

Introduction à la logique

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2005-2006

Matériel à disposition à l'examen du 6 février, 2006

Syntaxe

Le langage de la logique propositionnelle

Définition 1 (Alphabet). L'alphabet du langage \mathcal{L} de la logique propositionnelle classique consiste en les signes suivants :

1. des propositions atomiques " p_0 ", " p_1 ", " p_2 " ... (une infinité dénombrable)
2. les connecteurs " \neg ", " \wedge ", " \vee ", " \rightarrow " et " \leftrightarrow "
3. des symboles auxiliaires : parenthèses, virgules

Définition 2 (Formules). Une formule propositionnelle est définie comme suit :

1. Toute proposition atomique " p_i " ($i \in \mathbb{N}$) est une formule propositionnelle.
2. Si ϕ est une formule propositionnelle, alors " $\neg\phi$ " est une formule propositionnelle.
3. Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors " $\phi \wedge \psi$ ", " $\phi \vee \psi$ " et " $\phi \rightarrow \psi$ " sont des formules propositionnelles.

Définition 3 (Théories). Une théorie est un ensemble (fini ou infini) de formules propositionnelles.

Le langage de la logique des prédicats

Définition 4 (Alphabet). L'alphabet du langage \mathcal{L}^* de la logique des prédicats consiste en les signes suivants :

1. des signes logiques :
 - (a) les connecteurs " $\neg \dots$ " ("ne-pas"), " $\dots \wedge \dots$ " ("et"), " $\dots \vee \dots$ " ("ou"), " $\dots \rightarrow \dots$ " ("si-alors) et " $\dots \leftrightarrow \dots$ " ("ssi");
 - (b) les quantificateurs " $\forall x(\dots x \dots)$ " ("pour tout x ") et " $\exists x(\dots x \dots)$ " ("il y a au moins un x ");
 - (c) le signe d'identité : " $\dots = \dots$ " ("est identique à");
 - (d) des variables pour des individus : " x_i " pour tout $i \in \mathbb{N}$;
2. des signes non-logiques :
 - (a) des signes pour les relations : " R_i " pour tout $i \in \mathbf{I}$;
 - (b) des signes pour les fonctions : " f_i " pour tout $i \in \mathbf{J}$;
 - (c) des constantes pour des individus : " c_i " pour tout $i \in \mathbf{K}$;
3. des signes auxiliaires : parenthèses, virgules

Définition 5 (Termes). Les termes d'une langue $\langle \mathcal{L}^*, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ sont définis par les clauses récursives :

1. Toute variable " x_i " ($i \in \mathbb{N}$) est un terme.
2. Toute constante " c_i " ($i \in \mathbb{N}$) est un terme.
3. Si " t_1 ", " t_2 ", ..., " $t_{\mu(j)}$ " sont des termes ($j \in \mathbf{J}$), alors " $f_j(t_1, t_2, \dots, t_{\mu(j)})$ " est un terme.

Définition 6 (Formules atomiques). ϕ est une formule atomique de la langue $\langle \mathcal{L}^*, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ si et seulement si un des suivants est le cas :

1. ϕ est de la forme " $t_1 = t_2$ " pour deux termes " t_1 " et " t_2 ";
2. ϕ est de la forme " $R_i(t_1, t_2, \dots, t_{\lambda(i)})$ " pour des termes " t_1 ", " t_2 ", ..., " $t_{\lambda(i)}$ " et $i \in \mathbf{I}$.

Définition 7 (Formules). ϕ est une formule de la langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ si et seulement si un des suivants et le cas :

1. ϕ est une formule atomique ;
2. ϕ est de la forme $\lceil \neg\psi \rceil$ pour une formule ψ ;
3. ϕ est de la forme $\lceil \psi \wedge \chi \rceil, \lceil \psi \vee \chi \rceil, \lceil \psi \rightarrow \chi \rceil$ ou $\lceil \psi \leftrightarrow \chi \rceil$, pour des formules ψ et χ ;
4. ϕ est de la forme $\lceil \forall x_i(\psi) \rceil$ ou $\lceil \exists x_i(\psi) \rceil$ pour une formule ψ et une variable " x_i ", $i \in \mathbb{N}$.

Définition 8 (Occurrence libre). Si ϕ est une formule et " x_i " une variable, nous disons que " x_i " a une occurrence libre dans ϕ si et seulement si une des conditions suivantes est remplie :

1. ϕ est une formule atomique et contient " x_i " ;
2. ϕ a la forme $\lceil \neg\psi \rceil$ et " x_i " a une occurrence libre dans ψ ;
3. ϕ a la forme $\lceil \psi \wedge \chi \rceil, \lceil \psi \vee \chi \rceil, \lceil \psi \rightarrow \chi \rceil$ ou $\lceil \psi \leftrightarrow \chi \rceil$ et " x_i " a une occurrence libre soit dans ψ , soit dans χ ;
4. ϕ a la forme $\lceil \forall x_j(\psi) \rceil$ ou $\lceil \exists x_j(\psi) \rceil, i \neq j$ et " x_i " a une occurrence libre dans ψ .

Définition 9 (Phrases). Une phrase est une formule qui ne contient aucune occurrence libre d'une variable.

Définition 10 (Portée). Si ϕ est une formule qui contient une quantification d'une variable " x " (ou bien " $\forall x$ " ou bien " $\exists x$ "), nous appelons la portée de la variable " x " dans ϕ la plus petite formule qui suit la quantification de " x ".

Définition 11 (Substitutions dans des termes). Si " s " et " t " sont des termes et " x_i " une variable, nous définissons un nouveau terme, que nous appelons "la substitution de " x_i " par " t " dans " s " ou " $s(x_i/t)$ ", de manière récursive comme suit :

1. Si " s " est la même variable que " x_i ", alors " $s(x_i/t)$ " est " t ".
2. Si " s " est une variable autre que " x_i ", alors " $s(x_i/t)$ " est " s ".
3. Si " s " est une constante, alors " $s(x_i/t)$ " est " s ".
4. Si " s " est un terme pour une valeur de fonction " $f_j(t_1, \dots, t_{\mu(j)})$ " pour des termes " $t_1, \dots, t_{\mu(j)}$ ", alors " $s(x_i/t)$ " est " $f_j(t_1(x_i/t), \dots, t_{\mu(j)}(x_i/t))$ ".

Définition 12 (Substitutions dans des formules). Si ϕ est une formule, " t " un terme et " x_i " une variable, nous définissons une nouvelle formule, que nous appelons "le résultat de la substitution de " x_i " par " t " dans ϕ " ou " $\lceil \phi(x_i/t) \rceil$ ", de manière récursive comme suit :

1. Si ϕ est " $t_1 = t_2$ " pour deux termes " t_1 " et " t_2 ", alors $\lceil \phi(x_i/t) \rceil$ est " $t_1(x_i/t) = t_2(x_i/t)$ ".
2. Si ϕ est " $R_i(t_1, \dots, t_{\lambda(i)})$ " pour un signe de relation " R_i " et des termes " $t_1, \dots, t_{\lambda(i)}$ ", alors $\lceil \phi(x_i/t) \rceil$ est " $R_i(t_1(x_i/t), \dots, t_{\lambda(i)}(x_i/t))$ ".
3. Si ϕ est $\lceil \neg\psi \rceil$ pour une formule ψ , alors $\lceil \phi(x_i/t) \rceil$ est $\lceil \neg\psi(x_i/t) \rceil$.
4. Si ϕ est $\lceil \psi \wedge \chi \rceil, \lceil \psi \vee \chi \rceil, \lceil \psi \rightarrow \chi \rceil$ ou $\lceil \psi \leftrightarrow \chi \rceil$ pour des formules ψ et χ , alors $\lceil \phi(x_i/t) \rceil$ est $\lceil \psi(x_i/t) \wedge \chi(x_i/t) \rceil, \lceil \psi(x_i/t) \vee \chi(x_i/t) \rceil, \lceil \psi(x_i/t) \rightarrow \chi(x_i/t) \rceil$ ou $\lceil \psi(x_i/t) \leftrightarrow \chi(x_i/t) \rceil$ respectivement.
5. Si ϕ est $\lceil \forall x_j(\psi) \rceil$ ou $\lceil \exists x_j(\psi) \rceil$ pour une formule ψ et une variable " x_j ", alors

$$\lceil \phi(x_i/t) \rceil := \begin{cases} \lceil \forall x_j \psi(x_i/t) \rceil & i \neq j \\ \phi & i = j \end{cases} \quad \lceil \phi(x_i/t) \rceil := \begin{cases} \lceil \exists x_j \psi(x_i/t) \rceil & i \neq j \\ \phi & i = j \end{cases}$$

Sémantique

Les tables de vérité des connecteurs propositionnels

ϕ	$\neg\phi$
V	F
F	V

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

ϕ	ψ	$\phi \leftrightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La sémantique de la logique propositionnelle

Définition 13 (Interprétation atomique). Une interprétation propositionnelle atomique I^* est une fonction qui assigne à toute proposition atomique " p_i ", $i \in \mathbb{N}$, l'une des valeurs de vérité \mathbf{v} ou \mathbf{f} : $I^* : \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$.

Définition 14 (Interprétation). Étant donné une interprétation propositionnelle atomique I^* , nous définissons une interprétation propositionnelle I (qui est une fonction associant à toute formule propositionnelle une et une seule valeur de vérité: $I : \text{Fml}(\mathcal{L}) \rightarrow \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$) par des clauses récursives :

I1 Si ϕ est une proposition atomique " p ", $I(\phi) := I^*(p)$

I2 $I(\neg\phi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{v} \end{cases}$

I3 $I(\phi \wedge \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{v} \text{ et } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{f} \text{ ou } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I4 $I(\phi \vee \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{v} \text{ ou } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{f} \text{ et } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I5 $I(\phi \rightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{f} \text{ ou } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{v} \text{ et } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I6 $I(\phi \leftrightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = I(\psi) \\ \mathbf{f} & I(\phi) \neq I(\psi) \end{cases}$

Définition 15 (Tautologie). Une formule ϕ est une tautologie si $I(\phi) = \mathbf{v}$ pour toute interprétation propositionnelle I .

La sémantique de la logique des prédicats

Définition 16 (Structures). Soit $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ une langue de la logique des prédicats. Une structure \mathcal{A} pour \mathcal{L}^+ consiste en :

1. un ensemble non-vide $|\mathcal{A}|$, appelé 'l'univers de discours' ou le 'domaine' de \mathcal{A} ;
2. une interprétation de tous les signes de relations, qui attribue à tout $i \in \mathbf{I}$ une relation $R_i^{\mathcal{A}}$ sur $|\mathcal{A}|$ avec $\lambda(i)$ places argumentales, c'est-à-dire un sous-ensemble $R_i^{\mathcal{A}} \subset |\mathcal{A}|^{\lambda(i)}$.

3. une interprétation de tous les signes de fonctions, qui attribue à tout $j \in \mathbf{J}$ une fonction f_j^A sur $|\mathcal{A}|$ avec $\mu(j)$ places argumentales, c'est-à-dire une fonction $f_j^A : |\mathcal{A}|^{\mu(j)} \rightarrow |\mathcal{A}|$.
4. une interprétation de toutes les constantes, qui attribue à tout $k \in \mathbf{K}$ un élément fixe, c_k^A , de $|\mathcal{A}|$.

Définition 17 (Assignations de valeurs). Soit \mathcal{L}^+ une langue de la logique des prédicats et \mathcal{A} une structure pour \mathcal{L}^+ . Une assignation de valeurs pour \mathcal{L}^+ est une fonction h qui assigne à toute variable x_i ($i \in \mathbb{N}$) exactement un élément de l'univers de discours : $h : \text{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}|$.

Définition 18 (Désignation de termes). Soit \mathcal{L}^+ une langue de la logique des prédicats, \mathcal{A} une structure pour \mathcal{L}^+ et $h : \text{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs. La désignation $\bar{h}(t)$ d'un terme " t " de \mathcal{L}^+ sous cette assignation de valeurs est définie comme suit :

1. si " t " est une variable, $\bar{h}(t)$ est $h(t)$;
2. si " t " est une constante " c_k ", $\bar{h}(t)$ est c_k^A ;
3. si " t " est un terme de la forme " $f_j(t_1, \dots, t_{\mu(j)})$ ", alors $\bar{h}(t)$ est $f_j^A(\bar{h}(t_1), \dots, \bar{h}(t_{\mu(j)}))$.

Définition 19 (Assignations variées). Soit \mathcal{L}^+ une langue de la logique des prédicats, \mathcal{A} une structure pour \mathcal{L}^+ , $h : \text{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs et " x_i " une variable de \mathcal{L}^+ . Nous définissons l'assignation variée à la place " x_i " – appelée " $h^{(x_i)}$ " – comme suit :

$$h \left(\begin{matrix} x_i \\ a \end{matrix} \right) (x_j) := \begin{cases} h(x_j) & i \neq j \\ a & i = j \end{cases}$$

Définition 20 (Vérité sous un assignation de valeurs). Soit \mathcal{L}^+ une langue de la logique des prédicats, \mathcal{A} une structure pour \mathcal{L}^+ et $h : \text{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs. Nous disons qu'une formule ϕ de \mathcal{L}^+ est vraie sous l'assignation de valeurs h ou que l'assignation de valeurs h satisfait la formule ϕ (abrégé : " $\mathcal{A} \models_h \phi$ ") si et seulement si une des conditions suivantes est remplie :

S1	ϕ a la même forme que " $t_1 = t_2$ "	et	$\bar{h}(t_1) = \bar{h}(t_2)$
S2	ϕ a la même forme que " $R_i(t_1, \dots, t_{\lambda(i)})$ "	et	$R_i^A(\bar{h}(t_1), \dots, \bar{h}(t_{\lambda(i)}))$
S3	ϕ est de la forme $\neg \psi$	et	$\mathcal{A} \not\models_h \psi$
S4	ϕ est de la forme $\psi \wedge \chi$	et	$\mathcal{A} \models_h \psi$ et $\mathcal{A} \models_h \chi$
S5	ϕ est de la forme $\psi \vee \chi$	et	$\mathcal{A} \models_h \psi$ ou bien $\mathcal{A} \models_h \chi$
S6	ϕ est de la forme $\psi \rightarrow \chi$	et	$\mathcal{A} \not\models_h \psi$ ou bien $\mathcal{A} \models_h \chi$
S7	ϕ est de la forme $\psi \leftrightarrow \chi$	et	$\mathcal{A} \models_h \psi$ si et seulement si $\mathcal{A} \models_h \chi$
S8	ϕ est de la forme $\forall x_i (\psi)$	et	$\mathcal{A} \models_{h^{(x_i)}} \psi$ pour tous les $a \in \mathcal{A} $
S9	ϕ est de la forme $\exists x_i (\psi)$	et	$\mathcal{A} \models_{h^{(x_i)}} \psi$ pour au moins un $a \in \mathcal{A} $

Définition 21 (Vérité dans une structure). Soit \mathcal{L}^+ une langue de la logique des prédicats et \mathcal{A} une structure pour \mathcal{L}^+ . Nous disons qu'une formule ϕ de \mathcal{L}^+ est vraie dans la structure \mathcal{A} si et seulement si ϕ est vraie sous toutes les assignations de valeurs pour \mathcal{L}^+ :

$$\mathcal{A} \models \phi \quad :\iff \quad \text{pour tout } h : \text{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}| : \mathcal{A} \models_h \phi$$

Si ϕ est vraie dans une structure \mathcal{A} , nous appelons \mathcal{A} un "modèle" de ϕ .

Définition 22 (Validité). Soit \mathcal{L}^+ une langue de la logique des prédicats. Nous disons qu'une formule ϕ de \mathcal{L}^+ est valide ou qu'elle est une vérité logique (de la logique des prédicats) si et seulement si ϕ est vraie dans toutes les structures pour \mathcal{L}^+ :

$$\models \phi \quad :\iff \quad \text{pour tout } \mathcal{A} : \mathcal{A} \models \phi$$

Définition 23 (Conséquence sémantique). Soit \mathcal{L}^+ une langue de la logique des prédicats. Nous appelons une formule ϕ une conséquence sémantique d'un ensemble de formules si et seulement si ϕ est vrai

dans toutes les structures où toutes ces formules sont vraies :

$$\Sigma \models \phi \quad :\Leftrightarrow \quad \text{pour tout } \mathcal{A} : \text{si } \mathcal{A} \models \psi \text{ pour toutes les formules } \psi \in \Sigma, \text{ alors } \mathcal{A} \models \phi$$

Les calculs axiomatiques

La théorie de la preuve

Définition 24 (Calcul). Un calcul est un ensemble de formules propositionnelles, appelées 'théorèmes', déterminé par des axiomes et des règles d'inférence :

1. Tout axiome est un théorème.
2. Une formule propositionnelle qu'on obtient en appliquant une règle d'inférence à des théorèmes est un théorème.
3. Rien d'autre n'est un théorème.

Définition 25 (Preuve). Une preuve, dans un calcul HC et à partir d'une théorie Th, est une séquence finie de propositions $\langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle$ telle qu'on a, pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $\text{HC} \cup \text{Th} \cup \{\phi_1, \dots, \phi_{i-1}\} \vdash \phi_i$.

Définition 26 (Deductibilité). Si HC est un calcul, Th une théorie et ϕ une formule propositionnelle, nous définissons $\vdash^{\text{HC} \cup \text{Th}} \phi$ ($n \in \mathbb{N}$) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par induction sur n :

1. Si ϕ est un axiome de HC, alors $\text{HC} \cup \text{Th} \vdash^n \phi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Si ϕ est un membre de Th, alors $\text{HC} \cup \text{Th} \vdash^n \phi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Si $\text{HC} \cup \text{Th} \vdash^{m_i} \psi_i$ et $m_i < n$ pour toutes les prémisses ψ_i d'une règle d'inférence de HC, alors $\text{HC} \cup \text{Th} \vdash^n \phi$ pour la conclusion ϕ de cette règle d'inférence.

Un calcul axiomatique pour la logique propositionnelle

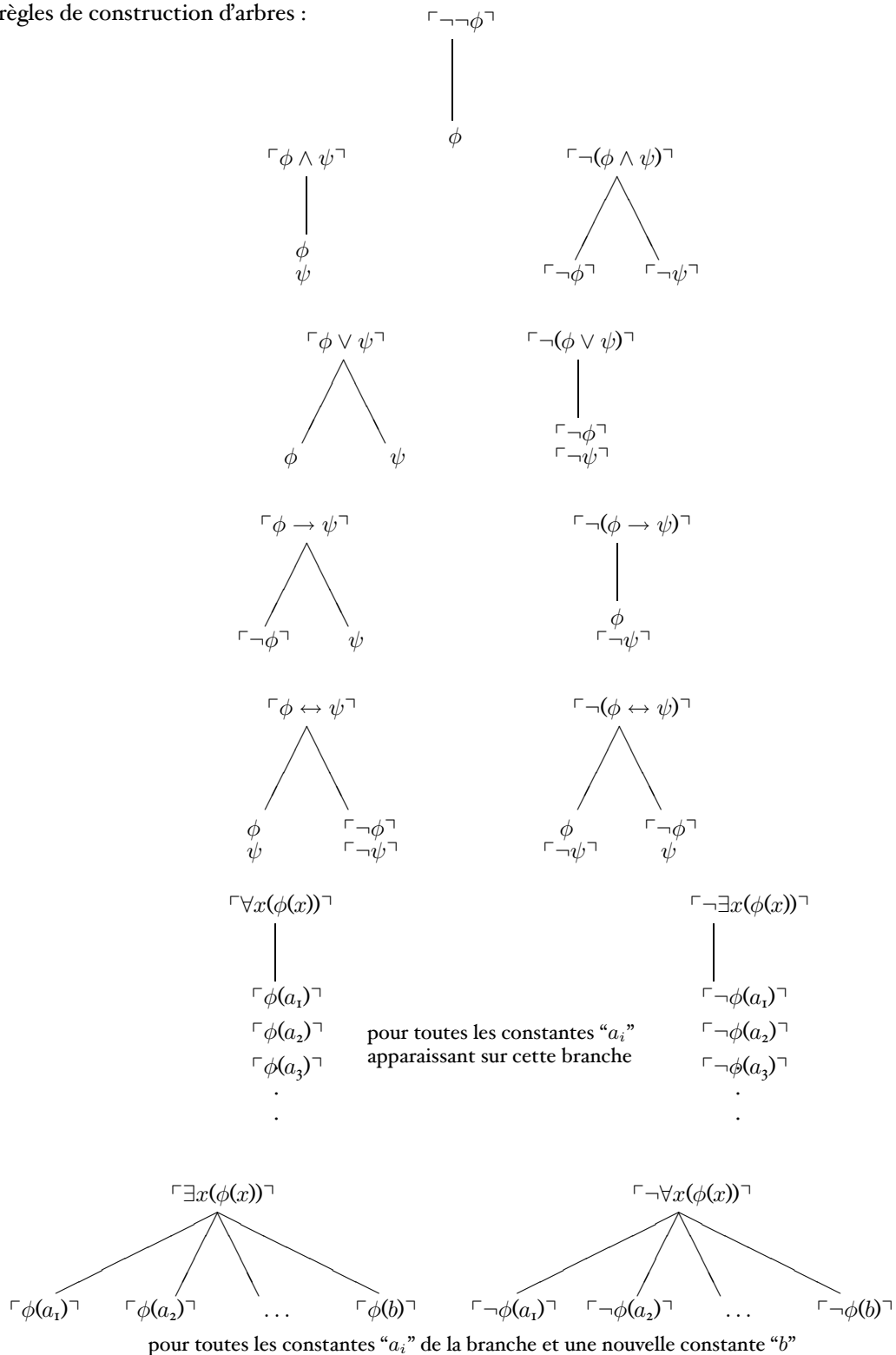
Définition 27. Le calcul HC est déterminé par toutes les formules de \mathcal{L} qui ont la forme d'un des axiomes suivantes :

H₁	$\vdash \phi \rightarrow \phi$	réflexivité
H₂	$\vdash (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$	transitivité
H₃	$\vdash ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$	conditionaliser l'antécédent
H₄	$\vdash (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$	augmenter l'antécédent
H₅	$\vdash \phi \rightarrow (\phi \vee \psi)$	introduire "∨" à droite
H₆	$\vdash \psi \rightarrow (\phi \vee \psi)$	introduire "∨" à gauche
H₇	$\vdash (\phi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \chi))$	alternative
H₈	$\vdash (\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi$	élimination "∧" à droite
H₉	$\vdash (\phi \wedge \psi) \rightarrow \psi$	élimination "∧" à gauche
H₁₀	$\vdash (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \wedge \chi)))$	composition
H₁₁	$\vdash (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \phi)$	conversion
H₁₂	$\vdash \phi \rightarrow (\neg \phi \rightarrow \psi)$	ex falso quodlibet
H₁₃	$\vdash (\phi \rightarrow (\phi \wedge \neg \phi)) \rightarrow \neg \phi$	reductio ad absurdum
H₁₄	$\vdash ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \leftrightarrow \psi)$	introduction "↔"
H₁₅	$\vdash (\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))$	élimination "↔"
H₁₆	$\vdash \phi \vee \neg \phi$	tautologie

La seule règle d'inférence de HC est modus ponens MP : $\frac{\phi, \vdash \phi \rightarrow \psi}{\vdash \psi}$.

La méthode des arbres

Les règles de construction d'arbres :



La déduction naturelle

La règle des suppositions

n	ϕ	$\vdash^* \phi$	supposition
----------	--------	-----------------	-------------

Modus ponens (modus ponendo ponens)

m		$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	
n		$\vdash \phi$	
o		$\vdash \psi$	de (m) et (n) par (MP)

Modus tollens (modus tollendo tollens)

m		$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	
n		$\vdash \ulcorner \neg \psi \urcorner$	
o		$\vdash \ulcorner \neg \phi \urcorner$	de (m) et (n) par (MT)

Preuve conditionnelle

m	ϕ	$\vdash^* \phi$	supposition
n	ϕ	$\vdash^* \psi$	
o		$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	de (m) et (n) par (PC)

L'introduction et l'élimination de la double négation

m		$\vdash \ulcorner \neg \neg \phi \urcorner$	
n		$\vdash \phi$	de (m) par (DN)

m		$\vdash \phi$	
n		$\vdash \ulcorner \neg \neg \phi \urcorner$	de (m) par (DN)

La réduction à l'absurde (reductio ad absurdum)

m	ϕ	$\vdash^* \phi$	supposition
n	ϕ	$\vdash^* \psi$	
o	ϕ	$\vdash^* \ulcorner \neg \psi \urcorner$	
p		$\vdash \ulcorner \neg \phi \urcorner$	de (m), (n) et (o) par (RAA)

L'introduction de la conjonction

m		$\vdash \phi$	
n		$\vdash \psi$	
o		$\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$	de (m) et (n) par (\wedge I)

L'élimination de la conjonction

m		$\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$	
n		$\vdash \phi$	de (m) par (\wedge E)

m		$\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$	
n		$\vdash \psi$	de (m) par (\wedge E)

L'introduction de la disjonction

m		$\vdash \phi$	
n		$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	de (m) par (\vee I)

m		$\vdash \psi$	
n		$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	de (m) par (\vee I)

L'élimination de la disjonction

m		$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	
n	ϕ	$\vdash^* \phi$	supposition
o	ϕ	$\vdash^* \chi$	
p	ψ	$\vdash^* \psi$	supposition
q	ψ	$\vdash^* \chi$	
r		$\vdash \chi$	de (m), (n), (o), (p) et (r) par ($\vee E$)

L'introduction de l'équivalence matérielle

m		$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	
n		$\vdash \ulcorner \psi \rightarrow \phi \urcorner$	
o		$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	de (m) et (n) par ($\leftrightarrow I$)

L'élimination de l'équivalence matérielle

m		$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	
n		$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	de (m) par ($\leftrightarrow E$)
m		$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	
n		$\vdash \ulcorner \psi \rightarrow \phi \urcorner$	de (m) par ($\leftrightarrow E$)

L'élimination du quantificateur universel

Condition : “ t ” doit être un terme qui est libre pour “ x ” dans ϕ .

m		$\vdash \ulcorner \forall x(\phi) \urcorner$	
n		$\vdash \ulcorner \phi(x/t) \urcorner$	de (m) avec (SU)

L'introduction du quantificateur existentiel

Condition : “ t ” doit être un terme qui est libre pour “ x ” dans ϕ .

m		$\vdash \ulcorner \phi(x/t) \urcorner$	
n		$\vdash \ulcorner \exists x(\phi) \urcorner$	de (m) avec (GE)

L'introduction du quantificateur universel

Condition : “ a ” n'a pas d'occurrence dans une des prémisses ou suppositions dont dépend la preuve de $\ulcorner \phi(a) \urcorner$.

m		$\vdash \ulcorner \phi(a) \urcorner$	
n		$\vdash \ulcorner \forall x(\phi(a/x)) \urcorner$	de (m) avec (GU)

L'élimination du quantificateur existentiel

Condition : “ a ” n'a pas d'occurrence dans ψ ou dans une supposition (autre que $\ulcorner \phi(a) \urcorner$) dont dépend la preuve de ψ à partir de $\ulcorner \phi(a) \urcorner$.

m		$\vdash \ulcorner \exists x(\phi(a/x)) \urcorner$	
n	$\ulcorner \phi(a) \urcorner$	$\vdash^* \ulcorner \phi(a) \urcorner$	supposition
o	$\ulcorner \phi(a) \urcorner$	$\vdash^* \psi$	
p		$\vdash \psi$	de (m), (n) et (o) avec (SE)