La logique modale et la logique de prouvabilité

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2005-2006

Feuille d'accompagnement pour le cours du 30 janvier 2006

Quelques conseils pour l'examen

1. Tables de vérité : réfléchissez à ce qu'elles signifient.
2. Connecteurs : notez les équivalences basiques.
3. Formalisation : essayez de rendre l'argument aussi intéressant que possible.
4. Formalisation : réfléchissez aux conditions sous lesquelles une phrase donnée serait fausse.
5. En quoi consiste la différence entre "$\forall x \exists y(Rxy)$" et "$\exists y \forall x(Rxy)$" ?
6. Méthode des arbres : pour prouver une proposition, montrez que toutes les branches de l'arbre *pour sa négation* se ferment.
7. Méthode des arbres : n'oubliez pas d'instancier les quantifications universelles pour toutes les constantes sur leurs branches.
8. Déduction naturelle : ne faites pas trop de suppositions – les seules manières de les enlever sont (PC) et (RAA).
9. ($\vee$**E**) et (SE) nous obligent à faire des suppositions (des deux disjoints et du disjoint typique respectivement), et l'enlèvent par la suite.
10. Déduction naturelle : structurez vos preuves en unités plus petites ; réfléchissez à ce que vous voulez prouver.

La logique modale

Définition 1. *L'alphabet du langage $\mathcal{L}^\Box$ de la logique modale propositionnelle consiste en les signes suivants :*

1. *des propositions atomiques "p_0", "p_1", "p_2" ... (une infinité dénombrable) ;*
2. *un operateur "$\Box \ldots$" ("nécessairement") ;*
3. *les connecteurs "$\neg \ldots$", "$\cdots \wedge \cdots$", "$\cdots \vee \cdots$", "$\cdots \rightarrow \cdots$" et "$\cdots \leftrightarrow \cdots$" ;*
4. *des symboles auxiliaires : parenthèses, virgules ;*

Définition 2. *Une formule propositionnelle de $\mathcal{L}^\Box$ est toute expression obtenable par la procédure suivante :*

1. *Toute proposition atomique "p_i" ($i \in \mathbb{N}$) est une formule propositionnelle.*
2. *Si ϕ est une formule propositionnelle, alors $\ulcorner(\Box\phi)\urcorner$ et $\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$ sont des formules propositionnelles.*
3. *Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \vee \psi)\urcorner$ et $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ sont des formules propositionnelles.*

Nous introduisons l'opérateur "$\Diamond \ldots$" comme abbréviation pour "$\neg\Box\neg \ldots$".

Le système le plus simple (et le système le plus faible dit "normal") de logique modale propositionnelle est le système **K**. Il consiste en une axiomatisation de la logique propositionnelle et un seul schéma d'axiomes modal :

$$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q) \qquad \textbf{(K)}$$

avec (MP) et une nouvelle règle d'inférence appelée "règle de nécessitation" (Nec) :

$$\frac{\vdash \phi}{\vdash \ulcorner \Box\phi \urcorner}\ \mathsf{Nec}$$

Un exemple d'une preuve :

(1)	$\mathbf{K} \vdash (p \wedge q) \rightarrow p$	$\mathbf{H_8}$
(2)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \rightarrow p)$	Nec de (1)
(3)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \rightarrow p) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p)$	$\mathbf{K}$
(4)	$\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p$	(MP) de (2) et (3)
(5)	$\mathbf{K} \vdash (p \wedge q) \rightarrow q$	$\mathbf{H_9}$
(6)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \rightarrow q)$	Nec de (5)
(7)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \rightarrow q) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q)$	$\mathbf{K}$
(8)	$\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q$	(MP) de (6) et (7)
(9)	$\mathbf{K} \vdash (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p) \rightarrow ((\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)))$	$\mathbf{H_{10}}$
(10)	$\mathbf{K} \vdash (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q))$	(MP) de (9) et (4)
(11)	$\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$	(MP) de (10) et (8)

D'autres théorèmes de **K** :

(i) "$(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$"
(ii) "$(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$"
(iii) "$(\Diamond p \vee \Diamond q) \leftrightarrow \Diamond(p \vee q)$"
(iv) "$\Diamond(p \wedge q) \rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$"

Des non-théorèmes de **K** :

(i') "$\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$"
(ii') "$(\Diamond p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$"
(iii') "$\Box p \rightarrow p$"

Définition 3. *Un cadre est une paire $\langle W, R\rangle$ d'un ensemble non-vide W, dont nous appelons les membres "mondes possibles" et une relation binaire R dite "d'accessibilité" entre ces mondes possibles.*

Définition 4. *Un modèle est un triple $\langle W, R, I\rangle$ consistant d'un cadre $\langle W, R\rangle$ et d'une fonction I :* $\mathsf{Fml}(\mathcal{L}) \times W \rightarrow \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$ *(appellée "interprétation") qui assigne à toute proposition et tout monde possible une valeur de vérité satisfaisant aux conditions suivantes :*

I1 *Si ϕ est une proposition atomique "p" et $w \in W$, soit $I(\phi, w) := \mathbf{v}$ soit $I(\phi, w) := \mathbf{f}$*

I2 $I(\neg\phi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi, w) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & I(\phi, w) = \mathbf{v} \end{cases}$

I3 $I(\phi \wedge \psi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi, w) = \mathbf{v} \textit{ et } I(\psi, w) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi, w) = \mathbf{f} \textit{ ou } I(\psi, w) = \mathbf{f} \end{cases}$

I4 $I(\phi \vee \psi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi, w) = \mathbf{v} \textit{ ou } I(\psi, w) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi, w) = \mathbf{f} \textit{ et } I(\psi, w) = \mathbf{f} \end{cases}$

I5 $I(\phi \rightarrow \psi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi, w) = \mathbf{f} \textit{ ou } I(\psi, w) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi, w) = \mathbf{v} \textit{ et } I(\psi, w) = \mathbf{f} \end{cases}$

I6 $I(\phi \leftrightarrow \psi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi, w) = I(\psi, w) \\ \mathbf{f} & I(\phi, w) \neq I(\psi, w) \end{cases}$

I7 $I(\Box\phi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & \forall v(Rwv \rightarrow I(\phi, v) = \mathbf{v}) \\ \mathbf{f} & \exists v(Rwv \wedge I(\phi, v) = \mathbf{f}) \end{cases}$

Définition 5. *Une formule propositionnelle ϕ de $\mathcal{L}^{\Box}$ est valide sur un cadre $\langle W, R\rangle$ si et seulement si pour tout modèle $\langle W, R, I\rangle$ et pour tout monde possible $w \in W$ du cadre, $I(\phi, w) = \mathbf{v}$.*

Théorème 6 (Correction de K). *Tout théorème de **K** est valid sur tous les cadres.*

Les logiques T et D

$$\Box p \to p \tag{T}$$

$$\Box p \to \Diamond p \tag{D}$$

Quelques théorèmes de **T** :

(i) "$p \to \Diamond p$"
(ii) "$\Diamond(p \to \Box p)$"

Théorème 7 (Correction de T). *Si $\langle W, R\rangle$ est tel que $\forall w \forall v\ (Rwv \to Rww)$, alors tout théorème de* **T** *est valide sur $\langle W, R\rangle$.*

Théorème 8 (Correction de D). *Si $\langle W, R\rangle$ est tel que $\forall w \exists v (Rwv)$, alors tout théorème de* **D** *est valide sur $\langle W, R\rangle$.*

La logique S4

$$\Box p \to \Box\Box p \tag{4}$$

Quelques théorèmes de **S4** :

(i) "$\Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$"
(ii) "$\Box\Box p \leftrightarrow \Box p$"
(iii) "$\Diamond\Box\Diamond p \to \Diamond p$"
(iv) "$\Box\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$"
(v) "$\Box\Diamond\Box\Diamond p \leftrightarrow \Box\Diamond p$"
(vi) "$\Diamond\Box\Diamond\Box p \leftrightarrow \Diamond\Box p$"

Dans **S4** toute proposition modale est équivalente à une d'une des formes suivantes : une proposition sans opérateur modale, une proposition de la forme "$\Box \ldots$", "$\Diamond \ldots$", "$\Box\Diamond \ldots$", "$\Diamond\Box \ldots$", "$\Box\Diamond\Box \ldots$" ou de"$\Diamond\Box\Diamond \ldots$" où "$\ldots$" ne contient pas d'opérateur modal.

Théorème 9 (Correction de S4). *Si $\langle W, R\rangle$ est tel que $\forall w \forall v (Rwv \to Rww)$ et $\forall w \forall v \forall u ((Rwv \wedge Rvu) \to Rwu)$, alors tout théorème de* **S4** *est valide sur $\langle W, R\rangle$.*

La logique S5

$$\neg\Box \to \Box\neg\Box p \tag{5}$$

Quelques théorèmes de **S5** :

(i) "$(\Box p \vee \Box q) \leftrightarrow \Box(p \vee \Box q)$"
(ii) "$(\Box p \vee \Diamond q) \leftrightarrow \Box(p \vee \Diamond q)$"
(iii) "$(\Diamond p \wedge \Diamond q) \leftrightarrow \Diamond(p \vee \Diamond q)$"
(iv) "$(\Diamond p \wedge \Box q) \leftrightarrow \Diamond(p \vee \Box q)$"
(v) "$\Box\Box p \leftrightarrow \Box p$"
(vi) "$\Box\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$"
(vii) "$\Diamond\Box p \leftrightarrow \Box p$"
(viii) "$\Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$"

Théorème 10 (Correction de S5). *Si $\langle W, R\rangle$ est tel que $\forall w \forall v (Rwv \to Rww)$, $\forall w \forall v \forall u ((Rwv \wedge Rvu) \to Rwu)$, et $\forall w \forall v (Rwv \to Rvw)$ alors tout théorème de* **S5** *est valide sur $\langle W, R\rangle$.*

système	axiomes	cadres
K	**(K)**	tous
D	**(K)**+**(D)**	sériels
T	**(K)**+**(T)**	réflexives
S4	**(K)**+**(T)**+**(4)**	réflexives et transitives
S5	**(K)**+**(T)**+**(5)**	réflexives, transitives et symétriques

La logique de prouvabilité

Le système de la logique de prouvabilité est appelé **GL** (après Gödel et Löb) et consiste de **K** avec le schéma d'axiomes suivant :

$$\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p \tag{GL}$$

En voici quelques propriétés :

(i) "$\Box p \rightarrow \Box\Box p$" est un théorème de **GL**.
(ii) "$\Box p \rightarrow p$" n'est pas un théorème de **GL**
(iii) "$\Box(\Box p \rightarrow p) \leftrightarrow \Box p$" est un théorème de **GL**.
(iv) "$((\Box p \rightarrow p) \wedge \Box(\Box p \rightarrow p)) \rightarrow p$" est un théorème de **GL**.
(v) "$\Box\Diamond p \leftrightarrow \Box(q \wedge \neg q)$" est un théorème de **GL**.

Si nous abrévions par "Bew p" l'assertion que "p" peut être prouvé dans une formalisation de l'arithmétique de Peano PA, nous pouvons prouver en méta-mathématiques les assertions suivantes :

(i) Si nous avons PA $\vdash p$, nous pouvons prouver PA $\vdash$ Bew p.
(ii) PA $\vdash$ Bew $(\ulcorner p \rightarrow q \urcorner) \rightarrow$ (Bew $(\ulcorner p \urcorner) \rightarrow$ Bew $(\ulcorner q \urcorner)$

"Bew ...", interprété comme opérateur modal, est donc au moins aussi fort que le système **K**.

Dans sa preuve de l'incomplétude de l'arithmétique, Gödel montrait le 'lemme diagonal' suivant :

(iii) Si $F(x)$ est un prédicat du langage de PA avec aucune autre variable libre que x, il existe une phrase p de ce langage tel que PA $\vdash p \leftrightarrow F(\ulcorner p \urcorner)$.

Il s'ensuit le premier théorème d'incomplétude :

Théorème 11 (Incomplétude de l'arithmétique). *Si* PA *est consistant, elle est incomplète : il existe une phrase qui peut être formulée dans son langage mais qui est indécidable (ne peut ni être prouvé ni être déprouvé).*

Preuve "$\neg$Bew (x)" est un prédicat avec une seule variable libre, donc il existe une phrase tel que PA $\vdash p \leftrightarrow \neg$Bew $(\ulcorner p \urcorner)$. Si cette phrase serait prouvable PA $\vdash p$, alors nous aurions par MP que PA $\vdash \neg$Bew $(\ulcorner p \urcorner)$, ce qui contredit PA $\vdash$ Bew $(\ulcorner p \urcorner)$ que nous obtenons de (i). Si PA ne prouve pas de contradiction, "p" n'est pas prouvable et alors "Bew $(\ulcorner p \urcorner)$" est faux. Si "$\neg p$" était prouvable, alors "Bew $(\ulcorner p \urcorner)$" le serait aussi (par la direction de droite à gauche du lemme diagonal) : donc une fausseté pourrait être prouvé. Donc ni PA $\vdash p$ ni PA $\vdash \neg p$. □

M.H. Löb a prouvé en 1954 :

(iv) Si PA $\vdash$ Bew $(\ulcorner p \urcorner) \rightarrow p$, alors PA $\vdash p$.

On obtient le deuxième théorème d'incomplétude comme conséquence immédiate :

Théorème 12 (Deuxième théorème d'incomplétude). *Si* PA *est consistant, alors* PA $\nvdash \neg$Bew $(\ulcorner p \wedge \neg p \urcorner)$.

Preuve Si PA prouvait sa propre consistance, PA $\vdash \neg$Bew $(\ulcorner p \wedge \neg p \urcorner)$, alors PA $\vdash$ Bew $(\ulcorner p \wedge \neg p \urcorner) \rightarrow (p \wedge \neg p)$, d'où s'ensuit par le théorème de Löb que PA $\vdash p \wedge \neg p$, ce qui le rendait inconsistant. □

Références

Boolos, George, 1993. *The Logic of Provability.* Cambridge : Cambridge University Press

Cresswell, Maxwell J. et Hughes, G.E., 1996. *A New Introduction to Modal Logic.* London : Routledge