Propriétés métalogiques

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2005-2006

Feuille d'accompagnement pour le cours du 12 décembre 2005

Points à retenir du dernier cours

1. La caractéristique de la méthode de la déduction naturelle est l'usage des suppositions. La règle des suppositions nous permet d'introduire n'importe quelle supposition à n'importe quel étape de la preuve ; les règles PC, RAA et $\vee$**E** nous permettent de nous en décharger.
2. Les règles de la déduction naturelle sont des règles d'introduction et d'élimination pour les connecteurs propositionnels et peuvent être conçues comme donnant leurs significations.
3. La méthode de la déduction naturelle consiste en les règles suivantes :
   (a) supposition : je peux supposer toute proposition (si j'en tiens compte ensuite)
   (b) MP : si j'ai déjà $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ et aussi ϕ, je peux écrire ψ.
   (c) MT : si j'ai déjà $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ et aussi $\ulcorner\neg\psi\urcorner$, je peux écrire $\ulcorner\neg\phi\urcorner$.
   (d) PC : si j'ai supposé ϕ et montré ensuiteψ, je peux écrire $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$.
   (e) DN : si j'ai déjà $\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$, je peux écrire ϕ ; si j'ai déjà ϕ, je peux écrire $\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$.
   (f) RAA : si j'ai supposé ϕ et montré qu'il s'ensuit ψ et aussi $\ulcorner\neg\psi\urcorner$, je peux écrire $\ulcorner\neg\phi\urcorner$.
   (g) $\wedge$**I** : si j'ai déjà ϕ et ψ, je peux écrire $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$.
   (h) $\wedge$**E** : si j'ai déjà $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$, je peux écrire ϕ et aussi écrire ψ.
   (i) $\vee$**I** : si j'ai déjà ϕ, je peux écrire $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$; si j'ai déjà ψ, je peux écrire $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$.
   (j) $\vee$**E** : si j'ai montré $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ et que χ s'ensuit de ϕ et que χ s'ensuit également de ψ, je peux écrire χ.
   (k) $\leftrightarrow$ **I** : si j'ai déjà $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ et $\phi\psi \rightarrow \phi\urcorner$, je peux écrire $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$.
   (l) $\leftrightarrow$ **E** : si j'ai déjà $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$, je peux écrire $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ et aussi écrire $\ulcorner\psi \rightarrow \phi\urcorner$.
4. L'application de ces règles nous permet d'écrire des preuves des théorèmes ("$\vdash \phi$") et des séquents ("$\phi \vdash \psi$").
5. Pour avoir prouvé un théorème ou un séquent, il faut avoir déchargé toute supposition.
6. Pour établir une conclusion implicative, il convient d'utiliser PC.
7. Pour établir une conclusion négative ou une conclusion simple, il convient d'utiliser RAA.
8. Le théorème de déduction nous assure de la validité de la règle de preuve conditionnelle.
9. La méthode de la déduction naturelle nous permet d'utiliser des règles dérivées.
10. La déduction naturelle est une méthode syntaxique qui est correcte et complète : tout séquent déductible correspond à une relation de conséquence sémantique et toute conséquence sémantique peut être déduite comme séquent.

Les propriétés métalogiques

Un calcul syntaxique est appelé :
- '**consistant**' s'il ne permet pas la déduction d'une contradiction.
- '**correct**' si tous ses théorèmes sont des tautologies.
- '**complet**' s'il permet la déduction de toutes les tautologies.
- '**décidable**' s'il existe une procédure mécanique qui permet de déterminer si une proposition est ou non un théorème.

Une logique (ensemble de proposition appelées 'tautologies') peut être appelée :

– '**décidable**, s'il existe une procédure mécanique qui permet de déterminer si une proposition est ou non une tautologie.
– '**compacte**' si toute conséquence sémantique d'un ensemble infini de prémisses s'ensuit déjà d'un ensemble fini.

Théorème 1 (Théorème de déduction). *ψ peut être déduit de ϕ si et seulement si $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ est un théorème.*

Correction et complétude de la méthode des arbres

Théorème 2 (Correction de la méthode des arbres). *La méthode des arbres est correcte : toute proposition prouvable est une tautologie.*

Théorème 3 (Complétude de la méthode des arbres). *La méthode des arbres est complète : toute tautologie est prouvable.*

Pour prouver des affirmations sur toutes les formules d'un certain langage par induction mathématique, la définition suivante est utile :

Définition 4. *Le degrés d'une proposition ϕ est le nombre naturel déterminé par les règles suivantes :*

(1) Si ϕ est une proposition atomique, alors son degrés est 0.

(2) Si ϕ est une proposition niée $\ulcorner \neg\psi \urcorner$ et le degrés de ψ est n, alors son degrés est $n + 1$.

(3) Si ϕ est une conjonction $\ulcorner \psi \wedge \chi \urcorner$, une disjonction $\ulcorner \psi \vee \chi \urcorner$, une implication $\ulcorner \psi \rightarrow \chi \urcorner$ ou une équivalence $\ulcorner \psi \leftrightarrow \chi \urcorner$ et si le degrés de ψ est n et le degrés de χ est m, alors le degrés de ϕ est $n + m + 1$.

Correction et complétude de la déduction naturelle

Théorème 5 (Correction de la déduction naturelle). *La méthode de la déduction naturelle est correcte : tout séquent déductible est une conséquence sémantique.*

Théorème 6 (Complétude de la déduction naturelle). *La méthode de la déduction naturelle est complète : toute conséquence sémantique est déductible en tant que séquent.*

Décidabilité et formes normales

Théorème 7 (Décidabilité de la logique propositionnelle). *La logique propositionnelle est décidable : il existe une procédure mécanique qui permet de déterminer si une proposition est ou non une tautologie.*

Définition 8. *Une formule est en forme normale conjonctive si elle est une conjonction de disjonctions de propositions atomiques et de négations de propositions atomiques.*

Théorème 9. *Si ϕ est une formule propositionnelle, il y a une formule ψ en forme normale conjonctive qui est sémantiquement équivalente à ϕ.*

La compacité de la logique propositionnelle

Théorème 10. *La logique propositionnelle est compacte : $\Gamma \models \phi$ si et seulement s'il existe un sous-ensemble fini $\Gamma' \subset \Gamma$ tel que $\Gamma' \models \phi$.*