# La logique des prédicats

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2005-2006

## Résumé de la deuxième moitié du cours, le 20 janvier 2006

### La syllogistique et la logique des prédicats

1. Nous obtenons des prédicats (ou 'phrases ouvertes') des propositions en effaçant un ou plusieurs termes singuliers.
2. La syllogistique classique distingue quatre types de propositions : **SaP**, **SiP**, **SeP**, **SoP**.
3. Ces quatre types de propositions correspondent à des relations entre les extensions des termes "$S$" et "$P$".
4. Ces relations peuvent être symbolisées à l'aide des diagrammes de Venn ; on peut ainsi vérifier, par exemple, le carré des oppositions.
5. Les inférences valides de la syllogistiques sont des inférences directes ou indirectes ; des dernières il y a 19 principales que l'on peut mémoriser à l'aide des noms comme "Barbara","Ferio","Cesare" et "Felapton".
6. Les diagrammes de Venn dépassent déjà les limites de la syllogistique.
7. Les défauts principaux de la syllogistique et des diagrammes de Venn sont :
   (a) elles ne peuvent pas être combinées avec la logique propositionnelle ;
   (b) elles ne distinguent pas entre termes singuliers et prédicats ; par conséquent, elles ne traitent de propositions existentielles que si on introduit des prédicats qui ne sont vrais d'un seul individu ;
   (c) elle ne ne laissent pas de place pour une 'logique des relations', ne s'appliquant qu'à des prédicats unaires ;
8. Les prédicats ou phrases ouvertes ne sont ni vrais ni faux, mais vrais ou faux *de* certains individus ; les individus les satisfont de la même manière comme les arguments satisfont les fonctions.
9. Les variables indiquent des lacunes dans les phrases ouvertes ; les quantificateurs servent à en former des phrases complètes.
10. La formalisation à l'aide de variables ne permet de traiter la généralité multiple et d'expliquer la distinction entre "Tout le monde aime quelqu'un" et "Quelqu'un est aime par tout le monde".

### Syntaxe et sémantique de la logique des prédicats

1. L'alphabet d'une langue pour la logique des prédicats contient des connecteurs, le signe d'identité, des variables, des quantificateurs, des signes de relations, des signes de fonctions et des constantes individuelles. Les trois dernières catégories composent les signes non-logiques du langage.
2. Les quantificateurs de la logique des prédicats sont de la même catégorie syntaxique que les prédicats de deuxième ordre.
3. Une variable a une occurrence libre dans une formule si elle ne se trouve pas partout dans la portée d'un quantificateur correspondant.
4. Une structure pour un langage de la logique des prédicats consiste d'un univers de discours et d'une interprétation de ses signes non-logiques.
5. Une interprétation d'une constante lui assigne un élément de l'univers de discours ; l'interprétation d'un signe de relation lui assigne une relation dans cet univers ; et l'interprétation d'un signe de fonction lui assigne une fonction qui prend ses arguments et ses valeurs dans cet univers de discours.

6. Une assignation de valeurs dans une structure assigne à toute variable de la langue un élément de l'univers de discours.
7. La notion clef de la sémantique de la logique des prédicats est celle de la satisfaction d'une phrase ouverte par une assignation de valeurs dans une structure. La phrase ouverte est alors appelée 'vraie sous cette assignation' (dans cette structure).
8. Une formule est vraie dans une structure si elle est et seulement si elle est vraie sous toutes les assignations de valeurs dans cette structure. Une telle structure est appelée un 'modèle' de la formule. Une formule est valide si et seulement si elle est vraie dans toutes les structures.
9. La substitution d'un terme pour une variable dans une formule substitue ce terme à toute occurrence de la variable dans la formule. Pour qu'une telle substitution compte comme instanciation, il faut que le terme soit libre pour la variable dans la formule, c'est-à-dire qu'il ne contient pas de variable qui devient liée par la substitution.
10. L'ordre des quantificateur est important : "$\exists y \forall x\ (Rxy)$" implique formellement "$\forall x \exists y\ (Rxy)$", mais la converse est fausse.

## La méthode des arbres

1. Si une quantification universelle $\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner$ est vraie, alors toutes ses instanciations $\ulcorner\phi(a)\urcorner$, pour une constante individuelle "$a$", sont vraies. Si une quantification existentielle $\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner$ est fausse, alors toutes ses instanciations $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ sont fausses.
2. Si une quantification universelle $\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner$ est fausse, alors au moins une instanciation $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ est fausse. Si une quantification existentielle $\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner$ est vraie, alors au moins une instanciation $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ est vraie.
3. Les règles de construction d'arbres pour le quantificateur universel et la négation d'un quantificateur existentiel sont les suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner & & \ulcorner\neg\exists x(\phi(x))\urcorner \\
| & & | \\
\ulcorner\phi(a_1)\urcorner & & \ulcorner\neg\phi(a_1)\urcorner \\
\ulcorner\phi(a_2)\urcorner & \text{pour toutes les constantes "}a_i\text{"} & \ulcorner\neg\phi(a_2)\urcorner \\
\ulcorner\phi(a_3)\urcorner & \text{apparaissant sur cette branche} & \ulcorner\neg\phi(a_3)\urcorner \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

4. Les règles de construction d'arbres pour le quantificateur existentiel et la négation du quantificateur universel sont les suivantes :

$$\begin{array}{cccc|cccc}
\multicolumn{4}{c}{\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner} & \multicolumn{4}{c}{\ulcorner\neg\forall x(\phi(x))\urcorner} \\
\ulcorner\phi(a_1)\urcorner & \ulcorner\phi(a_2)\urcorner & \ldots & \ulcorner\phi(b)\urcorner & \ulcorner\neg\phi(a_1)\urcorner & \ulcorner\neg\phi(a_2)\urcorner & \ldots & \ulcorner\neg\phi(b)\urcorner
\end{array}$$

pour toutes les constantes "$a_i$" de la branche et une nouvelle constante "$b$"

5. Dans une structure ayant un domaine fini, une quantification universelle est équivalente à la conjonction de ses instanciations et une quantification existentielle est équivalente à la disjonction de ses instanciations.
6. Nous pouvons simplifier les dernières règles pour "$\exists x(\phi(x))$" et pour "$\neg\forall x(\phi(x))$" en nous concentrant uniquement sur la branche contenant la constante nouvelle.

7. Cette nouvelle méthode est aussi efficace pour prouver des propositions que l'ancienne, parce qu'une proposition avec un modèle de $n$ individus a aussi un modèle avec $n + 1$ individus.
8. La méthode des arbres nous permet prouver une proposition *si* cette proposition est valide.
9. Mais nous pouvons pas déduire du fait que nous arrivons pas à la prouver (que l'arbre pour sa négation ne se ferme pas) que la proposition n'est pas valide. Nous avons une garantie de trouver un modèle seulement si la proposition est vraie dans une structure avec un univers de discours fini.
10. Ceci correspond à une différence importante entre la logique propositionnelle et la logique des prédicats : la première est décidable (admet une procédure mécanique pour tester le caractère tautologique d'une proposition), la dernière ne l'est pas. Pour trouver des contre-examples, il faut de l'ingénuité.

## La déduction naturelle

1. La déduction naturelle pour la logique des prédicats consiste des règles de déduction naturelles pour les connecteurs et de quatre règles d'introduction et d'élimination de quantificateurs.
2. La règle (SU), appelée "*spécialisation universelle*", nous permet de passer d'une quantification universelle à une instanciation de la phrase ouverte pour n'importe quel terme.
3. Un quantificateur existentiel est introduit par la règle de *généralisation existentielle* (GE).
4. Pour qu'une application des règles (SU) et (GE) soit correcte, il est requis que le terme remplacé par la variable soit libre pour cette variable dans la formule qui le contient, c'est-à-dire qu'il ne se trouve pas dans la portée d'un quantificateur qui lie cette variable.
5. Pour prouver une quantification universelle à partir d'une prémisse particulière à l'aide de la règle de *généralisation universelle* (GU), nous exigeons que cette prémisse soit vraie d'un individu arbitraire, c'est-à-dire d'un individu qui n'apparaît dans aucune supposition ou prémisse dont dépend la preuve de cette proposition particulière.
6. Nous pouvons alors, par (GU), inférer une quantification universelle dans laquelle le terme arbitraire est *partout* substitué par une variable. Il est important que cette substitution soit uniforme.
7. La règle d'élimination du quantificateur existentiel (SE) correspond à celle de l'élimination de la disjonction ($\vee$**E**) et est en conséquence plus compliquée.
8. L'application de la règle de spécialisation existentielle (SE) comprend quatre étapes :
   (a) la preuve d'une quantification existentielle sous certaines suppositions et à partir de certaines prémisses ;
   (b) la supposition du disjoint typique ;
   (c) une preuve d'une autre proposition sous la supposition du disjoint typique ;
   (d) l'application de la règle, avec la conclusion que nous pouvons également prouver la proposition prouvée sous la supposition du disjoint typique à partir des suppositions et prémisses nécessaires pour la preuve de la quantification existentielle ;
9. La règle de spécialisation existentielle (SE) est sujet au mêmes deux conditions que la règle de généralisation universelle :
   (a) la constante remplaçant la variable dans le disjoint typique ne doit apparaıˆtre dans aucune prémisse ou supposition de laquelle dépend la quantification existentielle ;
   (b) elle ne doit pas avoir d'occurrence dans la quantification existentielle que nous voulons prouver.
10. L'application de ces règles nous permet de prouver des théorèmes ("$\vdash \phi$") et des séquents ("$\phi \vdash \psi$") La déduction naturelle est une méthode syntaxique qui est correcte et complète par rapport à la sémantique de la logique des prédicats : toute proposition valide est un théorème et tout théorème est valide ; tout séquent déductible correspond à une relation de conséquence sémantique et toute conséquence sémantique peut être déduite comme séquent.