La méthode des arbres

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2005-2006

Feuille d'accompagnement pour le cours du 28 novembre 2005

Points à retenir du dernier cours

1. Mis à part la méthode sémantique des tables de vérité, il existe une méthode syntaxique, qui ne fait pas seulement abstraction des significations des propositions, mais aussi de leurs valeurs de vérité.
2. Il est possible de définir la syntaxe de la langue $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle de manière rigoureuse.
3. Tous les connecteurs de la logique propositionnelle sont définissable par un seul, la barre de Sheffer.
4. La logique moderne a commencé avec les travaux de Frege (*Idéographie*, 1879) et les travaux de Russell et Whitehead (*Principia Mathematica*, 1910).
5. Cette révolution en logique a rendu possibles d'importants progrès en mathématiques (axiomatisation de l'arithmétique et de la géométrie) et leurs a ajouté deux nouvelles branches, les métamathématiques (étude des calculs formels, Hilbert) et la théorie des ensembles (Cantor, Zermelo).
6. Dans la première moitié du 20ème siècle, les trois grands courants en philosophie des mathématiques étaient le logicisme de Frege (les mathématiques comme partie de la logique), le formalisme de Hilbert (les mathématiques comme manipulations des symboles) et l'intuitionnisme de Brouwer et Heyting (constructivisme, rejet du tiers exclu).
7. Un calcul consiste en des axiomes et des règles d'inférences qui permettent de déduire des théorèmes à partir des axiomes.
8. Il est possible de définir de manière purement syntaxique ce qu'est une preuve (dans un certain calcul).
9. La logique propositionnelle peut être axiomatisée de différentes manières.
10. Il faut distinguer les preuves dans le calcul (qui se font par les règles d'inférences et des substitutions dans des axiomes) et les preuves sur le calcul (qui parlent, par exemple, en général de l'existence de certaines preuves) qui se font par les méthodes mathématiques 'ordinaires'.

La sémantique de la logique propositionnelle

Définition 1. *Une interprétation propositionnelle atomique I^* est une fonction qui assigne à toute proposition atomique "p_i", $i \in \mathbb{N}$, l'une des valeurs de vérité **v** ou **f**:* $I^* : \{\text{“}p_i\text{”} \mid i \in \mathbb{N}\} \to \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$.

Définition 2. *Étant donné une interprétation propositionnelle atomique I^*, nous définissons une interprétation propositionnelle I (qui est une fonction associant à toute formule propositionnelle une et une seule valeur de vérité: $I : \mathsf{Fml}(\mathcal{L}) \to \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$) par les clauses récursives suivantes :*

I1 *Si ϕ est une proposition atomique,* $I(\phi) := I^*(\text{“}p\text{”})$

I2 $I(\neg\phi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{v} \end{cases}$

I3 $I(\phi \wedge \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{v} \textit{ et } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{f} \textit{ ou } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I4 $I(\phi \vee \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{v} \textit{ ou } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{f} \textit{ et } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I5 $I(\phi \rightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{f} \text{ ou } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{v} \text{ et } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I6 $I(\phi \leftrightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = I(\psi) \\ \mathbf{f} & I(\phi) \neq I(\psi) \end{cases}$

Définition 3. *Une formule propositionnelle ϕ est satisfaisable si et seulement si elle est vraie sous au moins une interprétation de ses constituants simples.*

Définition 4. *Une formule propositionnelle ϕ est une tautologie si et seulement si elle est vraie sous toutes les interprétations.*

Définition 5. *Une formule propositionnelle ϕ est une contradiction si et seulement si elle n'est vraie sous aucune interprétation (elle est donc fausse sous toutes les interprétations).*

$$\begin{array}{rcl} \phi \text{ est satisfaisable} & :\Longleftrightarrow & \exists I\ (I(\phi) = \mathbf{v}) \\ \phi \text{ est une tautologie} & :\Longleftrightarrow & \forall I\ (I(\phi) = \mathbf{v}) \\ \phi \text{ est une contradiction} & :\Longleftrightarrow & \forall I\ (I(\phi) = \mathbf{f}) \end{array}$$

Définition 6. *Une formule propositionnelle ϕ est une conséquence (sémantique) d'une théorie Th (écrit : "$\mathsf{Th} \models \phi$") si et seulement si toute interprétation qui rend vraies toutes les formules propositionnelles dans Th rend vraie ϕ.*

$$\mathsf{Th} \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall I\ \forall \psi \in \mathsf{Th}\ \ (I(\psi) = \mathbf{v}\ \rightarrow\ I(\phi) = \mathbf{v})$$

ϕ est une conséquence sémantique de Th si et seulement si $\mathsf{Th} \cup \{\neg\phi\}$ est insatisfaisable (s'il n'y a pas d'interprétation qui ne rende vraies toutes les formules dans Th et rende faux ϕ).

Les relations entre conséquence sémantique et déductibilité

Quelle est la relation entre $\models$ (conséquence sémantique) et $\vdash$ (déductibilité) ?

correction : HC est correct : tout théorème est une tautologie.
complétude : HC est complet : toute tautologie est un théorème.

Théorème 7. *Soit Th une théorie et ϕ une formule propositionnelle :*

$$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \models \phi$$

'$\Longrightarrow$' (correction) : HC ne prouve pas trop, ne prouve pas plus que les vérités logiques
'$\Longleftarrow$' (complétude) : HC prouve assez, il n'y a pas de vérités logiques qui ne sont pas prouvable dans HC

La nature de la logique

La logique peut être considérée comme
- l'étude des vérités logiques (des théorèmes et des tautologies)
- l'étude des inférences logiques

Méthodes syntaxiques issus du deuxième paradigme :
- la méthode des arbres (des 'tableaux analytiques')
- la méthode de la déduction naturelle

Leur avantage : il ne faut plus chercher de substitutions dans les axiomes.

La méthode des arbres

F1 Si une négation $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ est fausse, alors ϕ est vrai.

F2 Si une conjonction $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ est vraie, alors ϕ et ψ sont vrais.

F3 Si une conjonction $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ est fausse, alors soit ϕ soit ψ est faux.

F4 Si une disjonction $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$ est vraie, alors soit ϕ, soit ψ est vrai.

F5 Si une disjonction $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$ est fausse, alors ϕ et ψ sont faux.

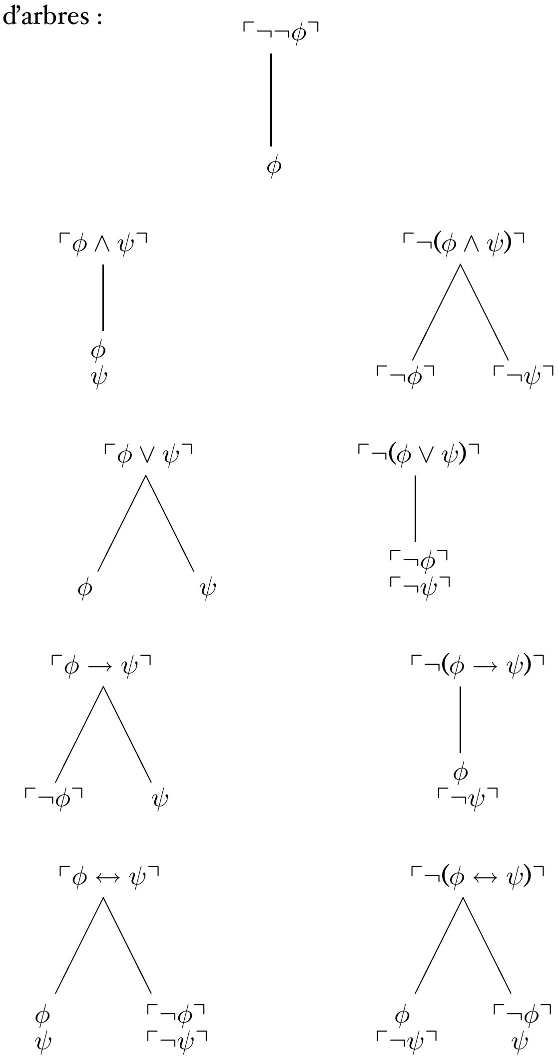
F6 Si une implication $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ est vraie, alors soit ϕ est faux soit ψ est vrai.

F7 Si une implication $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ est fausse, alors ϕ est vrai et ψ est faux.

F8 Si une équivalence $\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$ est vraie, alors soit ϕ et ψ sont vrais, soit ϕ et ψ sont faux.

F9 Si une équivalence $\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$ est fausse, alors soit ϕ est vrai et ψ faux, soit ϕ est faux et ψ vrai.

Les règles de construction d'arbres :



Une branche se ferme si et seulement si le 'chemin de vérité' correspondant contient une proposition simple et sa négation. Après avoir appliqué une règle à une formule dans une branche, nous la marquons par le signe "✓". Après chaque application d'une règle, nous déterminons si nous pouvons déjà fermer une branche. Il est avantageux de toujours traiter d'abord les propositions qui n'ouvrent pas d'embranchements.

Quelques exemples