Onzième leçon

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2005-2006

Philipp Keller
philipp.keller@lettres.unige.ch

À lire pour le cours du 30 janvier 2006

1 Les propriétés métalogiques de la logique des prédicats

Dans cette leçon, nous démontrerons les propriétés métalogiques suivantes de la logique des prédicats :
- la *correction* de la méthode des arbres, du calcul axiomatique et de la déduction naturelle, dont s'ensuit leur consistance ;
- la *complétude* de la méthode des arbres, du calcul axiomatique et de la déduction naturelle ;
- le *théorème de Löwenheim-Skolem* sur la logique des prédicats.
- la *compacitude* de la logique des prédicats ;

Nous esquisserons aussi une preuve du méta-théorème le plus important de la logique et mathématiques modernes, le théorème d'incomplétude de Gödel.

2 La correction et la complétude de la méthode des arbres pour la logique des prédicats

Pour prouver la complétude de la méthode des arbres pour la logique des prédicats, nous reprennons quelques notions et définitions de la leçon 7 et suivant la présentations de ?: 57 et seq.. Comme d'abord, nous divisons les sept autres règles de construction d'arbres (considérant les règles pour l'équivalence matérielle comme dérivées) en deux catégories : ceux qui traitent des formules 'du type α' ($\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$, $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi \to \psi)\urcorner$) qui 'continuent sur la même branche', et ceux qui traitent des formules 'du type β' ($\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ et $\ulcorner\phi \to \psi\urcorner$) qui nous obligent de créer au moins une nouvelle branche. Nous en ajoutons deux nouvelles catégories :

α	α_1	α_2
$\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	ϕ	ϕ
$\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\neg(\phi \to \psi)\urcorner$	ϕ	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$

β	β_1	β_2
$\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\phi \to \psi\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	ψ

γ	$\gamma(a)$
$\ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$	$\phi(x/a)$
$\ulcorner\neg\exists x(\phi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi(x/a)\urcorner$

δ	$\delta(a)$
$\ulcorner\exists x(\phi)\urcorner$	$\phi(x/a)$
$\ulcorner\neg\forall x(\phi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi(x/a)\urcorner$

Nous modifiant la construction des tableaux en rajoutant les règles (C) et (D) à (A) et (B) :

Définition 1 (Tableaux). *Un tableau est un arbre binaire dont les noeuds sont des formules bien-formées de la logique des prédicats construites à partir d'une formule comme suit : si χ est une formule dont le tableau $\mathcal{T}$ a déjà été construit et ζ en est un point extrême, nous élargissons $\mathcal{T}$ par une des méthodes suivantes :*

(A) Si une formule du type α a une occurrence sur le chemin B_ζ (le chemin de χ jusqu'à ζ dans $\mathcal{T}$), nous ajoutons soit α_1 soit α_2 comme successeur unique à ζ.

(B) *Si une formule du type β a une occurrence sur le chemin B_ζ, nous ajoutons β_1 comme successeur gauche et β_2 comme successeur de droite à ζ.*

(C) *Si une formule du type γ a une occurrence sur le chemin B_ζ, nous ajoutons des formules $\gamma(a)$ comme successeurs pour toutes les constantes "a" apparaissant sur le chemin.*

(D) *Si une formule du type δ a une occurrence sur le chemin B_ζ, nous ajoutons des formules $\delta(a)$ pour une nouvelle constante "a" qui n'apparaissait pas encore sur le chemin.*

Nous constatons les quatre faits suivants :

F$_1$ α est vrai ssi α_1 est vrai et α_2 est vrai ;

F$_2$ β est vrai ssi soit β_1 est vrai soit β_2 est vrai ;

F$_3$ γ est vrai ssi $\gamma(a)$ est vrai pour tout a dans l'univers ;

F$_4$ δ est vrai ssi $\delta(a)$ est vrai pour au moins un a dans l'univers.

Nous notons aussi les quatre faits suivant concernant la satisfaisabilité d'un ensemble arbitraire E :

G$_1$ Si S est satifaisable et $\alpha \in S$, alors $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ est satisfaisable.

G$_2$ Si S est satifaisable et $\beta \in S$, alors soit $S \cup \{\beta_1\}$, soit $S \cup \{\beta_2\}$ est satisfaisable.

G$_3$ Si S est satifaisable et $\gamma \in S$, alors $S \cup \{\gamma(a)\}$ est satisfaisable pour toute constante "a".

G$_4$ Si S est satifaisable et $\delta \in S$ et "a" est une constante qui n'a aucune occurrence dans un élément de S, alors $S \cup \{\delta(a)\}$ est satisfaisable.

Pour prouver **G**$_4$ nous procèdons comme suit : Si S est satisfaisable, il y a une structure et une assignation de valeurs par rapport auxquelles toutes les propositions dans S sont vraies. En particulier, il existe une interprétation I des signes non-logiques dans S et une assignation de valeurs à toutes les variables dans S qui rendent δ vrai. δ est d'un type existentiel et par **F**$_4$ vrai ss'il existe un élément de l'univers de discours pour lequel il est vrai. Nous appelons cet élément "a". Ayant ajouté cette nouvelle constante à notre langue, nous définissons une nouvelle interprétation des constantes comme suit :

$$I^*(\text{“}k\text{”}) := \begin{cases} a & k = a \\ I(\text{“}k\text{”}) & k \neq a \end{cases}$$

Sous cette nouvelle interprétation I^*, $\delta(a)$ est vrai. $S \cup \{\delta(a)\}$ est donc satisfaisable.

Nous pouvons maintenant prouver la correction de la méthode des arbres pour la logique des prédicats :

Théorème 2 (Correction de la méthode des arbres). *La méthode des arbres pour la logique des prédicats est correcte : toute formule prouvable est valide.*

Preuve Comme pour la logique propositionnelle, nous prouvons la correction par induction mathématique. **G**$_1$, **G**$_3$ et **G**$_4$ nous assurent qu'une branche satisfaisable étendue par une des règles (A), (C) ou (D) reste satisfaisable.[1] Si on étend une branche satisfaisable en deux branches par (B), au moins une des branches reste satisfaisable (par **G**$_2$). Toute extension directe d'un tableau satisfaisable est donc satisfaisable. Il s'ensuit par induction mathématique que si l'origine d'un tableau est satisfaisable, le tableau entier l'est également. Par conversion, si un tableau n'est pas satisfaisable (ne contient que des branches fermées), l'origine ne l'est pas non plus. Sa négation est donc valide. □

Dans le cas de la logique propositionnelle, nous avons prouvé la complétude de la méthode des arbres en nous appuyant sur les faits suivants :

(i) pour chaque proposition, nous obtenons un arbre complet après un nombre fini d'étapes ;

(ii) les propositions se trouvant sur une branche complète et ouverte forment un ensemble de Hintikka ;

(iii) tout ensemble de Hintikka est satisfaisable, c'est à dire est un sous-ensemble d'un ensemble saturé.

[1] CAVEAT POUR D

Nous devons adapter notre définition des ensembles de Hintikka pour tenir compte du fait que la logique des prédicats permet des arbres infinis :

Définition 3. *Un ensemble de Hintikka $\mathcal{H}$ pour un univers de discours D est un ensemble de formules de la logique des prédicats satisfaisant les conditions suivantes :*

(a) $\mathcal{H}$ ne contient pas de formule atomique et sa négation.

(b) Si $\alpha \in \mathcal{H}$, alors $\alpha_1 \in \mathcal{H}$ et $\alpha_2 \in \mathcal{H}$.

(c) Si $\beta \in \mathcal{H}$, alors soit $\beta_1 \in \mathcal{H}$, soit $\beta_2 \in \mathcal{H}$.

(d) Si $\gamma \in \mathcal{H}$, alors $\gamma(a) \in \mathcal{H}$ pour tout $a \in D$.

(e) Si $\delta \in \mathcal{H}$, alors $\delta(a) \in \mathcal{H}$ pour au moins un $a \in D$.

Nous prouvons un lemme analogue :

Théorème 4 (Lemme). *Tout ensemble de Hintikka pour un univers D est satisfaisable dans D.*

Preuve

Soit $\mathcal{H}$ un ensemble de Hintikka pour l'univers D. Comme pour la logique propositionnelle, nous devons trouver une interprétation qui rende vraies toutes les propositions dans $\mathcal{H}$. Nous la définissons ainsi pour le cas spécial d'une formule atomique ϕ :

$$I(\phi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \phi \in \mathcal{H} \\ \mathbf{f} & \ulcorner \neg\phi \urcorner \in \mathcal{H} \\ \text{un de } \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{f} & \phi \notin \mathcal{H} \ \wedge \ \ulcorner \neg\phi \urcorner \notin \mathcal{H} \end{cases}$$

Nous devons alors montrer que I rend vrai non seulement les propositions atomiques, mais toutes les propositions dans $\mathcal{H}$. Pour celà, nous devons adopter notre définiton de "degrés" à la logique des prédicats :

Définition 5 (Degrés). *Le degrés d'une formule ϕ de la logique des prédicats est le nombre naturel déterminé par les règles suivantes :*

(1) Si ϕ est une proposition atomique, alors son degrés est 0.

(2) Si ϕ est une proposition niée $\ulcorner \neg\psi \urcorner$ et que le degrés de ψ est n, alors son degrés est $n + 1$.

(3) Si ϕ est une conjonction $\ulcorner \psi \wedge \chi \urcorner$, une disjonction $\ulcorner \psi \vee \chi \urcorner$, une implication $\ulcorner \psi \rightarrow \chi \urcorner$ ou une équivalence $\ulcorner \psi \leftrightarrow \chi \urcorner$ et si le degrés de ψ est n et que le degrés de χ est m, alors le degrés de ϕ est $n + m + 1$.

(4) Su ϕ est une phrase quantifiée $\ulcorner \forall x(\psi) \urcorner$ ou $\ulcorner \exists x(\psi) \urcorner$ et que le degrés de ψ est n, alors son degrés est $n + 1$.

Nous prouvons alors par induction mathématiques sur le degrés des formules que I rend vraies toutes les formules :

base de l'induction : Il s'ensuit de sa définition que I rend vraies toutes les formules atomiques (de degrés 0) dans $\mathcal{H}$.

pas de l'induction : Supposons que I rende vraie toute proposition ϕ dans $\mathcal{H}$ de degrés inférieur de n. Si ϕ est d'un degrés plus que 0, ϕ doit être une formule α, β, γ ou δ :

- α **:** Si ϕ est du type α, alors α_1 et α_2 sont aussi dans $\mathcal{H}$. Mais ces formules sont d'un degrés inférieur à n, donc elles sont rendues vraies par I. Donc ϕ doit être vraie aussi.
- β **:** Si ϕ est du type β, alors soit β_1, soit β_2 est un membre de $\mathcal{H}$. Quelle qu'elle soit, elle doit être rendue vraie par I (puisqu'elle est d'un degrés inférieur à n). Donc ϕ est aussi rendue vraie par I.
- γ **:** Si ϕ est du type γ, alors $\gamma(k)$, pour tout $k \in U$, est un membre de $\mathcal{H}$. Comme, pour tout $k \in U$, $\gamma(k)$ est d'un degrés inférieur à n, il s'ensuit de l'hypothèse d'induction que ϕ est vrai.

δ **:** Si ϕ est du type δ, alors il y a un $k \in U$ tel que $\delta(k)$ est un membre de $\mathcal{H}$. $\delta(k)$ est d'un degrés inférieur à n et vrai par l'hypothèse d'induction. Donc ϕ est également vrai.

Nous avons donc définis une interprétation qui rend vraies toutes les propositions dans $\mathcal{H}$ et, plus généralement, toutes les propositions dans un ensemble de Hintikka.

□

En logique propositionnelle, chaque arbre était complet après un nombre fini d'applications de règles de construction d'arbre. La complication cruciale dans le cas de la logique des prédicats est qu'un arbre pour une proposition peut être infini. Par le lemme de König (cf. leçon 7), un tel arbre contiendra une branche infinie. Pouvons-nous assumer que les propositions sur une telle branche constituent un ensemble de Hintikka ?

Malheureusement, la réponse est négative, comme le montre l'exemple d'un arbre infini donné dans la leçon 9. Sur un tel arbre, il peut se trouver une formule conjonctive, par exemple, qui ne sera jamais traité puisque chaque instanciation d'une quantification universelle nous force d'introduire une nouvelle constante qui doit également être instanciée par la suite. Nos règles de construction d'arbres nous forcent à 'retourner en arrière' un nombre infini de fois.

Cette complication peut être évitée en adoptant la modification suivante de notre notion de tableau :

Définition 6 (Tableaux déterministes). *Un tableau déterministe pour ϕ est un tableau construit par le processus ayant comme étape n le suivant :*

$n = 0$ *Nous plaçons ϕ à l'origine de l'arbre.*

$n \to n+1$ *Après avoir conclu le $n$ème étape de la construction du tableau, nous procédons ainsi :*

- *(i) Si le tableau est déjà fermé, nous nous arrêtons.*
- *(ii) Si chaque point qui se trouve sur une branche ouverte et qui n'est pas une formule atomique a déjà été utilisé, nous nous arrêtons.*
- *(iii) Autrement, nous construisons une extension directe du tableau en fonction du point ϕ de niveau minimal (et aussi à gauche que possible) qui n'a pas encore été utilisé et se trouve sur au moins une branche ouverte :*
  - *(A) Si ϕ est une formule du type α, nous ajoutons α_1 et α_2 à toutes les branches ouvertes passant par ϕ et marquons ϕ comme utilisé.*
  - *(B) Si ϕ est une formule du type β, nous ajoutons β_1 comme successeur gauche et β_2 comme successeur de droite à toutes les branches ouvertes passant par ϕ et marquons ϕ comme utilisé.*
  - *(C) Si ϕ est une formule du type γ, nous ajoutons à toute branche ouverte passant par ϕ une formule $\gamma(a)$ (où "a" est la première constante n'apparaissant pas encore sur la branche) et également la même formule ϕ et marquons l'ancienne occurrence de ϕ comme utilisée.*
  - *(D) Si ϕ est une formule du type δ, nous ajoutons à toute branche ouverte passant par ϕ la nouvelle formule $\delta(a)$ (où "a" est la première constante n'apparaissant pas encore sur la branche) et marquons ϕ comme utilisé.*

Les tableau déterministe se distinguent d'autres tableaux en trois respects :

1. Ils sont beaucoup plus longs, puisque nous répétons chaque quantification universelle (et négation d'une quantification existentielle) après son instanciation.
2. Dans leur construction, nous ne devons jamais retourner en arrière : aucune occurrence d'une quantification universelle sera instancié plus qu'une seule fois.
3. Les formules sur une branche ouverte d'un tableau déterministe qui est soit infini soit ne contient que de propositions utilisées forment un ensemble de Hintikka.

(3) s'ensuit de notre définition parce qu'une branche ouverte et finie soit ne contient pas de formule du type γ, soit ne contient une quantification universelle (ou une négation d'une quantification existentielle) 'vide', c'est-à-dire de la forme $\ulcorner \forall x(\phi) \urcorner$ où ϕ ne contient pas d'occurrence de "x". Si le tableau est infini, notre méthode de construction nous assure que toutes les autres formules que celles du type γ ont été utilisées.

Nous pouvons maintenant prouver la complétude de la méthode des arbres :

Théorème 7 (Complétude de la méthode des arbres). *La méthode des arbres pour la logique des prédicats est complète : toute formule valide est prouvable.*

Preuve Supposons que ϕ est une formule valide et $\mathcal{T}$ son tableau déterministe (qui a $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ comme origine). Si $\mathcal{T}$ contenait une branche ouverte, les formules sur cette branche formaient un ensemble de Hintikka qui, par le lemme, serait satisfaisable. Comme $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ serait un élément de cette branche, $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ serait également satisfaisable, donc ϕ ne serait pas valide. □

Le lemme de König, que nous avons prouvé dans la leçon 7, dit qu'un arbre infini doit contenir une branche infinie. Un tableau fini (qui, par définition, ne contient que des branches finies) doit donc être fini. Le théorème de complétude nous assure en conséquence que tout tableau systématique pour la négation d'une formule valide doit se fermer après un nombre fini d'étapes.

3 La théorie des modèles et le théorème de Löwenheim-Skolem

Revenons sur la modification que nous avons fait de la méthode des arbres ont modifiant les règles pour le quantificateur existentiel et la négation du quantificateur universel en ne les instanciant qu'avec la constante nouvelle, censée représenter un individu arbitraire. Est-elle vraiment innocente ?

La réponse est oui, et pour la raison suivante : Si une formule ϕ est vraie ou fausse dans une structure avec un univers de discours de, disons, n individus, elle sera également vraie ou fausse dans beaucoup de modèles avec des univers de discours plus larges. Supposons que nous sommes arrivées, par la nouvelle méthode, à un modèle qui rend vrai "Rab", pour une nouvelle constante "b" et que nous aurions obtenu, par l'ancienne méthode, deux modèles, rendant vraies "Raa" et "Rab" respectivement. Supposant que nous n'avions pas utilisé d'autres constantes, un de ces modèles ne contient qu'un seul individu, a, bien que les autres contiennent aussi un autre, b. Cet autre individu, cependant, ne peut pas être distingué de a dans le modèle : d'après tout ce que nous savons de a et de b, il pourrait s'agir du même individu. Nous remarquons ainsi que pour tout modèle, nous pouvons en créer d'autres, en y ajoutant des individus indistinguables de ceux qui se trouvent dans le domaine du discours du premier.

Nous pouvons faire quelques observations sur la satisfiabilité et la consistance de formules ou d'ensembles de formules de notre langage $\mathcal{L}^{+}$. Soit Σ un ensemble de formules de cette langue.

1. Si oui ou non Σ est satisfiable dans une structure $\mathcal{A}$, ne dépend que de la cardinalité de $|\mathcal{A}|$, c'est-à-dire du nombre d'éléments contenus dans l'univers de discours de $\mathcal{A}$.
2. Si Σ est satisfiable dans $\mathcal{A}$, alors Σ est également satisfiable dans toute structure qui garde l'interprétation des signes de relations, des signes de fonctions et des constantes mais contient un univers de discours plus large.
3. Il y a des formules qui sont satisfiables dans une structure infinie mais qui ne sont pas satisfiable dans une structure fini.

Ces observations, lorsqu'on y réfléchit, ne sont pas étonnantes. Beaucoup plus étonnant, et le sujet d'un méta-théorème important, est une converse partielle à notre première observation, converse qui nous permet de réduire, au lieu d'agrandir, nos modèles.

Löwenheim a prouvé en 1915 que si une formule ϕ est satisfaisable, alors elle est satisfaisable dans un domaine de discours dénombrable, c'est-à-dire un domaine de discours contenant même nombre d'éléments qu'il y a de nombres naturels. Nous obtenons ce résultat comme corrollaire de la satisfaisabilité de tout ensemble de formules sur une branche ouverte d'un tableau déterministe :

Théorème 8 (Löwenheim). *Si une formule ϕ est satisfaisable, elle est satisfaisable dans une structure avec un domaine de discours dénombrable.*

Preuve Par le théorème de complétude, le tableau systématique de ϕ ne peut pas être fermée, donc doit contenir une branche ouverte. Les formules se trouvant sur cette branche sont simultanément satisfaisable, parce qu'elles forment un ensemble de Hintikka. L'interprétation qui satisfait la branche ouverte ne parle que d'un nombre dénombrable d'individus ; par la construction du tableau systématique, tous les individus dans son domaine de discours seront nommés par des constantes, dont il y a qu'un nombre dénombrable. L'interprétation satisfaisante la branche ouverte doit aussi satisfaire son origine, qui est ϕ. □

Skolem a étendu ce résultat, prouvant que si un ensemble dénombrable de phrases est satisfaisable simultanément, il est simultanément satisfaisable dans un domaine de discours dénombrable.

La preuve repose sur une extension de la méthode de tableaux déterministes à des ensembles de formules : nous appelons un tableau Σ-complet pour un ensemble de formules Σ si les formules sur chacune de ces branches déterminent un ensemble de Hintikka et s'il contient également toutes les formules dans Σ. Pour n'importe quel ensemble de propositions Σ, nous construisons un tableau qui est Σ-complet en utilisant la procédure systématique pour la construction d'un tableau déterministe, commençant par la première formule dans Σ (par rapport à n'importe quelle énumeration) et ajoutant la $n$ème formule dans Σ à la $n$ème étape de la construction à chaque branche ouverte. Pris ensemble, ceci nous donne le théorème suivant :

Théorème 9 (Löwenheim-Skolem). *Si un ensemble dénombrable de formules Σ est simultanément satisfaisable, alors Σ est satisfaisable dans un modèle dont le domaine est dénombrable.*

Preuve Supposons que Σ est un ensemble dénombrable de formules. Nous savons qu'il existe un tableau $\mathcal{T}$ qui est S-complet. Si $\mathcal{T}$ était fermé, il ne contenait qu'un nombre fini de formules (par le lemme de König). Comme il contient toutes les formules de Σ, Σ devrait également être fini et, par le théorème de complétude, ne serait pas satisfaisable. Donc $\mathcal{T}$ ne peut pas être fermé et contient une branche ouverte. Par la construction des tableaux Σ-complets, les formules sur cette branche ouverte composent un ensemble de Hintikka qui contient toutes les formules dans Σ. Par le lemme, cette ensemble est satisfaisable dans un univers de discours dénombrable. □

Comme corrollaire, nous pouvons prouver la compactitude de la logique des prédicats :

Théorème 10 (Compactitude). *La logique des prédicats est compacte : si un ensemble de formules Σ est insatisfaisable, alors il existe un sous-ensemble fini $\Sigma' \subset \Sigma$ qui est également insatisfaisable.*

Preuve Si Σ est insatisfaisable, il y a un tableau fermé qui est Σ-complet. Un tel tableau doit être fini, donc ne peut contenir qu'un nombre fini d'éléments de Σ. □

Comme dans le cas de la compactitude de la logique propositionnelle, ce théorème nous assure que toute formule qui est une conséquence sémantique de quelques prémisses, s'ensuit déjà d'un nombre fini de ses prémisses.

Les raisonnements de Löwenheim et Skolem, bien que pertinent à des questions logiques, n'utilisait pas de formalisme logique, ni des axiomes d'un calcul précis. Il portait sur des structures en général, considérées comme des entités mathématiques, c'est-à-dire des ensembles satisfaisant quelques conditions. Le champ de recherche, auquel appertiennent des raisonnements de ce type, la '*théorie des modèles*'. La théorie des modèles étudie, en tout généralité, la nature et l'existence des modèles pour des systèmes modèles, et les question de consistance et de satisfiabilité qui y sont liées.