La méthode axiomatique

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2005-2006

Feuille d'accompagnement pour le cours du 21 novembre 2005

Points à retenir du dernier cours

1. Il faut distinguer différents niveaux de langage. 'Désignation', 'vérité' et 'validité' sont des expressions qui appartiennent au métalangage.
2. La relation de conséquence sémantique subsiste entre deux propositions s'il n'est pas et seulement s'il n'est pas logiquement possible que la première soit vraie et la deuxième fausse ; s'il y a et seulement s'il y a une inférence valide de l'une à l'autre.
3. Pour rendre compte de la généralité des lois logiques, il convient d'introduire des noms "ϕ", "ψ" etc. pour des propositions arbitraires.
4. Pour dire qu'une loi logique s'applique à toutes les propositions d'une certaine forme, il faut utiliser les crochets de Quine. "$\ulcorner \phi \wedge \neg\psi \urcorner$" est une expression qui est composée de ϕ, du signe de conjonction "$\wedge$", de "$\neg$" et de ψ.
5. Une inférence qui a "p" comme prémisse et "q" comme conclusion est valide si et seulement si "$p \rightarrow q$" est une tautologie.
6. Une tautologie peut être inférée de n'importe quelle prémisse ; on peut inférer n'importe quelle conclusion d'une contradiction.
7. Mis à part la conséquence sémantique (ou 'subalternation'), il y a d'autres relations métalinguistiques entre des propositions : l'équivalence sémantique (mêmes tables de vérité), la contradiction (exactement une est vraie), la contrariété (pas les deux vraies), la sub-contrariété (pas les deux fausses).
8. La validité ne concerne pas l'ordre des prémisses ; elle est monotone, transitive et réflexive.
9. Les lois de De Morgan :
$$\ulcorner \neg(\phi \wedge \psi) \urcorner \iff \ulcorner \neg\phi \vee \neg\psi \urcorner$$
$$\ulcorner \neg(\phi \vee \psi) \urcorner \iff \ulcorner \neg\phi \wedge \neg\psi \urcorner$$
10. Les lois de distributivité :
$$\ulcorner \phi \vee (\psi \wedge \chi) \urcorner \iff \ulcorner (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi) \urcorner$$
$$\ulcorner \phi \wedge (\psi \vee \chi) \urcorner \iff \ulcorner (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi) \urcorner$$

Déductibilité syntaxique vs. validité sémantique

Trois différents niveaux de formalisation :

langage ordinaire	"La terre tourne"	signification	vérité
méthode sémantique	"p"	–	vérité
méthode syntaxique	"p"	–	–

La relation de déductibilité, dénotée par "$\vdash$", est purement syntaxique : elle subsiste entre deux propositions si et seulement s'il est possible de manipuler les symboles qui représentent la deuxième proposition selon certaines règles purement structurelles, de manière à ce qu'on arrive à des symboles qui représentent la première proposition : ψ peut être déduit de ϕ si on peut appliquer des règles d'inférence à des axiomes et à ϕ de telle sorte qu'on obtienne ψ.

Le langage de la logique des propositions

Définition 1. *L'alphabet du langage $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle classique consiste en :*

1. *des propositions atomiques "p_0", "p_1", "p_2" ... (une infinité dénombrable)*
2. *les connecteurs "$\neg$" ("ne...pas"), "$\wedge$" ("et"), "$\vee$" ("ou"), "$\rightarrow$" ("si...alors) et "$\leftrightarrow$" ("ssi")*
3. *des symboles auxiliaires : parenthèses, virgules*

Définition 2. *Une formule propositionnelle est définie de manière récursive ainsi :*

1. *Toute proposition atomique "p_i" ($i \in \mathbb{N}$) est une formule propositionnelle.*
2. *Si ϕ est une formule propositionnelle, alors $\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$ est une formule propositionnelle.*
3. *Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \vee \psi)\urcorner$ et $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ sont des formules propositionnelles.*

Définition 3. *Une théorie* Th *est un ensemble (fini ou infini) de formules propositionnelles.*

La barre de Sheffer

La barre de Sheffer :

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi\vert\psi\urcorner$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Tous les connecteurs propositionnels peuvent être définis en termes de "|" :

$$\begin{aligned}
\ulcorner\neg\phi\urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner\phi|\phi\urcorner \\
\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner(\phi|\psi)|(\phi|\psi)\urcorner \\
\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner((\phi|\phi)|(\psi|\psi))\urcorner \\
\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner(\phi|(\psi|\psi))\urcorner \\
\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner((\phi|(\psi|\psi)) \mid ((\phi|\phi)|\psi)) \ \mid \ (\psi|(\phi|\phi)) \mid ((\psi|\psi)|\phi)\urcorner
\end{aligned}$$

Un peu d'histoire

Gottlob Frege (*Idéographie*, 1879) a été le premier à axiomatiser la logique propositionnelle et la logique des prédicats. Ses travaux sn'ont pas été remarqués jusqu'à la parution du premier volume de l'étude volumineuse *Principia Mathematica*, de Bertrand Russell et Alfred North Whitehead. Russell a découvert en 1902 que le système de Frege (*Lois Fondamentales de l' Arithmétique*, 1893 et 1903) était inconsistant (parce qu'il permet la formation de l'ensemble $a = \{x \mid x \notin x\}$).

Cette révolution en logique a rendu possibles des progrès importants en mathématiques (axiomatisation de l'arithmétique et de la géométrie) et leurs a ajouté deux nouvelles branches, les métamathématiques (étude des calculs formels, Hilbert) et la théorie des ensembles (Cantor, Zermelo).

Le plus important résultat en métamathématique a été la découverte de l'incomplétude de l'arithmétique par Gödel en 1931. Le plus important résultat en sémantique a été la formulation d'une définition non-contradictoire de "vérité" par le polonais Alfred Tarski en 1936.

Dans la première moitié du 20ème siècle, les trois grands courants en philosophie des mathématiques étaient le logicisme de Frege (les mathématiques comme partie de la logique), le formalisme de Hilbert (les mathématiques comme manipulations des symboles) et l'intuitionnisme de Brouwer et Heyting (constructivisme, rejet du tiers exclu).

Ce qu'est un calcul

Définition 4. *Un calcul est un ensemble de formules propositionnelles déterminé par un ensemble de formules propositionnelles qui sont appelées "axiomes" et des règles d'inférence. Un élément de cet ensemble est appelé "théorème". Ce qu'est un théorème est déterminé par la définition récursive suivante :*

1. *Tout axiome est un théorème.*
2. *Une formule propositionnelle obtienue en appliquant une règle d'inférence à des théorèmes est un théorème.*
3. *Rien d'autre n'est un théorème.*

"$\vdash$" représente la relation de *déductibilité* : "$\mathsf{HC} \vdash \phi$" veut dire que ϕ peut être déduit des axiomes du calcul HC – autrement dit, qu'il y a une preuve, dans HC, dont ϕ est la conclusion.

La notion de preuve

Une preuve est une séquence de formules bien formées qui satisfait quelques critères purement syntaxiques :

Définition 5. *Une preuve, dans un calcul* HC *et à partir d'une théorie* Th, *est une séquence finie de propositions* $\langle \phi_1, \ldots \phi_n \rangle$ *telle qu'on a, pour tout* i, $1 \leq i \leq n$, $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \cup \{\phi_1, \ldots, \phi_{i-1}\} \vdash \phi_i$.

Définissons la relation de déductibilité représentée par "$\vdash$" :

Définition 6. *Si* HC *est un calcul,* Th *une théorie et* ϕ *une formule propositionnelle, nous définissons* "$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$" *(pour n'importe quel nombre naturel* $n \in \mathbb{N}$*) par induction mathématique sur les nombres naturels :*

1. *Si* ϕ *est un axiome de* HC, *alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Si* ϕ *est un membre de* Th, *alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Si nous avons* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{m_i} \psi_i$ *(avec* $m_i < n$*) pour toutes les prémisses* ψ_i *d'une règle d'inférence de* HC, *alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour la conclusion* ϕ *de cette règle d'inférence.*

Un calcul axiomatique pour la logique propositionnelle

Définition 7. *Le calcul* HC *a comme axiomes toutes les formules de* $\mathcal{L}$ *qui ont la forme d'un des schémas suivants :*

$\mathbf{H_1}$	$\ulcorner \phi \rightarrow \phi \urcorner$	*réflexivité*
$\mathbf{H_2}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)) \urcorner$	*transitivité*
$\mathbf{H_3}$	$\ulcorner ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \urcorner$	*conditionaliser l'antécédent*
$\mathbf{H_4}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \urcorner$	*augmenter l'antécédent*
$\mathbf{H_5}$	$\ulcorner \phi \rightarrow (\phi \vee \psi) \urcorner$	*introduire "$\vee$" à droite*
$\mathbf{H_6}$	$\ulcorner \psi \rightarrow (\phi \vee \psi) \urcorner$	*introduire "$\vee$" à gauche*
$\mathbf{H_7}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \chi)) \urcorner$	*alternative*
$\mathbf{H_8}$	$\ulcorner (\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi \urcorner$	*éliminer "$\wedge$" à droite*
$\mathbf{H_9}$	$\ulcorner (\phi \wedge \psi) \rightarrow \psi \urcorner$	*éliminer "$\wedge$" à gauche*
$\mathbf{H_{10}}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \wedge \chi))) \urcorner$	*composition*
$\mathbf{H_{11}}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \urcorner$	*conversion*
$\mathbf{H_{12}}$	$\ulcorner \phi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \psi) \urcorner$	*ex falso quodlibet*
$\mathbf{H_{13}}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow (\phi \wedge \neg\phi)) \rightarrow \neg\phi \urcorner$	*reductio ad absurdum*
$\mathbf{H_{14}}$	$\ulcorner ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \leftrightarrow \psi) \urcorner$	*introduire "$\leftrightarrow$"*
$\mathbf{H_{15}}$	$\ulcorner (\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \urcorner$	*éliminer "$\leftrightarrow$"*
$\mathbf{H_{16}}$	$\ulcorner \phi \vee \neg\phi \urcorner$	*tautologie*

La seule règle d'inférences de HC *est modus ponens* MP : $\dfrac{\phi, \ulcorner\phi \to \psi\urcorner}{\psi}$.

L'axiome de Jean Nicod :

$$\ulcorner(\phi|(\psi|\chi)) \quad | \quad ((\xi|(\xi|\xi)) \mid ((\rho|\psi) \mid ((\phi|\rho)|(\phi|\rho))))\urcorner$$

Des preuves dans le calcul

(1)	$\mathsf{HC} \vdash p \to (q \vee p)$	$\mathbf{H}_6$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash q \to (q \vee p)$	$\mathbf{H}_5$
(3)	$\mathsf{HC} \vdash (p \to (q \vee p)) \to ((q \to (q \vee p)) \to ((p \vee q) \to (q \vee p)))$	$\mathbf{H}_7$
(4)	$\mathsf{HC} \vdash (q \to (q \vee p)) \to ((p \vee q) \to (q \vee p))$	(MP) de (1) et (3)
(5)	$\mathsf{HC} \vdash (p \vee q) \to (q \vee p)$	(MP) de (2) et (4)

Nous énumérons les lignes de la preuve dans la colonne de gauche pour une référence future. Dans la colonne de droite, nous indiquons soit le numéro du schéma d'axiomes dont la ligne en est une instance, soit la règle d'inférence utilisée et les lignes auxquelles elle a été appliquée. Dans la troisième ligne, par exemple, nous avons substitué remplacé χ dans $\mathbf{H}_7$ par "$q \vee p$". La difficulté principale avec les preuves dans les calculs est de savoir quelles sont les formules qu'il faut substituer dans les schémas d'axiomes pour être ensuite capable de déduire la conclusion voulue avec MP.

(1)	$\mathsf{HC} \vdash p \to (\neg p \to q)$	$\mathbf{H}_{12}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash (p \to (\neg p \to q)) \to ((p \wedge \neg p) \to q)$	$\mathbf{H}_4$
(3)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge \neg p) \to q$	(MP) de (1) et (2)
(4)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \wedge p) \to p$	$\mathbf{H}_9$
(5)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \wedge p) \to \neg p$	$\mathbf{H}_8$
(6)	$\mathsf{HC} \vdash ((\neg p \wedge p) \to p) \to (((\neg p \wedge p) \to \neg p) \to ((\neg p \wedge p) \to (p \wedge \neg p)))$	$\mathbf{H}_{10}$
(7)	$\mathsf{HC} \vdash ((\neg p \wedge p) \to \neg p) \to ((\neg p \wedge p) \to (p \wedge \neg p))$	(MP) de (4) et (6)
(8)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \wedge p) \to (p \wedge \neg p)$	(MP) de (5) et (7)
(9)	$\mathsf{HC} \vdash ((\neg p \wedge p) \to (p \wedge \neg p)) \to (((p \wedge \neg p) \to q) \to ((\neg p \wedge p) \to q))$	$\mathbf{H}_2$
(10)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \wedge \neg p) \to q) \to ((\neg p \wedge p) \to q))$	(MP) de (8) et (9)
(11)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \wedge p) \to q)$	(MP) de (3) et (10)
(12)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \wedge p) \to q) \to (\neg p \to (p \to q))$	$\mathbf{H}_3$
(13)	$\mathsf{HC} \vdash \neg p \to (p \to q)$	(MP) de (11) et (12)
(14)	$\mathsf{HC} \vdash ((q \wedge p) \to q) \to (q \to (p \to q))$	$\mathbf{H}_3$
(15)	$\mathsf{HC} \vdash (q \wedge p) \to q$	$\mathbf{H}_8$
(16)	$\mathsf{HC} \vdash q \to (p \to q)$	(MP) de (14) et (15)
(17)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \to (p \to q)) \to ((q \to (p \to q)) \to ((\neg p \vee q) \to (p \to q)))$	$\mathbf{H}_7$
(18)	$\mathsf{HC} \vdash (q \to (p \to q)) \to ((\neg p \vee q) \to (p \to q))$	(MP) de (13) et (17)
(19)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \vee q) \to (p \to q)$	(MP) de (16) et (18)

Des preuves sur le calcul

Théorème 8. *Soient* ϕ, ψ, χ *des formules propositionnelles :*

$$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi \quad \& \quad \mathsf{HC} \vdash \psi \to \chi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{HC} \vdash \phi \to \chi \tag{1}$$

[1]

$$\mathsf{HC} \vdash \phi \quad \& \quad \mathsf{HC} \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{HC} \vdash \phi \wedge \psi \tag{2}$$

[1]Notez l'utilisation des signes "&" et "$\Longrightarrow$" qui appartiennent au métalangage.

Preuve

Preuve de (1) **:** L'antécédent de (1) signifie qu'il y a des nombres n_1 et n_2 tels que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1} \phi \to \psi \qquad \mathsf{HC} \vdash^{n_2} \psi \to \chi$$

Un des deux nombres n_1 et n_2 est plus petit que l'autre. Supposons que $n_1 < n_2$. Nous devons démontrer qu'il existe un nombre n_3 tel que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_3} \phi \to \chi$$

Par $\mathbf{H_2}$, nous savons que

$$\mathsf{HC} \vdash^{0} (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$$

Avec (MP), nous pouvons donc dériver à partir de "$\mathsf{HC} \vdash^{n_1} \phi \to \psi$" :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1+1} (\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi)$$

Avec (MP), nous dérivons à partir de ceci et de "$\mathsf{HC} \vdash^{n_2} \psi$" ce dont nous avons besoin pour prouver (1) :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_2+1} \phi \to \chi$$

Preuve de (2) **:** L'antécédent de (2), "$\mathsf{HC} \vdash \phi$ & $\mathsf{HC} \vdash \psi$", signifie qu'il y a des nombres n_1 et n_2 tels que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1} \phi \qquad \mathsf{HC} \vdash^{n_2} \psi$$

Supposons que $n_1 < n_2$. Nous devons démontrer qu'il y a un nombre n_3 tel que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_3} \phi \wedge \psi$$

Par $\mathbf{H_1}$, nous savons que

$$\mathsf{HC} \vdash^{0} (\phi \wedge \psi) \to (\phi \wedge \psi)$$

Par $\mathbf{H_3}$, nous savons également que

$$\mathsf{HC} \vdash^{0} ((\phi \wedge \psi) \to (\phi \wedge \psi)) \to (\phi \to (\psi \to (\phi \wedge \psi)))$$

En appliquant (MP) à ces deux théorèmes, nous obtenons :

$$\mathsf{HC} \vdash^{1} \phi \to (\psi \to (\phi \wedge \psi))$$

Nous dérivons à partir de "$\mathsf{HC} \vdash^{n_1} \phi$" et de ceci par (MP) :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1+1} \psi \to (\phi \wedge \psi)$$

Nous dérivons à partir de "$\mathsf{HC} \vdash^{n_2} \psi$" et de ceci par (MP) :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_2+1} \phi \wedge \psi$$

□