Les connecteurs propositionnels

Cours d'introduction à la logique au semestre d'automne 2007

Feuille d'accompagnement pour le cours du 3 octobre 2007

Philipp Keller
philipp.keller@lettres.unige.ch

Points à retenir du dernier cours

1. La logique moderne a été créée par Gottlob Frege en 1879.
2. La philosophie est la science des arguments.
3. La logique est l'étude des inférences valides.
4. La logique porte sur un langage simplifié, idéalisé et formel.
5. La logique propositionnelle étudie les connecteurs propositionnels qui relient des propositions ; la logique des prédicats étudie en plus la quantification, les relations et les fonctions.
6. La syntaxe concerne la forme des expressions, la sémantique leurs significations et la pragmatique leur usage.
7. La formalisation des arguments est un art.
8. Les arguments ne sont pas vrais ou faux, mais valides ou invalides.
9. Une inférence est valide si et seulement s'il est impossible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse.
10. Il faut distinguer l'utilisation et la mention des mots et mettre des guillemets si on veut parler d'une expression linguistique et non pas de la chose qu'elle représente.

La formalisation

Considérons l'argument suivant (formulé dans une langue naturelle) :

Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage.
J'étudie la logique.
Donc, je serai heureux et sage.

En abrégeant les propositions exprimées par des lettres, on obtient :

Si p, alors q.
p
Donc, q.

Nous indiquons le fait que la conclusion est tirée à partir des deux prémisses de la manière suivante :

$$\frac{\text{Si } p \text{, alors } q. \quad p}{q}$$

Nous passons à une langue formelle on introduisant "$\rightarrow$" pour signifier la relation d'implication matérielle ("si ... alors $\cdots$") :

$$\frac{p \rightarrow q \quad p}{q}$$

C'est le squelette d'un argument représenté dans le langage formel de la logique propositionnelle : il représente la forme commune à tous les arguments valides qu'on obtient en remplaçant "$\rightarrow$" par "si ... alors —", le trait par "Donc, ..." et "p" et "q" par des phrases du langage ordinaire.

La syntaxe et la sémantique

Définition du vocabulaire de notre langage formel $\mathcal{L}$:

A1	des propositions atomiques "p", "q", "r", "s", "t" etc.
A2	des constantes logiques "$\wedge$" (parfois : "&") ("et"), "$\vee$" ("ou"), "$\neg$" (parfois $\sim$) ("il n'est pas le cas que"), "$\rightarrow$" (parfois : "$\supset$") ("si ... alors $\cdots$") et "$\leftrightarrow$" (parfois : "$\equiv$") ("... si et seulement si $\cdots$", "... ssi $\cdots$")
A3	des parenthèses "(" et ")"

Définition récursive des formules bien formées de $\mathcal{L}$:

B1	Toute proposition atomique est une formule bien formée.
B2	Si "ϕ" et "ψ" sont des formules bien formées, alors "$(\neg\phi)$", "$(\phi \wedge \psi)$", "$(\phi \vee \psi)$", "$(\phi \rightarrow \psi)$" et "$(\phi \leftrightarrow \psi)$" sont des formules bien formées.
B3	Il n'y a pas d'autres formules bien formées.

Le *principe de vérifonctionnalité* (pour la logique propositionnelle) : La valeur de vérité d'une proposition complexe ne dépend que des valeurs de vérité des propositions qui la constituent et des connecteurs qui les relient.
Une *interprétation* d'une proposition est l'attribution des valeurs de vérité aux propositions simples qu'elle contient.

La négation

La signification de "$\neg$" est déterminée par la table de vérité suivante :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Élimination de la double négation :

$$\frac{\neg\neg p}{p}\ \neg\mathbf{E} \tag{1}$$

Réduction à l'absurde (reductio ad absurdum) :

$$\frac{p \rightarrow \bot}{\neg p}\ \neg\mathbf{I}* \tag{2}$$

Soit "p" une proposition arbitraire :

principe de bivalence	soit "p" est vrai soit "p" est faux
principe de non-contradiction	il n'est pas possible que "p" *et* "$\neg p$" soient vraies ensembles
principe du tiers-exclu	ou bien "p" est vraie ou bien "$\neg p$" est vraie

La conjonction

Les règles d'introduction et d'élimination de la conjonction :

$$\frac{p,\ q}{p \wedge q}\ \wedge\mathbf{I} \qquad \frac{p \wedge q}{p}\ \wedge\mathbf{E} \qquad \frac{p \wedge q}{q}\ \wedge\mathbf{E} \tag{3}$$

Sa table de vérité :

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La disjonction

Ses règles d'introduction et d'élimination :

$$\frac{p}{p \vee q}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{q}{p \vee q}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{p \vee q,\ \neg p}{q}\ \vee\mathbf{E} \tag{4}$$

Sa table de vérité :

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

L'implication matérielle

Sa règle d'élimination (le modus ponens) :

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \end{array}}{q}\ \rightarrow\mathbf{E} \tag{5}$$

Sa table de vérité ("$p \rightarrow q$" est équivalent à "$\neg p \vee q$") :

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

L'équivalence matérielle

Les règles d'introduction et d'élimination de l'équivalence matérielle :

$$\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow p}{p \leftrightarrow q}\ \leftrightarrow\mathbf{I} \qquad \frac{p \leftrightarrow q}{p \rightarrow q}\ \leftrightarrow\mathbf{E} \qquad \frac{p \leftrightarrow q}{q \rightarrow p}\ \leftrightarrow\mathbf{E} \tag{6}$$

Sa table de vérité :

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Les tables de vérité – première méthode

Construisons une table de vérité pour "$\neg(\neg p \vee \neg q)$" :

1. Première étape :

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

2. Deuxième étape :

p	q	$\neg p$	$\neg q$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

3. Troisième étape :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

4. Quatrième étape :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$
V	V	F	F	F	**V**
V	F	F	V	V	**F**
F	V	V	F	V	**F**
F	F	V	V	V	**F**

Les tables de vérité – deuxième méthode

1. Première étape :

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
		V			V
		V			F
		F			V
		F			F

2. Deuxième étape :

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
	F	V		F	V
	F	V		V	F
	V	F		F	V
	V	F		V	F

3. Troisième étape :

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
	F	V	F	F	V
	F	V	V	V	F
	V	F	V	F	V
	V	F	V	V	F

4. Quatrième étape :

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F
F	V	F	V	F	V
F	V	F	V	V	F