Cinquième leçon

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2005-2006

Philipp Keller
philipp.keller@lettres.unige.ch

À lire pour le cours du 5 décembre 2005

1 La sémantique de la logique propositionnelle

Nous avons introduit une manière purement syntaxique de faire des preuves, méthode qui nous a permis de déduire des propositions à partir de quelques axiomes d'un calcul. Pour cela, nous avons fait abstraction non seulement des significations de ces propositions, mais aussi de leurs valeurs de vérité. Même si nous n'avons aucunement utilisé ce fait, les propositions ainsi prouvées étaient des tautologies (ce qu'on peut facilement prouver par des tables de vérité). On se demande donc quelle est la relation entre la méthode des tables de vérité qui nous permet de vérifier si une proposition donnée est une tautologie et la méthode des calculs hilbertiens qui nous permet de dériver, à l'aide de MP, des théorèmes à partir des axiomes $\mathbf{H_1}$ à $\mathbf{H_{16}}$. Pour pouvoir répondre à cette question, nous devons introduire une sémantique rigoureuse pour le langage $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle, dont on a défini la syntaxe dans la dernière leçon.

Comme la logique propositionnelle obéit au principe de vérifonctionnalité, sa sémantique nous permet d'attribuer des valeurs de vérité, $\mathbf{v}$ ("vrai") ou $\mathbf{f}$ ("faux"), à des formules complexes sur la base des valeurs de vérité des propositions atomiques dont elles sont composées.[1]

Définition 1 (Interprétation propositionnelle atomique). *Une interprétation propositionnelle atomique I^* est une fonction qui assigne à toute proposition atomique "p_i", $i \in \mathbb{N}$, l'une des valeurs de vérité $\mathbf{v}$ ou $\mathbf{f}$: $I^* : \{\text{“}p_i\text{”} \mid i \in \mathbb{N}\} \to \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$.*

La définition générale nous montre comment étendre, par des clauses récursives, une telle interprétation propositionnelle atomique à une interprétation (attribution de valeur de vérité) de toutes les formules de notre langage :

Définition 2 (Interprétation propositionnelle). *Étant donné une interprétation propositionnelle atomique I^*, nous définissons une interprétation propositionnelle I (qui est une fonction associant à toute formule propositionnelle une et une seule valeur de vérité : $I : \mathsf{Fml}(\mathcal{L}) \to \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$) par des clauses récursives :*

I1 *Si ϕ est une proposition atomique "p", $I(\phi) := I^*(\text{“}p\text{”})$*

I2 $I(\neg\phi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{v} \end{cases}$

I3 $I(\phi \wedge \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{v} \text{ et } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{f} \text{ ou } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

[1] J'utilise "$\mathbf{v}$" et "$\mathbf{f}$" pour indiquer qu'on traite ici les valeurs de vérité comme des 'objets', c'est-à-dire des choses qui peuvent être valeurs de fonctions. Par contre, l'utilisation de "V" et "F" dans les tables de vérité pourrait être paraphrasée de manière à ne pas 'réifier' les valeurs de vérité. Au lieu de dire, par exemple, que "$p \to q$" reçoit"F" comme valeur de vérité dans la deuxième ligne de la table de vérité pour cette proposition complexe, on pourrait dire que la proposition est fausse si son antécédent est vrai et son conséquent faux.

$$\textbf{I4} \quad I(\phi \vee \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{v} \textit{ ou } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{f} \textit{ et } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$$

$$\textbf{I5} \quad I(\phi \rightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{f} \textit{ ou } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{v} \textit{ et } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$$

$$\textbf{I6} \quad I(\phi \leftrightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = I(\psi) \\ \mathbf{f} & I(\phi) \neq I(\psi) \end{cases}$$

On reconnaıˆt, dans la spécification de cette fonction I, le même raisonnement qui nous a permis de définir les connecteurs par des tables de vérité. Une interprétation particulière correspond à une possibilité logique et à une ligne dans une table de vérité. Une interprétation atomique I^* qui attribue **v** à "p", "q" et "r" et **f** à "s" et "t" ($I^*(\text{“}p\text{”}) = I^*(\text{“}q\text{”}) = I^*(\text{“}r\text{”}) = \mathbf{v}$ & $I^*(\text{“}s\text{”}) = I^*(\text{“}t\text{”}) = \mathbf{f}$), par exemple, nous donnera une interprétation I qui attribuera **v** à "$p \wedge q$", à "$p \vee s$" etc. et **f** à "$p \rightarrow s$", "$t \vee s$" etc. Elle correspond à une possibilité logique dans laquelle "p", "q" et "r" sont vraies et "s" et "t" fausses. Elle correspond aussi à la quatrième ligne dans la table de vérité de ces cinq propositions (qui comporte, au total, 32 lignes) : V-V-V-F-F.

Si une proposition "p" reçoit la valeur **v** sous une interprétation I, nous pouvons dire que cette interprétation *satisfait* la proposition : elle nous montre comment le monde pourrait être si "p" était vraie.

Définition 3 (Satisfaisabilité). *Une formule propositionnelle ϕ est satisfaisable si et seulement si elle est vraie sous au moins une interprétation de ses constituants simples.*[2]

Si une proposition ϕ reçoit la valeur **v** sous une interprétation I, nous pouvons dire que cette interprétation nous montre comment construire un *modèle* de cette proposition : un modèle est une structure (normalement mathématique) dont ϕ, sous une certaine interprétation de ses constituants simples, est une description correcte. La *théorie des modèles* est cette branche de la sémantique formelle qui étudie les interprétations d'un système formel.

Puisqu'une interprétation correspond à une possibilité logique et vice versa, on arrive également à une définition de ce que sont une tautologie et une contradiction :

Définition 4 (Tautologie). *Une formule propositionnelle ϕ est une tautologie si et seulement si elle est vraie sous toutes les interprétations. ϕ est une contradiction si et seulement si elle n'est vraie sous aucune interprétation (elle est donc fausse sous toutes les interprétations)*[3]

Bien que toute tautologie (ainsi que toute formule de notre langage) soit composée d'un nombre fini de propositions simples, il y a non seulement une infinité de formules bien formées, mais également une infinité de tautologies.[4] Étant donné leur grande utilité pour faciliter les preuves, il convient tout de même d'en mentionner quelques-unes en particulier :

[2] Ecrit formellement :

$$\phi \text{ est satisfaisable} \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists I\ (I(\phi) = \mathbf{v}) \tag{1}$$

[3] Pour l'écrire d'une manière plus formelle :

$$\phi \text{ est une tautologie} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall I\ (I(\phi) = \mathbf{v}) \tag{2}$$
$$\phi \text{ est une contradiction} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall I\ (I(\phi) = \mathbf{f}) \tag{3}$$

[4] Pour le voir, il suffit de remarquer que $\ulcorner(\phi \vee \neg\phi) \vee \psi\urcorner$ est une tautologie pour n'importe quelle formule ψ.

T1	$\models \ulcorner(\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))\urcorner$	analyse de "$\leftrightarrow$"
T2	$\models \ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \vee \psi)\urcorner$	analyse de "$\rightarrow$"
T3	$\models \ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \neg(\phi \wedge \neg\psi)\urcorner$	analyse de "$\rightarrow$"
T4	$\models \ulcorner\neg(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \vee \neg\psi)\urcorner$	De Morgan
T5	$\models \ulcorner\neg(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi)\urcorner$	De Morgan
T6	$\models \ulcorner(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi))\urcorner$	distributivité
T7	$\models \ulcorner(\phi \vee (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi))\urcorner$	distributivité
T8	$\models \ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)\urcorner$	conversion
T9	$\models \ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \neg\psi)) \leftrightarrow \neg\phi\urcorner$	réduction à l'absurde
T10	$\models \ulcorner(\phi \rightarrow \neg\phi) \leftrightarrow \neg\phi\urcorner$	réduction à l'absurde
T11	$\models \ulcorner(\neg\phi \rightarrow \phi) \leftrightarrow \phi\urcorner$	'conséquence miraculeuse'
T12	$\models \ulcorner\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)\urcorner$	verum sequitur ad quodlibet
T13	$\models \ulcorner\neg\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)\urcorner$	ex falso sequitur quodlibet
T14	$\models \ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge \phi) \rightarrow \psi\urcorner$	modus ponendo ponens
T15	$\models \ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\phi\urcorner$	modus tollendo tollens
T16	$\models \ulcorner(\neg(\phi \wedge \psi) \wedge \phi) \rightarrow \neg\psi\urcorner$	modus ponendo tollens
T17	$\models \ulcorner((\phi \vee \psi) \wedge \neg\phi) \rightarrow \psi\urcorner$	modus tollendo ponens
T18	$\models \ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)\urcorner$	transitivité de l'implication
T19	$\models \ulcorner\phi \rightarrow \phi\urcorner$	'identité'
T20	$\models \ulcorner\phi \vee \neg\phi\urcorner$	tiers exclu
T21	$\models \ulcorner\neg(\phi \wedge \neg\phi)\urcorner$	non-contradiction

Quelques-unes de ces tautologies ont une histoire considérable.[5]

Dans le cas où une équivalence matérielle est tautologique, on parle d'équivalence sémantique. Deux formules qui sont sémantiquement équivalentes peuvent être substituées l'une à l'autre dans n'importe quelle formule sans affecter sa table de vérité. Nous constatons ainsi que la définition de l'équivalence matérielle en terme d'implication matérielle et la définition de l'implication matérielle en terme de négation et disjonction ou de négation et conjonction, sont *correctes* : les tautologies **T1**, **T2** et **T3** nous assurent que nous pouvons universellement substituer le *definiendum* au *definiens* ('annulant' ainsi notre définition). De même, **T4** et **T5** nous assurent de la correction des lois de Morgan, ainsi que **T6** et **T7** de celle des lois de distributivité.

Les implications matérielles tautologiques sont des implications formelles, c'est-à-dire des relations de conséquence sémantique. Elles nous assurent de la correction des règles d'inférence : le fait que $\ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge \phi) \rightarrow \psi\urcorner$ soit une tautologie (**T14**), par exemple, nous montre que la règle *modus ponens* (MP) ne nous produit des vérités qu'à partir de vérités – qu'il ne peut pas être le cas que les prémisses de ce schéma d'inférence soient vraies et la conclusion fausse et, par conséquent, que le schéma d'inférence est valide. De même, les autres implications formelles nous garantissent la correction des règles d'inférence dérivées ('dérivées' parce qu'elles ne faisaient pas partie de notre calcul initial). C'est grâce à (**T8**), par exemple, que nous pouvons passer de $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ à $\ulcorner\neg\psi \rightarrow \neg\phi\urcorner$. Ces règles d'inférence dérivées facilitent les preuves dans le calcul parce qu'elles épargnent la pénible tâche qui consiste à chercher les substitutions adéquates dans les axiomes.

Bien que, par exemple, la tautologie **T14** et la règle MP soient intimement liées (dans la mesure où la première nous assure de la correction de la deuxième), il faut tout de même les distinguer. Les tautologies sont des phrases du langage-objet qui (quoique dénuées de contenu d'après certains philosophes) parlent des objets (comme "Soit Socrate est mort, soit il ne l'est pas" parle de Socrate). Les règles, en revanche, sont des énoncés métalinguistiques : MP nous dit, par exemple, que de deux formules $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ et ϕ nous pouvons inférer une troisième, à savoir ψ.

[5] Notamment la réduction à l'absurde : "Si tu sais que tu es mort, alors tu es mort (car on ne peut savoir une chose fausse) ; si tu sais que tu es mort, alors tu n'es pas mort (car un mort ne sait rien) ; donc, tu ne sais pas que tu es mort." (un stoïcien, rapporté par Origène ; d'après Blanché (1996: 70–71)). La 'conséquence miraculeuse' ('consequentia mirabilis') se trouve, d'après Blanché (1996: 71), déjà chez Aristote : "S'il ne faut pas philosopher, il faut philosopher (pour prouver qu'il ne faut pas philosopher) ; donc il faut philosopher." (*Protreptique*)

Il a été dit que les implications formelles nous permettent de faciliter les preuves à l'aide de règles d'inférence dérivées. Mais est-ce vraiment le cas ? Qu'est-ce qui nous assure que notre méthode purement syntaxique respecte les relations sémantiques ? Afin de répondre à ces questions, il faut traiter de la relation entre "$\vdash$" et "$\models$" plus en détail.

2 Les relations entre conséquence sémantique et déductibilité

Nous avons dit que la logique traite de la relation de conséquence et cherche à déterminer quelles propositions s'ensuivent de quelles autres. Nous avons développé des notions précises de conséquence sémantique ($\models$) et de déductibilité syntaxique ($\vdash$). Maintenant, nous devons nous demander quelles sont les relations entre ces deux 'types' de 'conséquence'. Quel est le rapport entre "$\phi \models \psi$" ("ψ est une conséquence sémantique de ϕ") et "$\phi \vdash \psi$" ("ψ peut être dérivé de ϕ dans un certain calcul") ?

Pour notre calcul HC, deux théorèmes importants en métamathématiques (des preuves *sur* le calcul) nous assurent que les deux notions sont équivalentes. D'une part, HC est correct : HC ne prouve aucune proposition qui n'est pas une tautologie ; d'autre part, HC est aussi complet : HC prouve toutes les tautologies :

théorème de correction : HC est correct : tout théorème est une tautologie.

théorème de complétude : HC est complet : toute tautologie est un théorème.

On a donc la relation suivante (soit Th une théorie et ϕ une formule propositionnelle) :

$$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \models \phi$$

La direction '$\Longrightarrow$' est assurée par le théorème de correction et signifie que HC ne prouve pas trop, c'est-à-dire ne prouve pas plus que les vérités logiques. La direction inverse '$\Longleftarrow$' est assurée par le théorème de complétude : HC prouve assez – en d'autres termes, il n'y a pas de vérités logiques qui ne soient pas prouvables dans HC.

Pris ensemble, les théorèmes de correction et de complétude nous assurent que notre axiomatisation de la logique propositionnelle par le calcul HC est *adéquate* : on a réussi à prouver toutes les propositions que l'on voulait, et pas plus. Ils nous montrent que le calcul syntaxique est en harmonie avec sa sémantique.

Théorème 5 (Correction de HC). *Soit Th une théorie et ϕ une formule propositionnelle :*

$$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi \qquad \Longrightarrow \qquad \mathsf{Th} \models \phi \tag{4}$$

Preuve Par induction sur tous les nombres naturels n,[6] nous prouvons que :

$$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{Th} \models \phi \tag{\textbf{HI}}$$

(i) Si $n = 0$, alors soit ϕ est un axiome de HC, soit un élément de Th.[7] Par les tables de vérité, nous prouvons que tous les axiomes $\mathbf{H_1}$ à $\mathbf{H_{16}}$ sont des tautologies. Dans le cas où ϕ est un élément de Th ($\phi \in \mathsf{Th}$), il est évident que $\mathsf{Th} \models \phi$.

(ii) Hypothèse d'induction : Supposons que $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ et que **(HI)** est vraie pour tous les nombres naturels $n' < n$. Si ϕ est un axiome ou un théorème, "$\mathsf{Th} \models \phi$" est vrai (par (i)). La seule autre

[6] Une preuve par induction sur les nombres naturels montre qu'une certaine proposition est vraie de 0 ('base de l'induction') et que, si elle est vraie pour $n - 1$ ('hypothèse d'induction'), alors elle est aussi vraie pour n (cette deuxième étape s'appelle le 'pas de l'induction'). En montrant ainsi que la proposition est vraie de 0 et que ce fait est hérité par tous les successeurs de 0, elle montre que la proposition est vraie de tous les nombres.

[7] Ceci s'ensuit de la notion même de preuve dans HC.

possibilité est que l'on ait obtenu ϕ par l'application de MP à deux autres théorèmes. Dans ce cas, il y a une formule ψ et des nombres naturels n' et n'' (les deux $< n$) tels que :

$$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{n'} \psi \rightarrow \phi \tag{1}$$
$$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{n''} \psi \tag{2}$$
$$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{n} \phi \tag{3}$$

Par l'hypothèse d'induction, nous savons que **(HI)** est vrai pour les lignes (1) et (2). Nous avons :

$$\mathsf{Th} \models \psi \rightarrow \phi$$
$$\mathsf{Th} \models \psi$$

Puisque nous savons que MP est une règle d'inférence valide, nous pouvons inférer à partir de (3) :

$$\mathsf{Th} \models \phi$$

□

Pour une preuve de correction il suffit de prouver que les axiomes sont des tautologies et que les règles d'inférence sont valides. Par la définition de la validité, il s'ensuit que tous les théorèmes sont des tautologies.

La complétude d'un calcul est, en général, beaucoup plus difficile à prouver que sa correction. Nous nous limitons donc ici à énoncer le théorème :

Théorème 6 (Complétude de HC). *Soit* Th *une théorie et* ϕ *une formule propositionnelle :*

$$\mathsf{Th} \models \phi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi \tag{5}$$

Nous verrons dans la leçon 8 que la méthode des arbres nous facilite la démonstration de la complétude de HC.

Les tautologies sont les formules propositionnelles logiquement valides de la logique propositionnelle. Comme toute interprétation assigne soit **v** soit **f** à une proposition donnée, une contradiction est une proposition dont la négation est une tautologie (et vice versa).

La plus grande partie de nos formules propositionnelles et toutes les propositions (traitées comme) simples ne sont ni des contradictions ni des tautologies. Si une tautologie est une nécessité logique et une contradiction une impossibilité logique, il s'agit des propositions *contingentes*, vraies sous quelques interprétations (et dans quelques mondes possibles), mais fausses sous d'autres.

Les théorèmes de correction et de complétude nous montrent que ces notions sémantiques de tautologie, contradiction et contingence ont des contre-parties purement syntaxiques. Dans le calcul HC, nous pouvons dire qu'une proposition est prouvable si elle peut être dérivée des axiomes à l'aide de la règle d'inférence MP. Cette condition limite ce que nous pouvons prouver par le calcul : elle veut dire que seulement des tautologies peuvent être prouvées, que le calcul ne prouve pas trop. L'inverse, cependant, est également vrai : comme nous allons voir dans la leçon 8, le calcul HC prouve assez : pour toute tautologie, il nous permet de déduire une contradiction à partir de la négation de cette tautologie.

Nous pouvons formuler ces observations de la manière suivante : disons que la *clôture déductive* d'une formule propositionnelle ϕ est l'ensemble de toutes les formules qui peuvent être déduites de ϕ à l'aide des axiomes et la règle d'inférence de HC. Adoptons la définition suivante :

Définition 7 (Consistance). *Une proposition* ϕ *est consistante si et seulement si la clôture déductive* ϕ *ne contient pas une proposition* ψ *et sa négation* $\ulcorner \neg\psi \urcorner$.

Comme toute proposition fait partie de sa clôture déductive et parce que, si $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ appartient à une clôture déductive, alors ϕ et ψ y appartiennent également, une contradiction sera inconsistante d'après notre définition. Parce que MP ne nous permet pas de déduire une contradiction à partir d'une proposition qui n'est pas elle-même sémantiquement équivalente à une contradiction, *seulement* des contradictions seront inconsistantes.

Nous pouvons facilement étendre notre définition à des ensembles de propositions : la clôture déductive d'un ensemble de proposition est l'ensemble de toutes les propositions qui peuvent en être déduites ; un ensemble de propositions est consistant si et seulement si sa clôture déductive ne contient pas de proposition et sa négation. La clôture déductive des axiomes de HC est l'ensemble des théorèmes. Une contradiction, nous l'avons vu, nous permet de déduire n'importe quelle proposition : $\ulcorner(\phi \wedge \neg\phi) \rightarrow \psi\urcorner$ est un théorème pour n'importe quelle formule ψ. Au lieu de définir une proposition inconsistante comme proposition dont la clôture déductive contient une proposition et sa négation, nous aurions aussi pu la définir comme proposition dont la clôture déductive est *triviale*, c'est-à-dire contient toute proposition.[8]

Grâce aux théorèmes de correction et de complétude, la notion purement syntaxique de consistance correspond à une notion sémantique : dire qu'une formule propositionnelle est consistante (notion syntaxique) revient à dire qu'elle n'est pas une contradiction (notion sémantique) ; dire que deux formules sont consistantes revient à dire qu'elles ne sont pas contraires, c'est-à-dire qu'elles peuvent être vraies ensemble. La notion syntaxique de consistance correspond donc à la notion sémantique de satisfaisabilité :

Théorème 8 (Adéquation). *Une théorie* Th *est consistante si et seulement s'il y a une interprétation qui rend vraies toutes les formules propositionnelles* $\phi \in \mathsf{Th}$*. Autrement, elle est inconsistante (c'est-à-dire si et seulement si aucune interprétation ne rend vraies toutes les formules propositionnelles* $\phi \in \mathsf{Th}$*).*

La consistance est une relation entre des (ensembles de) propositions : on dit qu'une proposition ϕ est consistante avec deux autres propositions, ψ et χ, si et seulement s'il y a une interprétation qui rend vraies les trois propositions ϕ, ψ et χ. La consistance est intimement liée à la relation de conséquence sémantique : une proposition ϕ est une conséquence sémantique d'une théorie Th si et seulement si sa négation $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ est inconsistante avec Th. Dans ce cas, toute interprétation qui rend vraie $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ (et qui donc rend fausse ϕ), doit aussi rendre fausse au moins une des prémisses dans Th.

Définition 9 (Conséquence sémantique). *Une formule propositionnelle* ϕ *est une conséquence (sémantique) d'une théorie* Th *(écrit : "*$\mathsf{Th} \models \phi$*") si et seulement si toute interprétation qui rend vraies toutes les formules propositionnelles dans* Th *rend vrai* ϕ*.*[9]

Si ϕ est une conséquence de la théorie vide ($\mathsf{Th} = \emptyset$) et donc s'ensuit seulement des axiomes d'un certain calcul, nous écrivons "$\models \phi$" au lieu de "$\emptyset \models \phi$". "$\models \phi$" veut donc dire que toute interprétation rend vraie ϕ, c'est-à-dire que ϕ est valide ou une tautologie.

Comme la notion de consistance s'applique à une proposition si et seulement si la négation de cette proposition n'est pas une tautologie, nous avons les relations suivantes :

correction	tout théorème est une tautologie	toute proposition satisfaisable est consistante
complétude	toute tautologie est un théorème	toute proposition consistante est satisfaisable

Il s'agit ici d'une application métalogique du principe de conversion : si tout théorème est une tautologie, tout ce qui n'est pas vraie sous toutes les interprétations (n'est pas une tautologie, donc a une

[8] Les dialétheistes, qui acceptent des contradictions vraies, remplacent le principe de non-contradiction par un principe de non-trivialité : au lieu de dire qu'une proposition est prouvable si et seulement si sa clôture déductive est non-contradictoire ils disent qu'elle l'est si et seulement si sa clôture déductive est non-triviale – deux conditions qui ne coïncident pas dans une logique qui n'accepte pas le principe de l'*explosion déductive* (ou : ex falso quodlibet) que n'importe quoi s'ensuit d'une contradiction.

[9] Pour l'écrire formellement :

$$\mathsf{Th} \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall I\ \forall\psi \in \mathsf{Th}\ \ (I(\psi) = \mathbf{v}\ \rightarrow\ I(\phi) = \mathbf{v}) \tag{6}$$

négation satisfaisable) ne peut pas être prouvé (n'est pas un théorème, donc a une négation consistante) ; si toute tautologie est un théorème, tout ce qui ne peut pas être prouvé (a une négation consistante) n'est vraie sous aucune interprétation (a une négation satisfaisable).

L'harmonie entre la syntaxe et la sémantique de la logique propositionnelle nous donne une correspondance parfaite entre les notions sémantiques et syntaxiques :

$$\begin{array}{rcl}
\phi \text{ est une conséquence syntaxique de } \mathsf{Th} & \Longrightarrow & \phi \text{ s'ensuit de } \mathsf{Th} \\
\phi \text{ est satisfaisable} & \Longrightarrow & \phi \text{ est consistant} \\
\phi \text{ est une contradiction} & \Longrightarrow & \phi \text{ est inconsistant} \\
\phi \text{ est une tautologie} & \Longrightarrow & \ulcorner \neg\phi \urcorner \text{ est inconsistant} \\
\ulcorner \phi \text{ donc } \psi \urcorner \text{ est un argument valide} & \Longrightarrow & \ulcorner \phi \wedge \neg\psi \urcorner \text{ est inconsistant}
\end{array}$$

3 La nature de la logique

Nous avons introduit la négation "$\neg$" par la table de vérité suivante :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Cette table de vérité montre que la valeur de vérité d'une proposition formée d'une négation (comme connecteur principal) et d'une autre proposition plus simple est l'inverse de la valeur de vérité de cette autre proposition. Selon le principe de vérifonctionnalité, cette table de vérité détermine complètement la signification de "$\neg$". Il y a, cependant, une autre manière de spécifier cette signification, une manière préférée par ceux qui ne pensent pas que la logique est l'étude de quelques vérités (les 'vérités logiques'), mais plutôt qu'elle est l'étude des inférences. Selon eux, une logique n'est pas caractérisée par ses tautologies, mais par la relation de conséquence qui rend valides certaines inférences. Les connecteurs propositionnels ne sont pas caractérisés par leurs tables de vérité, mais par les règles d'introduction et d'élimination qui gouvernent leur comportement inférentiel.

Parmi les philosophes qui se sont interrogés sur la nature de la logique, on peut en effet distinguer deux courants : selon un premier courant, la logique essaie de trouver, d'expliquer et de systématiser les tautologies :[10] selon un second courant, elle essaie de formaliser les inférences valides.[11] Le premier camp maintient souvent, avec Wittgenstein, que les vérités logiques sont dénuées de contenu ('*sinnlos*'), mais qu'elles ne sont pas dénuées de sens ('*unsinnig*') : quoiqu'elles ne nous informent pas sur le monde (car elles n'excluent aucune possibilité), elles font, en tant que cas limites, partie du langage sensé ("Elles font partie du formalisme." *Tractatus*, §4.4611).

La première approche consiste dans l'élaboration d'un calcul qui axiomatise un certain nombre de propositions, appelées 'théorèmes'. La seconde approche formalise certaines inférences, des transitions de quelques propositions à d'autres. La première approche réussit si et seulement si les théorèmes (les propositions axiomatisés) sont des tautologies (et il ne reste aucune tautologie qui ne soit pas axiomatisée par le calcul), c'est-à-dire si le calcul est complet et correct ; la seconde approche réussit si et seulement si les inférences formalisées sont valides et suffisent pour capturer tout le raisonnement 'logique' en question.

Les deux projets de recherche peuvent être entrepris de manière sémantique ou de manière syntaxique. Si l'on s'intéresse principalement aux vérités logiques, on cherchera à les axiomatiser à l'aide d'un calcul et à prouver que ce calcul est correct et complet (en bref : adéquat) par rapport à l'ensemble des

[10] Ainsi Blanché, dans son introduction à la logique, dit que la logique (propositionnelle) est la recherche des tautologies (Blanché 1996: 65). Les figures les plus connues de ce camp sont Quine, Tarski et Wittgenstein.

[11] Dans ce camp, il faut surtout nommer le logicien allemand Gerhard Gentzen.

propositions que l'on voulait axiomatiser.[12] Dans la seconde perspective, qui s'intéresse à la validité des arguments (et à la correction des inférences) plutôt qu'aux vérités logiques (bien que les deux intérêts soient étroitement liés), on essaie de développer une méthode syntaxique et structurelle de déduction. Une telle méthode est la méthode de la 'déduction naturelle', que l'on abordera dans la leçon 6. Une autre méthode est celle des tableaux analytiques, aussi appelée la 'méthode des arbres'. Les deux méthodes sont syntaxiques : La différence principale entre ces trois techniques ainsi que les calculs hilbertiens c'est qu'elles comportent de nombreuses 'règles d'inférence', tandis que les calculs hilbertiens n'ont normalement qu'une seule règle d'inférence (le plus souvent *modus ponens*), mais de nombreux axiomes.

La méthode de la déduction naturelle a été introduite, d'une part par Jaskowski (1934) et d'autre part par Gentzen (1934). Simultanément, Gentzen a défini un calcul des séquents. Vingt ans plus tard, Beth (1955) a formulé sa méthode des tableaux analytiques et Hintikka (1955) a proposé la méthode des 'ensembles de vérité' ('truth sets') qui, dans la systématisation de Smullyan (1968), est devenue la méthode des arbres. Ce n'est que récemment qu'il a été prouvé que le calcul des tableaux analytiques et le calcul des séquents sont équivalents, c'est-à-dire que tout ce qui peut être prouvé par l'une des méthodes peut être également prouvé par l'autre et vice versa.

4 La méthode des arbres

Nous avons déjà relevé que la méthode des arbres est une méthode syntaxique pour prouver certaines propositions. Elle est cependant 'moins' syntaxique que la méthode des calculs hilbertiens parce qu'elle utilise des règles qui se prêtent à une interprétation en termes de tables de vérité. Pour motiver la méthode des arbres, rappelons les neuf faits suivants :

F1 Si une négation $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ est fausse, alors ϕ est vrai.

F2 Si une conjonction $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ est vraie, alors ϕ et ψ sont vrais.

F3 Si une conjonction $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ est fausse, alors soit ϕ soit ψ est faux.

F4 Si une disjonction $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ est vraie, alors soit ϕ, soit ψ est vrai.

F5 Si une disjonction $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ est fausse, alors ϕ et ψ sont faux.

F6 Si une implication $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ est vraie, alors soit ϕ est faux soit ψ est vrai.

F7 Si une implication $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ est fausse, alors ϕ est vrai et ψ est faux.

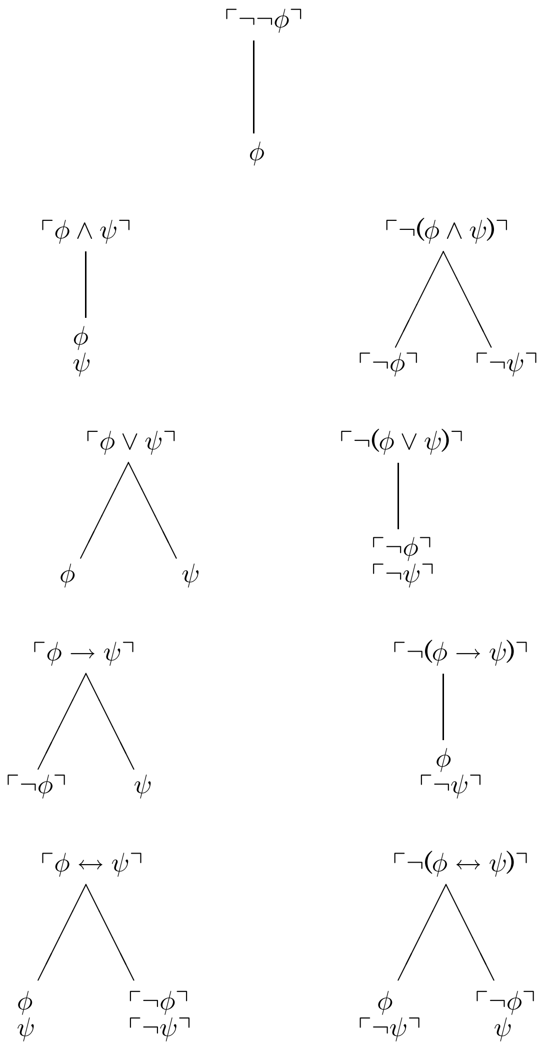
F8 Si une équivalence $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$ est vraie, alors soit ϕ et ψ sont vrais, soit ϕ et ψ sont faux.

F9 Si une équivalence $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$ est fausse, alors soit ϕ est vrai et ψ faux, soit ϕ est faux et ψ vrai.

De ces neuf faits, on dérive des règles pour construire des arbres. **F2**, par exemple, nous dit que nous pouvons décomposer $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ en ϕ et en ψ et les placer sur la même branche : si $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ se trouve sur un chemin de l'arbre, alors ϕ et ψ devront se trouver sur ce même chemin, car si $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ est vraie, ϕ et ψ le sont aussi. **F3** nous dit que si $\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$ se trouve sur un chemin, alors soit $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ soit $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ devrait se trouver sur le même chemin. Construire un arbre correspondant à une expression complexe consistera à construire des chemins à partir de l'expression initiale en utilisant les règles de construction d'arbres. Les chemins ainsi obtenus dans l'arbre (considérés de bas en haut) seront des 'chemins de vérité' – ils représentent des manières dont les propositions initiales peuvent être vraies ensemble. La méthode des arbres nous fournit ainsi un teste de consistance, respectant la composition d'une proposition complexe de ces constituantes simples.

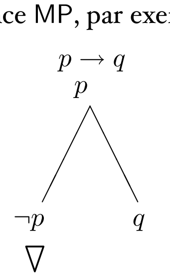
Les neuf faits **F1** à **F9** mentionnées nous assurent la correction de quelques règles d'inférence. Ils correspondent à neuf règles de construction d'arbres :

[12] Nous parlerons de la correction et la complétude des calculs en général dans la leçon 8.



Nous appliquons ces règles de manière itérative, jusqu'à ce qu'aucune des règles ne soit applicable – cela n'est le cas que si les seules propositions non-traitées sont des propositions simples ou des négations de propositions simples. Nous pouvons 'fermer' une branche si et seulement si elle contient n'importe quelle formule propositionnelle, par exemple "p" (ou "$p \wedge (q \vee r)$"), et aussi sa négation "$\neg p$" (ou "$\neg(p \wedge (q \vee r))$").[13] Pour le faire, il n'est pas nécessaire que l'arbre soit entièrement développé : dès que nous trouvons une proposition et sa négation sur une même branche, nous pouvons la fermer.

Dans notre nouveau calcul, la règle d'inférence MP, par exemple, correspondra à l'arbre suivant :



Il est facile d'interpréter cette arbre de manière sémantique : Une implication peut être vraie de deux manières : parce que son antécédent est faux ou parce que son conséquent est vrai. Dans la présence

[13]Seuls les paires de propositions de la forme $\langle \phi, \ulcorner\neg\phi\urcorner \rangle$ comptent comme contradictoire. Il ne serait pas permis, par exemple, de considérer "$\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$" comme négation de "$p \wedge (q \vee r)$", même si la formule est sémantiquement équivalente à cette négation. Dans un calcul syntaxique, tel que l'est la méthode des arbres, seule la *forme* (syntaxique) des propositions peut entrer en considération.

de "p", cependant, nous pouvons exclure la première possibilité – ce que nous faisons en fermant la branche gauche. Le seul chemin de vérité qui reste contiendra "q" – "q" doit être vraie si "$p \rightarrow q$" et "p" le sont.

Voici un autre exemple. Nous commençons par une conjonction de trois propositions complexes, appliquons la règle de conjonction et développons ensuite la disjonction qui est le deuxième conjoint :

$$\checkmark \quad (p \rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge (s \wedge \neg q)$$

$$\begin{array}{rc} & p \rightarrow q \\ \checkmark & p \vee r \\ & s \wedge \neg q \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} p & r \end{array}$$

Après avoir appliqué une règle à une formule dans une branche, nous la marquons par le signe "✓". Après chaque application d'une règle, nous déterminons si nous pouvons déjà fermer une branche. Nous ne pouvons pas encore le faire.

En voici une interprétation sémantique : Nous avons commencé avec trois formules qui étaient peut-être toutes vraies. Ce que notre arbre nous apprend, c'est que les trois formules pourraient être vraies de deux manières : la première serait que "$p \rightarrow q$", "$s \wedge \neg q$" et "p" soient vrais, et la deuxième que "$p \rightarrow q$", "$s \wedge \neg q$" et "r" soient vraies.

Nous pouvons donner une motivation 'dialogique' à cette interprétation : un arbre représente les choix dialogiques d'un défenseur de la proposition initiale. En défendant la vérité d'une disjonction, par exemple, je peux me contenter de ne défendre que l'un des disjoints ; pour défendre une conjonction, cependant, il faut défendre les deux conjoints etc. Dire qu'une branche se ferme revient à dire que l'argument qui a pris le 'chemin de vérité' correspondant a échoué : la défense n'a pas pu montrer que la proposition initiale pouvait être vraie.

Nous distribuons maintenant la conjonction "$s \wedge \neg q$" sur les branches (et marquons la troisième formule comme 'traitée') :

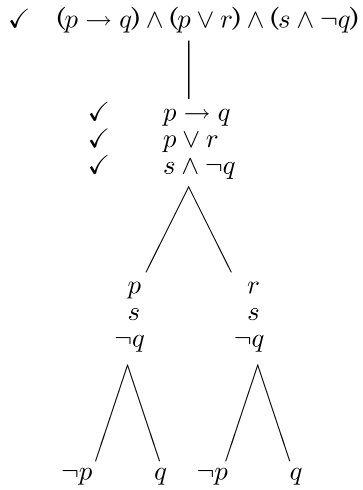
$$\checkmark \quad (p \rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge (s \wedge \neg q)$$

$$\begin{array}{rc} & p \rightarrow q \\ \checkmark & p \vee r \\ \checkmark & s \wedge \neg q \end{array}$$

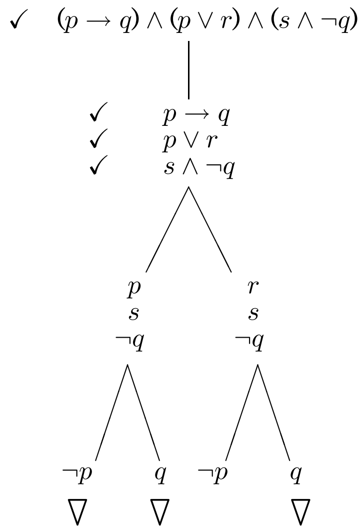
$$\begin{array}{cc} p & r \\ s & s \\ \neg q & \neg q \end{array}$$

Comme la règle de conjonction nous dit de continuer avec les deux conjoints, il faut mettre "s" et "$\neg q$" dans les deux branches.

Encore une fois, nous vérifions si nous pouvons 'fermer' une branche : nous ne le pouvons pas. Nous appliquons maintenant la règle de l'implication à la première de nos trois formules initiales (l'implication est la seule formule complexe qui nous reste, et donc la seule à laquelle nous pouvons appliquer une règle pour développer davantage l'arbre). Cette règle d'implication nous dit d'ouvrir deux nouvelles branches : l'une avec la négation de l'antécédent et l'autre avec le conséquent. Nous obtenons donc :



Cette fois, nous pouvons fermer quelques-unes de nos quatre branches. Celle de gauche contient "$\neg p$" et "p", la deuxième en partant de la gauche "q" et "$\neg q$", celle tout à droite contient aussi "q" et "$\neg q$". Nous indiquons le fait qu'une branche ait été fermée par le signe "$\triangledown$" :



A ce point, nous ne pouvons plus développer le tableau, puisque toutes les formules non-précédées du signe "✓" sont soit des propositions simples, soit des négations de propositions simples. Les règles dont nous disposons ne s'appliquent qu'à des propositions complexes. Il ne nous reste donc plus rien à faire.

Il est important de se rappeler que la méthode des arbres est une méthode syntaxique : il ne s'agit que d'une application mécanique des règles de construction d'arbres et de fermer les branches qui contiennent une formule propositionnelle simple et aussi sa négation. La méthode des arbres nous fournit donc un *test de consistance*. Comme l'arbre d'une proposition correspond à sa clotûre déductive, la proposition intitiale est inconsistante si et seulement si chaque branche de l'arbre se ferme.

Cependant, le principal avantage de la méthode des arbres est que son interprétation sémantique est facile et naturelle. Par l'adéquation entre la syntaxe et la sémantique de la logique propositionnelle, les théorèmes de correction et de complétude de la méthode des arbres nous permettent de donner une interprétation sémantique aux règles de construction d'arbres.[14]

Nous voyons donc que le fait que nous ayons fermé trois des quatre branches de l'arbre précédente veut dire que ces branches ne représentent pas des manières dont les formules initiales pourraient être

[14] Les théorèmes de correction et de complétude doivent être établi pour chaque calcul syntaxique séparemment. Nous avons montré la correction que pour HC et seulement présupposé la complétude. Nous allons prouver la correction de la méthode des arbres et la complétude des deux systèmes dans la leçon 8.

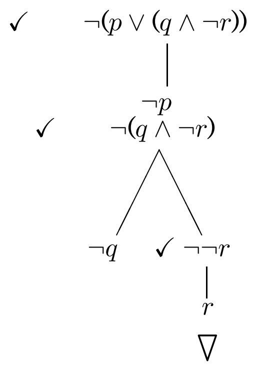
vraies ensemble. Elles ne correspondent pas à des interprétations qui rendent vraie la formule initiale.

Le tableau nous montre donc qu'il n'y a qu'une seule manière pour les formules initiales d'être vraies ensemble : il faut que les formules sur la seule branche ouverte soient toutes vraies, en d'autres termes que "r", "s", "$\neg q$" et "$\neg p$" soient vrais. Dans une table de vérité, cette possibilité logique correspondrait à la ligne F-F-V-V du tableau. Cette ligne représente la possibilité logique sous laquelle la formule initiale est vraie – elle décrit le modèle dans lequel elle est vrai.

Si nous avions fermé toutes les branches, nous saurions que la ou les formule(s) initiale(s) ne pouvai(en)t pas être vraie(s) : il s'agissait d'une contradiction (dans le cas d'une proposition) ou d'un ensemble de propositions insatisfaisable.

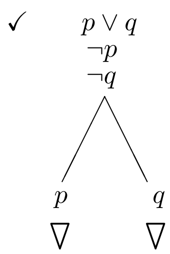
Nous voyons donc que la méthode des arbres peut nous servir de test de *satisfaisabilité* : si une des branches reste ouverte, il y a une possibilité logique pour les propositions initiales d'être vraies ensemble et elles forment donc un ensemble satisfaisable (présupposant la complétude et la correction de la méthode des arbres). Puisqu'une proposition est une contradiction si et seulement si sa négation est une tautologie, la méthode des arbres nous sert également de test pour savoir si ou non une proposition est une tautologie. Si toutes les branches de l'arbre *de sa négation* se ferment, alors elle est une tautologie. Si au moins une branche reste ouverte, il y a une possibilité pour sa négation d'être vraie, et donc une possibilité pour elle d'être fausse. Dans ce cas-là, elle n'est pas une tautologie.

Les arbres nous permettent donc de visualiser les conditions de vérité d'une proposition complexe. Examinons un deuxième exemple :



L'application des règles nous permet d'interpréter cet arbre de la façon suivante : "$\neg(p \vee (q \wedge \neg r))$" est vrai si et seulement si, soit "$\neg p$" et "$\neg q$" sont vrais (la branche à gauche), soit "$\neg p$" et "r" sont vrais (la branche à droite). Il y a donc deux 'chemins de vérité' complets dans cet arbre, deux manières pour la proposition complexe d'être vraie.

Considérons l'arbre suivant :



Dans cette arbre, aucun chemin ne reste ouvert : la tentative de trouver une manière dont les propositions initiales peuvent être vraies ensemble échoue – ce qui n'étonne pas, étant donné que la vérité d'une disjonction exclut la fausseté de ses deux disjoints.

Une contradiction est caractérisée par le fait que chacun des chemins de son arbre contient une proposition et aussi sa négation. Autrement dit, toutes ses branches se ferment :

$$
\begin{array}{ll}
\checkmark & \neg(\neg(p \wedge q) \vee (p \wedge q)) \\
 & \quad | \\
\checkmark & \neg\neg(p \wedge q) \\
\checkmark & \neg(p \wedge q) \\
 & \quad | \\
\checkmark & p \wedge q \\
 & \quad | \\
 & p \\
 & q \\
 & \swarrow \quad \searrow \\
 & \neg p \qquad \neg q \\
 & \nabla \qquad \nabla
\end{array}
$$

Un des chemins de cet arbre contient "p" et "$\neg p$", l'autre "q" et "$\neg q$".[15]

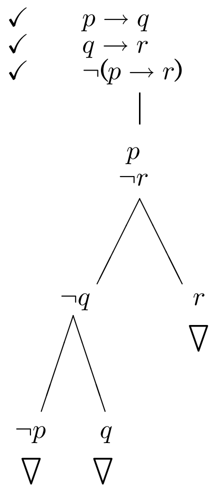
En tant que méthode syntaxique, la méthode des arbres nous permet de ***prouver*** des propositions : on prouve une proposition en montrant qu'un arbre complet (entièrement développé) ***pour sa négation*** ne contient que des branches fermées. Interprété sémantiquement, le fait que toutes les branches se ferment signifie qu'il n'y a aucune possibilité pour la proposition initiale d'être vraie, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une contradiction. Puisqu'une proposition est une contradiction si et seulement si sa négation est une tautologie, nous avons une méthode pour tester le caractère tautologique d'une proposition. Il suffit de faire l'arbre *de sa négation* et de voir si toutes les branches se ferment. Si c'est le cas, la proposition initiale est une tautologie ; sinon, elle ne l'est pas.[16]

Un arbre dont toutes les branches se ferment est appelé "fermé". Une proposition est donc une tautologie si et seulement si sa négation a un arbre fermé.

Les arbres peuvent donc nous servir de critère lors de la détermination du caractère tautologique ou non-tautologique d'une proposition. Une inférence est valide si et seulement si l'implication matérielle de sa conclusion par (la conjonction de) ses prémisses est une tautologie. Nous pouvons donc également utiliser la méthode des arbres pour tester la validité des inférences. Par exemple, pour tester la validité de l'argument "$p \rightarrow q$; $q \rightarrow r$; donc $p \rightarrow r$" (vérifier si "$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$" est vraie), nous déterminons si la négation de sa conclusion est consistante avec ses prémisses – s'il existe une possibilité logique que les prémisses soient vraies et la conclusion fausse. Si toutes les branches de l'arbre correspondant à cette implication sont fermées, il n'y a aucune interprétation qui rend vraies à la fois toutes les prémisses et la négation de la conclusion : la négation de la conclusion est inconsistante avec les prémisses. En d'autres termes, toute interprétation qui rend vraie l'ensemble des prémisses rend vraie la conclusion. Par conséquent, l'inférence est valide. Nous construisons l'arbre suivant :

[15] Selon l'interprétation 'dialogique' de la méthode des arbres, la fermeture d'une branche représente le cul-de-sac dans lequel est tombé un interlocuteur qui a choisi cette stratégie pour défendre sa thèse initiale. S'il n'y a que des culs-de-sac, la thèse ne peut pas être défendue.

[16] J'explique ici une méthode syntaxique en termes sémantiques, présupposant déjà que la méthode des arbres est correcte et complète par rapport à la sémantique de la logique propositionnelle. Nous n'établirons ce résultat que plus tard, dans la leçon 8.



Observant que toutes les branches se ferment, nous concluons qu'il n'y a pas d'interprétation qui rende vraies "$p \rightarrow q$", "$q \rightarrow r$" et "$\neg(p \rightarrow q)$", c'est-à-dire que toute interprétation qui rend vraies "$p \rightarrow q$" et "$q \rightarrow r$" rend aussi vraie la conclusion de l'argument, "$(p \rightarrow q)$". L'argument suivant est donc valide :

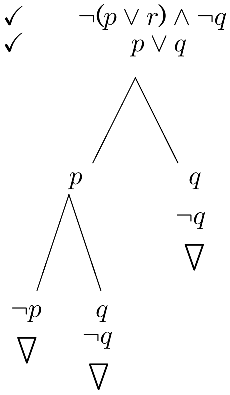
$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ p \rightarrow q \\ \hline s \end{array} \tag{7}$$

La méthode des arbres est une méthode efficace permettant de déterminer si un énoncé est une tautologie ou non. L'application d'une règle à une formule a pour résultat de ramener le problème à l'application d'autres règles sur des formules plus courtes. Étant donné qu'au point de départ nous avons un nombre fini de propositions qui possèdent chacune un nombre fini de symboles, après un nombre fini d'étapes, l'arbre sera totalement développé et nous pourrons vérifier si tous les chemins se ferment ou non.

Comme teste de validité d'un argument, la méthode des arbres a l'avantage supplémentaire de nous procurer une information cruciale dans le cas où le test échoue : la branche qui reste ouverte nous indique de quelle manière on peut construire un contre-exemple, c'est-à-dire quelle est l'interprétation propositionnelle qui rend vraies les prémisses et fausse la conclusion.

Néanmoins, il faut faire des choix : dans l'application des règles à certaines propositions plutôt que d'autres, on risque de compliquer l'arbre et de devoir répéter les mêmes formules sur différents arbres. En général, il est conseillé de toujours traiter d'abord les propositions qui n'ouvrent pas de nouvelles branches, ce qui évite de devoir répéter la même formule dans des branches différentes. L'ordre de l'application des règles, même s'il peut être important d'un point de vue pratique, est immatériel logiquement : si nous obtenons un arbre fermé par un ordre de procédure, tout autre nous donnera également un arbre fermé.

Il est important de ne pas oublier d'introduire les nouvelles formules *sur toutes les branches ouvertes.* Supposons, par exemple, que je commence, en développant l'arbre suivant, par la disjonction. Je dois mettre les conjoints de la conjonction sur toutes les branches successives :



En guise de résumé, on peut dire que la méthode des arbres met à notre disposition trois tests de grande utilité :

- Comme teste de *consistance*, elle nous permet d'établir si une proposition ou un ensemble de propositions est ou non consistant et, dans le cas d'une réponse affirmative, elle nous permet de trouver une interprétation pertinente.
- La méthode des arbres nous permet d'établir si une proposition donnée est ou non une *tautologie* : elle l'est si et seulement si les branches de l'arbre de sa négation sont toutes fermées.
- La méthode des arbres nous permet également de tester la *validité* d'un argument, en vérifiant si l'implication correspondante est ou non une tautologie.

Références

Beth, Evert Willem, 1955. "Semantic Entailment and Formal Derivability". *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van wetenschappen, afd. lettterkunde, new series* 18. Amsterdam, Holland : N. V. Noord-Hollansche Uitgevers maatschappij

Blanché, Robert, 1996. *Introduction à la logique contemporaine*. Collection Cursus, série "Philosophie". Paris : Armand Colin

Gentzen, Gerhard, 1934. "Untersuchungen über das logische Schliessen". *Mathematische Zeitschrift* 39 : 176–210, 405–431. Republié comme Gentzen (1969b), traduit comme"Investigations into logical deduction" dans Gentzen (1969a: 68–131)

Gentzen, Gerhard, 1969a. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. Amsterdam : North-Holland Publishing Co. Edité par M.E. Szabo

Gentzen, Gerhard, 1969b. *Untersuchungen über das logische Schliessen*. Darmstadt : Wissenschaftliche Buchgesellschaft

Hintikka, Jaakko, 1955. "Form and content in quantification theory". *Acta Philosophica Fennica* 8 : 7–55

Jaskowski, Stanislaw, 1934. "On the Rules of Suppositions in Formal Logic". *Studia Logica (Poznan Panstwowe Wydawnictowo Naukowe)* 1 : 5–32. Republié dans McCall (1967: 232–258), avec une notation différente.

McCall, Storrs, éd., 1967. *Polish Logic 1920–1939*. Oxford : Clarendon Press

Smullyan, Raymond M., 1968. *First-Order Logic*. Nombre 43 dans Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Berlin : Springer Verlag