Relations logiques et inférences logiques

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2005-2006

Feuille d'accompagnement pour le cours du 14 novembre 2005

Points à retenir du dernier cours

1. La logique propositionnelle étudie les connecteurs propositionnels qui relient des propositions ; la logique des prédicats étudie en outre les quantificateurs, les relations et les fonctions.
2. Le connecteur principal d'une formule est ler dernier évalué.
3. La syntaxe détermine quelles sont les formules bien formées d'une langue.
4. La sémantique donne les interprétations des signes ; elle leur associe une signification.
5. Selon le principe de vérifonctionnalité (pour la logique propositionnelle), les valeurs de vérité possibles d'une proposition complexe ne dépendent que des valeurs de vérité des propositions simples qui la constituent et des connecteurs qui les relient.
6. "$\neg p$" est vraie si et seulement si "p" est fausse.
7. "$p \wedge q$" est vraie si et seulement si "p" et "q" sont vraies ensembles.
8. "$p \vee q$" est vraie si et seulement si au moins une de "p" et "q" est vraie.
9. "$p \rightarrow q$" est vraie si et seulement si ou bien "p" est fausse ou bien "q" est vraie.
10. Une table de vérité détermine la signification d'un connecteur propositionnel en montrant de quelle manière la valeur de vérité d'une proposition complexe qui le contient dépend des valeurs de vérités de ses constituants simples.

Le langage objet et le métalangage

Le mot ""Genève"" contient six lettres et une paire de guillemets ; "Genève" contient six lettres et ne contient pas de guillemets ; et Genève contient des personnes, des bâtiments et une université.

Le métalangage sert à parler des expressions d'un autre langage, appelé 'langage objet' :

Genf ist eine schöne Stadt. (1)

"Genf" is my favourite word. (2)

""Genf" is my favourite word." est une phrase bien formée du métalangage. (3)

(1) est une phrase du langage objet (de l'allemand, à l'occurrence), (2) une phrase du métalangage (de l'anglais) et (3) une phrase du méta-métalangage (du français).

Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; (4)
donc je serai heureux et sage.

"Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; (5)
donc je serai heureux et sage" est valide.

""Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; (6)
donc je serai heureux et sage" est valide." est vrai.

(4) est une phrase du langage objet, (5) une phrase du métalangage et (6) une phrase du méta-métalangage.

La validité et la vérité logique

L'inférence

p. Et q. Mais aussi r. Donc s. (7)

a la forme suivante :

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ \hline s \end{array} \tag{8}$$

Donnée la sémantique du connecteur "$\wedge$" ("et"), on peut aussi l'écrire comme suit :

$$\frac{p \wedge q \wedge r}{s} \tag{9}$$

En disant qu'un argument de la forme (8) ou (9) est valide, on mentionne les propositions "p", "q", "r" et "s" mais on ne les utilise pas. Dire qu'un argument de cette forme est valide est dire :

Si "p", "q" et "r" sont vraies, alors "s" est vraie aussi. (10)

Il s'agit de la relation de *conséquence logique*, exprimée par "donné que ..., il s'ensuit que —", expression qui appartient au métalangage.

implication matérielle de q par p ("q" est inférée de "p")	$\Longleftrightarrow$	"$p \rightarrow q$" est vraie (il n'est pas le cas que "p" est vraie et "q" fausse.)
implication formelle de q par p ("q" est une conséquence de "p")	$\Longleftrightarrow$	"$p \rightarrow q$" est une tautologie (il n'est pas logiquement possible que "p" soit vraie et "q" fausse.)

Introduisons des abréviations :

"Un argument de la forme $\frac{p \wedge q \wedge r}{s}$ est valide." $\rightsquigarrow$ "$\{p \wedge q \wedge r\} \models s$"

"Un argument de la forme $\begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ \hline s \end{array}$ est valide." $\rightsquigarrow$ "$\{p, q, r\} \models s$"

Les noms de propositions et les demi-crochets de Quine

Nous disions

$p \models q$ (11)

lorsque nous aurions dû dire :

"p" $\models$ "q" (12)

Problème : en passant au métalangage, nous avons perdu la généralité. Solution : introduire des abréviations non pas pour des propositions mais pour des noms de propositions : les lettres minuscules grecques "ϕ" (prononcée : "phi"), "ψ" ("psi"), "χ" ("chi") et "ξ" ("xi") etc. :

$\phi \models \psi$ (13)

Problème : comment former des noms pour des propositions qui ont une certaine forme ?

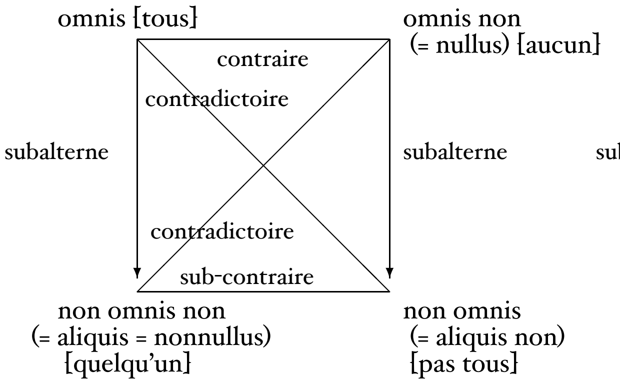
Première mauvaise solution :	$\phi \wedge \psi$
Deuxième mauvaise solution :	"$\phi \wedge \psi$"
Bonne solution :	$\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$

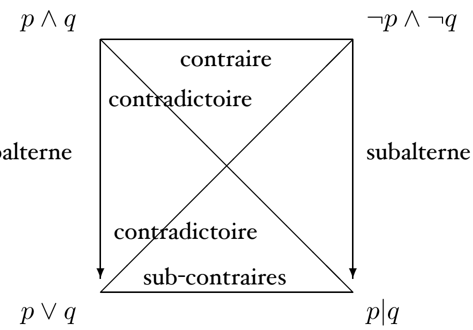
"$\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$" désigne la formule qui commence avec ϕ (c'est-à-dire l'expression dénotée par "ϕ"), continue avec "$\wedge$" et finit par ψ. Si ϕ est "p" et ψ est "q", $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ est "$p \wedge q$". Si ϕ est "$p \rightarrow q$" et ψ est "$r \vee s$". alors $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ est "$(p \rightarrow q) \wedge (r \vee s)$".

Les tautologies et les contradictions

Une proposition est une tautologie (vérité logique)
– si et seulement si elle est vraie dans toutes les possibilités logiques ;
– si et seulement si elle s'ensuit de n'importe quelle proposition ;
– si et seulement si elle est équivalente (sémantiquement) à "$p \vee \neg p$".
Une proposition est une contradiction
– si et seulement si elle est fausse dans toutes les possibilités logiques ;
– si et seulement si elle implique formellement n'importe quelle proposition ;
– si et seulement si elle est équivalente (sémantiquement) à "$p \wedge \neg p$".
Trois types d'opposition :
– Deux propositions sont contradictoires ssi elles ne peuvent être ni vraies ni fausses ensemble.
– Elles sont contraires ssi elles ne peuvent pas être vraies ensemble.
– Elles sont sub-contraires ssi elles ne peuvent pas êtres fausses ensemble.

Le carré des oppositions





Contrariété : il n'y a pas d'interprétation qui rende "$p \wedge q$" et "$\neg p \wedge \neg q$" vraies.

Sub-contrariété : il n'y a pas d'interprétation qui rende "$p \vee q$" et "$p|q$" fausses.

Subalternation : toute interprétation qui rend "$p \wedge q$" vraie, rend "$p \vee q$" vraie.

Subalternation : toute interprétation qui rend "$\neg p \wedge \neg q$" vraie, rend "$p|q$" vraie.

Contradiction : une interprétation rend "$p \wedge q$" vraie si et seulement si elle rend "$p|q$" fausse.

Contradiction : une interprétation rend "$p \vee q$" vraie ssi elle rend "$\neg p \wedge \neg q$" fausse.

Implication vs. conséquence

Le paradoxe de Lewis Carroll nous oblige à distinguer les règles d'inférence des tautologies et la relation de conséquence sémantique de celle de l'implication matérielle :

$$\frac{\begin{array}{c}p\\ p\rightarrow q\end{array}}{q}\qquad \frac{\begin{array}{c}p\\ p\rightarrow q\\ (p\wedge p\rightarrow q)\rightarrow q\end{array}}{q}\qquad \frac{\begin{array}{c}p\\ p\rightarrow q\\ (p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q\\ (p\wedge(p\rightarrow q)\wedge((p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q))\rightarrow q\end{array}}{q}\qquad \ldots$$

Quelques propriétés de la relation de conséquence sémantique :

permutabilité : $\{p_1,p_2,\ldots p_n\}\models r \quad\Longrightarrow\quad \{p_2,p_3,p_1,\ldots p_n,\ldots p_7,\ldots\}\models r$
monotonie : $\{p_1,p_2,\ldots p_n\}\models r \quad\Longrightarrow\quad \{p_1,p_2,\ldots p_n,\ldots q_1,q_2,\ldots q_m\}\models r$
transitivité : $\{p_1,p_2,\ldots p_n\}\models r$ & $\{r,q_1,q_2,\ldots q_n\}\models s \quad\Longrightarrow\quad \{p_1,p_2,\ldots p_n,q_1,q_2,\ldots q_m\}\models s$
réflexivité : $\{p_1,p_2,\ldots p_n\}\models p_i$ (pour toute proposition $p_i\in\{p_1,p_2,\ldots\}$)

L'interdépendance des connecteurs

Les lois de De Morgan :

$$\begin{array}{lcl}\ulcorner\neg(\phi\wedge\psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\neg\phi\vee\neg\psi\urcorner\\ \ulcorner\neg(\phi\vee\psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\neg\phi\wedge\neg\psi\urcorner\end{array}$$

Définition des autres connecteurs en termes de "¬" et "∧" :

$$\begin{array}{lcl}\ulcorner\phi\vee\psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\neg(\neg\phi\wedge\neg\psi)\urcorner\\ \ulcorner\phi\rightarrow\psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\neg(\phi\wedge\neg\psi)\urcorner\\ \ulcorner\phi\leftrightarrow\psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\neg(\phi\wedge\neg\psi)\wedge\neg(\neg\phi\wedge\psi)\urcorner\end{array}$$

Définition des autres connecteurs en termes de "¬" et "→" :

$$\begin{array}{lcl}\ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\neg(\phi\rightarrow\neg\psi)\urcorner\\ \ulcorner\phi\vee\psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\neg\phi\rightarrow\psi\urcorner\\ \ulcorner\phi\leftrightarrow\psi\urcorner & [\Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi\rightarrow\psi)\wedge(\psi\rightarrow\phi)\urcorner\,]\\ & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\neg((\phi\rightarrow\psi)\rightarrow\neg(\psi\rightarrow\phi))\urcorner\end{array}$$

D'autres équivalences sémantiques :

$$\begin{array}{rcl}\ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\psi\wedge\phi\urcorner\\ \ulcorner\phi\vee\psi\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\psi\vee\phi\urcorner\\ \ulcorner\phi\vee(\psi\wedge\chi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi\vee\psi)\wedge(\phi\vee\chi)\urcorner\\ \ulcorner\phi\wedge(\psi\vee\chi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi\wedge\psi)\vee(\phi\wedge\chi)\urcorner\\ \ulcorner\phi\wedge(\psi\vee\neg\psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \phi\\ \ulcorner\phi\vee(\psi\wedge\neg\psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \phi\\ \phi & \Longleftrightarrow & \ulcorner\neg\neg\phi\urcorner \quad\Longleftrightarrow\quad \ulcorner\phi\wedge\phi\urcorner \quad\Longleftrightarrow\quad \ulcorner\phi\vee\phi\urcorner\\ & & \ulcorner\phi\vee(\phi\wedge\psi)\urcorner \quad\Longleftrightarrow\quad \ulcorner\phi\wedge(\phi\vee\psi)\urcorner\\ & & \ulcorner(\phi\wedge\psi)\vee(\phi\wedge\neg\psi)\urcorner \quad\Longleftrightarrow\quad \ulcorner(\phi\vee\psi)\wedge(\phi\vee\neg\psi)\urcorner\end{array}$$