Exercices 10

Cours d'introduction à la logique, semestre d'hiver 2005-2006

A rendre avant le lundi 23 janvier, 10 h

Nom(s) : ____________________

Points obtenus (dans 2 questions avec un total de 20 points) : ________

1. (14 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les séquents suivants :
   (a) "$\forall x(Fx \to \neg Gx)\ ,\ \forall x(Hx \to Gx)\ \vdash\ \forall x(Fx \to \neg Hx)$"
   (b) "$\forall x(Gx \to \neg Fx)\ ,\ \forall x(Hx \to Gx)\ \vdash\ \forall x(Fx \to \neg Hx)$"
   (c) "$\forall x(Fx \to Gx)\ \vdash\ \forall x(Fx) \to \forall x(Gx)$"
   (d) "$\forall x(Gx \to \neg Hx)\ ,\ \exists x(Fx \land Gx)\ \vdash\ \exists x(Fx \land \neg Hx)$"
   (e) "$\forall x(Hx \to Gx)\ ,\ \exists x(Fx \land \neg Gx)\ \vdash\ \exists x(Fx \land \neg Hx)$"
   (f) "$\forall x(Fx \to Gx)\ \vdash\ \exists x(Fx) \to \exists x(Gx)$"
   (g) "$\forall x(Fx \land Gx)\ \vdash\ \forall x(Fx) \land \forall x(Gx)$"
   (h) "$\exists x(Fx) \lor \exists x(Gx)\ \vdash\ \exists x(Fx \lor Gx)$"
   (i) "$\exists x(Fa \to Fx)\ \vdash\ Fa \to \exists x(Fx)$"
   (j) "$\exists x(Fx) \to Fa\ \vdash\ \forall x(Fx \to Fa)$"
   (k) "$\exists x\forall y(Rxy) \vdash \forall y\exists x(Rxy)$"
   (l) "$\exists x\exists y(Rxy)\ \vdash\ \exists y\exists x(Rxy)$"
   (m) "$\forall x(Fx \to Gx)\ \vdash\ \forall x(\exists y(Fy \land Rxy) \to \exists y(Gy \land Rxy))$"
   (n) "$\exists x(Fx \land Gx)\ ,\ \exists x(Fx \land \forall y(Gy \to \neg Rxy))\ \vdash\ \exists x(Fx \land \neg\forall y(Fy \to Rxy))$"

2. (6 points) Dites si les applications suivantes des règles de déduction naturelle pour les quantificateurs sont correctes. Si elles ne le sont pas, dites pourquoi.

(a)

1	$\forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	prémisse
2	$\forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \exists z(Faa \wedge Gaz)$	de (1) par (SU)

(b)

1	$\forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	prémisse
2	$\forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \exists z(Faz \wedge Gbz)$	de (1) par (SU)

(c)

1	Fba	$\vdash Fba$	prémisse
2	Fba	$\vdash \exists y(Fby)$	de (1) par (GE)

(d)

1	$\exists x(Fxa)$	$\vdash \exists x(Fxa)$	prémisse
2	$\exists x(Fxa)$	$\vdash \exists y \exists x(Fxx)$	de (1) par (GE)

(e)

1	$Fab \rightarrow \forall x(Gax)$	$\vdash Fab \rightarrow \forall x(Gax)$	prémisse
2	$Fab \rightarrow \forall x(Gax)$	$\vdash \forall y(Fay \rightarrow \forall x(Gax))$	de (1) par (GU)

(f)

1	$\exists x(Fxa \wedge Gbx)$	$\vdash \exists x(Fxa \wedge Gbx)$	prémisse
2	$\exists x(Fxa \wedge Gbx)$	$\vdash Fba \wedge Gbb$	de (1) par (SE)