Quatrième examen probatoire
Cours d'introduction à la logique, semestre d'hiver 2005-2006
(peut tenir lieu de série pour ceux à qui il en manque une)
À rendre avant le vendredi 3 février, 16 h

Nom(s) : ______________________________

Points obtenus (dans 7 questions avec un total de 20 points) : ________

1. (2 points) Montrez au moyen de tables de vérité que les formules suivantes sont des tautologies :
   (a) "$p \rightarrow p$"
   (b) "$((p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r))$"
   (c) "$\neg(\neg p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$"
   (d) "$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

2. (4 points) A l'aide de la méthode des arbres, vérifiez si les propositions suivantes peuvent être prouvées :
   (a) "$(\neg q \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow p))$"
   (b) "$\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$"
   (c) "$(p \vee q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$"
   (d) "$((p \leftrightarrow q) \wedge (q \wedge r) \wedge (q \rightarrow s)) \rightarrow (s \rightarrow p)$"

3. (4 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les séquents suivants :
   (a) "$\{p \rightarrow q\ ,\ p \rightarrow r\} \vdash p \rightarrow (q \wedge r)$"
   (b) "$\{p \rightarrow q\ ,\ r \rightarrow s\} \vdash (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)$"
   (c) "$\vdash p \rightarrow (q \vee \neg q)$"
   (d) "$p \wedge \neg p \vdash p$"

4. (2 points) Expliquez
   (a) ce qu'est un terme singulier
   (b) ce qu'est une phrase ouverte
   (c) quelle est la distinction entre usage et mention
   (d) ce qu'est un système formel axiomatique
   (e) ce qu'est l'analyse Russellienne d'une description définie

5. (2 points) Expliquez, en vos propres mots, les distinctions (i) entre variables et constantes individuelles et (ii) entre noms propres, indexicaux et descriptions définies.

6. (3 points) A l'aide de la méthode des arbres, prouvez les propositions suivantes :
   (a) "$\forall x\ (Fx \to Gx) \to (\forall x\ (Fx) \to \forall x\ (Gx))$"
   (b) "$\forall x\ (Fx \to Gx) \to (\exists x\ (Fx) \to \exists x\ (Gx))$"
   (c) "$(\forall x\ (Fx \to Hx) \land \forall x(Gx \to Hx) \land \forall x\ (Fx \lor Gx)) \to \forall x\ (Hx)$"

7. (3 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les séquents suivants :
   (a) "$\exists x \forall y \exists z (Sxyz)\ \vdash\ \forall y \exists x \exists z (Sxyz)$"
   (b) "$\forall x(Fx), \forall x(Gx)\ \vdash\ \forall x(Fx \land Gx)$"
   (c) "$\exists x(Fx \lor Gx)\ \vdash\ \exists x(Fx) \land \exists x(Gx)$"