La méthode des arbres

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2005-2006

Feuille d'accompagnement pour le cours du 9 janvier 2006

Points à retenir du dernier cours

1. L'alphabet d'une langue pour la logique des prédicats contient des connecteurs, le signe d'identité, des variables, des quantificateurs, des signes de relations, des signes de fonctions et des constantes individuelles. Les trois dernières catégories composent les signes non-logiques du langage.
2. Les quantificateurs de la logique des prédicats sont de la même catégorie syntaxique que les prédicats de deuxième ordre.
3. Une variable a une occurrence libre dans une formule si elle ne se trouve pas partout dans la portée d'un quantificateur correspondant.
4. Une structure pour un langage de la logique des prédicats consiste d'un univers de discours et d'une interprétation de ses signes non-logiques.
5. Une interprétation d'une constante lui assigne un élément de l'univers de discours ; l'interprétation d'un signe de relation lui assigne une relation dans cet univers ; et l'interprétation d'un signe de fonction lui assigne une fonction qui prend ses arguments et ses valeurs dans cet univers de discours.
6. Une assignation de valeurs dans une structure assigne à toute variable de la langue un élément de l'univers de discours.
7. La notion clef de la sémantique de la logique des prédicats est celle de la satisfaction d'une phrase ouverte par une assignation de valeurs dans une structure. La phrase ouverte est alors appelée 'vraie sous cette assignation' (dans cette structure).
8. Une formule est vraie dans une structure si elle est et seulement si elle est vraie sous toutes les assignations de valeurs dans cette structure. Une telle structure est appelée un 'modèle' de la formule. Une formule est valide si et seulement si elle est vraie dans toutes les structures.
9. La substitution d'un terme pour une variable dans une formule substitue ce terme à toute occurrence de la variable dans la formule. Pour qu'une telle substitution compte comme instanciation, il faut que le terme soit libre pour la variable dans la formule, c'est-à-dire qu'il ne contient pas de variable qui devient liée par la substitution.
10. L'ordre des quantificateur est important : "$\exists y \forall x\ (Rxy)$" implique formellement "$\forall x \exists y\ (Rxy)$", mais la converse est fausse.

Les phrases quantifiées

Théorème 1. *Soit $\mathcal{A}$ une structure dont l'univers de discours $|\mathcal{A}|$ est fini et $\phi(x)$ une formule qui contient une occurrence libre de la variable "x". Nous avons les équivalences sémantiques suivantes :*

$$\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner \iff \ulcorner \phi(a_1) \wedge \phi(a_2) \wedge \cdots \wedge \phi(a_n) \urcorner$$
$$\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner \iff \ulcorner \phi(a_1) \vee \phi(a_2) \vee \cdots \vee \phi(a_n) \urcorner$$

où "a_1", "a_2", …, 'a_n" sont des constantes individuelles désignant tous les membres de $|\mathcal{A}|$.

F10 Si une quantification universelle $\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner$ est vraie, alors toutes ses instanciations $\ulcorner \phi(a) \urcorner$, pour une constante individuelle "a", sont vraies.

F11 Si une quantification universelle $\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner$ est fausse, alors au moins une instanciation $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ est fausse.

F12 Si une quantification existentielle $\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$ est vraie, alors au moins une instanciation $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ est vraie.

F13 Si une quantification existentielle $\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$ est fausse, alors toutes ses instanciations $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ sont fausses.

La méthode des arbres pour la logique des prédicats

$$\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner$$

$$\begin{array}{c} | \\ \ulcorner\phi(a_1)\urcorner \\ \ulcorner\phi(a_2)\urcorner \\ \ulcorner\phi(a_3)\urcorner \\ \vdots \end{array}$$

pour toutes les constantes “a_i” apparaissant sur cette branche

$$\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner$$

$$\ulcorner\phi(a_1)\urcorner \quad \ulcorner\phi(a_2)\urcorner \quad \ldots \quad \ulcorner\phi(b)\urcorner$$

pour toutes les constantes “a_i” de la branche et une nouvelle constante “b”

$$\ulcorner\neg\forall x(\phi(x))\urcorner$$

$$\ulcorner\neg\phi(a_1)\urcorner \quad \ulcorner\neg\phi(a_2)\urcorner \quad \ldots \quad \ulcorner\neg\phi(b)\urcorner$$

pour toutes les constantes “a_i” de la branche et une nouvelle constante “b”

$$\ulcorner\neg\exists x(\phi(x))\urcorner$$

$$\begin{array}{c} | \\ \ulcorner\neg\phi(a_1)\urcorner \\ \ulcorner\neg\phi(a_2)\urcorner \\ \ulcorner\neg\phi(a_3)\urcorner \\ \vdots \end{array}$$

pour toutes les constantes “a_i” apparaissant sur cette branche

Ordre d’application de ces règles :

1. connecteurs
2. $\exists$, $\neg\forall$ – nouvelles branches pour toutes les constantes
3. $\forall$, $\neg\exists$ – instanciations pour toutes les constantes
4. connecteurs
5. $\exists$, $\neg\forall$
6. $\forall$, $\neg\exists$
7. $\ldots$

Quelques exemples

$\exists x \forall y\ (Rxy) \wedge \exists x \forall y\ \neg(Rxy)$

$\exists x \forall y\ (Rxy)$
$\exists x \forall y\ \neg(Rxy)$

$\forall y\ (Ray)$

- $\forall y \neg(Ray)$
  - Raa
  - $\neg Raa$
  - ∇
- $\forall y \neg(Rby)$
  - Raa
    Rab
  - $\neg Rba$
    $\neg Rbb$

$\neg \forall x\ (Rxx \rightarrow \exists y Rxy)$

$\neg(Raa \rightarrow \exists y Ray)$

Raa
$\neg \exists y Ray$

$\neg Raa$

$\forall x \exists y\ Rxy$

$\exists y Ray$

- Rab
  $\exists y Rby$
  - Rbc
    $\exists y Rcy$
    - Rcd
      $\exists y Rdy$
    - Rcc
  - Rbb
- Raa

Les individus arbitraires

$$\begin{array}{l} \ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner \\ \quad | \\ \ulcorner\phi(b)\urcorner \end{array} \quad \text{pour une nouvelle constante “}b\text{”}$$

$$\begin{array}{l} \ulcorner\neg\forall x(\phi(x))\urcorner \\ \quad | \\ \ulcorner\neg\phi(b)\urcorner \end{array} \quad \text{pour une nouvelle constante “}b\text{”}$$

$$\begin{array}{c} \forall x\exists\ (Rxy) \\ \exists yRay \\ | \\ Rab \\ \exists yRby \\ | \\ Rbc \\ \exists yRcy \\ | \\ Rcd \\ \exists yRdy \\ | \\ Rde \\ \exists yRey \\ | \\ \vdots \end{array}$$

Les limites de la méthode des arbres pour la logique des prédicats

Le fait qu'il est possible que nous construisons, appliquant nos règles, des arbres infinis, montre une différence importante entre la logique propositionnelle et la logique des prédicats : la logique propositionnelle est décidable et la logique des prédicats ne l'est pas.