

Exercices 11

Cours d'introduction à la logique, semestre de printemps 2008

A rendre avant le vendredi 14 mars, 10 h

Nom(s) : \_\_\_\_\_

Points obtenus (dans 4 questions avec un total de 20 points) : \_\_\_\_\_

1. (4 points) Déterminez si les propositions suivantes sont valides à l'aide de la méthode des arbres :

- (a) " $\exists x \forall y (Rxy) \rightarrow \forall y \exists x (Rxy)$ "
- (b) " $\forall x (Fx) \rightarrow \exists x (Fx)$ "
- (c) " $\neg \exists y (Py) \rightarrow \forall y (Fy \rightarrow \exists x Fx)$ "
- (d) " $\forall x (Fx \rightarrow (Gx \wedge Hx)) \rightarrow \forall x ((Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx)$ "

2. (4 points) A l'aide de la méthode des arbres, trouvez des modèles pour les propositions suivantes :

- (a) " $\exists x \forall y (Rxy) \wedge \exists x \exists y (\neg Rxy)$ "
- (b) " $\forall x (\neg Sxx) \wedge \exists x \exists y \exists z (Sxy \wedge Syx \wedge \neg Sxz)$ "
- (c) " $\forall x \exists y (Rxy) \wedge \forall x (\neg Rxx) \wedge \neg \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$ "
- (d) " $\forall x \exists y Rxy \wedge \forall x \neg Rxx \wedge \exists x \exists y (Rxy \wedge \neg Ryx)$ "

3. (6 points) A l'aide de la méthode des arbres, vérifiez la validité des propositions suivantes. Décrivez des structures dans lesquelles les converses de (b) et de (d) sont fausses.

- (a) " $\forall x (Fx \wedge Gx) \leftrightarrow (\forall x (Fx) \wedge \forall x (Gx))$ "
- (b) " $(\forall x Fx \vee \forall x Gx) \rightarrow \forall x (Fx \vee Gx)$ "
- (c) " $\exists x (Fx \vee Gx) \leftrightarrow (\exists x (Fx) \vee \exists x (Gx))$ "
- (d) " $\exists x (Fx \wedge Gx) \rightarrow (\exists x (Fx) \wedge \exists x (Gx))$ "

4. (6 points) Soient les abréviations suivantes :

- "p" pour " $\forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$ " ("la relation R est symétrique")
- "q" pour " $\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$ " ("la relation R est transitive")
- "r" pour " $\forall x \forall y (Rxy \rightarrow Rxx)$ " ("la relation R est réflexive")
- "s" pour " $\forall x \exists y (Rxy)$ " ("la relation R est 'ouverte'")
- "t" pour " $\forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$ " ("la relation R est anti-symétrique")

(a) Prouvez, par la méthode des arbres, la proposition suivante :

$$(p \wedge q) \rightarrow r \tag{1}$$

(b) Montrez qu'il n'est pas possible de trouver un modèle pour la proposition suivante par la méthode des arbres :

$$\neg((q \wedge s \wedge t) \rightarrow \exists x \forall y (\neg Ryx)) \tag{2}$$

(c) Donnez un exemple d'une structure dans laquelle (2) est vraie.