

Exercices 7

Cours d'introduction à la logique, semestre d'automne 2007
A rendre avant le mercredi 28 novembre, 14 h

Nom(s) : _____

Points obtenus (dans 5 questions avec un total de 20 points) : _____

1. (6 points) Formalisez les arguments suivants et prouvez, par la méthode de la déduction naturelle, qu'ils sont valides (ce qui est difficile dans le cas du troisième) :
 - (a) "Étant donné que l'embryon est une personne, il a droit à la vie. Si l'embryon a droit à la vie, alors il est faux que quelqu'un a le droit de lui enlever la vie. Cependant, si l'avortement est moral, quelqu'un a le droit de lui enlever la vie. Par conséquent, si l'embryon est une personne, l'avortement est immoral."
 - (b) "Si l'existence de Dieu était probable, alors la proposition qu'Il existe serait une proposition empirique. Dans ce cas, il serait possible de l'ajouter à d'autres propositions empiriques pour en déduire des conclusions qui ne sont pas déductibles de ces autres propositions empiriques seules. Mais cela n'est en fait pas possible. Alors il n'est pas le cas que l'existence de Dieu est probable." (A.J. Ayer, "Language, Truth, and Logic")
 - (c) "Si je crois en Dieu, alors s'il existe, je gagne, et s'il n'existe pas, alors je ne perds pas. Si, à l'inverse, je ne crois pas en Dieu, alors, s'Il existe, je perds, et s'Il n'existe pas, alors je ne gagne pas. Il s'ensuit que si je crois, alors je gagnerai ou je ne perdrai pas, tandis que si je ne crois pas, alors je perdrai ou je ne gagnerai pas." (En faisant un pari sur l'existence de Dieu ('le pari de Pascal'; notez que "perdre" n'est pas synonyme de "ne pas gagner".)
2. (4 points) Vérifiez au moyen de tables de vérité si les formules suivantes sont des tautologies :
 - (a) " $p \rightarrow \neg\neg p$ "
 - (b) " $(p \rightarrow (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$ "
 - (c) " $\neg(\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ "
 - (d) " $(p \rightarrow \neg p) \leftrightarrow \neg p$ "

3. (4 points) Formulez les lois de distributivité et utilisez des tables de vérité pour montrer qu'elles sont correctes.

4. (2 points) Si ψ est une tautologie, alors $\neg\phi \rightarrow \psi$ en est une également. Montrez que la converse est fautive, c'est-à-dire qu'il n'est pas vrai que : si $\neg\phi \rightarrow \psi$ est une tautologie, alors ψ est également une tautologie.

5. (4 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les propositions suivantes :

- (a) " $p, p \rightarrow q, p \rightarrow r \vdash q \wedge r$ "
- (b) " $\neg p \wedge q \vdash p \rightarrow r$ "
- (c) " $p \vee p \vdash p$ "
- (d) " $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \vee r))$ "