

Propriétés métalogiques de la logique des prédicats

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2005-2006

Feuille d'accompagnement pour le cours du 23 janvier 2006

Points à retenir du dernier cours

1. La déduction naturelle pour la logique des prédicats consiste des règles de déduction naturelles pour les connecteurs et de quatre règles d'introduction et d'élimination de quantificateurs.
2. La règle (SU), appelée "*spécialisation universelle*", nous permet de passer d'une quantification universelle à une instanciation de la phrase ouverte pour n'importe quel terme.
3. Un quantificateur existentiel est introduit par la règle de *généralisation existentielle* (GE).
4. Pour qu'une application des règles (SU) et (GE) soit correcte, il est requis que le terme remplacé par la variable soit libre pour cette variable dans la formule qui le contient, c'est-à-dire qu'il ne se trouve pas dans la portée d'un quantificateur qui lie cette variable.
5. Pour prouver une quantification universelle à partir d'une prémisse particulière à l'aide de la règle de *généralisation universelle* (GU), nous exigeons que cette prémisse soit vraie d'un individu arbitraire, c'est-à-dire d'un individu qui n'apparaît dans aucune supposition ou prémisse dont dépend la preuve de cette proposition particulière.
6. Nous pouvons alors, par (GU), inférer une quantification universelle dans laquelle le terme arbitraire est *partout* substitué par une variable. Il est important que cette substitution soit uniforme.
7. La règle d'élimination du quantificateur existentiel (SE) correspond à celle de l'élimination de la disjonction ($\vee E$) et est en conséquence plus compliquée.
8. L'application de la règle de spécialisation existentielle (SE) comprend quatre étapes :
 - (a) la preuve d'une quantification existentielle sous certaines suppositions et à partir de certaines prémisses ;
 - (b) la supposition du disjoint typique ;
 - (c) une preuve d'une autre proposition sous la supposition du disjoint typique ;
 - (d) l'application de la règle, avec la conclusion que nous pouvons également prouver la proposition prouvée sous la supposition du disjoint typique à partir des suppositions et prémisses nécessaires pour la preuve de la quantification existentielle ;
9. La règle de spécialisation existentielle (SE) est sujet au mêmes deux conditions que la règle de généralisation universelle :
 - (a) la constante remplaçant la variable dans le disjoint typique ne doit apparaître dans aucune prémisse ou supposition de laquelle dépend la quantification existentielle ;
 - (b) elle ne doit pas avoir d'occurrence dans la quantification existentielle que nous voulons prouver.
10. L'application de ces règles nous permet de prouver des théorèmes (" $\vdash \phi$ ") et des séquents (" $\phi \vdash \psi$ ") La déduction naturelle est une méthode syntaxique qui est correcte et complète par rapport à la sémantique de la logique des prédicats : toute proposition valide est un théorème et tout théorème est valide ; tout séquent déductible correspond à une relation de conséquence sémantique et toute conséquence sémantique peut être déduite comme séquent.