La logique des prédicats

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2005-2006

Feuille d'accompagnement pour le cours du 19 décembre 2005

Points à retenir du dernier cours

1. Nous obtenons des prédicats (ou 'phrases ouvertes') des propositions en effaçant un ou plusieurs termes singuliers.
2. La syllogistique classique distingue quatre types de propositions : **SaP**, **SiP**, **SeP**, **SoP**.
3. Ces quatre types de propositions correspondent à des relations entre les extensions des termes "S" et "P".
4. Ces relations peuvent être symbolisées à l'aide des diagrammes de Venn ; on peut ainsi vérifier, par exemple, le carré des oppositions.
5. Les inférences valides de la syllogistiques sont des inférences directes ou indirectes ; des dernières il y a 19 principales que l'on peut mémoriser à l'aide des noms comme "Barbara","Ferio","Cesare" et "Felapton".
6. Les diagrammes de Venn dépassent déjà les limites de la syllogistique.
7. Les défauts principaux de la syllogistique et des diagrammes de Venn sont :
   (a) elles ne peuvent pas être combinées avec la logique propositionnelle ;
   (b) elles ne distinguent pas entre termes singuliers et prédicats ; par conséquent, elles ne traitent de propositions existentielles que si on introduit des prédicats qui ne sont vrais d'un seul individu ;
   (c) elle ne ne laissent pas de place pour une 'logique des relations', ne s'appliquant qu'à des prédicats unaires ;
8. Les prédicats ou phrases ouvertes ne sont ni vrais ni faux, mais vrais ou faux *de* certains individus ; les individus les satisfont de la même manière comme les arguments satisfont les fonctions.
9. Les variables indiquent des lacunes dans les phrases ouvertes ; les quantificateurs servent à en former des phrases complètes.
10. La formalisation à l'aide de variables ne permet de traiter la généralité multiple et d'expliquer la distinction entre "Tout le monde aime quelqu'un" et "Quelqu'un est aime par tout le monde".

Quelques inférences valides dans la logique des prédicats

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\,(x \text{ est un homme} \rightarrow x \text{ est mortel})\\ \forall x\,(x \text{ est un philosophe} \rightarrow x \text{ est un homme})\end{array}}{\forall x\,(x \text{ est un philosophe} \rightarrow x \text{ est mortel})} \tag{1}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\neg\exists x\,(x \text{ est un philosophe} \wedge x \text{ est méchant})\\ \exists x\,(x \text{ est un logicien} \wedge x \text{ est un philosophe})\end{array}}{\exists x\,(x \text{ est un logicien} \wedge \neg(x \text{ est méchant}))} \tag{2}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\neg\exists x\,(x \text{ est un homme} \wedge x \text{ est parfait})\\ \forall x\,(x \text{ est un philosophe} \rightarrow x \text{ est un homme})\end{array}}{\neg\exists x\,(x \text{ est un philosophe} \wedge x \text{ est parfait})} \tag{3}$$

Le langage $\mathcal{L}^+$

Définition 1. *L'alphabet du langage $\mathcal{L}^+$ de la logique des prédicats classique consiste en les signes suivants :*

1. *des signes logiques :*
   (a) *les connecteurs "$\neg \ldots$" ("ne-pas"), "$\cdots \wedge \cdots$" ("et"), "$\cdots \vee \cdots$" ("ou"), "$\cdots \rightarrow \cdots$" ("si-alors) et "$\cdots \leftrightarrow \cdots$" ("ssi") ;*
   (b) *les quantificateurs "$\forall x(\ldots x \cdots)$" ("pour tout x") et "$\exists x(\ldots x \cdots)$" ("il y a au moins un x") ;*
   (c) *le signe d'identité : "$\ldots \cdot \cdots =$" ("est identique à") ;*
   (d) *des variables pour des individus : "x_i" pour tout $i \in \mathcal{N}$;*
2. *des signes non-logiques :*
   (a) *des signes pour les relations : "R_i" pour tout $i \in \mathbf{I}$;*
   (b) *des signes pour les fonctions : "f_i" pour tout $i \in \mathbf{J}$;*
   (c) *des constantes pour des individus : "c_i" pour tout $i \in \mathbf{K}$;*
3. *des signes auxiliaires : parenthèses, virgules*

Nous appelons une '*langue*' $\mathcal{L}^+$ un alphabet - un choix précis de signes non-logiques – avec un ensemble **K** d'indices pour les constantes et deux fonctions $\lambda : \mathbf{I} \mapsto \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mu : \mathbf{J} \mapsto \mathbb{N} \setminus \{0\}$ qui déterminent l'adicité de nos signes pour les relations et pour les fonctions.

Définition 2. *Les termes d'une langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ sont définis par les clauses récursives suivantes :*

1. *Toute variable "x_i" est un terme.*
2. *Toute constante "c_i" est un terme.*
3. *Si "t_1", "t_2", ..., "t_n" sont des termes, $j \in \mathbf{J}$ et $n = \mu(j)$, alors "$f_j(t_1, t_2, \ldots, t_n)$" est un terme.*

Définition 3. *ϕ est une formule atomique de la langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ si et seulement si :*

1. *ϕ est de la forme "$t_1 t^=_2$" pour deux termes "t_1" et "t_2"; ou*
2. *ϕ est de la forme "$R_i(t_1, t_2, \ldots, t_{\lambda(i)})$" pour des termes "$t_1$", "$t_2$", ..., "$t_{\lambda(i)}$", $j \in \mathbf{J}$;*

Définition 4. *ϕ est une formule de la langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ si et seulement si :*

1. *ϕ est une formule atomique ; ou*
2. *ϕ est de la forme $\ulcorner(\neg\psi)\urcorner$ pour une formule ψ ;*
3. *ϕ est de la forme $\ulcorner(\psi \wedge \chi)\urcorner$, $\ulcorner(\psi \vee \chi)\urcorner$, $\ulcorner(\psi \rightarrow \chi)\urcorner$ ou $\ulcorner(\psi \leftrightarrow \chi)\urcorner$, pour des formules ψ et χ ; ou*
4. *ϕ est de la forme $\ulcorner\forall x_i(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_i(\psi)\urcorner$ pour une formule ψ et une variable "x_i", $i \in \mathbb{N}$.*

Définition 5. *Si ϕ est une formule et "x_i" une variable, nous disons que "x_i" a une occurrence libre dans ϕ si et seulement si une des conditions suivantes est remplie :*

1. *ϕ est une formule atomique et contient "x_i";*
2. *ϕ a la forme $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et "x_i" a une occurrence libre dans ψ ;*
3. *ϕ a la forme $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ ou $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ et "x_i" a une occurrence libre ou bien dans ψ ou bien dans χ ;*
4. *ϕ a la forme $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner$, $i \neq j$ et "x_i" a une occurrence libre dans ψ.*

Définition 6. *Une phrase est une formule qui ne contient aucune occurrence libre d'une variable.*

La sémantique de la logique des prédicats

Définition 7. *Soit $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu\rangle$ une langue de la logique des prédicats. Une structure $\mathcal{A}$ pour $\mathcal{L}^+$ consiste en :*

1. *un ensemble non-vide $|\mathcal{A}|$, appelé 'l'univers de discours' de $\mathcal{A}$;*
2. *une interprétation de toutes les signes de relations, qui attribue à tout $i \in \mathbf{I}$ une relation $R_i^{\mathcal{A}}$ sur $|\mathcal{A}|$ avec $\lambda(i)$ places argumentales, c'est-à-dire un sous-ensemble $R^{\mathcal{A}} \subset |\mathcal{A}|_i^{\lambda(i)}$.*
3. *une interprétation de toutes les signes de fonctions, qui attribue à tout $j \in \mathbf{J}$ une fonction $f_j^{\mathcal{A}}$ sur $|\mathcal{A}|$ avec $\mu(j)$ places argumentales, c'est-à-dire une fonction $|\mathcal{A}|_i^{\mu(j)}| \rightarrow \mathcal{A}|$.*
4. *une interprétation de toutes les constantes, qui attribue à tout $k \in \mathbf{K}$ un élément fixe, $c_k^{\mathcal{A}}$, de $|\mathcal{A}|$.*

Définition 8. *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats et $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$. Une assignation de valeurs est une fonction h qui assigne à toute variable x_i ($i \in \mathbb{N}$) exactement un élément de l'univers de discours : $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}|$.*

Définition 9. *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$ et $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs. La désignation $\overline{h}(t)$ d'un terme "t" de $\mathcal{L}^+$ sous cette assignation de valeurs est définie comme suit :*

1. *si "t" est une variable, $\overline{h}(t)$ est $h(t)$;*
2. *si "t" est une constante "c_k", $\overline{h}(t)$ est $c_k^{\mathcal{A}}$;*
3. *si "t" est un terme de la forme "$f_j(t_1, \ldots t_{\mu(j)})$", alors $\overline{h}(t)$ est $f_j^{\mathcal{A}}(\overline{h}(t_1), \ldots, \overline{h}(t_{\mu(j)}))$.*

Définition 10. *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$ et $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}$+ est vraie sous l'assignation de valeurs h ou que l'assignation de valeurs h satisfait la formule ϕ (abrégé par "$\mathcal{A} \models_h \phi$") si et seulement si une des conditions suivantes est remplie :*

S1	*ϕ a la même forme que "$t_1 \doteq t_2$"*	*et*	$\overline{h}(t_1) = \overline{h}(t_2)$
S2	*ϕ a la même forme que "$R_i(t_1, \ldots, t_{\lambda(i)})$"*	*et*	$R_i^{\mathcal{A}}(\overline{h}(t_1), \ldots, \overline{h}(t_{\lambda(i)}))$
S3	*ϕ est de la forme $\ulcorner \neg\psi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \not\models_h \psi$
S4	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \wedge \chi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *et* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S5	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \vee \chi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *ou bien* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S6	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \rightarrow \chi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \not\models_h \psi$ *ou bien* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S7	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \leftrightarrow \chi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *si et seulement si* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S8	*ϕ est de la forme $\ulcorner \forall x_i(\psi) \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ *pour tous les* $a \in |\mathcal{A}|$
S9	*ϕ est de la forme $\ulcorner \exists x_i(\psi) \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ *pour au moins un* $a \in |\mathcal{A}|$

Définition 11. *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$, $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}+) \rightarrow |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs et "x_i" une variable de $\mathcal{L}^+$. Nous définissons l'assignation variée à la place "x_i" – appelée "$h\binom{x_i}{a}$" – comme suit :*

$$h\begin{pmatrix} x_i \\ a \end{pmatrix}(x_j) \quad := \quad \begin{cases} h(x_j) & i \neq j \\ a & i = j \end{cases}$$

La notion de validité

Définition 12. *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats et $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}^+$ est vraie dans la structure $\mathcal{A}$ si et seulement si ϕ est vraie sous toutes les assignations de valeurs pour $\mathcal{L}^+$:*

$$\mathcal{A} \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{pour tout } h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}| : \quad \mathcal{A} \models_h \phi$$

Définition 13. *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}^+$ est valide ou une tautologie si et seulement si ϕ est vraie dans toutes les structures pour $\mathcal{L}^+$:*

$$\models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{pour tout } \mathcal{A} : \quad \mathcal{A} \models \phi$$

Nous appelons une formule ϕ une conséquence sémantique d'un ensemble de formules si et seulement si ϕ est vraie dans toutes les structures où toutes ces formules sont vraies :

$$\Sigma \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{pour tout } \mathcal{A} : \textit{si } \mathcal{A} \models \psi \textit{ pour toutes les formules } \psi \in \Sigma, \textit{ alors } \mathcal{A} \models \phi$$

La généralité multiple

(i) Tous les garçons aiment une fille.
(ii) Ce monsieur a écrit un livre sur tout.

(i′) $\forall x$ (x est un garçon $\rightarrow$ $\exists y$(y est une fille $\wedge$ x aime y))
(i″) $\exists y$ (y est une fille $\wedge$ $\forall x$(x est un garçon $\rightarrow$ x aime y))

(ii′) $\exists y$ ($\forall x$(y est un livre de ce monsieur $\wedge$ y est sur x))
(ii″) $\forall x$ ($\exists y$(y est un livre de ce monsieur $\wedge$ y est sur x))

Le concept de variable

$\exists x$ (j'adore x) (4)
$\exists x$ (j'adore x $\wedge$ x est un philosophe) (5)
$\exists x$ (j'adore x) $\wedge$ x est un philosophe (6)
$\exists x$ (j'adore x) $\wedge$ $\exists x$ (x est un philosophe) (7)
$\exists x$ (j'adore x) $\wedge$ $\exists y$ (y est un philosophe) (8)
$\exists y$ (j'adore y $\wedge$ y est un philosophe) (9)

Les propriétés, relations et fonctions

(a) Tom est venu. Donc quelqu'un est venu.
(b) Personne n'est venu. Donc quelqu'un est venu.

$$\frac{Fa}{\exists x(Fx)} \qquad \rightsquigarrow ? \qquad \frac{\text{Volcan n'existe pas.}}{\exists x(x = \text{Volcan} \wedge x \text{ n'existe pas})}$$

a existe $\rightsquigarrow$ $\exists x(x = a)$ (10)
des F existent $\rightsquigarrow$ $\exists x(Fx)$ (11)
a n'existe pas $\rightsquigarrow$ $\neg\exists x(x = a)$ (12)
des F n'existent pas $\rightsquigarrow$ $\neg\exists x(Fx)$ (13)

F1 Bleu est la couleur du ciel. La couleur du ciel change. Donc bleu change.
F2 Les apôtres sont douze. Jean est un apôtre. Donc Jean est douze.
F3 Les hommes sont disséminés un peu partout sur la Terre. Jacques est un homme. Donc Jacques est disséminé un peu partout sur la Terre.