Übungen 12

Einführungskurs Logik, Universität Bern, Sommersemester 2009

abzugeben vor Dienstag, dem 19.5.2008, 16h15

Name(n): ______________________________

Erzielte Punkte (in 3 Fragen mit insgesamt 20 Punkten): __________ Note: __________

1. (12 Punkte) Beweisen Sie folgende Sequenzen mit der Methode der natürlichen Deduktion:
   (a) "$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$, $\forall x(Hx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$"
   (b) "$\forall x(Gx \rightarrow \neg Fx)$, $\forall x(Hx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$"
   (c) "$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx) \vdash \forall x(Fx \vee Gx)$"
   (d) "$(\forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx)) \leftrightarrow \exists x(Fx) \vdash \neg\exists x\neg(Fx)$"
   (e) "$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Fx) \rightarrow \forall x(Gx)$"
   (f) "$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists x(Fx) \rightarrow \exists x(Gx)$"
   (g) "$\forall x(Fx \wedge Gx) \vdash \forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$"
   (h) "$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx) \vdash \exists x(Fx \vee Gx)$"
   (i) "$\exists x(Fa \rightarrow Fx) \vdash Fa \rightarrow \exists x(Fx)$"
   (j) "$\exists x\forall y(Rxy) \vdash \forall y\exists x(Rxy)$"
   (k) "$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(\exists y(Fy \wedge Rxy) \rightarrow \exists y(Gy \wedge Rxy))$"
   (l) "$\exists x(Fx \wedge Gx)$, $\exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow \neg Rxy)) \vdash \exists x(Fx \wedge \neg\forall y(Fy \rightarrow Rxy))$"

2. (2 Punkte) Beweisen Sie folgende Äquivalenzen mit der Methode der natürlichen Deduktion:
   (a) "$\exists x(Fx) \dashv\vdash \neg\forall x\neg(Fx)$"
   (b) "$\exists x\neg(Fx) \dashv\vdash \neg\forall x(Fx)$"

3. (6 Punkte) Bestimmen Sie, ob folgende Anwendungen der Quantorenregeln für die natürliche Deduktion korrekt sind. Wenn sie es nicht sind, begründen Sie weshalb.

(a)

1	$\forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	Prämisse
2	$\forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \exists z(Faa \wedge Gaz)$	aus (1) mit (US)

(b)

1	$\forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	Prämisse
2	$\forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \exists z(Faz \wedge Gbz)$	aus (1) mit (US)

(c)

1	Fba	$\vdash Fba$	Prämisse
2	Fba	$\vdash \exists y(Fby)$	aus (1) mit (EG)

(d)

1	$\exists x(Fxa)$	$\vdash \exists x(Fxa)$	Prämisse
2	$\exists x(Fxa)$	$\vdash \exists y \exists x(Fxx)$	aus (1) mit (EG)

(e)

1	$Fab \rightarrow \forall x(Gax)$	$\vdash Fab \rightarrow \forall x(Gax)$	Prämisse
2	$Fab \rightarrow \forall x(Gax)$	$\vdash \forall y(Fay \rightarrow \forall x(Gax))$	aus (1) mit (UG)

(f)

1	$\exists x(Fxa \wedge Gbx)$	$\vdash \exists x(Fxa \wedge Gbx)$	Prämisse
2	$\exists x(Fxa \wedge Gbx)$	$\vdash Fba \wedge Gbb$	aus (1) mit (ES)