Syntaxe et sémantique de la logique des prédicats

Cours d'introduction à la logique au semestre d'automne 2007

Feuille d'accompagnement pour le cours du 19 décembre 2007

Philipp Keller
philipp.keller@lettres.unige.ch

Points à retenir du dernier cours

1. La logique des prédicats formalise des inférences qui charactérisent le comportement logique des quantificateurs.
2. Une inférence de la logique de prédicats nous apprend qu'un prédicat est *vrai d'* une ou plusieurs choses s'il est vrai de certaines choses.
3. La forme générale d'une phrase simple dans la logique de prédicats est "Fa" – F est considéré comme une fonction qui prend une chose (a, dans notre exemple) et donne une valeur de vérité.
4. Nous pouvons donner des clauses récursives pour expliquer la signification (les conditions de satisfaction) d'un prédicat complexe en termes des significations (conditions de satisfaction) de ses parties.
5. Les prédicats dans la logique des prédicats sont unaires, binaires ou plus généralement n-adiques.
6. Un terme singulier est soit un nom, un indexical, un démonstratif ou une description définie.
7. La grammaire catégorielle charactérise un prédicat par le type $\mathbf{S}/\mathbf{N}$, les connecteurs de phrases par le type $\mathbf{S}/\mathbf{S}$, les connecteurs qui forment des prédicats complexes par le type $(\mathbf{S}/\mathbf{N})/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$ et les quantificateurs de premier ordre par le type $\mathbf{S}/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$.
8. Les quantificateurs sont alors des prédicats de deuxième ordre, bien que, comme les termes singuliers, ils s'appliquent à des prédicats pour en faire des phrases.
9. Le quantificateur universel 'abrège' des conjonctions infinies ; le quantificateur existentiel 'abrège' des disjonctions infinies ; ils sont 'duales' de la même manière que le sont la conjonction et la disjonction.
10. Un quantificateur a un domaine de quantification associé qui limite le choix d'objet pour l'interprétation de la variable qu'il quantifie.

Les fonctions

Une fonction qui relie deux ensembles, $f : A \to B$, est une relation, qui est telle que le choix de a détermine celui de b. Une relation est un ensemble de paires dont le premier membre appartient à A et le deuxième à B ($\{\langle a, b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$). Pour qu'une telle relation est une fonction, il faut qu'il n'est pas le cas qu'on a $\langle a, b'\rangle$ et $\langle a, b''\rangle$ pour deux $b', b'' \in B$ différents :

$$(f(a) = b' \wedge f(a) = b'') \to b' = b''\}$$

Pour qu'une relation soit une fonction, la valeur doit être déterminée par l'argument.

Les fonctions peuvent avoir des propriétés supplémentaires :

- Une fonction $f : A \to B$ est injective si elle n'assigne pas la même valeur à deux membres de A ; si non seulement l'argument détermine la valeur mais la valeur détermine également l'argument. Tout élément de B admet au plus un antécédent par f dans A.
- Une fonction $f : A \to B$ est surjective si elle assigne chaque membre de B à un argument dans A ; si chaque membre de B est 'visé' par la fonction. Tout élément de B est l'image par f d'au moin un élément de A.
- Une fonction est appellée "bijective" si elle est à la fois injective et surjective.

Soit $f : A \to B$ une fonction :

$$f \text{ est injective} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall a_1, a_2 \in A(f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2) \tag{1}$$
$$f \text{ est surjective} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall b \in B \exists a \in A(f(a) = b) \tag{2}$$

La bijectivité établit une correspondance dite "un-à-un" entre son domaine (A) et son co-domaine (B) : à chaque $b \in B$ correspond exactement un $a \in A$ et inversément.
Nous pouvons établir le théorème suivant :

Théorème 1. *Une fonction $f : A \to B$ est bijective si et seulement si elle détermine une fonction réciproque.*

Le langage $\mathcal{L}^+$

Définition 2. *L'alphabet du langage $\mathcal{L}^+$ de la logique des prédicats classique consiste en les signes suivants :*

1. *des signes logiques :*
   (a) *les connecteurs "$\neg \ldots$" ("ne-pas"), "$\cdots \wedge \cdots$" ("et"), "$\cdots \vee \cdots$" ("ou"), "$\cdots \to \cdots$" ("si-alors) et "$\cdots \leftrightarrow \cdots$" ("ssi") ;*
   (b) *les quantificateurs "$\forall x(\ldots x \cdots)$" ("pour tout x") et "$\exists x(\ldots x \cdots)$" ("il y a au moins un x") ;*
   (c) *le signe d'identité : "$\ldots \cdots ^{-}$" ("est identique à") ;*
   (d) *des variables pour des individus : "x_i" pour tout $i \in \mathcal{N}$;*
2. *des signes non-logiques :*
   (a) *des signes pour les relations : "R_i" pour tout $i \in \mathbf{I}$;*
   (b) *des signes pour les fonctions : "f_i" pour tout $i \in \mathbf{J}$;*
   (c) *des constantes pour des individus : "c_i" pour tout $i \in \mathbf{K}$;*
3. *des signes auxiliaires : parenthèses, virgules*

Nous appelons une *"langue"* $\mathcal{L}^+$ un alphabet – un choix précis de signes non-logiques – avec un ensemble $\mathbf{K}$ d'indices pour les constantes et deux fonctions $\lambda : \mathbf{I} \mapsto \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mu : \mathbf{J} \mapsto \mathbb{N} \setminus \{0\}$ qui déterminent l'adicité de nos signes pour les relations et pour les fonctions.

Définition 3. *Les termes d'une langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ sont définis par les clauses récursives suivantes :*

1. *Toute variable "x_i" est un terme.*
2. *Toute constante "c_i" est un terme.*
3. *Si "t_1", "t_2", …, "t_n" sont des termes, $j \in \mathbf{J}$ et $n = \mu(j)$, alors "$f_j(t_1, t_2, \ldots, t_n)$" est un terme.*

Utilisant cette définition, nous définissons ce qu'est une formule bien-formée de $\mathcal{L}^+$ en deux étapes :

Définition 4. *ϕ est une formule atomique de la langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ si et seulement si :*

1. *ϕ est de la forme "$t_1 t^{-}{}_2$" pour deux termes "t_1" et "t_2"; ou*
2. *ϕ est de la forme "$R_i(t_1, t_2, \ldots, t_{\lambda(i)})$" pour des termes "$t_1$", "$t_2$", …, "$t_{\lambda(i)}$", $j \in \mathbf{J}$;*

Définition 5. *ϕ est une formule de la langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ si et seulement si :*

1. *ϕ est une formule atomique ; ou*
2. *ϕ est de la forme $\ulcorner(\neg\psi)\urcorner$ pour une formule ψ ;*
3. *ϕ est de la forme $\ulcorner(\psi \wedge \chi)\urcorner$, $\ulcorner(\psi \vee \chi)\urcorner$, $\ulcorner(\psi \to \chi)\urcorner$ ou $\ulcorner(\psi \leftrightarrow \chi)\urcorner$, pour des formules ψ et χ ; ou*
4. *ϕ est de la forme $\ulcorner\forall x_i(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_i(\psi)\urcorner$ pour une formule ψ et une variable "x_i", $i \in \mathbb{N}$.*

Nous adoptons donc la définition suivante, qui nous fournit une manière plus rigoureuse de parler de ce que nous avons appelé, de manière métaphorique, un "trou" dans une phrase ouverte :

Définition 6. *Si ϕ est une formule et "x_i" une variable, nous disons que "x_i" a une occurrence libre dans ϕ si et seulement si une des conditions suivantes est remplie :*

1. *ϕ est une formule atomique et contient "x_i";*
2. *ϕ a la forme $\ulcorner \neg\psi \urcorner$ et "x_i" a une occurrence libre dans ψ;*
3. *ϕ a la forme $\ulcorner \psi \wedge \chi \urcorner$, $\ulcorner \psi \vee \chi \urcorner$, $\ulcorner \psi \rightarrow \chi \urcorner$ ou $\ulcorner \psi \leftrightarrow \chi \urcorner$ et "x_i" a une occurrence libre ou bien dans ψ ou bien dans χ;*
4. *ϕ a la forme $\ulcorner \forall x_j(\psi) \urcorner$ ou $\ulcorner \exists x_j(\psi) \urcorner$, $i \neq j$ et "x_i" a une occurrence libre dans ψ.*

Une expression est une phrase ouverte si et seulement si elle contient au moins une occurrence libre d'une variable :

Définition 7. *Une phrase est une formule qui ne contient aucune occurrence libre d'une variable.*

La sémantique de la logique des prédicats

Nous interprétons les prédicats et des termes singuliers dans ce que l'on appellera une "structure" :

Définition 8 (Structures). *Soit $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ une langue de la logique des prédicats. Une structure $\mathcal{A}$ pour $\mathcal{L}^+$ consiste en :*

1. *un ensemble non-vide $|\mathcal{A}|$, appelé "l'univers de discours" ou le "domaine de quantification" de $\mathcal{A}$;*
2. *une interprétation de tous les signes de relations : une fonction qui attribue à tout $i \in \mathbf{I}$ une relation $R_i^{\mathcal{A}}$ sur $|\mathcal{A}|$ avec $\lambda(i)$ places argumentales, c'est-à-dire un sous-ensemble $R_i^{\mathcal{A}} \subset |\mathcal{A}|^{\lambda(i)}$.*
3. *une interprétation de tous les signes de fonctions : une fonction qui attribue à tout $j \in \mathbf{J}$ une fonction $f_j^{\mathcal{A}}$ sur $|\mathcal{A}|$ avec $\mu(j)$ places argumentales, c'est-à-dire une fonction $f_j^{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}|^{\mu(j)} \rightarrow |\mathcal{A}|$.*
4. *une interprétation de toutes les constantes, qui attribue à tout $k \in \mathbf{K}$ un élément fixe $c_k^{\mathcal{A}}$ de $|\mathcal{A}|$.*

Dans le contexte d'une structure donnée, nous pouvons assigner des valeurs aux occurrences libres de nos variables :

Définition 9 (Assignations de valeurs). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats et $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$. Une assignation de valeurs pour $\mathcal{L}^+$ est une fonction h qui assigne à toute variable x_i ($i \in \mathbb{N}$) exactement un élément de l'univers de discours :* $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}|$.

Une interprétation détermine à quels objets se réfèrent nos termes singuliers et quels objets sont représentés par nos variables : c'est ainsi qu'une assignation de valeurs h et une structure $\mathcal{A}$ déterminent la fonction $\overline{h}$ qui associe à tous nos termes singuliers et nos variables leurs désignations (dans une structure et sous une assignation de valeurs) :

Définition 10 (Désignation de termes). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$ et $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs. La désignation $\overline{h}(t)$ d'un terme "t" de $\mathcal{L}^+$ sous cette assignation de valeurs est définie comme suit :*

1. *si "t" est une variable, $\overline{h}(t)$ est $h(t)$;*
2. *si "t" est une constante "c_k", $\overline{h}(t)$ est $c_k^{\mathcal{A}}$;*
3. *si "t" est un terme de la forme "$f_j(t_1, \ldots t_{\mu(j)})$", alors $\overline{h}(t)$ est $f_j^{\mathcal{A}}(\overline{h}(t_1), \ldots, \overline{h}(t_{\mu(j)}))$.*

Une interprétation détermine à quels objets se réfèrent nos termes singuliers et quels objets sont représentés par nos variables : c'est ainsi qu'une assignation de valeurs h et une structure $\mathcal{A}$ déterminent la fonction $\overline{h}$ qui associe à tous nos termes singuliers et nos variables leurs désignations (dans une structure et sous une assignation de valeurs).

La notion clef de la sémantique de la logique des prédicats est celle de vérité-sous-une-assignation-de-valeurs :

Définition 11 (Vérité sous un assignation de valeurs). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$ et $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}^+$ est vraie sous l'assignation de valeurs h ou que l'assignation de valeurs h satisfait la formule ϕ (abrégé : "$\mathcal{A} \models_h \phi$") si et seulement si une des conditions suivantes est remplie :*

S1	*ϕ a la même forme que "$t_1 = t_2$"*	*et*	$\overline{h}(t_1) = \overline{h}(t_2)$
S2	*ϕ a la même forme que "$R_i(t_1, \ldots, t_{\lambda(i)})$"*	*et*	$R_i^{\mathcal{A}}(\overline{h}(t_1), \ldots, \overline{h}(t_{\lambda(i)}))$
S3	*ϕ est de la forme $\ulcorner \neg\psi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \not\models_h \psi$
S4	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \wedge \chi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *et* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S5	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \vee \chi \urcorner$*	*et*	*soit* $\mathcal{A} \models_h \psi$ *soit* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S6	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \to \chi \urcorner$*	*et*	*soit* $\mathcal{A} \not\models_h \psi$ *soit* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S7	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \leftrightarrow \chi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *si et seulement si* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S8	*ϕ est de la forme $\ulcorner \forall x_i(\psi) \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ *pour tous les* $a \in |\mathcal{A}|$
S9	*ϕ est de la forme $\ulcorner \exists x_i(\psi) \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ *pour au moins un* $a \in |\mathcal{A}|$

Nous ajoutons le signe de l'assignation de valeurs au signe de conséquence sémantique et écrivons "$\models_h$" pour indiquer qu'il ne s'agit pas, comme dans le cas de la logique propositionnelle, d'une relation entre un ensemble de phrases et une proposition, mais d'une relation ternaire entre une structure, une assignation de valeurs et une proposition.

Les deux clauses concernant les quantificateurs utilisent la notion d'une "assignation variée à la place "x"" :

Définition 12 (Assignations variées). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$, $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}+) \to |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs et "x_i" une variable de $\mathcal{L}^+$. Nous définissons l'assignation variée à la place "x_i" – appelée "$h\binom{x_i}{a}$" – comme suit :*

$$h\begin{pmatrix} x_i \\ a \end{pmatrix}(x_j) \quad := \quad \begin{cases} h(x_j) & i \neq j \\ a & i = j \end{cases}$$

$h\binom{x_i}{a}$ est une fonction qui assigne à toutes les variables sauf "x_i" le même individu que leur assigne h et assigne a à "x_i" – c'est une modification locale de l'assignation h à la place "x_i" qui la force d'assigner a à "x_i".

La notion de validité

Il est vrai de toutes les *phrases* que leurs valeurs de vérité ne dépendent pas d'une assignation de valeurs particulière. Nous obtenons ainsi la notion de vérité (ne s'appliquant qu'à des phrases complètes) comme cas limite de la notion de vérité-sous-une-assignation (qui s'applique également à des phrases ouvertes) :

Définition 13 (Vérité dans une structure). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats et $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}^+$ est vraie dans la structure $\mathcal{A}$ si et seulement si ϕ est vraie sous toutes les assignations de valeurs pour $\mathcal{L}^+$:*

$$\mathcal{A} \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{pour tout } h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}| : \quad \mathcal{A} \models_h \phi$$

Si ϕ est vraie dans une structure $\mathcal{A}$, nous appelons $\mathcal{A}$ un "modèle" de ϕ.

Pour arriver à une notion de vérité logique, nous devons donc généraliser sur toutes les structures :

Définition 14 (Validité). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}^+$ est valide ou qu'elle est une vérité logique (de la logique des prédicats) si et seulement si ϕ est vraie dans toutes les structures pour $\mathcal{L}^+$:*

$$\models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{pour tout } \mathcal{A} : \quad \mathcal{A} \models \phi$$

De cette notion de validité, nous obtenons une notion de conséquence sémantique :

Définition 15 (Conséquence sémantique). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats. Nous appelons une formule ϕ une conséquence sémantique d'un ensemble de formules si et seulement si ϕ est vrai dans toutes les structures où toutes ces formules sont vraies :*

$$\Sigma \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{pour tout } \mathcal{A} : \textit{si } \mathcal{A} \models \psi \textit{ pour toutes les formules } \psi \in \Sigma, \textit{ alors } \mathcal{A} \models \phi$$

Théorème 16. *Une formule est valide si et seulement si sa clôture universelle est valide.*

La logique des prédicats unaires

Si nous n'avons affaire que à des prédicats unaires, nous pouvons "entrer" et "sortir" des quantificateurs :

Théorème 17. *Soit ϕ une formule et ψ une formule dans laquelle la variable "x" n'a pas d'occurrence libre. Si $\mathcal{A}$ est n'importe quelle structure pour la logique des prédicats et h n'importe quelle assignation de valeurs aux variables de $\mathcal{L}^+$, nous avons les équivalences suivantes :*

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi \lor \psi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi) \lor \psi \urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi \lor \psi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi) \lor \psi \urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi \land \psi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi) \land \psi \urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi \land \psi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi) \land \psi \urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\psi \rightarrow \phi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \psi \rightarrow \forall x(\phi) \urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\psi \rightarrow \phi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \psi \rightarrow \exists x(\phi) \urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi \rightarrow \psi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi) \rightarrow \psi \urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi \rightarrow \psi) \urcorner & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi) \rightarrow \psi \urcorner
\end{array}$$

Nous pouvons maintenant appliquer, à n'importe quelle phrase ϕ de $\mathcal{L}^+$ ne contenant que des prédicats unaires, les règles suivantes pour déterminer si elle est valide.

1. Si ϕ ne contient pas de quantificateurs (et est alors appelée "booléen"), alors ϕ est valide si et seulement si la configuration de ces prédicats correspond à une tautologie propositionnelle (remplaçant "Fx" par "p", "Gx" par "q" etc.).[1]
2. Si ϕ est $\ulcorner \exists x(\psi) \urcorner$ pour une phrase booléenne ψ, alors ϕ est valide si et seulement si ψ est valide d'après (1).
3. Si ϕ est $\ulcorner \neg\exists x(\psi) \urcorner$ pour une phrase booléenne ψ, alors ϕ est valide si et seulement si ψ est inconsistante d'après (1).
4. Si ϕ est une disjonction de phrases de la forme $\ulcorner \neg\exists x(\psi_i) \urcorner$ pour des phrases booléennes ψ_i, alors ϕ est valide si au moins un de ces disjoints est valide d'après (3).
5. Si ϕ est l'implication d'une phrase du type (2) par une ou plusieurs phrases du type (2), alors ϕ est valide si et seulement si une des phrases de son antécédent implique, dans le sens de (1), la phrase qui est son conséquent.
6. Si ϕ est une conjonction de phrases du type (2) à (5), alors ϕ est valide si et seulement si chacun de ces conjoints est valide d'après (2) à (5).

Nous avons donc :

Théorème 18 (Loewenheim (1915)). *La logique des prédicats unaires est décidable.*

[1] "$Fx \lor \neg Fx$" et "$(Fx \land \neg Fx) \rightarrow Gx$", par exemple, sont valides pour cette raison. S'il y a une interprétation propositionnelle qui rend vraie la formule propositionnelle correspondante, alors il y aura, dans toute structure (qui, d'après nos définitions, contiendra au moins un objet) une assignation de valeurs qui rend vraie la phrase ouverte. S'il n'y a, par contre, pas d'interprétation propositionnelle, il y aura une interprétation qui rend la phrase ouverte faux de cet objet.

Un calcul axiomatique pour la logique des prédicats

Définition 19 (HC$^+$). *Les axiomes du calcul* HC$^+$ *consistent en toutes les formules de* $\mathcal{L}^+$ *suivantes :*

TP *toutes les tautologies propositionnelles ;*

ID *les formules ayant la forme de l'un des axiomes d'identité suivants (pour des variables "x","y","z", "w", "x_1","x_2", ..., "$x_{\lambda(i)}$","y_1","y_2", ..., "$y_{\lambda(i)}$","z_1","z_2", ..., "$z_{\mu(j)}$","w_1","w_2", ..., "$w_{\mu(j)}$" et tous les $i \in \mathbf{I}$, $j \in \mathbf{J}$) :*

ID$_1$	$x = x$	*réflexivité*
ID$_2$	$y = z \rightarrow (y = w \rightarrow z = w)$	*confluence*
ID$_3$	$(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_{\lambda(i)} = y_{\lambda(i)}) \rightarrow (R_i(x_1, \ldots, x_{\lambda(i)}) \rightarrow R_i(y_1, \ldots, y_{\lambda(i)}))$	*indiscernabilité*
ID$_4$	$(z_1 = w_1 \wedge \ldots \wedge z_{\mu(j)} = w_{\mu(j)}) \rightarrow f_j(z_1, \ldots, z_{\lambda(i)}) = f_j(w_1, \ldots, w_{\mu(j)})$	*fonctionnalité*

QU *les formules ϕ qui ont la forme de la phrase suivante, où ψ est une formule et "t" un terme libre pour "x" dans ψ :*

Qu $\forall x(\psi) \rightarrow \psi(x/t)$ *instanciation*

HC$^+$ *a deux règles d'inférences :*

MP *la première règle d'inférences de* HC$^+$ *est modus ponens* MP *:*

$$\frac{\phi, \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner}{\psi}$$

$\forall$ *la deuxième règle d'inférences de* HC$^+$ *est appelée "généralisation" ou "$\forall$" :*

$$\frac{\phi \rightarrow \psi}{\phi \rightarrow \forall x(\psi)} \quad \text{si "}x\text{" n'a pas d'occurrence libre dans } \phi$$

La validité de **Qu** dépend du fait qu'une formule de la logique des prédicats est valide si et seulement si sa clôture universelle l'est aussi. **Qu** nous donne trois autres règles d'inférences dérivées, qui peuvent aussi être démontrées comme valides. Prises ensemble, il s'agit des règles d'inférences pour l'introduction et l'élimination des quantificateurs que nous utiliserons pour la déduction naturelle :

GU généralisation universelle :

$$\frac{\phi}{\ulcorner \forall x(\phi) \urcorner} \quad \text{si "}x\text{" n'a pas d'occurrence libre avant l'application de cette règle}$$

SU spécialisation universelle :

$$\frac{\ulcorner \forall x(\phi) \urcorner}{\ulcorner \phi(x/t) \urcorner} \quad \text{si "}t\text{" est libre pour "}x\text{" dans } \phi$$

GE généralisation existentielle :

$$\frac{\ulcorner \phi(x/t) \urcorner}{\ulcorner \exists x(\phi) \urcorner} \quad \text{si "}t\text{" est libre pour "}x\text{" dans } \phi$$

SE spécialisation existentielle :

$$\frac{\ulcorner \exists x(\phi) \urcorner}{\ulcorner \phi(x/t) \urcorner} \quad \text{si "}x\text{" n'a pas d'occurrence libre avant l'application de cette règle}$$

Nous reviendrons sur ces règles d'inférences en relation avec la méthode de la déduction naturelle pour la logique des prédicats.