Sätze stehen in der Beziehung der logischen Folgerung gdw. es nicht logisch möglich ist, dass der erste wahr und der zweite falsch ist; d.h. gdw. der Schluss vom ersten auf den zweiten logisch gültig ist.

3. Um die Allgemeinheit logischer Gesetze und Prinzipien auszudrücken, verwenden wir die griechischen Kleinbuchstaben "ϕ", "ψ", χ", "ξ" etc. als Abkürzungen für Namen beliebiger Sätze.
4. Um von beliebigen Sätzen einer bestimmten Form zu sprechen, verwenden wir die sog. "Quine corners". "$\ulcorner \phi \wedge \neg\psi \urcorner$" ist der Ausdruck, der mit Anführungszeichen beginnt, mit ϕ, den Zeichen für die Konjunktion und für die Negation und schliesslich ψ weitergeht und mit Schlusszeichen endet.
5. Ein Schluss, der ϕ als Prämisse und ψ als Konklusion hat, ist gültig gdw. die entsprechende Implikation $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ eine Tautologie ist.
6. Jeder Schluss auf eine Tautologie und aus einer Kontradiktion ist gültig.
7. Neben der Beziehung der logischen Folgerung (der sog. "Subalternation") unterscheiden wir als weitere metasprachliche Beziehungen zwischen Sätzen: die logische Äqivalenz (gleiche Wahrheitswerttabellen), die Kontradiktion (genau einer der Sätze ist wahr), die Kontrarietät (nicht beide zusammen wahr) und die Subkontrarietät (nicht beide zusammen falsch).
8. Die Beziehung der logischen Forderung hängt nicht von der Reihenfolge der Prämissen ab: sie ist monoton, transitiv und reflexiv.
9. Die de Morganschen Gesetze:
$$\ulcorner \neg(\phi \wedge \psi) \urcorner \iff \ulcorner \neg\phi \vee \neg\psi \urcorner$$
$$\ulcorner \neg(\phi \vee \psi) \urcorner \iff \ulcorner \neg\phi \wedge \neg\psi \urcorner$$
10. Die Distributivitätsgesetze:
$$\ulcorner \phi \vee (\psi \wedge \chi) \urcorner \iff \ulcorner (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi) \urcorner$$
$$\ulcorner \phi \wedge (\psi \vee \chi) \urcorner \iff \ulcorner (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi) \urcorner$$

Die axiomatische Methode

1. Neben der semantischen Methode der Wahrheitswerttabellen gibt es auch eine rein syntaktische Methode, die nicht nur von den Bedeutungen der Sätze sondern auch von ihren Wahrheitswerten abstrahiert.
2. Die Syntax der formalen Sprache $\mathcal{L}$ der klassischen Aussagenlogik lässt sich streng formal definieren.
3. Alle Junktoren der Aussagenlogik lassen sich durch einen, den Shefferstrich, definieren.
4. Die moderne Aussagenlogik verdanken wir den Arbeiten Gottlob Freges (*Begriffsschrift*, 1879) und denen von Russell und Whitehead (*Principia Mathematica*, 1910).
5. Die Revolution in der Logik hat in der Mathematik entscheidende Fortschritte ermöglicht und ihr neue Teildisziplinen hinzugefügt (Metamathematik, Modelltheorie, Mengenlehre).
6. In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts waren die drei wichtigsten Strömungen der Philosophie der Mathematik der Logizismus Freges, der Formalismus Hilberts und der Intuitionismus Brouwers und Heytings.
7. Ein Kalkül besteht aus Axiomen und Schlussregeln, die die Ableitung von Theoremen aus den Axiomen ermöglichen.
8. Der Begriff eines (formalen) Beweises lässt sich rein syntaktisch definieren.
9. Die Aussagenlogik lässt sich auf verschiedene Arten axiomatisieren.
10. Wir müssen (objektsprachliche) Beweise in einem Kalkül von (metasprachlichen) Beweisen über ein Kalkül unterscheiden.

Die Baummethode der Aussagenlogik

1. Eine atomare aussagenlogische Interpretation weist jeder atomaren Formel einen Wahrheitswert zu. Für jede atomare aussagenlogische Interpretation definieren wir eine aussagenlogische Interpretation, die allen Formeln der Sprache $\mathcal{L}$ einen Wahrheitswert zuweist.
2. Eine solche aussagenlogische Interpretation entspricht einer 'logischen Möglichkeit' bzw. einer Zeile in einer Wahrheitswerttabelle.
3. Die semantischen Begriffe "Tautologie", "Kontradiktion", "Erfüllbarkeit" und "logische Folgerung" können mittels des Begriffs "aussagenlogische Interpretation" definiert werden.

4. Eine Menge von Formeln ist erfüllbar gdw. wenn es eine Interpretation gibt, die alle Formeln dieser Menge wahr macht.
5. Ein syntaktischer Kalkül (ein axiomatischer Kalkül, ein Kalkül der Baummethode oder der natürlichen Deduktion) wird "korrekt" genannt gdw. alle seine Theoreme Tautologien sind.
6. Ein solcher Kalkül wird "vollständig" genannt gdw. sich alle Tautologien in ihm ableiten lassen.
7. Die Baummethode ist ein Konsistenztest: Sie erlaubt uns festzustellen, ob eine Menge von Sätzen konsistent ist. Ist die entsprechende Menge konsistent, erlaubt sie uns auch, eine Interpretation zu finden, die alle Sätze dieser Menge wahr macht.
8. Eine Formel ϕ mit der Baummethode beweisen heisst zeigen, dass sich alle Zweige des Baumes für $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ schliessen.
9. Weil die Baummethode korrekt ist, erlaubt sie uns ebenfalls festzustellen, ob eine Formel ϕ eine Tautologie ist: ϕ ist eine Tautologie gdw. sich alle Zweige des Baumes für $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ schliessen.
10. Die Baummethode erlaubt es auch, einen Schluss auf seine Gültigkeit zu überprüfen: Wir überprüfen dazu, ob die entsprechende Implikation eine Tautologie ist.

Die natürliche Deduktion der Aussagenlogik

1. Charakteristisch für die Methode der natürlichen Deduktion ist die Annahmeregel, die es uns erlaubt, in jedem Schritt des Beweises jede beliebige Formel als Annahme einzuführen. Wir müssen dann allerdings über die gemachten Annahmen Buch führen; einzig die Regeln KB, RAA und $\vee$**E** erlauben es uns, gemachte Annahmen wieder loszuwerden.
2. Die Regeln der natürlichen Deduktion sind die Einführungs- und Eliminationsregeln der aussagenlogischen Junktoren.
3. Die Methode der natürlichen Deduktion für die Aussagenlogik besteht aus den folgenden Regeln:
   Annahme-Regel: Ich darf jede beliebige Annahme machen, wenn ich darüber Buch führe.
   MP: Wenn ich $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ und ϕ habe, darf ich ψ daraus schliessen.
   MT: Wenn ich $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ und $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ habe, darf ich $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ daraus schliessen.
   KB: Wenn ich ϕ angenommen habe und unter dieser Annahme auf ψ geschlossen habe, darf ich auf $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ schliessen.
   DN: Wenn ich $\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$ habe, darf ich auf ϕ schliessen; wenn ich ϕ habe, darf ich auf $\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$ schliessen.
   RAA: Wenn ich ϕ angenommen habe und unter dieser Annahme sowohl auf ψ als auch auf $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ geschlossen habe, darf ich auf $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ schliessen.
   $\wedge$**I**: Wenn ich ϕ und ψ habe, darf ich $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ daraus schliessen.
   $\wedge$**E**: Wenn ich $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ habe, darf ich auf ϕ und auf ψ schliessen.
   $\vee$**I**: Wenn ich ϕ habe, darf ich auf $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ schliessen; wenn ich ψ habe, darf ich ebenfalls auf $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ schliessen.
   $\vee$**E**: Wenn ich $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ habe und ich sowohl unter der Annahme von ϕ als auch unter der Annahme von ψ auf χ geschlossen habe, darf ich auf χ schliessen.
   $\leftrightarrow$ **I**: Wenn ich $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ und $\ulcorner\psi \rightarrow \phi\urcorner$ habe, darf ich auf $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$ schliessen.
   $\leftrightarrow$ **E**: Wenn ich $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$ habe, darf ich auf $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ und auf $\ulcorner\psi \rightarrow \phi\urcorner$ schliessen.
4. Diese Regeln erlauben uns, Theoreme ("$\vdash \phi$") und Sequenzen ("$\phi \vdash \psi$") zu beweisen.
5. Eine Sequenz ist die Behauptung, ein bestimmter Satz sei aus einem oder mehreren anderen ableitbar.
6. Um ein Theorem oder eine Sequenz bewiesen zu haben, müssen wir uns jeder Annahme entledigt haben. Welche Sequenz wir beweisen, hängt u.U. davon ab, welche Annahmen wir machen.
7. Um eine Implikation zu beweisen, ist es oft nützlich, die Regel KB anzuwenden.
8. Um einen negativen oder atomaren Satz zu beweisen, ist es oft nützlich, die Regel RAA anzuwenden.
9. Die Methode der natürlichen Deduktion erlaubt auch die Anwendung von abgeleiteten Regeln.
10. Die Methode der natürlichen Deduktion ist eine korrekte und vollständige syntaktische Methode: jede beweisbare Sequenz entspricht einer Beziehung der logischen (semantischen) Folgerung und jede solche Folgerungsbeziehung kann als Sequenz bewiesen werden.

Metalogische Eigenschaften der Aussagenlogik

1. Ein Axiomensystem und eine Theorie sind konsistent, wenn sich aus ihnen kein Widerspruch ableiten lässt. d.h. wenn es nicht der Fall ist, dass sie sowohl einen Satz ϕ wie auch $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ beweisen.
2. Ein Kalkül und eine syntaktische Beweismethode sind korrekt, wenn jedes Theorem eine Tautologie ist.
3. Ein Kalkül und eine syntaktische Beweismethode sind vollständig, wenn jede Tautologie ein Theorem ist.
4. Der axiomatische Kalkül HK, die Baummethode und die Methode der natürlichen Deduktion sind korrekt und vollständig.
5. Wir haben deshalb folgende Entsprechungen:

ϕ folgt (semantisch / logisch) aus Th	$\Longleftrightarrow$	ϕ ist ableitbar aus Th
ϕ ist erfüllbar	$\Longleftrightarrow$	ϕ ist konsistent
ϕ ist eine Kontradiktion	$\Longleftrightarrow$	ϕ ist inkonsistent
ϕ ist eine Tautologie	$\Longleftrightarrow$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$ ist inkonsistent
$\ulcorner\phi$ also $\psi\urcorner$ ist ein gültiges Argument	$\Longleftrightarrow$	$\ulcorner\phi \wedge \neg\psi\urcorner$ ist inkonsistent

6. Wir können bezüglich unserer syntaktischen Methoden ein Deduktionstheorem beweisen: ψ lässt sich aus ϕ ableiten gdw. die Implikation $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ bewiesen werden kann. Das Deduktionstheorem versichert uns der Gültigkeit der Regel des konditionalen Beweises KB.
7. Die Aussagenlogik ist entscheidbar: Es gibt ein mechanisches Verfahren um festzustellen, ob ein gegebener Satz eine Tautologie ist oder nicht.
8. Jede Formel der Aussagenlogik ist logisch äquivalent zu Formeln in negativer, konjunktiver und disjunktiver Normalform. Die disjunktive Normalform einer Formel 'kodiert' ihre Wahrheitswerttabelle: Jedes Disjunkt entspricht einer Zeile, in der die Formel den Wahrheitswert "V" erhält.
9. Die Aussagenlogik ist kompakt: Jede Konsequenz einer unendlichen Menge von Prämissen folgt bereits aus endlich vielen.
10. Die Kompaktheit der Aussagenlogik folgt aus dem sog. "Königs Lemma", das besagt, dass ein endlich verzweigter unendlicher Baum einen unendlich langen Zweig enthält.

Die Syllogistik

1. Wir erhalten Prädikate (offene Sätze), indem wir in einem Satz einen singulären Terminus oder mehrere singuläre Termini durch Leerstellen ersetzen.
2. Die klassische Syllogistik unterscheidet vier sog. kategorische Aussageformen: **SaP**, **SiP**, **SeP**, **SoP**.
3. Diese vier Aussageformen entsprechen vier Modifikationen der Kopula bzw. vier verschiedenen Beziehungen zwischen den Extensionen des Subjektsbegriffes "S" und des Prädikatbegriffes "P".
4. Diese Beziehungen können anhand von Venn-Diagrammen symbolisiert werden; mittels Venn-Diagrammen können wir die Gültigkeit von Syllogismen und bspw. das logische Quadrat der Syllogistik überprüfen.
5. Die gültigen Schlüsse der Syllogistik sind entweder direkt oder indirekt; es gibt 19 direkte gültige Schlüsse, die wir uns anhand mnemotechnischer Namen wie "Barbara", "Ferio", "Cesare" und "Felapton" merken können.
6. Bereits die Venn-Diagramme gehen weiter als die Syllogistik; bspw. erlauben sie die Einführung einer Disjunktion.
7. Die hauptsächlichen Nachteile der Syllogistik und der Venn-Diagramme sind die folgenden:
   (a) Kategoriale Aussageformen lassen sich nicht mit aussagenlogischen Junktoren kombinieren.
   (b) Es wird kein Unterschied zwischen singulären Termini und Prädikaten gemacht; singuläre Existenzaussagen werden deshalb mittels Prädikaten formalisiert, die nur auf ein einziges Objekt zutreffen.
   (c) Relationale Aussagen können nicht adäquat formalisiert werden; syllogistische 'Prädikate'

sind immer unär.

8. Prädikate (offene Sätze) sind nicht wahr oder falsch, sondern treffen auf bestimmte Objekte zu oder nicht (bzw. werden von diesen Objekten erfüllt oder nicht). Ein Objekt erfüllt ein Prädikat gdw. das Prädikat für das Objekt als Argument den Wert **w** ergibt.
9. Variablen deuten die Leerstellen in einem offenen Satz an; Quantoren bilden daraus geschlossene (vollständige) Sätze, die entweder wahr oder falsch sind.
10. Variablen erlauben uns, der sog. "multiplen Allgemeinheit" gerechtzuwerden und den Unterschied zwischen "Alle lieben jemanden" und "Jemand wird von allen geliebt" zu formalisieren.

Die Prädikatenlogik

1. Die Prädikatenlogik formalisiert Schlüsse, die das logische Verhalten von Quantoren charakterisieren.
2. Ein prädikatenlogischer Schluss zeigt uns, dass ein Prädikat auf ein oder mehrere Objekte zutrifft, wenn es auf ein oder mehrere Objekte zutrifft.
3. Die allgemeine Form eines atomaren Satzes in der Prädikatenlogik ist "Fa" – Fx wird dabei als Funktion aufgefasst, die ein Objekt als Argument hat und einen Wahrheitswert als Wert.
4. Wir können die Bedeutung (die Erfüllungsbedingungen) eines logisch komplexen Prädikates auf der Basis der Bedeutungen (Erfüllungsbedingungen) seiner Atomaren Teile rekursiv definieren.
5. Prädikate in der Prädikatenlogik sind unär, binär oder im allgemeinen Fall n-är.
6. Ein singulärer Terminus ist ein Eigenname (*name*), ein indexikalischer Ausdruck (*indexical*), ein demonstrativer Ausdruck (*demonstrative*) oder eine definite Beschreibung (*definite description*).
7. Die kategoriale Grammatik charakterisiert ein (erststufiges) Prädikat durch den Typ $\mathbf{S}/\mathbf{N}$, aussagenlogische Junktoren durch $\mathbf{S}/\mathbf{S}$, prädikatenlogische Junktoren durch $(\mathbf{S}/\mathbf{N})/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$ und erststufige Quantoren durch $\mathbf{S}/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$.
8. Quantoren sind damit Prädikate zweiter Stufe, die wie singuläre Termini aus Prädikaten Sätze bilden.
9. Der universelle Quantor ("$\forall x(\ldots x \cdots$") ist eine 'Abkürzung' unendlicher Konjunktionen, der existentielle Quantor ("$\exists x(\ldots x \cdots$") eine 'Abkürzung' unendlicher Disjunktionen; der universelle und der existentielle Quantor sind in der gleichen Weise dual wie die Konjunktion und die Disjunktion.
10. Jedem Quantor ist ein Individuenbereich zugeordnet, der festlegt, welche Objekte für die Instanziierung des quantifizierten Prädikates zur Verfügung stehen.

Syntax und Semantik der Prädikatenlogik

1. Das Alphabet einer prädikatenlogischen Sprache enthält (Satz- und Prädikaten-) Junktoren, das Identitätszeichen, Variablen, Quantoren, Relations-, Funktionszeichen und Individuenkonstanten. Die drei letzten Kategorien sind die nicht-logischen (= in einer Struktur interpretierbaren) Zeichen einer prädikatenlogischen Sprache.
2. Die Quantoren der (erststufigen) Prädikatenlogik gehören zur gleichen syntaktischen Kategorie wie die zweitstufigen Prädikate.
3. Eine Variable kommt in einer Formel frei vor, wenn sie sich nicht überall im Geltungsbereich eines sie quantifizierenden Quantors befindet.
4. Eine Struktur für eine prädikatenlogische Sprache besteht aus einem Individuenbereich und einer Interpretation ihrer nicht-logischen Zeichen.
5. Die Interpretation einer Individuenkonstante weist ihr ein Element des Individuenbereichs zu; die Interpretation eines Relationszeichens eine Relation in diesem Individuenbereich; die Interpretation eines Funktionszeichens eine Funktion innerhalb des Individuenbereichs.
6. Eine Wertzuordnung ist eine Funktion, die jeder Variable der Sprache ein Element des Individuenbereichs zuordnet.
7. Der Schlüsselbegriff der Semantik der Prädikatenlogik ist der der Erfüllung eines Prädikats unter einer Wertzuordnung in einer Struktur. Wir nennen das Prädikat dann "wahr unter dieser Wertzuordnung (in dieser Struktur)".

8. Wir nennen eine Formel "wahr in einer Struktur" gdw. sie unter jeder Wertzuordnung in dieser Struktur wahr ist. Eine solche Struktur heisst dann "Modell" der Formel. Wir nennen eine Formel "gültig" bzw. "logisch wahr" gdw. sie in allen Strukturen wahr ist.
9. Die Substitution eines Terms für eine Variable ersetzt jedes Vorkommnis dieser Variable durch den Term. Damit die resultierende Formel eine Substitutionsinstanz ist, muss der Term für die Variable frei sein in der Formel, d.h. er darf keine Variable enthalten, die durch die Substitution gebunden wird..
10. Die Reihenfolge der Quantoren ist wichtig: "$\exists y \forall x\ (Rxy)$" impliziert formal "$\forall x \exists y\ (Rxy)$", aber nicht umgekehrt.

Die Baummethode der Prädikatenlogik

1. In einer Struktur mit endlichem Individuenbereich ist eine Allquantifikation logisch äquivalent zur Konjunktion ihrer Instanzen; in einer solchen Struktur ist eine Existenzquantifikation logisch äquivalent zur Disjunktion ihrer Instanzen.
2. Wenn eine Allquantifikation $\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner$ wahr ist, dann auch alle ihre Instanzen $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ (für alle Individuenkonstanten "a"). Wenn eine Existenzquantifikation $\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner$ falsch ist, dann auch alle ihre Instanzen $\ulcorner\phi(a)\urcorner$.
3. Ist eine Allquantifikation $\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner$ falsch, dann auch mindestens eine Instanz $\ulcorner\phi(a)\urcorner$. Ist eine Existenzquantifikation $\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner$ wahr, dann auch mindestens eine Instanz $\ulcorner\phi(a)\urcorner$.
4. Die Baumkonstruktionsregeln für den Allquantor und den negierten Existenzquantor:

$$\begin{array}{ccc} \ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner & & \ulcorner\neg\exists x(\phi(x))\urcorner \\ | & & | \\ \ulcorner\phi(a_1)\urcorner & & \ulcorner\neg\phi(a_1)\urcorner \\ \ulcorner\phi(a_2)\urcorner & \text{für alle Individuenkonstanten} & \ulcorner\neg\phi(a_2)\urcorner \\ \ulcorner\phi(a_3)\urcorner & \text{“}a_i\text{” auf diesem Zweig} & \ulcorner\neg\phi(a_3)\urcorner \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

5. Die Baumkonstruktionsregeln für den Existenzquantor und den negierten Allquantor:

$$\begin{array}{cccc|cccc} & \ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner & & & & \ulcorner\neg\forall x(\phi(x))\urcorner & & \\ \ulcorner\phi(a_1)\urcorner & \ulcorner\phi(a_2)\urcorner & \ldots & \ulcorner\phi(b)\urcorner & \ulcorner\neg\phi(a_1)\urcorner & \ulcorner\neg\phi(a_2)\urcorner & \ldots & \ulcorner\neg\phi(b)\urcorner \end{array}$$

für alle Individuenkonstanten "a_i" auf dem Zweig und eine neue Individuenkonstante "b"

6. Wir können die beiden letzten Regeln für $\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner$ und $\ulcorner\neg\forall x(\phi(x))\urcorner$ vereinfachen und uns auf den Zweig mit der neuen Konstante beschränken.
7. Diese Vereinfachung ist erlaubt, weil eine Formel, die ein Modell mit n Individuen hat, auch ein Modell mit $n+1$ Individuen hat.
8. Für jede gültige Formel der Prädikatenlogik erlaubt uns die Baummethode, einen Beweis zu finden: der Baum für die Negation der gültigen Formel schliesst sich.
9. Wir können allerdings daraus, dass wir eine Formel nicht beweisen können, nicht schliessen, dass die Formel nicht gültig ist: nicht jeder fehlgeschlagene Beweisversuch ist eine Widerlegung. Wenn sich der Baum für die Negation einer Formel nicht schliesst, können wir daraus nicht schliessen, dass die Formel nicht gültig (d.h. ihre Negation erfüllbar ist). Wir haben eine solche Garantie, für jede erfüllbare Formel ein Modell zu finden, nur für Formeln, die in endlichen Individuenbereichen wahr sein können.
10. Diese Disanalogie zwischen der Prädikaten- und der Aussagenlogik entspricht einem wichti-

gen metalogischen Unterschied: die Aussagenlogik ist entscheidbar (d.h. es gibt ein mechanisches Verfahren zu testen, ob eine Formel gültig ist), während die Prädikatenlogik nur semientscheidbar ist. Gegenbeispiele lassen sich nicht auf mechanische Weise finden.

Die Methode der natürlichen Deduktion für die Prädikatenlogik

1. Die Methode der natürlichen Deduktion für die Prädikatenlogik besteht aus den Einführungs- und Eliminationsregeln der (jetzt prädikatenlogisch interpretierten) Junktoren und der Quantoren.
2. Die Regel (US), *"universelle Spezialisierung"* genannt, erlaubt uns, von einer Allquantifikation zu einer Instanz der quantifizierten Formel für einen beliebigen in der Allquantifikation frei vorkommenden Term überzugehen.
3. Ein Existenzquantor wird durch die Regel der *existentiellen Generalisierung* (EG) eingeführt.
4. Damit eine Anwendung der Regeln (US) und (EG) korrekt ist, muss der von einer Variable ersetzte Term in seiner Formel frei für diese Variable sein, d.h. er darf sich nicht im Geltungsbereich eines ihn bindenden Quantors befinden.
5. Um aus einer singulären Prämisse eine Allquantifikation zu beweisen, verwenden wir die Regel der *universellen Generalisierung* (UG). Dabei verlangen wir, dass die singuläre Prämisse auf ein beliebiges Individuum zutrifft (d.h. ein Individuum, das weder in der Prämisse noch in einer Annahme oder Prämisse vorkommt, von der der Beweis der singulären Prämisse abhängt).
6. Mit (UG) beweisen wir dann eine Allquantifikation, in der der arbiträre Term überall ("uniform") durch eine Variable ersetzt wurde.
7. Die Eliminierungsregel für den Existenzquantor (ES) entspricht der Eliminationsregel für die Disjunktion ($\vee$**E**) für ein sog. "typisches Disjunkt". Eine Anwendung der Regel der existentiellen Spezialisierung (ES) hat vier Teilschritte:
   (a) der Beweis einer Existenzquantifikation aus bestimmten Prämissen und unter gewissen Annahmen;
   (b) die Annahme des typischen Disjunkts, d.h. einer Instanz der existenzquantifizierten Formel für eine neue Individuenkonstante;
   (c) der Beweis einer Formel unter der Annahme des typischen Disjunkts, in der die Individuenkonstante nicht vorkommt (sie darf ebensowenig in anderen Annahmen vorkommen, von denen dieser Beweis abhängt);
   (d) der Schritt zu dieser Formel, ohne Annahme des typischen Disjunkts, unter den gleichen Annahmen und aus den gleichen Prämissen wie der Beweis der Existenzquantifikation.
8. Die Regel der existentiellen Spezialisierung (ES) unterliegt den gleichen Bedingungen wie die Regel der universellen Generalisierung:
   (a) die Konstante, die die Variable im typischen Disjunkt ersetzt, darf in keiner Prämisse oder Annahme vorkommen, von der die Existenzquantifikation abhängt;
   (b) sie darf ebensowenig in der Formel vorkommen, die wir beweisen wollen.
9. Die Anwendung dieser Regeln erlaubt es uns, sowohl Theoreme ("$\vdash \phi$") als auch Sequenzen ("$\phi \vdash \psi$") zu beweisen. Die Methode der natürlichen Deduktion ist korrekt und vollständig bzgl. der Semantik der Prädikatenlogik: jede gültige Formel ist ein Theorem und jedes Theorem ist gültig; jede ableitbare Sequenz entspricht einer logischen Folgebeziehung und jede logische Folgebeziehung kann als Sequenz abgeleitet werden.
10. Die Einführung neuer Individuenkonstanten für 'beliebige' Elemente des Individuenbereichs (Referenz einer 'Variable-unter-einer-Wertzuordnung') motiviert eine Kritik der Fregeschen Auffassung des Sinns von Eigennamen. Gemäss der Theorie der direkten Referenz referieren Eigennamen nicht via der Erfüllung ihres deskriptiven Gehalts, sondern 'direkt': sie sind rigide Designatoren, die in allen möglichen Welten dasselbe Objekt bezeichnen.