Septième leçon

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2005-2006

Philipp Keller
philipp.keller@lettres.unige.ch

À lire pour le cours du 19 décembre 2005

1 Les propriétés métalogiques

Dans la leçon 5, nous avons introduit une sémantique formelle pour le langage de la logique propositionnelle et défini la relation de conséquence sémantique $\models$. "$\phi \models \psi$" est vraie si et seulement si toute interprétation qui rend vrai "ϕ" rend également vrai "ψ". Dans les leçons 4, 5 et 6, nous avons introduit trois méthodes syntaxiques permettant de prouver des théorèmes : un calcul axiomatique, la méthode des arbres et la méthode de la déduction naturelle. Ces trois méthodes nous définissent trois relations syntaxiques de déductibilité $\vdash$.

La conséquence sémantique $\models$ est une relation sémantique qui est étudiée dans la théorie des modèles. La déductibilité syntaxique $\vdash$, quant à elle, est une relation syntaxique et fait partie du domaine de la théorie de la preuve. La théorie des modèles définit la notion de validité, la théorie de la preuve celle de déductibilité ou démontrabilité. Il existe différentes manières d'établir des relations entre la syntaxe et la sémantique d'un système logique. Un calcul syntaxique peut être appelé :
– "**satisfaisable**" s'il ne permet pas la déduction d'une contradiction.
– "**correct**" si tous ses théorèmes sont des tautologies.
– "**complet**" s'il permet la déduction de toutes les tautologies.
– "**adéquat**" s'il est à la fois correct et complet.
La première propriété est la moins exigeante : qu'une méthode syntaxique soit *satisfaisable* revient à dire qu'elle ne permet pas la déduction d'une proposition et de sa négation. Puisqu'une contradiction n'est jamais une tautologie, tout calcul correct est satisfaisable. Dans la logique classique, un calcul insatisfaisable est dénué d'intérêt : si une seule contradiction est un théorème, toute formule propositionnelle peut en être déduite en conséquence (puisqu'une inférence ayant une prémisse contradictoire est toujours valide) – par conséquent, le calcul ne fera plus de distinction entre théorèmes et non-théorèmes et permettra la déduction de n'importe quelle proposition.

Nous démontrerons par la suite que le calcul axiomatique HC, la méthode des arbres et la méthode de la déduction naturelle sont correctes et complètes (et donc satisfaisables). Ces résultats n'établissent pas seulement que les trois méthodes de preuves sont équivalentes, mais également qu'elles correspondent à la sémantique de la logique propositionnelle que l'on a donné dans la leçon 5.

Consistance, correction et complétude ne sont que trois des propriétés que l'on recherche dans la construction d'un calcul. Une autre propriété désirable est qu'on peut prouver un théorème de déduction sur le calcul : un tel théorème nous assure que $\phi \vdash \psi$ si et seulement si $\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$. C'est ce théorème qui justifie notre application de la règle de preuve conditionnelle PC dans la méthode de déduction naturelle.

D'autres propriétés métalogiques désirables sont sémantiques : elles ne caractérisent pas un calcul, mais une relation de conséquence sémantique ou un ensemble de tautologies :

– Une logique est dite “**décidable**”, s'il existe une procédure mécanique qui permet de déterminer si une proposition est une tautologie.
– Une logique est dite “**compacte**” si toute conséquence sémantique d'un ensemble infini de prémisses est une conséquence sémantique d'un ensemble fini de prémisses.

Nous démontrerons que la logique propositionnelle est décidable et compacte.

Mis à part les charactérisations syntaxiques et sémantiques, une logique peut aussi être décrite comme structure mathématique : la logique propositionnelle, par exemple, correspond à un certain type d'algèbre, à savoir une algèbre Booléenne. Après avoir introduit cette notion, nous montrerons comment les connecteurs propositionnelles correspondent à des opérations algébriques.

2 Le théorème de déduction

Nous remarquons l'importance cruciale de la règle de la preuve conditionnelle PC dans la déduction des théorèmes d'une forme implicative ou conditionnelle. La validité de la règle de la preuve conditionnelle correspond à une propriété importante de la logique propositionnelle :

Théorème 1 (Théorème de déduction). *ψ peut être déduit de ϕ si et seulement si $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ est un théorème.*

PREUVE[1]

$\Longrightarrow$ Comme le théorème est évident pour la méthode de la déduction naturelle, nous le démontrons pour le calcul HC. Supposons donc que nous avons une preuve de

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^n \psi$$

Cette preuve consiste en une séquence finie de formules propositionnelles $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ telle que pour $\psi_n = \psi$ et pour tout nombre $i < n$, ψ_n est soit un axiome ou ϕ, soit s'ensuit de deux autres formules ψ_i et ψ_j $(i, j < n)$ par MP. Nous transformons cette preuve de ψ en une preuve que $\phi \rightarrow \psi$ en faisant les modifications suivantes :

(a) Si $\psi_k = \phi$, nous remplaçons

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^k \psi_k$$

par

$$\mathsf{HC} \vdash^k \phi \rightarrow \phi$$

ce qui est un axiome ($\mathbf{H_1}$).

(b) Si ψ_k est un axiome, nous remplaçons la ligne

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^k \psi_k$$

par les cinq lignes suivantes (cf. exercice (7b) de la quatrième série) :[2]

$\mathbf{k_1}$	$\mathsf{HC} \vdash \psi_k$	axiome
$\mathbf{k_2}$	$\mathsf{HC} \vdash ((\psi_k \wedge \phi) \rightarrow \psi_k) \rightarrow (\psi_k \rightarrow (\phi \rightarrow \psi_k))$	$\mathbf{H_3}$
$\mathbf{k_3}$	$\mathsf{HC} \vdash (\psi_k \wedge \phi) \rightarrow \psi_k$	$\mathbf{H_8}$
$\mathbf{k_4}$	$\mathsf{HC} \vdash \psi_k \rightarrow (\phi \rightarrow \psi_k)$	(MP) de (k_2) et (k_3)
$\mathbf{k_5}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \rightarrow \psi_k$	(MP) de (k_1) et (k_4)

[1]La preuve suivante, qui se termine par le signe “□” pour “quod erat demonstrandum” (“c.q.f.d.”) peut être omise par ceux qui soient peu intéressés par les subtilités des calculs axiomatiques.

[2]Nous supposons que $k_1, \ldots, k_5 < k$, ce qui est toujours possible après une ré-numération des lignes.

(c) Si ψ_k a été obtenue à partir de deux formules ψ_i et ψ_j (= $\ulcorner \psi_i \rightarrow \psi_k \urcorner$) ($i, j < k$), on applique l'hypothèse d'induction pour obtenir :

i	$\mathsf{HC} \vdash \phi \rightarrow \psi_i$	
j	$\mathsf{HC} \vdash \phi \rightarrow (\psi_i \rightarrow \psi_k)$	

Nous remplaçons ces deux lignes par les suivantes :

i	$\mathsf{HC} \vdash \phi \rightarrow \psi_i$	
$\mathbf{j_1}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \rightarrow (\psi_i \rightarrow \psi_k)$	
$\mathbf{j_2}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \rightarrow (\psi_i \rightarrow \psi_k)) \rightarrow ((\phi \wedge \psi_i) \rightarrow \psi_k)$	$\mathbf{H_4}$
$\mathbf{j_3}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \wedge \psi_i) \rightarrow \psi_k$	(MP) de (j_1) et (j_2)
$\mathbf{j_4}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \rightarrow \phi$	$\mathbf{H_1}$
$\mathbf{j_5}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \rightarrow \phi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi_i) \rightarrow (\phi \rightarrow (\phi \wedge \psi_i)))$	$\mathbf{H_{10}}$
$\mathbf{j_6}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \rightarrow \psi_i) \rightarrow (\phi \rightarrow (\phi \wedge \psi_i))$	(MP) de (j_4) et (j_5)
$\mathbf{j_7}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \rightarrow (\phi \wedge \psi_i)$	(MP) de (i) et (j_6)
$\mathbf{j_8}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \rightarrow (\phi \wedge \psi_i)) \rightarrow (((\phi \wedge \psi_i) \rightarrow \psi_k) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi_k))$	$\mathbf{H_2}$
$\mathbf{j_9}$	$\mathsf{HC} \vdash ((\phi \wedge \psi_i) \rightarrow \psi_k) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi_k)$	(MP) de (j_7) et (j_8)
$\mathbf{j_{10}}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \rightarrow \psi_k$	(MP) de (j_3) et (j_9)

$\Longleftarrow$ Si on a

$$\mathsf{HC} \vdash^k \phi \rightarrow \psi$$

on ajoute

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^{k+1} \phi$$

à ce qu'on obtienne

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^{k+2} \psi$$

avec une application de (MP).

□

Par le théorème de déduction, le problème de trouver une déduction "$p \vdash q$" se réduit au problème de prouver "$\vdash p \rightarrow q$". En pratique, cependant, cette réduction ne facilite que rarement le travail du logicien. D'où l'utilité de la méthode de la déduction naturelle, qui n'a pas besoin d'une telle réduction mais permet de traiter "$p \vdash q$" 'directement'.

3 Correction et complétude de la méthode des arbres

Nous avons présenté la méthode des arbres à travers son interprétation sémantique, c'est-à-dire en termes de valeurs de vérité des propositions traitées. Cependant, les règles que nous avons données dans la leçon 5 sont des règles purement syntaxiques : elles ne considèrent que la forme syntaxique des propositions. Nous avons déjà présupposé la correction et la complétude de cette méthode syntaxique et c'est ce que nous devons prouver dans la section qui suit. En ceci, nous suivons la présentation de Smullyan (1968: 25 et seq.).

Pour prouver la correction et la complétude de la méthode des arbres, nous devons introduire quelques nouvelles notions. Nous observons d'abord que nos règles pour les équivalences matérielles ne sont pas basiques, mais peuvent être obtenues par deux applications successives des règles pour l'implication matérielle. Les sept autres règles de construction d'arbres tombent sous deux catégories : certaines nous amènent à développer l'arbre avec une seule nouvelle branche, les autres, avec deux nouvelles branches. Nous faisons donc une distinction entre des formules que l'on appellera 'du type α' ($\ulcorner \neg\neg\phi \urcorner$,

$\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$) qui 'continuent sur la même branche', et les formules que l'on appellera 'du type β' ($\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ et $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$) qui nous obligent de créer au moins une nouvelle branche. On adoptera la terminologie suivante pour les formules que ces règles nous obligent à écrire sur les branches consécutives :

α	α_1	α_2
$\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	ϕ	ϕ
$\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\neg(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$	ϕ	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$

β	β_1	β_2
$\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	ψ

Nous pouvons maintenant définir ce qu'est un arbre et un tableau :

Définition 2 (Arbres binaires). *Un arbre binaire est une structure composée de 'noeuds' (points) et de 'branches' (lignes) telle que chaque noeud, mis à part l'origine, se trouve à la fin d'une branche et telle que tous les noeuds se trouvent au début d'au maximum deux branches.*[3]

Nous appelons "point extrême" un point qui n'a pas de successeurs sur sa branche.

Définition 3 (Tableaux). *Un tableau est un arbre binaire dont les noeuds sont des formules propositionnelles construites à partir d'une formule propositionnelle comme suit : si χ est une formule propositionnelle dont le tableau $\mathcal{T}$ a déjà été construit et ζ en est un point extrême, nous élargissons $\mathcal{T}$ par une des méthodes suivantes :*

(A) Si une formule du type α a une occurrence sur le chemin B_ζ (le chemin de χ jusqu'à ζ dans $\mathcal{T}$), nous ajoutons soit α_1 soit α_2 comme successeur unique à ζ.

(B) Si une formule du type β a une occurrence sur le chemin B_ζ, nous ajoutons β_1 comme successeur gauche et β_2 comme successeur de droite à ζ.

Nous appelons un tableau $\mathcal{T}$ une "*extension directe*" de $\mathcal{T}_2$ si nous l'obtenons à partir de $\mathcal{T}_2$ par une seule application de (A) ou de (B). Nous appelons une branche B_ϕ d'un arbre '*fermée*' si elle contient des occurrences d'une formule propositionnelle et aussi de sa négation. Un tableau $\mathcal{T}$ est appelé '*fermé*' si toutes ses branches sont fermées. Nous appelons une '*preuve*' d'une formule propositionnelle ϕ un tableau fermé qui a $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ comme sa formule initiale. Une formule ϕ est appelée '*prouvable*' s'il existe une preuve pour ϕ.

Pour la preuve de la correction, nous définissons ce qu'est une interprétation rendant vrais une branche ou un tableau :

Définition 4 (Interprétations d'un tableau). *Une interprétation propositionnelle I rend vraie une branche B_ϕ d'un tableau sémantique ssi elle rend vraies toutes les formules propositionnelles qui ont des occurrences sur cette branche. I rend vrai un tableau ssi elle rend vraie au moins une branche de ce tableau.*

Nous appelons une branche et un tableau "satisfaisable" s'il y a une interprétation qui les rend vraie. Nous pouvons maintenant prouver le théorème le plus important pour la preuve de la correction :

Théorème 5. *Si $\mathcal{T}_2$ est une extension directe d'un tableau $\mathcal{T}_1$, toute interprétation qui rend vraie $\mathcal{T}_1$ rend également vraie $\mathcal{T}_2$.*

[3] Cette définition utilise la notion vague de "structure". Une définition plus précise serait la suivante : Un arbre est un triple $\langle \mathbf{P}, \mathbf{l}, R\rangle$ composé de

(i) un ensemble $\mathbf{P}$ d'éléments appelés "points";
(ii) une fonction $\mathbf{l}$ qui assigne à tout point un nombre naturel appelé son "niveau";
(iii) une relation R entre des points appellée "x est le prédecesseur de y".

Ce triple doit satisfaire aux conditions suivantes :

1. Un seul point (appellé "l'origine") est de niveau 1.
2. Tout autre point que l'origine a un seul prédecesseur.
3. Pour toute paire de points $\langle x, y\rangle$, si x est le prédecesseur de y, alors $\mathbf{l}(y) = \mathbf{l}(x) + 1$.

Preuve Supposons que I rende vraie $\mathcal{T}_1$. Il y a donc une branche B_ϕ dans $\mathcal{T}_1$ rendue vraie par I. $\mathcal{T}_2$ se distingue de $\mathcal{T}_1$ par l'addition d'un ou de deux successeurs à une branche B_ψ de $\mathcal{T}_1$. Si B_ψ est différente de B_ϕ, alors B_ϕ est toujours une branche de $\mathcal{T}_2$ et la conclusion désirée s'ensuit. Si B_ψ a été obtenue de B_ϕ par l'opération (A), alors il existe une formule α sur B_ϕ telle que B_ψ est ou bien $B_\phi + \alpha_1$ ou bien $B_\phi + \alpha_2$. Si α est rendu vrai par I, cependant, α_1 et α_2 le sont également. Alors $\mathcal{T}_2$ contient au moins une branche rendue vraie par I. Si B_ψ a été obtenue de B_ϕ par l'opération (B), alors une formule β a une occurrence sur B_ϕ telle que et $B_\phi + \beta_1$ et $B_\phi + \beta_2$ sont des branches de $\mathcal{T}_2$. Si β est rendue vraie par I, alors soit la première, soit la seconde de ces deux branches est également rendue vraie par I. Donc $\mathcal{T}_2$ est rendue vraie par I. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la correction de la méthode des arbres :

Théorème 6 (Correction de la méthode des arbres). *La méthode des arbres est correcte : toute proposition prouvable est une tautologie.*

Preuve Le théorème (5) nous permet de prouver par induction mathématique que, pour tout tableau $\mathcal{T}$, si l'origine ϕ est rendue vraie par une interprétation I, alors $\mathcal{T}$ est également rendue vraie par cette interprétation, assurant l'étape d'induction. Supposons alors que $\mathcal{T}$ prouve ϕ. Cela veut dire que $\mathcal{T}$ est un tableau qui a $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ comme origine et qui n'est rendu vrai sous aucune interprétation. Toute interprétation I, par conséquent, rend fausse $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ (si elle rendait vraie l'origine, elle devrait aussi rendre vraie le tableau qui est son extension) : $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ n'est vraie sous aucune interprétation : c'est une contradiction. ϕ est donc une tautologie. □

Par rapport à la complétude de la méthode des arbres, il faut distinguer deux questions :
– Pouvons-nous déduire, du fait qu'un tableau fermé existe pour ϕ, que ϕ est une tautologie ?
– Pouvons-nous être sûrs qu'un tableau fermé existe pour toute tautologie ?
Les deux questions sont indépendantes et seule la seconde correspond à celle de la complétude.[4] La question de complétude est la question de savoir si nos règles de construction d'arbres sont suffisamment puissantes pour prouver toutes les tautologies de la logique propositionnelle.

Nous appelons une branche B_ϕ '*complète*' si ces deux conditions sont remplies :
– pour toute formule α qu'elle contient, elle contient à la fois α_1 et α_2 ;
– pour toute formule β qu'elle contient, elle contient au moins un de β_1 et de β_2.
Nous appelons un tableau '*complet*' si toute branche de ce tableau est soit fermée, soit complète. Notre but est de démontrer que

Si $\mathcal{T}$ est un tableau complet et ouvert, la formule à l'origine de $\mathcal{T}$ est satisfaisable. **(C)**

(C) veut dire que la formule d'origine d'un tableau complet qui reste ouvert est rendu vraie par au moins une interprétation – c'est-à-dire **(C)** nous garantit qu'aucun table se ferme 'trop tôt'. Si nous réussissons à prouver **(C)**, nous obtenons la complétude de la méthode des arbres comme suit :

Théorème 7 (Complétude de la méthode des arbres). *La méthode des arbres est complète : toute tautologie est prouvable.*

Preuve Supposons que ϕ soit une tautologie. Si ϕ ne pouvait pas être prouvée par la méthode des arbres, il y aurait un tableau complet pour $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ qui resterait ouvert. Par **(C)**, $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ serait satisfaisable et ne serait donc pas une contradiction. Par conséquent, ϕ ne serait pas une tautologie. Puisqu'on a présupposé que ϕ est une tautologie, cette supposition doit être rejetée. ϕ est donc prouvable. □

Pour prouver **(C)**, nous démontrons le théorème ci-dessous. **(C)** s'ensuit du théorème suivant (8), puisque la satifaisabilité de toute la branche implique la satisfaisabilité de son origine.

Théorème 8. *Toute branche ouverte et complète d'un tableau est satisfaisable.*

[4] Pour le comprendre, il suffit d'imaginer que nous renonçons à quelques-unes de nos règles de construction d'arbres. Même si la méthode devenait ainsi incomplète, la réponse à la première question serait toujours affirmative.

PREUVE Supposons que B_ϕ soit une branche ouverte et complète d'un tableau $\mathcal{T}$ et que $\mathcal{E}$ soit l'ensemble de toutes les propositions qui ont des occurrences sur B_ϕ. Puisque B_ϕ est une branche ouverte et grâce à nos règles de construction d'arbres (A) et (B), l'ensemble $\mathcal{E}$ satisfait les trois conditions suivantes :

(a) $\mathcal{E}$ ne contient pas de proposition simple "p" et sa négation "$\neg p$".

(b) Si $\alpha \in \mathcal{E}$, alors $\alpha_1 \in \mathcal{E}$ et $\alpha_2 \in \mathcal{E}$.

(c) Si $\beta \in \mathcal{E}$, alors soit $\beta_1 \in \mathcal{E}$, soit $\beta_2 \in \mathcal{E}$.

On appelle un ensemble qui satisfait ces trois conditions un 'ensemble de Hintikka'. Nous prouvons maintenant que tout ensemble de Hintikka est satisfaisable :[5] Nous argumentons que tout ensemble de Hintikka peut être élargi à (est un sous-ensemble d') un ensemble saturé. Un ensemble $\mathcal{E}'$ est dit '*saturé*' s'il satisfait les conditions suivantes :

(a') Pour toute proposition ϕ, soit $\phi \in \mathcal{E}'$, soit $\ulcorner \neg\phi \urcorner \in \mathcal{E}'$, mais pas les deux.

(b') Pour toute proposition du type α, $\alpha \in \mathcal{E}'$ si et seulement si $\alpha_1 \in \mathcal{E}'$ et $\alpha_2 \in \mathcal{E}'$.

(c') Pour toute proposition du type β, $\beta \in \mathcal{E}'$ si et seulement si $\beta_1 \in \mathcal{E}'$ ou $\beta_2 \in \mathcal{E}'$.

Pour montrer qu'il y a un ensemble saturé $\mathcal{E}'$ tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$, nous devons ajouter assez de propositions à $\mathcal{E}$

(i) pour que les implications dans (b) et (c) puissent être transformées en des équivalences dans (b') et (c')

(ii) et pour que (a) soit vraie non seulement pour les propositions simples mais pour toutes les propositions.

Supposons que $\mathcal{E}$ est un ensemble de Hintikka. Nous devons trouver une interprétation qui rende vraies toutes les propositions dans $\mathcal{E}$. Nous la définissons ainsi pour le cas spécial d'une proposition simple :

$$I(\text{“}p\text{”}) := \begin{cases} \mathbf{v} & \text{“}p\text{”} \in \mathcal{E} \\ \mathbf{f} & \text{“}\neg p\text{”} \in \mathcal{E} \\ \text{un de } \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{f} & \text{“}p\text{”} \notin \mathcal{E} \ \wedge \ \text{“}\neg p\text{”} \notin \mathcal{E} \end{cases}$$

Par la condition (a), il n'arrive pas que I attribue deux valeurs de vérité différentes à une et la même proposition simple. Comment pouvons-nous montrer que I rend vraie toute proposition dans $\mathcal{E}$? Nous attribuons à chaque proposition un degrés selon la définition suivante :

Définition 9 (Degrés). *Le degrés d'une proposition ϕ est le nombre naturel déterminé par les règles suivantes :*

(1) Si ϕ est une proposition atomique, alors son degrés est 0.

(2) Si ϕ est une proposition niée $\ulcorner \neg\psi \urcorner$ et que le degrés de ψ est n, alors son degrés est $n+1$.

(3) Si ϕ est une conjonction $\ulcorner \psi \wedge \chi \urcorner$, une disjonction $\ulcorner \psi \vee \chi \urcorner$, une implication $\ulcorner \psi \rightarrow \chi \urcorner$ ou une équivalence $\ulcorner \psi \leftrightarrow \chi \urcorner$ et si le degrés de ψ est n et que le degrés de χ est m, alors le degrés de ϕ est $n+m+1$.

L'utilité principale de cette définition[6] est qu'elle nous permet de prouver des méta-théorèmes déjà établis pour des cas spéciales pour toutes les formules propositionnelles par induction mathématique.

Nous démontrons alors par induction mathématique que I rend vraies toutes les propositions dans $\mathcal{E}$:

base de l'induction : Nous avons déjà vu que I rend vraies toutes les propositions simples (de degrés 0) dans $\mathcal{E}$.

pas de l'induction : Supposons que I rende vraie toute proposition ϕ dans $\mathcal{E}$ de degrés inférieur de n. Si ϕ est d'un degrés plus que 0, ϕ doit être une formule α ou une formule β :

α **:** Si ϕ est du type α, alors α_1 et α_2 sont aussi dans $\mathcal{E}$. Mais ces formules sont d'un degrés inférieur à n, donc elles sont rendues vraies par I. Donc ϕ doit être vraie aussi.

[5] En fait, il suffirait de montrer la consistance de tout ensemble de Hintikka qui est *fini*.

[6] Voici quelques exemples : "$p \wedge (q \vee \neg r)$" est de degré 3, "$p \wedge (q \vee r)$" est de degré 2, "$p \wedge (q \wedge (r \vee \neg s))$" est de degré 4 etc.

β : Si ϕ est du type β, alors soit β_1, soit β_2 est un membre de $\mathcal{E}$. Quelle qu'elle soit, elle doit être rendue vraie par I (puisqu'elle est d'un degrés inférieur à n). Donc ϕ est aussi rendue vraie par I.

Nous avons donc définis une interprétation qui rend vraies toutes les propositions dans $\mathcal{E}$ et, plus généralement, toutes les propositions dans un ensemble de Hintikka. Comme les propositions sur une branche ouverte et complète d'un tableau forment un tel ensemble de Hintikka, nous avons démontré le théorème.

□

4 Correction et complétude de la déduction naturelle

Pour montrer la correction et la complétude de la méthode de la déduction naturelle il faut prouver que tout séquent déductible "$\phi \vdash \psi$" correspond à une relation de conséquence sémantique "$\phi \models \psi$" (correction) et que toute instance d'une telle relation correspond à un séquent déductible à l'aide de nos douze règles de déduction naturelle (complétude). Nous ignorerons par la suite les règles d'introduction et d'élimination de l'équivalence, traitant $\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$ comme abréviation de $\ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi) \urcorner$. Nous suivons la procédure dans Lemmon (1965: 75 et seq.).

Théorème 10 (Correction de la déduction naturelle). *La méthode de la déduction naturelle est correcte : tout séquent déductible est une conséquence sémantique.*

Preuve Nous avons remarqué que toute preuve par la méthode de la déduction naturelle (en bref : toute déduction naturelle) doit commencer par une application de la règle de suppositions. C'est pourquoi nous pouvons prouver la correction par une induction par rapport à la longueur n d'une preuve de $\ulcorner \phi \vdash \psi \urcorner$.

base de l'induction Si la preuve à la longueur 1, il s'agit d'une application de la règle de suppositions. Le séquent en question a donc la forme $\ulcorner \phi \vdash \phi \urcorner$ et nous savons de la leçon 3 que la relation de conséquence sémantique est réflexive.

pas de l'induction Supposons que nous avons montré la correction de toutes les étapes d'une preuve jusqu'à la n-ème étape et considérons l'étape numéro $n+1$. Pour montrer la correction de ce pas $n+1$, il suffit de montrer la validité des neuf différentes règles d'inférence que nous aurions pu utiliser pour y arriver.

MP : Supposons le contraire de ce que nous voulons prouver : que $\models \phi$, $\models \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$, $\vdash \psi$, mais $\not\models \psi$. Il y aurait, par conséquent, une interprétation I qui rendrait vrai ϕ et $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ et rendrait faux ψ. Par la table de vérité de "$\rightarrow$", nous savons que cela serait impossible.

MT : Cela s'ensuit également de la table de vérité de "$\rightarrow$".

PC : Supposons que $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \models \psi$, mais que $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\} \not\models \ulcorner \phi_{n+1} \rightarrow \psi \urcorner$. Il y aurait donc une interprétation I qui rendrait vrais tous les membres de $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$, mais faux $\ulcorner \phi_{n+1} \rightarrow \psi \urcorner$. Ceci est contradictoire puisqu'I, par la table de vérité de "$\rightarrow$", devrait rendrait vraie ϕ_{n+1} et rendre faux ψ et servirait donc comme contre-exemple à "$\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \models \psi$".

DN : Cela s'ensuit de la table de vérité de "$\neg$".

RAA : Supposons que nous avons $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \models \psi$, $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \models \ulcorner \neg\psi \urcorner$, mais $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\} \not\models \ulcorner \neg\phi_{n+1} \urcorner$. Il y aurait donc une interprétation I qui rendrait vrais tous les membres de $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$, rendrait faux $\ulcorner \neg\phi_{n+1} \urcorner$ et donc rendrait vrai ϕ_{n+1}. Elle devrait donc rendre vrai et ψ et $\ulcorner \neg\psi \urcorner$. Cela serait impossible.

$\wedge$**I** : Si toute interprétation rendait vrais ϕ et ψ, alors toute interprétation rendrait également vrai $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$.

$\wedge$**E** : Si toute interprétation rendait vrai $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$, alors toute interprétation rendrait également vrais ϕ et ψ.

$\vee$**I :** Si toute interprétation rendait vrai ϕ, alors toute interprétation rendrait également vrai $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$.

$\vee$**E :** Supposons une fois encore le contraire de ce que nous voulons prouver : $\models \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$, $\phi \models \chi$, $\psi \models \chi$, mais $\not\models \chi$. Il y aurait donc une interprétation I qui rendrait faux χ, mais vrai $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$. Elle devrait donc rendre vrai l'un des disjoints. Or, puisqu'on a $\phi \models \chi$ et $\psi \models \chi$, elle devrait rendre vrai χ, ce qui est contraire à notre supposition initiale.

□

Le théorème de complétude de la déduction naturelle nous assure que toute conséquence sémantique est déductible en tant que séquent. Pour le prouver, il nous faut le lemme suivant :

Théorème 11 (Lemme). *Soit ϕ une formule qui contient les propositions simples $p_1, \ldots, p_n$ et I une interprétation. Nous définissons des formules $\psi_1, \ldots, \psi_n$ ainsi :*

$$\psi_i := \begin{cases} (\text{“}p_i\text{”}) & I(\text{“}p_i\text{”}) = \mathbf{v} \\ (\text{“}\neg p_i\text{”}) & I(\text{“}p_i\text{”}) = \mathbf{f} \end{cases}$$

Nous pouvons alors montrer par la méthode de la déduction naturelle :

1. *si $I(\phi) = \mathbf{v}$ et contient les propositions simples $p_1, \ldots, p_n$, alors nous pouvons déduire $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$;*
2. *si $I(\phi) = \mathbf{f}$ et contient les propositions simples $p_1, \ldots, p_n$, alors nous pouvons déduire $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \ulcorner \neg \phi \urcorner$.*

Preuve

Nous le démontrons par une induction mathématique, utilisant la notion de degrés déjà introduite :

base de l'induction Soit ϕ de degrés 0 (et donc une proposition atomique). Si $I(\phi) = \mathbf{v}$, nous avons $\psi = \phi$ et $\psi \vdash \phi$ par la règle de supposition. Si $I(\phi) = \mathbf{f}$, nous avons $\psi = \ulcorner \neg \phi \urcorner$ et également $\psi \vdash \neg \phi$ par la règle de suppositions.

pas de l'induction Soit ϕ de degrés n.

1. Si $\phi = \ulcorner \neg \xi \urcorner$, ξ est de degrés $< n$ et
   - si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = \mathbf{f}$ et donc (par l'hypothèse de l'induction) $\psi_1, \ldots \psi_n \vdash \ulcorner \neg \xi \urcorner$.
   - si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = \mathbf{v}$ et donc (par l'hypothèse de l'induction) $\psi_1, \ldots \psi_n \vdash \xi$. Nous obtenons $\psi_1, \ldots \psi_n \vdash \ulcorner \neg\neg \xi \urcorner$ par une application de (DN).
2. Si $\phi = \ulcorner \xi \wedge \chi \urcorner$, ξ et χ sont de degrés $< n$ et
   - si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{v}$. Nous avons donc, par l'hypothèse de l'induction :

     $$\begin{array}{ll} \psi_1, \ldots, \phi_m & \vdash \xi \\ \psi_{m+1}, \ldots, \psi_n & \vdash \chi \end{array}$$

     et nous devons montrer que

     $$\psi_1, \ldots, \phi_n \qquad \vdash \ulcorner \xi \wedge \chi \urcorner$$

     Celà s'ensuit par une application de ($\wedge$**I**).
   - Si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = \mathbf{f}$ ou $I(\chi) = \mathbf{f}$. Voici les trois cas :

1	$\psi_1, \ldots, \phi_m$	$\vdash \xi$	prémisse
2	$\psi_1, \ldots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner \neg \chi \urcorner$	prémisse
3	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner \xi \wedge \chi \urcorner$	$\vdash^* \ulcorner \xi \wedge \chi \urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner \xi \wedge \chi \urcorner$	$\vdash^* \chi$	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\psi_1, \ldots, \phi_n$	$\vdash \ulcorner \neg(\xi \wedge \chi) \urcorner$	de (3), (2) et (4) par (RAA)

1	$\psi_1, \ldots, \psi_m$	$\vdash \ulcorner \neg \xi \urcorner$	prémisse
2	$\psi_1, \ldots, \phi_n$	$\vdash \chi$	prémisse
3	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner \xi \wedge \chi \urcorner$	$\vdash^* \ulcorner \xi \wedge \chi \urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner \xi \wedge \chi \urcorner$	$\vdash^* \psi$	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\psi_1, \ldots, \phi_n$	$\vdash \ulcorner \neg(\xi \wedge \chi) \urcorner$	de (3), (1) et (4) par (RAA)

1	$\psi_1, \ldots, \phi_m$	$\vdash \ulcorner \neg \xi \urcorner$	prémisse
2	$\psi_1, \ldots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner \neg \chi \urcorner$	prémisse
3	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner \xi \wedge \chi \urcorner$	$\vdash^* \ulcorner \xi \wedge \chi \urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner \xi \wedge \chi \urcorner$	$\vdash^* \chi$	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\psi_1, \ldots, \phi_n$	$\vdash \ulcorner \neg(\xi \wedge \chi) \urcorner$	de (3), (2) et (4) par (RAA)

3. Si $\phi = \ulcorner \xi \vee \chi \urcorner$, ξ et χ sont de degrés $< n$ et
   - si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = \mathbf{v}$ ou $I(\chi) = \mathbf{v}$. Dans les trois cas, nous utilisons ($\vee$**I**).
   - si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{f}$. La déduction sera la suivante

1	$\psi_1, \ldots, \phi_m$	$\vdash \ulcorner \neg \xi \urcorner$	prémisse
2	$\psi_1, \ldots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner \neg \chi \urcorner$	prémisse
3	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner \xi \vee \chi \urcorner$	$\vdash^* \ulcorner \xi \vee \chi \urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner \xi \vee \chi \urcorner, \xi$	$\vdash^* \xi$	supposition
5	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \xi$	$\vdash^* \ulcorner \neg(\xi \vee \chi) \urcorner$	de (3), (1) et (4) par (RAA)
6	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner \xi \vee \chi \urcorner, \chi$	$\vdash^* \chi$	supposition
7	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \chi$	$\vdash^* \ulcorner \neg(\xi \vee \chi) \urcorner$	de (3), (2) et (6) par (RAA)
8	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner \xi \vee \chi \urcorner$	$\vdash^* \ulcorner \neg(\xi \vee \chi) \urcorner$	de (3, 4, 5, 6, 7) par ($\vee$**E**)
9	$\psi_1, \ldots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner \neg(\xi \vee \chi) \urcorner$	de (3), (3) et (8) par (RAA)

4. Si $\phi = \ulcorner \xi \rightarrow \chi \urcorner$, ξ et χ sont de degrés $< n$ et
   - si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = \mathbf{f}$ ou $I(\chi) = \mathbf{v}$. Si $I(\chi) = \mathbf{v}$, nous supposons ξ et appliquons (PC). Dans l'autre cas $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{f}$, nous supposons χ et ξ, appliquons (PC) et enlevons la supposition que χ par (RAA).
   - si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = \mathbf{v}$ et $I(\chi) = \mathbf{f}$. Nous supposons $\ulcorner \xi \rightarrow \chi \urcorner$, appliquons (MP) et utilisons (RAA) pour nier la supposition.
5. Si $\phi = \ulcorner \xi \leftrightarrow \chi \urcorner$, ξ et χ sont de degrés $< n$ et
   - si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{v}$ ou $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{f}$. Dans ce cas, nous utilisons (PC) et ensuite ($\leftrightarrow$ **I**).
   - si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = \mathbf{f}$ et $I(\chi) = \mathbf{v}$ ou $I(\xi) = \mathbf{v}$ et $I(\chi) = \mathbf{f}$. Nous supposons $\ulcorner \xi \leftrightarrow \chi \urcorner$, appliquons ($\leftrightarrow$ **E**), appliquons (MP) et utilisons (RAA) pour nier la supposition.

Nous avons donc prouvé le lemme, c'est-à-dire démontré : Si I est une interprétation des propositions simples contenues dans une proposition complexe, nous pouvons déduire, par la méthode de la déduction naturelle, que $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ si $I(\phi) = \mathbf{v}$ et $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \ulcorner \neg \phi \urcorner$ si $I(\phi) = \mathbf{f}$, pour n'importe quelle proposition ϕ. □

Le lemme nous assure que nous pouvons 'repliquer' chaque ligne d'une table de vérité par les méthodes de la déduction naturelle. Nous sommes maintenant en mesure de prouver la complétude de la déduction naturelle :

Théorème 12 (Complétude de la déduction naturelle). *La méthode de la déduction naturelle est complète : si ψ est conséquence sémantique de ϕ, alors "$\phi \vdash \psi$' est déductible.*

Preuve Nous prouvons d'abord la complétude sous une forme plus 'classique' :

Toute tautologie est déductible par la méthode de la déduction naturelle. **(Compl)**

Pour démontrer **(Compl)**, nous utilisons le lemme. Supposons que ϕ est une tautologie et que ϕ

contient les propositions simples "p_1", ..., "p_n". Nous pouvons donc déduire tous les 2^n séquents de la forme $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ Pour déduire ϕ, nous procédons ainsi :

1. Nous démontrons toutes les n disjonctions $\ulcorner \psi_i \vee \neg\psi_i \urcorner$ (en supposant qu'elles sont fausses et appliquant ($\vee$**I**) et (RAA)).
2. Nous faisons $2n$ suppositions : ψ_1, $\ulcorner\neg\psi_1\urcorner$, ψ_2, $\ulcorner\neg\psi_2\urcorner$, $\ldots\psi_n$, $\ulcorner\neg\psi_n\urcorner$.
3. Nous répétons les 2^n preuves de ϕ pour toutes les différentes interprétations possibles (ce qui est possible donné le lemme).
4. Nous appliquons $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$ fois ($\vee$**E**) et obtenons une preuve de ϕ sous aucune supposition.

Comme ϕ était une tautologie arbitraire, nous avons prouvé (**Compl**). Pour passer des théorèmes $\vdash \phi$ à des séquents arbitraires $\phi \vdash \psi$, supposons que ψ est une conséquence sémantique de $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. Nous devons donc montrer que nous pouvons prouver le séquent $\phi_1, \ldots \phi_n \vdash \psi$. Par la définition de conséquence sémantique, nous savons que $\ulcorner \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\ldots(\phi_n \rightarrow \psi))\ldots)\urcorner$ est une tautologie. Etant donné (**Compl**), nous pouvons le déduire également par la méthode de la déduction naturelle. Le théorème de déduction nous dit alors que nous pouvons également prouver le séquent en question. □

Voici un exemple pour illustrer le fonctionnement de la 'preuve canonique' décrite ci-dessus. Soit ϕ la tautologie "$(p \wedge q) \rightarrow p$".

1. Première étape : nous prouvons les disjonctions des atomes concernés :

1	$\vdash p \vee \neg p$	déjà prouvé
2	$\vdash q \vee \neg q$	déjà prouvé

2. Deuxième étape : supposons tous les atomes et leurs négations :

3	p	$\vdash^* p$	supposition
4	$\neg p$	$\vdash^* \neg p$	supposition
5	q	$\vdash^* q$	supposition
6	$\neg q$	$\vdash^* \neg q$	supposition

3. Troisième étape : comme ϕ est une tautologie, le lemme nous montre comment dériver les quatre lignes suivantes des quatre lignes précédentes :

7	p, q	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	lemme
8	$p, \neg q$	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	lemme
9	$\neg p, q$	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	lemme
10	$\neg p, \neg q$	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	lemme

4. Nous pouvons donc appliquer $\vee$**E** pour finir la preuve :

11	q	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	de (1,3,7,4,9) par ($\vee$**E**)
12	$\neg q$	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	de (1,3,8,4,10) par ($\vee$**E**)
13		$\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$	de (2,5,11,6,12) par ($\vee$**E**)

5 Décidabilité et formes normales

Le problème de décidabilité est le suivant : comment savoir si une formule donnée ϕ est une tautologie ? Comment savoir si une formule $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ est satisfaisable ? Pour répondre à ces questions, il nous faut une procédure de décision, c'est-à-dire un algorithme qui détermine s'il existe ou non une interpétation qui rend vraie la proposition donnée.

Les tables de vérité nous fournissent une méthode 'brute' permettant de trouver une telle interprétation, si elle existe. Pour savoir si une proposition donnée est une tautologie, il suffit de faire sa table de vérité et vérifier si on ne trouve que des “V” dans la colonne de son connecteur principal. Le théorème suivant est donc trivial :

Théorème 13 (Décidabilité de la logique propositionnelle). *La logique propositionnelle est décidable : il existe une procédure mécanique permettant de déterminer si une formule propositionnelle est ou non une tautologie.*

Preuve Toute formule propositionnelle ne contient qu'un nombre fini de propositions simples. Pour déterminer si ϕ est ou non une tautologie, il suffit de faire la table de vérité selon ces propositions simples et vérifier s'il y a des “F” dans la colonne de son connecteur principal. S'il y en a pas, ϕ est une tautologie. $\square$

L'inconvénient de cette méthode est que les tables de vérité peuvent devenir très grandes. Pour une proposition complexe construite à partir de n atomes différents, il faut considérer 2^n lignes (4 pour 2, 8 pour 3, 16 pour 4, 32 pour 5, 64 pour 6 etc.). Pour une proposition contenant dix propositions simples, il faudrait faire une table de 1024 lignes !

On appelle cela le ‘problème de l'explosion combinatoire' lorsqu'on utilise directement la définition de la validité et on vérifie, pour tout I, si ou non $I(\phi) = \mathbf{v}$. En ne considérant que les n propositions simples apparaissant dans ϕ, le nombre de vérifications est exponentiel en n (la table de vérité pour ϕ aura 2^n lignes). Cependant, les tables de vérité suggèrent une autre méthode. Considérons la table de vérité suivante :

p	q	r	s	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\mathbf{A}$	$\neg r$	$\mathbf{B}$	$\neg p$	$q \vee r$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{D}$	$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$
V	V	V	V	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V	V	F	F	V	V	V	F
V	F	V	V	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F
F	F	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	F
F	F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	F	V	F

Chaque ligne de cette table nous apprend que la proposition complexe prend la valeur “V” ou “F” selon la valeur des atomes sur la ligne en question. L'expression “$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$” est donc vraie si et seulement si “p”, “q”, “r” et “s” sont toutes vrais (1ère ligne) ***ou*** si “p”, “q” et “r” sont vrais et “s” est faux (2ème ligne) ***ou*** si “p” et “q” sont vraies et “r” et “s” faux (3ème ligne) ***ou*** si “p”, “r” et “s” sont vrais et “q” faux (5ème ligne) ***ou*** si “p” et “r” sont vraies et “q” et “s” sont faux (6ème ligne) ***ou*** si “p” et “s” sont vrais et “q” et “r” sont faux (7ème ligne). Si nous traduisons cette observation en langue formelle, nous obtenons :

$$(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \\ \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \quad (1)$$

Cette expression a une forme particulière :
- les négations n'apparaissent que devant des propositions simples ;
- l'expression est une disjonction de conjonctions ;
- chaque disjoint correspond à une ligne de la table de vérité où la proposition entière est vraie.

On appelle des propositions ayant cette forme des *formes normales disjonctives.*

Si nous considérons un grand ensemble de formules bien formées d'une certaine langue et que nous essayons de déterminer des propriétés communes à ces formules (par exemple : nous voulons savoir si toutes les formules dérivables dans un certain calcul sont valides), il est important de savoir si on peut présupposer quelque chose sur la *forme* de ces formules. Ainsi se justifie l'intérêt dans ce qu'on appelle des '*formes normales*'. Ces formes normales sont définies de manière syntaxique.

Pour définir des formes normales, nous utilisons l'interdéfinissabilité des connecteurs. Commençons par la *forme normale négative*. Une formule ϕ est de forme normale négative si et seulement si soit elle est de la forme p ou $\neg p$ pour une proposition atomique p, soit elle est une disjonction ou une conjonction des formules de forme normale négative. Pour former la forme normale négative d'une formule, on 'pousse' la négation 'à l'intérieur' de la formule en appliquant, successivement, les règles suivantes :

$$
\begin{aligned}
\phi \leftrightarrow \psi &\quad\rightsquigarrow\quad (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi) && (2)\\
\phi \rightarrow \psi &\quad\rightsquigarrow\quad \neg\phi \vee \psi && (3)\\
\neg(\phi \wedge \psi) &\quad\rightsquigarrow\quad \neg\phi \vee \neg\psi && (4)\\
\neg(\phi \vee \psi) &\quad\rightsquigarrow\quad \neg\phi \wedge \neg\psi && (5)\\
\neg\neg\phi &\quad\rightsquigarrow\quad \phi && (6)
\end{aligned}
$$

Le résultat obtenu par l'application de ces règles est équivalent (sémantiquement) à la formule initiale, c'est-à-dire qu'il a la même table de vérité.

Théorème 14. *Si ϕ est une formule propositionnelle, il y a une formule ψ de forme normale négative qui est sémantiquement équivalente à ϕ.*

Preuve Par une application des règles données, ne passant à la règle suivante que lorsque la règle antécédente n'est plus applicable. □

Un exemple d'une telle transformation en forme normale négative est la chaîne d'équivalences suivante :

$$
\begin{array}{lcl}
(p \leftrightarrow q) \rightarrow r & & \\
 & ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow r & \text{règle 1}\\
 & \neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee r & \text{règle 2}\\
 & \neg((\neg p \vee q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee r & \text{règle 2}\\
 & \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee r & \text{règle 2}\\
 & \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \vee r & \text{règle 3}\\
 & (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg q \vee p) \vee r & \text{règle 4}\\
 & (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p) \vee r & \text{règle 4}\\
 & (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r & \text{règle 5}
\end{array}
$$

Le résultat est en forme normale négative car tous les signes de négations se trouvent devant des propositions atomiques.

La forme normale négative nous permet de construire des formes normales conjonctives :

Définition 15. *Une formule est en forme normale conjonctive si elle est une conjonction de disjonctions de propositions atomiques et de négations de propositions atomiques.*[7]

[7] Voici la notation formelle :

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i \;:=\; \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$$

L'importance de cette notion vient du fait que toute formule propositionnelle est équivalente à une formule de forme normale conjonctive :

Théorème 16. *Si ϕ est une formule propositionnelle, il y a une formule ψ de forme normale conjonctive qui est sémantiquement équivalente à ϕ.*

Preuve Pour transformer une formule de forme normale conjonctive, on applique successivement les règles suivantes :

$$
\begin{aligned}
\phi &\quad\rightsquigarrow\quad \text{forme normale négative de } \phi \\
(\phi \wedge \psi) \vee \chi &\quad\rightsquigarrow\quad (\phi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi) && (1)\\
\chi \vee (\phi \wedge \psi) &\quad\rightsquigarrow\quad (\chi \vee \phi) \wedge (\chi \vee \psi) && (2)\\
\phi \vee (\psi \vee \chi) &\quad\rightsquigarrow\quad (\phi \vee \psi) \vee \chi && (3)\\
\phi \wedge (\psi \wedge \chi) &\quad\rightsquigarrow\quad (\phi \wedge \psi) \wedge \chi && (4)
\end{aligned}
$$

Il est évident que le résultat obtenu par l'application de ces règles est équivalent (sémantiquement) à la formule initiale, c'est-à-dire a la même table de vérité. □

Un exemple d'une telle transformation en forme conjonctive est la chaîne d'équivalences suivante :

$$
\begin{array}{cl}
((p \vee \neg q) \rightarrow ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u & \\
(\neg(p \vee \neg q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u & \text{règle 2}\\
((\neg p \wedge \neg\neg q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u & \text{règle 4}\\
((\neg p \wedge q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u & \text{règle 5}\\
((\neg p \wedge q) \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge \neg u & \text{règle 6}\\
((\neg p \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge (q \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t)))) \wedge \neg u & \text{règle 6}\\
((\neg p \vee (r \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge (q \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge \neg u & \text{règle 7}\\
((\neg p \vee (r \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u & \text{règle 7}\\
((\neg p \vee r) \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u & \text{règle 8}\\
((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u & \text{règle 8}\\
((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee r) \vee t) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u & \text{règle 8}\\
((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee r) \vee t) \wedge ((q \vee s) \vee t)) \wedge \neg u & \text{règle 8}\\
((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t) \wedge ((q \vee r) \vee t)) \wedge ((q \vee s) \vee t) \wedge \neg u & \text{règle 9}
\end{array}
$$

Nous voyons que les règles 8 et 9 ne servent qu'à grouper les conjonctions ou disjonctions de manière uniforme du côté gauche de telle sorte qu'on puisse, selon notre convention, omettre les parenthèses. Le résultat final de notre transformation est donc la formule :

$$(\neg p \vee r \vee t) \wedge (\neg p \vee s \vee t)) \wedge (q \vee r \vee t) \wedge (q \vee s \vee t) \wedge \neg u$$

L'intérêt des formes normales conjonctives vient du fait qu'il est très facile de tester – mécaniquement – si une formule de forme normale conjonctive est valide : il suffit que tous ses conjoints soient valides ;

---

pour des ensembles finis de formules $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. On appelle alors un 'littéral' une formule qui est soit une proposition atomique (= de la forme "p"), soit la négation d'une proposition atomique (= de la forme "$\neg p$"). On a pour une formule ϕ :

$$\phi \text{ est de forme normale conjonctive} \quad :\Longleftrightarrow \quad \phi \text{ est de la forme } \bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j} \right)$$

pour des nombres naturels m et $n_1, \ldots n_m$ et des littéraux $L_{i,j}$ tels que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n_i$.

mais ces conjoints sont des disjonctions – et pour qu'une disjonction soit valide, il faut qu'au moins une proposition atomique soit à la fois affirmée et niée dans la disjonction. La formule considérée n'est donc pas valide, mais cette autre l'est :

$$(\neg p \vee r \vee p) \wedge (\neg t \vee s \vee t)) \wedge (q \vee \neg q \vee t) \wedge (q \vee s \vee \neg s)$$

Il est également possible de définir une forme normale disjonctive : une formule est en *forme normale disjonctive* si elle est une disjonction de conjonctions de propositions atomiques et de leur négations.[8] La forme normale disjonctive d'une formule revient à énumérer, en les ajoutant les uns aux autres par la disjonction, les cas de vérité de la proposition complexe en question, comme sa table de vérité l'indique. Par exemple, la table de vérité d'une implication matérielle indique que celle-ci est vraie si et seulement si l'on a "p" et "q" vraie, ou "p" fausse et "q" vraie, ou "p" et "q" fausse – la forme disjonctive d'une implication "$p \rightarrow q$" sera donc "$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$".

6 La compacité de la logique propositionnelle

Nous avons défini la conséquence logique et la déductibilité avec des ensembles de prémisses qui sont potentiellement infinis. Nous pouvons donc maintenant nous demander si la consistance d'un ensemble infini de propositions peut être réduite à celle d'un sous-ensemble fini. Le théorème de compacité répond par l'affirmative à cette question :

Théorème 17. *La logique propositionnelle est compacte :* $\Gamma \models \phi$ *si et seulement s'il existe un sous-ensemble fini* $\Gamma' \subset \Gamma$ *tel que* $\Gamma' \models \phi$.

Par conversion, ce théorème nous dit que si tous les sous-ensembles Γ' d'un ensemble Γ sont satisfaisables, alors Γ sera également satisfaisable. Les différentes interprétations qui rendent vraies les différentes sous-ensembles finis peuvent être combinées en une interprétation qui rende vraies toutes les propositions dans l'ensemble infini. Pour la preuve du théorème de compacité par la méthode de tableaux analytiques, nous prouvons, suivant Lemmon (1965: 30 et seq.) d'abord un résultat qui s'applique à des arbres quelconques.

Appelons un arbre 'généré de manière finie' si et seulement si chaque noeud dans l'arbre n'a qu'un nombre fini de successeurs. Tous les arbres binaires, par exemple, sont donc des arbres générés de manière finie. Appelons une branche 'infinie' si et seulement si elle contient un nombre infini de noeuds. Nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 18 (Le lemme de König). *Si un arbre qui est généré de manière finie contient un nombre infini de noeuds, il contient une branche infinie.*

[8] Voici la notation formelle :

$$\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i \;:=\; \phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n$$

Alors on a, pour une formule ϕ :

$$\phi \text{ est en forme normale disjonctive} \quad :\Longleftrightarrow \quad \phi \text{ est de la forme } \bigvee_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{j=1}^{n_i} L_{i,j} \right)$$

Dans les règles, il faut remplacer les règles 6 et 7 par les suivantes :

$$\begin{array}{lcl} (\phi \vee \psi) \wedge \chi & \rightsquigarrow & (\phi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi) \\ \chi \wedge (\phi \vee \psi) & \rightsquigarrow & (\chi \wedge \phi) \vee (\chi \wedge \psi) \end{array}$$

Preuve Appelons un noeud 'sympa' si et seulement s'il y a un nombre infini de noeuds comme successeurs et 'méchant' dans le cas inverse. Par l'antécédent de l'implication, il y a un nombre infini de noeuds et ils sont tous des successeurs de l'origine. L'origine est donc sympa. Nous observons aussi que si tous les successeurs d'un noeud sont méchants, alors ce noeud doit aussi être méchant (puisque l'arbre est généré de manière finie). Par conséquent, l'origine doit avoir un successeur sympa, qui, à son tour, a un successeur sympa et ainsi de suite. Puisque tout noeud sympa doit avoir un successeur sympa, nous générons ainsi une branche infinie.[9] □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la compacité de la logique propositionnelle :

Preuve

Supposons que tous les sous-ensembles finis d'un ensemble Γ sont satisfaisables. Supposons que Γ nous est donné comme une séquence (et non seulement un ensemble) de formules propositionnelles $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots\}$ étant telle que, pour tout n, l'ensemble $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ est satisfaisable. Ceci est possible parce qu'il s'agit d'un sous-ensemble de Γ. Construisons le tableau analytique pour ϕ_1. Ce tableau ne peut pas être fermé puisque ϕ_1 est satisfaisable. Nous ajoutons maintenant ϕ_2 à chaque branche ouverte et continuons le tableau. Cette procédure nous donne un tableau qui doit également être ouvert, puisque $\{\phi_1, \phi_2\}$ est satisfaisable. Nous ajoutons ϕ_3, puis ϕ_4 et ainsi de suite. Nous obtenons un arbre généré de manière finie qui contient un nombre infini de noeuds (toutes les propositions dans Γ). Cet arbre doit contenir une branche infinie, par le lemme de König. Cette branche doit être ouverte et elle contient toutes les propositions dans Γ.

□

Références

Lemmon, Edward John, 1965. *Beginning Logic.* London : Thomas Nelson and Sons Ltd.

Smullyan, Raymond M., 1968. *First-Order Logic.* Nombre 43 dans Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Berlin : Springer Verlag

[9] Pour les arbres non-ordonnés (qui sont tels que les successeurs d'un noeud ne forment pas une séquence mais seulement un ensemble) nous avons besoin de l'axiome de choix de la théorie des ensembles.