Exercices 10

Cours d'introduction à la logique, semestre de printemps 2008

A rendre avant le vendredi 7 mars, 10 h

Nom(s) : ______________________________

Points obtenus (dans 4 questions avec un total de 20 points) : ____________

1. (2 points) Donnez des phrases en français dont les formules suivantes sont des formalisations :
   (a) "$\forall x(Dx \rightarrow \forall y((Cy \wedge Fy) \rightarrow Hxy))$"
   (b) "$\exists x((Dx \wedge Fx) \rightarrow Pax)$"

2. (3 points) A l'aide de la définition de validité, justifiez la vérité des propositions suivantes :
   (a) "$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Gx \rightarrow \neg Hx) \models \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$"
   (b) "$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \models \neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$"
   (c) "$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(\neg Gx) \models \exists x(\neg Fx)$"

3. (10 points) Formalisez (supposez que le domaine de quantification est la totalité des êtres humains) :
   (a) Suzie est F.
   (b) Sam est F.
   (c) Quelques D sont F.
   (d) Tout D est F.
   (e) Seuls les D sont F.
   (f) Aucun H n'est F.
   (g) Quelques H ne sont pas F.
   (h) Sam n'est pas F.
   (i) Suzie a tué Sam.
   (j) Quelqu'un a tué Sam.
   (k) Sam a tué quelqu'un.
   (l) Quelqu'un a tué quelqu'un.
   (m) Quelqu'un s'est tué.
   (n) Personne ne s'est tué.
   (o) Quelqu'un a tué tout le monde.
   (p) Quelqu'un a été tué par tout le monde.
   (q) Il y a un S entre Sam et Suzie.
   (r) Chaque douanier hait un coureur. [n'importe lequel]
   (s) Quelques coureurs aiment chaque douanier.
   (t) Il y a un coureur haï par tous les douaniers fous.
   (u) Quelques C n'ont la relation P avec aucun FD.
   (v) Quelques C ont la relation P seulement avec des D qui ne sont pas F.

4. (5 points) Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats avec $\mathbf{I} = \{0\}$, $\mathbf{J} = \{0,1,2\}$, $\mathbf{K} = \{0,1\}$, $\lambda(0) = 2$, $\mu(0) = 1$, $\mu(1) = \mu(2) = 2$. Nous remplaçons les signes non-logiques par les suivants :

$$\begin{array}{rcl} \ldots R_0 \cdots & \rightsquigarrow & \ldots \leq \cdots \\ f_0(\ldots) & \rightsquigarrow & -\ldots \\ f_1(\ldots, \cdots) & \rightsquigarrow & \ldots + \cdots \\ f_2(\ldots, \cdots) & \rightsquigarrow & \cdots \times \cdots \\ c_0 & \rightsquigarrow & 0 \\ c_1 & \rightsquigarrow & 1 \end{array}$$

(a) Les expressions suivantes sont-elles des termes de $\mathcal{L}^+$?

(i) "0"

(ii) "$x_1 + 1$"

(iii) "$+x_1$"

(iv) "$x_1 \times$"

(v) "$x_1 \times (0+1)$"

(vi) "2"

(b) Les expressions suivantes sont-elles des formules atomiques de $\mathcal{L}^+$?

(i′) "$x_1 + 1$"

(ii′) "$0 + 0 \neq 1$"

(iii′) "$(x_1 \leq 1) \neq 1$"

(iv′) "$\forall x_1 (x_1 \leq (0+1))$"

(v′) "$0 + 1 \neq 0 \times 1$"

(vi′) "$x_1 \leq 1$"

(c) Les expressions suivantes sont-elles des formules de $\mathcal{L}^+$?

(i″) "0"

(ii″) "$x_1 + 1 \leq x_1$"

(iii″) "$\forall x_1 (x_1 \times (0+1))$"

(iv″) "$1 + (x_1 \times (0+1))$"

(v″) "$(1+1) \wedge (0 \leq 1)$"

(vi″) "$\forall x_1 (x_1 \leq (0+1))$"

(d) Dans lesquelles des formules suivantes $\mathcal{L}^+$ la variable "x_1" a-t-elle une occurrence libre ?

(i‴) "$x_1 + 1 \leq 1$"

(ii‴) "$\forall x_1 \neg (x_1 \neq (0+1))$"

(iii‴) "$\exists x_2 (1 + (x_2 \times (0+1) \leq x_1))$"

(iv‴) "$\forall x_1 (0 \leq x_1) \wedge ((0 \leq 1) \vee 1 \neq x_1)$"

(v‴) "$\forall x_1 ((0 \leq x_1) \rightarrow (1 \neq x_1))$"

(vi‴) "$\forall x_2 \exists x_1 \neg (x_2 \leq x_1)$"