dialectica series of anthologies

PROOF

PROOF

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License.

Introduction à la logique

PHILIPP BLUM

Authors' Proofs

PROOF

philosophie.ch, Federweg 22, 3008 Bern
ISBN 978-3-9523199-0-1

PROOF

dialectica *series of anthologies*

Préface

Il est toujours aisé d'être logique. Il est presque impossible
d'être logique jusqu'au bout.
Albert Camus, *Le mythe de Sisyphe*

Comme le disait Descartes à propos de ses *Méditations*, essayer – au moins une fois dans la vie – d'« être logique jusqu'au bout » constitue une expérience gratifiante qui peut nous fournir de nouvelles connaissances et nous offre une nouvelle perspective non seulement sur les problèmes intellectuels qui nous intéressent, mais sur notre manière de les aborder. Le but de ce livre est de nous fournir un moyen de réaliser cette expérience.

Plus qu'une introduction à la logique propositionnelle et à celle des prédicats, cet ouvrage se propose non seulement d'envisager la logique en relation avec la linguistique et les mathématiques contemporaines, mais également de présenter un de ses champs d'application, la philosophie du langage, elle-même étroitement liée à son développement.

Ce vaste programme sera réalisé en trois temps. Premièrement, ce livre introduit les notions centrales de la logique propositionnelle et de la logique des prédicats classiques en présentant trois manières de prouver des théorèmes : le calcul axiomatique, tel qu'il a été formulé dans la tradition hilbertienne par Bertrand Russell et Alfred Whitehead ; la méthode des arbres (ou tableaux analytiques), développée par Evert Willem Beth, Raymond Smullyan et Jaakko Hintikka ; et finalement le calcul de déduction naturelle de Edward John Lemmon, inspiré par Gerhard Gentzen. En second lieu, le présent ouvrage vise à familiariser le lecteur avec les principaux développements en sciences formelles du siècle dernier, en se focalisant sur les distinctions cruciales entre syntaxe et sémantique, et entre langage-objet et métalangage. Ceci devrait fournir au lecteur les outils essentiels pour comprendre quelques discussions contemporaines en philosophie et en linguistique, toutes deux tributaires de la grande révolution conceptuelle qu'ont traversé les mathématiques du vingtième siècle. Dans un dernier temps, une introduction à la logique serait incomplète si elle ne donnait pas au moins une idée des enjeux fondamentaux de la philosophie du langage contemporaine. Le développement de la logique moderne, en particulier chez Gottlob Frege, fut fortement motivé et influencé par des considérations philosophiques : la logique moderne a tant déterminé la forme que la substance des principaux débats en philosophie du langage.

Cette méthode se distingue d'autres introductions à la logique, notamment par sa mise en relief des motivations philosophiques et mathématiques sous-jacentes à l'étude de la logique et par la discussion plus approfondie des propriétés métalogiques des calculs présentés.[1]

[1] Je me suis principalement inspiré de Lepage (1991) (deuxième édition : 2001) et de Quine (1972c). Deux manuels de logique de Quine ont été traduits en français : la deuxième édition de « Elementary Logic » (Quine, 1965) par Jean Largeault et Bertrand Saint-Sernin (Quine, 1972b) et la troisième édition de « Methods of Logic » (Quine, 1972c) par Maurice Clavelin (Quine, 1973). À part les deux excellents ouvrages de Quine, deux introductions plus anciennes, mais toujours intéressantes ont été traduites : Tarski (1946) par Jacques Tremblay (Tarski, 1971) et Kleene (1967) par Jean Largeault (Kleene, 1971). Ce livre se distingue également des autres manuels disponibles en français, présentant à la

PROOF

Cette introduction à la logique est écrite dans une langue qui (espérons-le) s'approche du français. Le lecteur doit cependant constamment faire attention au langage technique de la logique (marqué par l'usage de l'italique), dont les mots coïncident parfois avec la langue française, mais dont la signification diverge. Pour ce faire, un lexique regroupant plusieurs de ces notions (telles que : « proposition », « validité », « solidité ») a été ajouté en fin de cet ouvrage.

Bien que cette introduction ait été écrite pour des étudiants en philosophie, elle devrait susciter l'intérêt des linguistes, des informaticiens et des mathématiciens. Elle peut être lue et étudiée de manière autonome, puisque les exercices nombreux permettent un contrôle continu du progrès dans l'apprentissage. Cette introduction peut, finalement, être utilisée pour la création d'un cours universitaire de niveau élémentaire ou intermédiaire. Le matériel qui est présenté ici m'a permis de donner un cours semestriel de quatre heures hebdomadaires aux Universités de Genève et de Lausanne, destiné aux étudiants en philosophie, aux linguistes ainsi qu'aux étudiants en informatique de la faculté des lettres, et d'un cours semestriel de deux heures hebdomadaires à l'Université de Berne, à un public composé de philosophes, mais aussi d'économistes, de chimistes, d'historiens de l'art, de psychologues et de mathématiciens.

Le présent ouvrage se veut intermédiaire entre une approche formelle ou mathématique à la logique – approche qui se veut exacte et qui n'apprécie pas le style souvent informel en philosophie – et une approche philosophique, qui s'intéresse aux questions de fond souvent escamotées par des mathématiciens trop impatients. Elle essaie d'unifier ces deux cultures dans une synthèse satisfaisant à la fois les amateurs de la rigueur et ceux de l'ouverture nécessaire au questionnement philosophique. Ni la rigueur absolue ni la remise en question permanente ne sont indispensables à une introduction à la logique. C'est pourquoi j'ai mis un résumé des définitions techniques que l'étudiant doit savoir lire et utiliser, mais pas forcément reproduire, en appendice. Chaque chapitre sera suivi d'une liste de dix points à retenir qui fournissent au lecteur un résumé succinct.

PROOF

fois la méthode axiomatique, la déduction naturelle et la méthode des arbres (contrairement à Blanché (1996), Rivenc (1989) et Vernant (2001) respectivement), et est à la fois plus philosophique et moins mathématique que Cori and Lascar (2003).

Table des matières

Préface i

1 Introduction 1
- 1.1 Ce qu'est la logique . . . 1
- 1.2 Les arguments formellement valides . . . 9
- 1.3 Les langues formelles et naturelles . . . 13
- 1.4 Syntaxe et sémantique . . . 18
- 1.5 Formalisation . . . 21
- 1.6 Vérité et validité . . . 26
- 1.7 Utilisation et mention . . . 27

2 Les connecteurs propositionnels 31
- 2.1 La formalisation des arguments . . . 31
- 2.2 La négation . . . 37
- 2.3 La conjonction . . . 43
- 2.4 La disjonction . . . 45
- 2.5 L'implication et l'équivalence matérielle . . . 46
- 2.6 Les tables de vérité . . . 50
- 2.7 Les circuits logiques et l'ingénierie logique . . . 54

3 Relations logiques et inférences logiques 59
- 3.1 Le langage-objet et le métalangage . . . 59
- 3.2 La validité et la vérité logique . . . 64
- 3.3 La quasi-citation et les demi-crochets de Quine . . . 70
- 3.4 Les tautologies et les contradictions . . . 72
- 3.5 Le carré des oppositions . . . 77
- 3.6 Achille, la tortue et la normativité de la logique . . . 81
- 3.7 La conséquence logique . . . 86

4 La méthode axiomatique 89
- 4.1 Déductibilité syntaxique vs validité sémantique . . . 89
- 4.2 Le langage de la logique propositionnelle . . . 90
- 4.3 Le paradoxe de Russell . . . 93
- 4.4 Le paradoxe du menteur . . . 100
- 4.5 Ce qu'est un calcul . . . 104
- 4.6 Un calcul pour la logique propositionnelle . . . 107
- 4.7 Les preuves dans et les preuves sur le calcul . . . 109

PROOF

5 La méthode des arbres **117**
5.1 La sémantique de la logique propositionnelle . . . 117
5.2 Les relations entre conséquence logique et déductibilité . . . 122
5.3 La nature de la logique . . . 126
5.4 La nécessité de la logique . . . 127
5.5 La méthode des arbres . . . 128
5.6 Le développement syntaxique de la méthode des arbres . . . 130
5.7 L'interprétation sémantique de la méthode des arbres . . . 133

6 La déduction naturelle **139**
6.1 Les suppositions . . . 139
6.2 Les règles d'introduction et d'élimination des connecteurs . . . 142
6.3 La formalité de la logique : le cas de tonk . . . 144
6.4 Les règles de la déduction naturelle . . . 144
6.5 Les preuves par déduction naturelle . . . 149
6.6 Les règles dérivées . . . 154
6.7 Un calcul de séquents . . . 159

7 Propriétés métalogiques de la logique propositionnelle **163**
7.1 Les propriétés métalogiques . . . 163
7.2 Le théorème de déduction . . . 164
7.3 Correction et complétude de la méthode des arbres . . . 166
7.4 Correction et complétude de la déduction naturelle . . . 171
7.5 Complétude du calcul HC . . . 175
7.6 Algèbre de Boole, décidabilité et formes normales . . . 181
7.7 La compacité de la logique propositionnelle . . . 187

8 La syllogistique **191**
8.1 Les syllogismes classiques . . . 191
8.2 Les formes valides du raisonnement syllogistique . . . 195
8.3 Les diagrammes de Venn . . . 198
8.4 Les limites de la syllogistique . . . 200
8.5 Les phrases ouvertes et leur satisfaction . . . 202
8.6 Les objets et leur existence . . . 205
8.7 Les relations et leur quantification . . . 209

9 La logique des prédicats **217**
9.1 Quelques inférences valides de la logique des prédicats . . . 217
9.2 Frege et la philosophie du langage . . . 220
9.3 Être vrai et être vrai de . . . 230
9.4 Les termes singuliers . . . 233
9.5 La formalisation dans la logique des prédicats . . . 238
9.6 Une classification des expressions . . . 244
9.7 Les quantificateurs . . . 247

PROOF

10 Syntaxe et sémantique de la logique des prédicats **251**
10.1 Le langage $\mathcal{L}^+$ . . . 251
10.2 La sémantique de la logique des prédicats . . . 255
10.3 Les substitutions . . . 264
10.4 L'ontologie de la logique . . . 265
10.5 La logique des prédicats unaires . . . 266
10.6 Un calcul axiomatique pour la logique des prédicats . . . 269
10.7 L'identité . . . 271

11 La méthode des arbres pour la logique des prédicats **273**
11.1 Les phrases quantifiées . . . 273
11.2 La méthode des arbres pour la logique des prédicats . . . 274
11.3 Les preuves par la méthode des arbres . . . 278
11.4 Les arbres infinis et une simplification des règles . . . 282
11.5 L'indécidabilité de la logique des prédicats . . . 285
11.6 La théorie des modèles . . . 285
11.7 La logique libre . . . 285

12 La déduction naturelle pour la logique des prédicats **287**
12.1 La spécialisation universelle et la généralisation existentielle . . . 287
12.2 Les règles de la déduction naturelle pour la logique des prédicats . . . 291
12.3 Les individus arbitraires . . . 296
12.4 La critique référentialiste de Frege . . . 296
12.5 La logique des prédicats de deuxième ordre . . . 298
12.6 La quantification plurielle . . . 298
12.7 La logique infinitaire . . . 298

13 Propriétés métalogiques de la logique des prédicats **301**
13.1 La correction et la complétude des arbres pour les prédicats . . . 301
13.2 La compacité de la logique des prédicats et le théorème de Löwenheim-Skolem . . . 306
13.3 La théorie des modèles . . . 308
13.4 La logique des relations . . . 308
13.5 La formalisation et le paradoxe de l'analyse . . . 309
13.6 Les théories formelles de la vérité . . . 309
13.7 Les limites de la logique des prédicats . . . 310

14 La logique modale **311**
14.1 La logique modale propositionnelle . . . 311
14.2 Sémantique de la logique modale propositionnelle . . . 313
14.3 La méthode des arbres pour la logique modale propositionnelle . . . 317
14.4 Les logiques épistémiques et déontiques . . . 317
14.5 La logique temporelle . . . 317
14.6 La logique modale des prédicats . . . 317
14.7 La théorie de la référence directe et la sémantique bidimensionnelle . . . 318

PROOF

15 Les limites du formalisme **321**
15.1 La théorie des ensembles . . . 321
15.2 Les paradoxes et la méthode axiomatique . . . 321
15.3 L'axiomatisation de l'arithmétique . . . 321
15.4 Le Néo-Fregéanisme . . . 321
15.5 L'incomplétude des systèmes formels : les théorèmes de Gödel . . . 321
15.6 La logique de prouvabilité . . . 322
15.7 La logique inductive, de la probabilité et la théorie de la décision . . . 323

16 Exercices **325**
16.1 Formalisation, validité . . . 325
16.2 Les connecteurs propositionnels . . . 327
16.3 Relations logiques et inférences logiques . . . 328
16.4 La méthode axiomatique . . . 330
16.5 La méthode des arbres . . . 332
16.6 La déduction naturelle . . . 334
16.7 La logique propositionnelle . . . 335
16.8 Premier examen probatoire . . . 336
16.9 Deuxième examen probatoire . . . 337
16.10 La syllogistique . . . 339
16.11 La logique des prédicats . . . 341
16.12 Syntaxe et sémantique de la logique des prédicats . . . 343
16.13 La méthode des arbres de la logique des prédicats . . . 345
16.14 La déduction naturelle de la logique des prédicats . . . 346
16.15 La logique des prédicats . . . 347
16.16 La logique des prédicats . . . 347
16.17 La logique modale . . . 348
16.18 Troisième examen probatoire . . . 348
16.19 Quatrième examen probatoire . . . 349
16.20 Cinquième examen probatoire . . . 350

17 Solutions aux exercices **353**
17.1 Formalisation, validité . . . 353
17.2 Les connecteurs propositionnels . . . 358
17.3 Relations logiques et inférences logiques . . . 365
17.4 La méthode axiomatique . . . 374
17.5 La méthode des arbres . . . 381
17.6 La déduction naturelle . . . 388
17.7 La logique propositionnelle . . . 393
17.8 Premier examen probatoire . . . 400
17.9 Deuxième examen probatoire . . . 407
17.10 La syllogistique . . . 413
17.11 La logique des prédicats . . . 418
17.12 Syntaxe et sémantique de la logique des prédicats . . . 422

PROOF

17.13 La méthode des arbres de la logique des prédicats 426
17.14 La déduction naturelle de la logique des prédicats 436
17.15 La logique des prédicats 442
17.16 La logique des prédicats 444
17.17 La logique modale 453
17.18 Troisième examen probatoire 453
17.19 Quatrième examen probatoire 463
17.20 Cinquième examen probatoire 466

Glossaire **475**

Index des sujets philosophiques **477**

Index des principes logiques **479**

Index des exemples **481**

PROOF

PROOF

dialectica *series of anthologies*

1 Introduction

1.1 Ce qu'est la logique

La logique est l'étude de l'art de bien penser (cf. Arnauld and Nicole, 1662, 1992). Elle est aussi fondamentale à la philosophie qu'aux mathématiques et a une très longue histoire, remontant à Aristote, dont les œuvres sur la logique ont été regroupées par ses commentateurs sous le titre d'« Organon » (« instrument »). Cet ensemble comprend les *Catégories* (2001 ; 2002 ; 2004a ; 2007), où Aristote expose les fondements métaphysiques de sa théorie des phrases, *De l'Interprétation* (2004a ; 2007), où il distingue les différentes parties d'une phrase, les *Premiers* et *Deuxièmes Analytiques* (2001 ; 2014 et 1995a ; 2005), où il expose les règles et formes des inférences (« syllogismes ») ainsi que les syllogismes nécessaires, et les *Topiques* et *Réfutations sophistiques* (2004b ; 2015 et 1995b ; 2015) qui traitent des paralogismes et des arguments dont les prémisses ne sont que probables. Ces premiers exemples d'une logique formelle ont eu une influence considérable dans l'histoire de la philosophie et de la pensée scientifique en général. Plus de deux mille ans plus tard, Kant pensait encore qu'Aristote avait découvert tout ce qui était à connaître en logique (Kant, 2001, B VIII). De manière plus amusante et provocatrice, un historien de la logique du 19ème siècle, Carl Prantl, semble même avoir affirmé que les logiciens qui, après Aristote, avaient trouvé quelque chose de nouveau étaient tous confus, stupides ou pervers.[1]

Cette situation a fondamentalement changé avec l'avènement de la logique moderne, découverte en grande partie par le mathématicien et philosophe allemand Gottlob Frege (1848–1925), puis développée par Bertrand Russell, Alfred Whitehead, Ludwig Wittgenstein et d'autres.[2] Suite aux découvertes de Frege, et en parallèle avec les développements des systèmes formels par Schröder, Boole, Pierce, Peano, de Morgan, Russell, Whitehead, etc., la logique est devenue la pierre angulaire de la philosophie et des mathématiques, avant de servir comme fondement à la linguistique et l'informatique de nos jours.

En tant que branche des mathématiques, la logique a joué un rôle décisif dans le développement des mathématiques modernes, caractérisées par une rigueur inconnue des siècles précédents. Celle-ci se manifeste dans l'utilisation de la méthode axiomatique généralisée à presque tous les domaines des mathématiques contemporaines. C'est grâce à la méthode axiomatique et à des notions rigoureuses, telles que « preuve » ou « déductibilité », que les études métamathématiques sont devenues possibles (le développement, à l'aide de la logique, d'une théorie des systèmes mathématiques et de leurs propriétés formelles).[3] De pair avec la théorie des ensembles, à laquelle elle est étroitement liée, la logique forme ce qu'on appelle « les fondements des mathématiques ». Elle fait aujourd'hui partie de toute formation mathématique.

[1] Au moins, c'est l'affirmation que Smith (2017) fait à ce sujet, répétée par Landini (2012, 1). J'ai l'impression, cependant, que le verdict de Prantl (1855) est beaucoup plus nuancé.

[2] Nous reviendrons sur l'histoire du développement des mathématiques modernes aux p. 93 et suivantes et à la philosophie du langage de Frege aux p. 220 et suivantes.

[3] Voir aussi le petit vocabulaire de poche aux p. 475 et suivantes.

PROOF

La logique, comme nous allons le voir, est l'étude des arguments. Les mathématiques en proposent de nombreux exemples, sous forme de « preuves » (rigoureuses), tels que :[4]

Théorème 1. *Il y a des nombres non rationnels (irrationnels) a et b tels que a^b est rationnel.*[5]

Démonstration. Considérons le nombre réel $c := \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Soit il est le cas que $c \in \mathbb{Q}$ (que c est rationnel), soit il est le cas que $c \notin \mathbb{Q}$ (que c est irrationnel). Nous prouvons que dans les deux cas, il y a des nombres irrationnels a et b tels que a^b est rationnel.

1. $c \in \mathbb{Q}$. Alors nous mettons $a := \sqrt{2}$ et $b := \sqrt{2}$, comme $\sqrt{2}$ est irrationnel. Nous avons : $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = c$, ce qui, sous cette supposition, est un nombre rationnel.
2. $c \notin \mathbb{Q}$. Alors nous mettons $a := c$ et $b := \sqrt{2}$, comme c et $\sqrt{2}$ sont irrationnels. Nous avons :

$$a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

Comme $a^b = 2$ et 2 est un nombre rationnel, l'affirmation qui est à prouver est également vraie dans ce dernier cas.

□

Aucune preuve n'est sans présupposition. La force de la preuve que nous venons de donner, par exemple, repose sur le fait que la racine carrée du nombre 2 n'est pas rationnelle, mais que 2 l'est. Elle utilise également des principes logiques, par exemple le principe dit du « tiers exclu », qui nous permet de poser qu'une des deux affirmations suivantes est vraie : « $c \in \mathbb{Q}$ », « $c \notin \mathbb{Q}$ ». Néanmoins, sous ces suppositions, une preuve a une force apodictique : elle établit un résultat une fois pour toutes. C'est pour cela que les mathématiciens les concluent fièrement avec « □ » ou avec « q.e.d. »(« quod erat demonstrandum », ou « c.q.f.d. », ce qu'il faillait démontrer).

Notons quelques autres caractéristiques de ce raisonnement : nous remarquons, d'abord, que l'affirmation « il y a deux nombres qui satisfont une certaine description » est prouvée sans donner des exemples de tels nombres (c'est pour cela que cette preuve particulière est appelée « non constructive »);[6] en deuxième lieu, la preuve pose un choix exclusif et exhaustif (soit il est le cas que $c \in \mathbb{Q}$, soit il est le cas $c \notin \mathbb{Q}$) et montre la vérité du théorème (ce qui est prouvé) dans les deux cas;[7] troisièmement et surtout, le raisonnement est tel que nous ne discernons aucune lacune : chaque assertion « s'ensuit » des précédentes et aucune présupposition tacite ou implicite n'est faite.

Un argument n'est la *preuve* d'une assertion que si cette assertion *s'ensuit* de l'argument. Notre preuve *démontre* cette assertion (devenue alors un *théorème*) parce qu'elle exclut la possibilité qu'elle

[4] Nous utilisons ici le symbole « := » comme signe d'une identité définitionnelle, c'est-à-dire pour indiquer que l'expression « c » servira comme abréviation de « $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ». Nous reviendrons sur les définitions à la p. 75.
J'ai emprunté cette manière d'introduire la notion de preuve à J. Adler et à G. Jäger (« An Introduction to Propositional Logic », 24 septembre 2003).

[5] Un nombre x est rationnel si et seulement s'il existe deux nombres entiers p et q tel que $x = \frac{p}{q}$. Les nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{-394}{74}$, par exemple, sont rationnels, bien que π, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{-43}$ ne le soient pas.

[6] Nous reviendrons, à la p. 100, sur cette notion de « constructif » et son importance pour les intuitionnistes.

[7] Nous allons discuter cette forme de preuve sous le nom d'« élimination de la disjonction » aux p. 147 et suivantes dans le ch. 6.

PROOF

soit fausse. C'est la logique qui étudie cette relation de *conséquence logique*, de ce qui est prouvé à sa preuve, ou encore entre des prémisses et leur conclusion.

En tant que branche de la philosophie, la logique s'intéresse aux arguments et essaie de distinguer les arguments formels des autres. Un argument vise à fournir une raison pour que l'on accepte sa conclusion – une raison qui est formulée, ou au moins indiquée dans ses prémisses. Cette raison devrait parler de la vérité de la conclusion ; notre acceptation de cette dernière devrait être motivée par des considérations portant sur sa vérité, opposées à des considérations d'utilité, de sympathie, de pitié ou de pur caprice.

Voici un autre exemple d'argument :

P Tous les corbeaux observés étaient noirs.
C Donc, tous les corbeaux sont noirs.

À l'intérieur de cet argument, nous distinguons deux rôles de phrases : une prémisse (**P**) et une conclusion (**C**), introduite par « donc ». Ce qui est visé par l'argument, c'est la vérité de la conclusion, et celle-ci repose sur la prémisse qui nous donne une raison convaincante ou non d'accepter la conclusion.

Cet argument est en l'occurrence convaincant, mais ne l'est qu'en vertu de son contenu et non pas de sa forme (au moins si nous supposons que nous avons fait beaucoup d'observations de corbeaux). En effet, il est possible qu'un argument de la même forme ne soit pas convaincant – il se peut, par exemple, que je n'aie rencontré que des professeurs de philosophie qui soient des hommes ; néanmoins, je ne suis pas justifié à en conclure que tous les professeurs de philosophie sont masculins. Nous considérerons donc que l'argument des corbeaux est convaincant, mais qu'il ne l'est pas exclusivement en vertu des mots qu'il contient.[8]

Reprenant une distinction d'Aristote, nous distinguons les arguments apodictiques des arguments dialectiques. Ces derniers font appel à des considérations situées à l'extérieur de l'argument même, qu'elles soient l'uniformité de la nature (pour les arguments dits « inductifs »), les lois de probabilité (pour les arguments dits « probabilistes »), la rationalité (pour les explications d'actions), un principe d'intelligibilité (pour les arguments dits « abductifs », à la meilleure explication) ou encore à une autorité reconnue. En fonction de la plausibilité de ces principes (souvent implicitement) invoqués et de la qualité de la raison fournie par les prémisses, les arguments dialectiques sont plus ou moins convaincants.

Les arguments apodictiques, par contre, ne dépendent pas de considérations extérieures. Ils visent à fournir une raison suffisante pour la vérité de leur conclusion, qui est censée s'ensuivre par nécessité des prémisses. Comme la nécessité n'admet pas de degrés, les arguments apodictiques sont soit convaincants soit non. Ils devraient être convaincants juste dans le cas où ils sont *valides* : un argument apodictique est dit « valide » s'il n'est pas possible que sa conclusion soit fausse *si* ses prémisses sont vraies, si quelqu'un qui accepte ses prémisses est rationnellement obligé d'accepter sa conclusion.[9]

[8] Il est une question difficile de savoir si de tels arguments, appelés « inductifs », devraient, ou même pourraient être assimilés à des arguments logiques (cf. p. 323).

[9] Comme nous le verrons par la suite, « accepter » doit être construit ici dans un sens large, distinguant l'acceptation qui peut être dispositionnelle de l'assentiment qui est un événement d'ordre psychologique. Nous reparlerons de la connexion très controversée entre la logique et la rationalité à la p. 82 dans le ch. 3 et de la relation entre conséquence logique et nécessité logique, voire même de la question de savoir s'il y a une telle chose, à la p. 127 dans le ch. 5.

PROOF

Pour un argument valide, il n'est pas requis que quelqu'un accepte ses prémisses *dans les faits* : il suffit que, *s'il acceptait* les prémisses, il devrait aussi accepter la conclusion. C'est dans ce sens-ci que la logique ne traite pas directement des vérités (simples), mais de leurs interconnexions : plutôt que de poser la question de savoir si telle ou telle phrase simple est vraie, elle interroge les structures formelles de la phrase pour voir si celle-ci pourrait être vraie, au cas où telle ou telle autre phrase l'était.[10]

Comparons l'argument des corbeaux avec un autre argument :

P Cette surface est entièrement rouge.
C Donc, cette surface n'est pas entièrement verte.

Ici, la raison qui m'est donnée par la prémisse d'accepter la conclusion est *suffisante* : rien d'autre n'est nécessaire pour me convaincre de l'absence du vert que la présence du rouge. Nous pouvons alors parler d'une « inférence » et dire que la conclusion « s'ensuit » de la prémisse. En cela, l'argument est différent du premier argument des corbeaux. Même si la raison donnée par la prémisse de croire la conclusion est bonne dans les deux cas, elle n'est pas maximalement bonne dans le premier : il est toujours possible d'être sceptique et d'accepter l'observation portant sur tous les corbeaux noirs, mais de nier la conclusion. Le deuxième argument, par contre, ne laisse pas d'espace entre la prémisse et la conclusion pour du scepticisme : il n'est pas *possible* qu'une surface entièrement rouge soit également entièrement verte.[11] Cette caractéristique est partagée par l'argument suivant :

P Denis est le mari d'Annette.
C Donc, Denis est un homme.

Contrairement à l'argument des couleurs (qui peut être appelé une inférence « matérielle »), il s'agit ici d'une argument « formel », c'est-à-dire d'un argument convaincant ou non en vertu de sa forme, qui est composée de mots. C'est grâce au fait que le *mot* « mari » ne s'applique (pour l'instant, en français) qu'aux hommes que nous pouvons inférer la conclusion de la prémisse. L'argument des couleurs, par contre, semble concerner le monde.[12]

L'argument du mari est convaincant en vertu de la signification du mot ‹ non logique › « mari », et constitue donc ce qu'on appelle une « inférence sémantique » : la raison fournie par la prémisse ne concerne en rien comment est le monde, mais seulement les significations des mots. Dans le cas où ces mots sont des mots ‹ logiques ›, l'argument est appelé « *inférence logique* ».[13]

Contrairement à l'inférence sémantique qui porte sur la signification du mot ‹ non logique › « mari », un argument déductif est convaincant en vertu de la signification des mots ‹ logiques › qu'il contient :

[10] Nous discuterons ce point fondamental – que la logique ne s'occupe pas de vérités, mais d'interconnexions entre des vérités – davantage à la p. 27.

[11] C'est une bonne question de métaphysique de savoir en quoi cette nécessité est fondée : est-elle due à la nature des couleurs, au mot « entièrement », aux caractéristiques de notre perception ?

[12] Ceux qui ne pensent pas qu'il y ait de la nécessité dans le monde, que toute nécessité est due au langage, à nos concepts ou plus généralement à notre manière de voir, conceptualiser ou décrire le monde, nieront qu'il y a des inférences « matérielles » proprement dites.

[13] Je mets « logique » entre ‹ guillemets simples › pour indiquer qu'il s'agit d'une notion intuitive qui doit être relativisée à un calcul pour recevoir un sens déterminé. Nous reviendrons sur cet usage à la p. 43 et sur le ‹ choix › des mots logiques à la p. 127).

PROOF

P1 Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage.
P2 J'étudie la logique.
C Donc, je serai heureux et sage.

Les mots logiques en question ici sont « si ... alors ⋯ » et cet argument est une inférence logique : la conclusion (« je serai heureux et sage ») *s'ensuit* logiquement (en vertu de la signification de ces mots logiques) des deux prémisses et en ‹ découle › grâce à la signification des mots « si ... alors ⋯ » contenus dans la première prémisse.

Une inférence logique qui garantit la vérité de la conclusion à condition que les prémisses soient vraies est appelée « valide ». La validité, comme nous le verrons par la suite, est le concept central de la logique. Elle est à distinguer de la *solidité* d'une inférence : une inférence est solide si non seulement elle est valide, mais qu'en plus ses prémisses sont vraies. Dans les cas d'une inférence solide, la conclusion est vraie ; dans le cas d'une inférence valide, la conclusion est vraie *si* les prémisses le sont aussi.

Les différents systèmes de logique se distinguent dans leurs choix de mots logiques. La logique standard 'propositionnelle' ne considère comme mots logiques que les connecteurs 'propositionnels' (des expressions qui relient des phrases entières) tels que :[14]

- « ... et ⋯ »,
- « ... ou ⋯ »,
- « il n'est pas le cas que ... »,
- « si ... alors ⋯ »,
- « ... ssi ⋯ » (= « ... si et seulement si ⋯ »).

La logique 'propositionnelle' (logique des phrases) étudie donc la structure logique des phrases comme « Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage », « Il n'est pas le cas que Socrate soit mortel et ne soit pas mortel », « Socrate est mortel si et seulement s'il n'est pas le cas qu'il ne soit pas mortel » et ainsi de suite.

La logique standard des prédicats considère, d'autre part :

- les quantificateurs (« pour tous ... il est le cas que ⋯ », « il y a au moins un ... tel que ⋯ »),
- les signes pour des relations (par ex. « ... est identique à ⋯ », « ... est le frère de ⋯ ») et
- les signes pour des fonctions (par ex. « la mère de .... », « la racine positive de .... »).

La logique des prédicats étudie la structure logique des phrases comme « il y a au moins un être mortel », « Socrate est un étudiant de Platon », « l'enseignant de Socrate est identique à Aristote », etc.[15] Par « structure logique » d'une phrase nous entendons ici le ‹ squelette logique › de la phrase, ce qui appartient à sa *syntaxe* et non pas à sa *sémantique*, qui elle dépend pour sa part des significations des mots. La logique des prédicats est appelée ainsi parce qu'elle ne s'arrête pas à l'étude des phrases, mais permet de traiter les constituants de celles-ci, tels que les termes singuliers (noms) et les prédicats.[16]

[14] Je mets « logique propositionnelle » en 'scare quotes' (guillemets simples anglais) pour indiquer qu'il s'agit d'une terminologie malheureuse : la logique propositionnelle n'est pas la logique des propositions (au moins si on entend par cela les *contenus* de phrases, cf. le glossaire à la p. 475), mais la logique des phrases. Cf. p. 34 ci-dessous.

[15] Bien entendu, ces phrases, comme toutes les phrases, peuvent également être analysées par la logique des phrases – comme le 'prouve' l'anecdote d'un examen de formalisation de l'argument ontologique d'Anselme à Oxford où une étudiante aurait obtenu la note maximale pour la réponse « *p* ».

[16] Cette caractérisation des différentes logiques selon les types d'‹ unités verbales › dont elles s'occupent, doit être utilisée

PROOF

Il existe d'autres types de logiques destinées à examiner le comportement formel d'autres mots et qui se basent en grande partie sur la logique des propositions et sur celle des prédicats. L'inférence

P Il est nécessaire que Socrate soit un homme.
C Donc, Socrate est un homme.

fait partie du domaine de la logique modale (la logique des expressions modalisées comme « il est nécessaire que … », « il est possible que … », « il est impossible que … »). La logique modale sert de modèle pour beaucoup d'autres logiques, notamment les logiques épistémiques et déontiques.[17]

Un argument tel que

P Paul sait que la philosophie le rend heureux.
C Donc, la philosophie rend Paul heureux.

est examiné par la logique épistémique (la logique du savoir) qui traite l'expression « Paul sait que … » comme logique. La logique épistémique discute des principes comme l'introspection positive (si je sais quelque chose, je sais que je sais cette chose) et l'introspection négative (si je ne sais pas quelque chose, je sais cela) et montre, par exemple, que sous certaines suppositions, la dernière est équivalente à un certain type d'omniscience (si je peux savoir une chose, alors je la sais réellement). La logique épistémique est parfois combinée avec la logique doxastique (la logique des croyances) qui traite des expressions comme « Paul croit que … » (pour lesquelles une telle inférence n'est pas permise, puisque nous pouvons croire, mais ne pouvons pas savoir, des choses qui sont fausses). En langage technique, nous disons que l'opérateur « x croit que … », contrairement à « x sait que … » n'est pas factif, c'est-à-dire n'implique pas la phrase qui remplace les « … ».

Un autre opérateur qui n'est (malheureusement) pas factif est « il est obligatoire que … ». La logique déontique (la logique des obligations) concerne des inférences telles que :

P Il est obligatoire que Sam aide cet homme perdu.
C Donc, Sam peut aider cet homme perdu.

qui sont des cas spéciaux du principe général qu'on ne peut pas avoir une obligation à faire quelque chose sans posséder la capacité ou, au moins, avoir la possibilité de la faire.

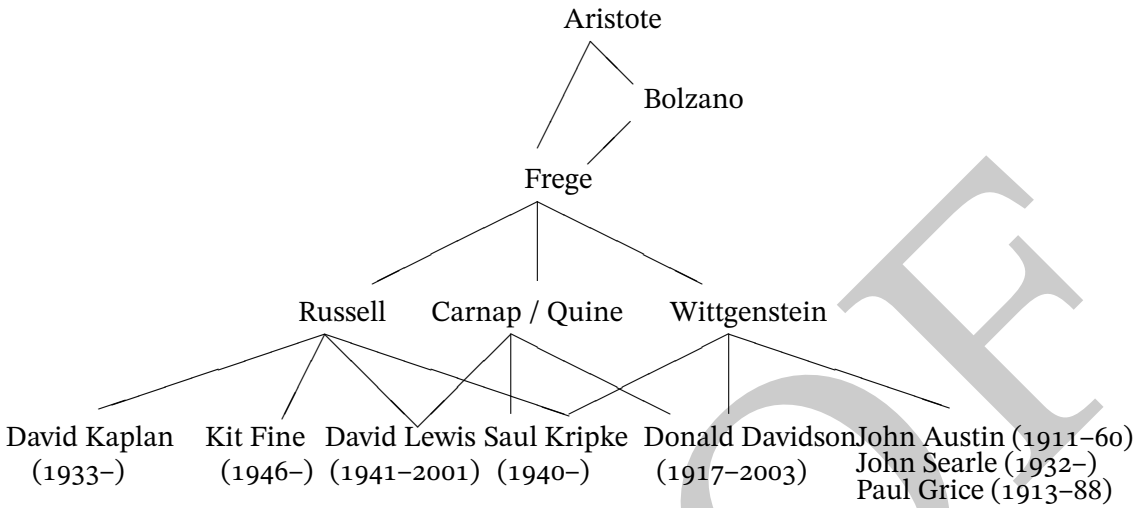
L'étude et l'application de ces différentes logiques n'est pas seulement une branche des mathématiques et de la philosophie, mais constitue également une base de celles-ci, une pierre angulaire de leurs constructions. Les mathématiciens de toutes les branches cherchent à prouver des théorèmes et leurs preuves doivent satisfaire aux conditions logiques communément acceptées. La philosophie est la science des arguments et les arguments en philosophie sont (ou, au moins, devraient être) évalués et construits à l'aide de la logique. Cette influence de la logique sur la manière dont les problèmes philosophiques sont posés et résolus est particulièrement manifeste en philosophie du langage, et toute

avec précaution : il est tout à fait possible, p. ex., de formaliser « Socrate est un étudiant de Platon » en logique propositionnelle par « p ». Le problème est alors que cette formalisation ‹ perd › (est incapable d'expliquer la validité de) quelques inférences comme celle de « Socrate est un étudiant de Platon » à « Il y a au moins un étudiant de Platon », phrase qui elle serait formalisée en logique propositionnelle comme « q ». L'inférence « p, alors q » n'est pas valide en logique propositionnelle, ni dans n'importe quelle autre logique.

[17] Nous parlerons des logiques modales, épistémiques, déontiques, temporelles et de prouvabilité dans le ch. 14.

PROOF

la philosophie contemporaine en est marquée (ou devrait l'être). C'est à l'influence de la philosophie du langage sur la philosophie contemporaine que la logique doit son statut crucial.
La philosophie contemporaine est née en 1879 avec la parution de l' « Idéographie » de Gottlob Frege (Frege, 1879).[18] Les principaux courants de la philosophie théorique de nos jours sont fortement influencés par les questions, les réponses et les problématiques que nous trouvons dans l'œuvre de Frege :[19]



Dans son « Idéographie », le mathématicien allemand Frege a essayé de développer un langage formel et symbolique pour la formalisation des mathématiques.[20] Il s'agit de l'invention du premier calcul d'une logique des prédicats, révolutionnant la logique d'autrefois. Cette révolution était à la fois une révolution en philosophie du langage et en mathématiques.

La motivation principale de Frege était de substituer au raisonnement souvent flou et ‹intuitif› des mathématiciens de son temps un raisonnement strict, formulé dans un langage appauvri et formel.[21] Il était convaincu que le progrès en mathématiques ne pouvait plus continuer d'être achevé par des exploits de génie, mais qu'il nécessitait une discipline rigoureuse qui permet un contrôle automatique et algorithmique des preuves : c'était en remplaçant le génie solitaire avec un ordinateur qu'il pensait mettre la nouvelle science sur une base solide.[22] Pour atteindre ce but, il pensait devoir créer un langage nouveau qui permette d'exprimer les raisonnements mathématiques sans aucune ambiguïté.

Les difficultés rencontrées par Frege lors de l'élaboration de ce projet l'ont mené (i) à la distinction cruciale entre le sens et la référence (dénotation) d'un mot, effectuée dans un article intitulé « Sinn und Bedeutung » (« sens et dénotation ») (1892b / 1971d, cf. p. 223), (ii) au développement d'une ontologie réaliste des objets abstraits dans « Der Gedanke » (« la pensée ») (1918a / 1971b, cf. p. 127) et (iii) à la découverte, par Bertrand Russell dans l'ouvrage principal de Frege, « Grundgesetze der

[18] La « Begriffsschrift » ou « Idéographie » (traduction alternative : « écriture de concepts »), le premier ouvrage en logique moderne, a été traduite en français par Corine Besson (1999).
[19] Il va de soi qu'un tél schéma ne peut être qu'une caricature maximalement brute.
[20] Nous donnerons des exemples de la notation de la « Begriffsschrift » à la p. 94.
[21] Nous reviendrons sur les motivations mathématiques du projet de Frege dans la sct. 4.3.
[22] En effet, nous avons pu constater en informatique, au cours des dernières trente années, une évolution très similaire dans la programmation, qui a abouti à la programmation dite « modulaire » ou « orientée objet ». Le concept d'ordinateur, inconnu à Frege, a été développé plus tard, notamment par Alan Turing.

PROOF

Arithmetik » (« lois fondamentales de l'arithmétique ») (1893 ; 1903), du paradoxe des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes[23] – ainsi qu'à la naissance des mathématiques axiomatiques. Basée sur les travaux de Frege en philosophie du langage, l'analyse des descriptions définies de Bertrand Russell (1905 / 1985a) que nous discuterons en détail dans le chapitre 9 (p. 234 et suivantes) représente l'exemple paradigmatique de la philosophie du langage du début du vingtième siècle.

L'école de Vienne, menée par Rudolf Carnap et Moritz Schlick, utilisait, dans les années vingt et trente, des outils développés par Frege et Russell pour une critique du néo-kantisme et de la phénoménologie (Carnap 1928a / 2002, 1928b, 1931 / 1985, Schlick 1925 / 2009). Le premier Wittgenstein[24] leur avait ouvert la voie avec son *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921 / 1993), où il donne une sémantique de la logique propositionnelle en termes de tables de vérité comme celle que nous présenterons dans la sct. 2.6. Quant à la sémantique de Carnap, elle a reçu sa forme canonique dans son livre « Meaning and Necessity » (1947 / 1997) qui présentait pour la première fois une sémantique des opérateurs modaux (comme « nécessairement »/ « il est nécessaire que » et « possiblement »/ « il est possible que »), centraux à l'analyse des noms propres par Kripke dans « Naming and Necessity » (1972 ; 1980 / 1982).[25]

À partir des années trente, Willard van Orman Quine (1950, 1953, 1960, 1970) a été le principal philosophe à se manifester fermement pour une nouvelle conception de la philosophie, plus scientifique et rigoureuse, prenant comme modèle les travaux de Frege. Ses disciples Donald Davidson (1980, 1984) et Hilary Putnam (1975a,b) ont fait des États-Unis le centre de la philosophie contemporaine.

Dans les années soixante, le tournant vers la logique et la philosophie du langage était considéré comme le trait caractéristique de la philosophie du vingtième siècle. Richard Rorty (1967), dans une collection intitulée « The Linguistic Turn », l'a défini comme suit :

> I shall mean by "linguistic philosophy" the view that philosophical problems are problems which may be solved (or dissolved) either by reforming language, or by understanding more about the language we presently use. This view is considered by many of its proponents to be the most important philosophical discovery of our time, and, indeed of the ages. (Rorty, 1967, 3)[26]

Cette nouvelle importance donnée à la philosophie du langage se manifeste dans la redéfinition du but même de la recherche philosophique : la question socratique « Qu'est-ce que x ? » est remplacée par « Quelle est la signification de « x » ? ». Strawson et Austin l'ont fait pour ce qui est du problème de la vérité (Strawson, 1949 ; Austin, 1961). Quine, dans un article célèbre « On what there

[23] Nous reviendrons sur ce paradoxe et d'autres paradoxes de la même famille dans le ch. 4.3 à la p. 93.

[24] Cette expression curieuse « premier Wittgenstein » est utilisée pour parler de la première phase de l'œuvre de Ludwig Wittgenstein (1889 – 1952), surtout du « Tractatus », écrit en 1918 quand il était prisonnier de guerre en Italie. L'auteur des « Investigations Philosophiques » (1936–1949) qui sont plus orientées vers le langage ordinaire et plus critique de la philosophie, est normalement appelé « deuxième Wittgenstein ». Il existe un vif débat sur la question s'il existait un troisième Wittgenstein entre les deux.

[25] Nous reviendrons sur la logique modale au ch. 14 et sur la critique kripkéenne de la philosophie du langage de Frege à la sct. 12.4.

[26] Je cite sans changer les guillemets. Les doubles guillemets anglais ne sont donc pas ici des 'scare quotes'. Traduction : « Je veux dire par « philosophie du langage » l'opinion selon laquelle les problèmes philosophiques sont des problèmes qui devraient être résolus (ou dissolus) soit en réformant le langage, soit en comprenant davantage du langage que nous utilisons aujourd'hui. Cette opinion est considérée par beaucoup de ses tenants être la découverte philosophique la plus importante de notre temps, et, même, de toutes les époques. »

PROOF

is » Quine (1948, trad. 2004) a proposé de remplacer la question de savoir si a existe par la question de savoir si « a » possède un référent ou bien si une phrase telle que « Fa » est formalisée à l'aide d'une variable liée par un quantificateur (comme « il y a un x qui est (identique à) a et qui est F »).[27] Même si nous pouvons constater aujourd'hui et depuis les années soixante-dix un certain ‹ retour à la métaphysique ›, la philosophie du langage et la logique demeurent au centre de toute éducation philosophique.

Le « tournant métaphysique » de la fin du siècle dernier, comme le « tournant linguistique » d'auparavant, à la fois présuppose, utilise et théorise la logique : utilisant des outils logiques, de nouvelles théories de l'essence (Fine, 1995), de l'information (Barwise and Seligman, 1997), de la dépendance ontologique (Correia, 2005), des groupements naturels (Sider, 2011) et de l'existence nécessaire (Williamson, 2013) ont été développées. Dans beaucoup de ces applications, la logique, à travers ses formules et son langage, ne sert que comme manière d'exprimer des thèses qui elles pourraient parfaitement être formulées en langage naturelle. Voici donc un autre but de cette méthode de logique : de permettre à tout le monde, aussi peu 'matheux' qu'il soit, de comprendre, évaluer et critiquer des arguments présentés sous forme formelle, logique ou généralement abstraite.

1.2 Les arguments formellement valides

La philosophie est la science des arguments, et la logique est l'étude des inférences valides. Ce qui oppose la logique à d'autres domaines de la philosophie est donc qu'elle essaie explicitement de distinguer les *arguments formels* et valides des autres arguments, non formels, et ne s'occupe que des premiers. Voici une manière de définir ces termes : Un discours est un raisonnement s'il essaie de justifier (et par cela d'expliquer) la vérité d'une certaine phrase ; autrement, il peut s'agir d'un discours interrogatif, impératif, etc. Un raisonnement est un argument s'il vise à donner une raison de croire une phrase. Une telle raison consiste en une réponse possible à la question de savoir pourquoi on croit ceci (la phrase en question) et non pas cela (la négation de cette phrase par exemple). Une phrase, selon l'usage des mots que nous adapterons par la suite, est quelque chose qui peut être vrai ou faux (et rester vrai ou faux quel qu'en soit l'énonciateur, le temps et le lieu de l'énonciation).[28] Un argument consiste en une ou plusieurs prémisses et une conclusion, typiquement séparées par un mot comme « donc ». En logique, ces arguments sont représentés schématiquement sous forme verticale, en séparant les phrases servant de prémisses et celle de conclusion par une barre horizontale, ou en notant le symbole « $\therefore$ » avant la conclusion. La logique n'est rien d'autre qu'une étude de ce mot clé « donc » (« ergo » en latin, « therefore » en anglais).

Un argument n'est pas la seule réponse possible à la question de savoir pourquoi on croit telle ou telle affirmation. Considérons le cas d'un végétarien qui affirme qu'il ne faut pas manger de viande et comparons deux réponses qu'il pourrait donner si on lui demandait pour quelle raison il affirme

[27] Il s'agit du fameux critère d'engagement ontologique dont nous reparlerons à la p. 265.

[28] Nous dévions ici de l'usage ordinaire et utilisons le mot « phrase » comme un terme technique (cf. le glossaire aux p. 475 et suivantes pour un résumé des notions techniques). Nous appelons « phrase » ce que Quine et d'autres appelleraient une « phrase éternelle », une phrase déclarative qui n'est ni ambigüe ni indexicale : « J'ai faim maintenant », par ex., ne serait pas une phrase, bien que « P.B. a faim le 22 février à 11 heures » en est une, à moins qu'il ne faille ajouter une référence à un fuseau horaire. Nous nous limitons également à des phrases déclaratives, excluant les ordres, les souhaits, les questions et tout autre type de phrase. Une phrase déclarative est n'importe quelle phrase grammaticale du français qui peut être mise à ? la place du « x » (subordonnée) dans la question suivante « est-il vrai que x ? ».

PROOF

cela :

> Je crois que la viande provient d'un animal mort, le plus souvent tué, que l'animal est doué de vie comme le sont les êtres humains et que par principe il ne faut pas ôter la vie. (1.1)

> J'ai été élevé dans un contexte familial et social où j'ai développé depuis mon enfance la terreur du sang. (1.2)

Bien qu'une réponse de type (1.2) puisse expliquer pourquoi quelqu'un est végétarien, elle ne nous donne pas de raison d'être pour ou contre le végétarisme ; même si elle peut expliquer ou rationaliser une certaine prise de position, elle ne fournit pas d'argument en sa faveur.

Une réponse du type (1.1), cependant, *justifie* (ou, au moins, vise à justifier) l'affirmation et la croyance qu'il ne faut pas manger de viande. Elle vise à nous donner des *raisons* de ne pas manger de viande. Il est certainement possible de mettre en question les prémisses du raisonnement et de douter du fait que l'affirmation du végétarien s'ensuit effectivement de ses prémisses (il s'agit ici de deux choses assez différentes), mais il est clair que quelqu'un qui donne une réponse du type (1.1) pense que ses considérations manifestent des raisons également valables pour son interlocuteur. La logique ne se préoccupe que des réponses du type (1.1) et seule une telle réponse fait partie d'un *argument*, celui dont la conclusion est qu'il ne faut pas manger de viande. Puisqu'elle ne tient pas compte de l'état mental des opérants, il faut distinguer la logique de la psychologie, un point beaucoup souligné par Frege. Et comme la logique ne s'intéresse pas à la présentation des arguments, il faut en outre la distinguer de la rhétorique.

Un argument est une inférence si ses prémisses visent à donner une raison suffisante pour croire la conclusion – de telle sorte qu'il soit impossible que les prémisses soient vraies et la conclusion fausse. Si c'est le cas, l'inférence est appelée « valide » ; par conséquent, une inférence valide est telle qu'il est impossible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse – même si, en fait, les prémisses et la conclusion sont fausses. Un tel argument apodictique vise à fermer l'‹ espace › qu'il pourrait y avoir entre les prémisses et la conclusion.

Une inférence est formelle si sa validité ou non provient uniquement de sa forme : si elle est convaincante, toutes les autres inférences ayant la même forme le sont aussi.[29] Ici, nous identifions la forme d'un argument avec sa formulation linguistique.[30] Dans le cas de l'argument du bonheur des logiciens, nous attribuons la validité de l'inférence à la présence des mots appelés « logiques ». Les différentes logiques se distinguent en ce qu'elles considèrent chacune différents ensembles de mots comme étant des mots logiques. Ce choix est, dans une certaine mesure, arbitraire : si ou non nous avons choisi les ‹ bons › mots logiques est une question qui ne peut se décider que sur la base de la richesse et de l'utilité de la logique qui en résulte.[31]

[29] La qualification « ou non » sert à exprimer une double condition : il n'est pas le cas que tous les arguments formels sont convaincants (parce qu'il y en a certains qui sont fallacieux) ; et deuxièmement, ceux qui le sont, le sont en vertu de leur forme, *et* ceux qui ne le sont pas, ne le sont pas en vertu de leur forme.

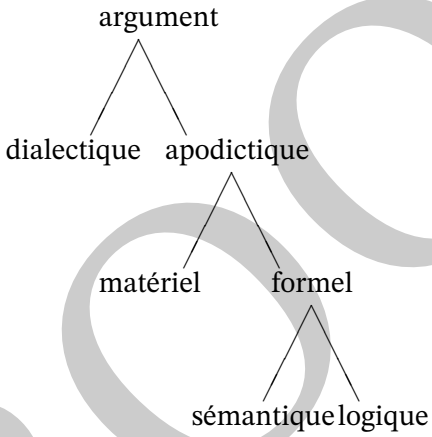
[30] D'autres notions de formalité sont possibles. Kant, par exemple, oppose les vérités analytiques aux synthétiques et dit que les premières n'explicitent que des marques de concepts qu'elles contiennent. Il considère le jugement « tous les corps sont étendus » comme analytique, parce que la marque (*Merkmal*) de l'étendue est comprise dans le concept (*Begriff*) du corps, par opposition au jugement « tous les corps sont pesant », où la connexion entre la pesanteur et la corporalité repose sur les lois de la physique.

[31] Ces remarques relativistes ont pour but d'éviter une controverse subtile en philosophie de la logique (sur laquelle nous reviendrons dans la sct. 5.3). Les philosophes de la logique expliquent son apodictique soit en termes de nécessité, soit

PROOF

Une inférence logique est une inférence formelle dont la forme est entièrement représentée par des mots logiques comme « et », « ou », « donc », « par conséquent ». On peut donc dire qu'une inférence logique est convaincante ou non *en vertu de* la signification de ces mots logiques. Un argument qui est convaincant ou non en vertu de l'implication de la conclusion par ses prémisses est une *inférence*. À part les inférences logiques, il faut reconnaître les inférences matérielles et sémantiques. Si j'infère « cette surface n'est pas rouge » de « cette surface est verte », par exemple, j'exploite une nécessité (l'exclusion de différentes couleurs), sans pour autant me baser sur la signification de mots logiques.[32] Parfois, cette nécessité est sémantique, due à la signification des mots – il s'agit alors d'une inférence sémantique ou analytique. Si les mots en vertu desquels un argument est convaincant (s'il l'est) sont des mots logiques, et donc que l'argument est convaincant (s'il l'est) en vertu de sa forme logique, on parle d'une « inférence logique ».

Nous distinguons donc, parmi les arguments bons ou persuasifs, ceux qui sont également des inférences, et parmi les inférences celles qui ne doivent leur qualité qu'aux significations des mots qu'ils contiennent (les inférences formelles). Parmi ces inférences formelles, nous distinguons les inférences logiques ; ces dernières sont les arguments déductifs, qui sont étudiés par la logique.



Dans le cas où un argument apodictique (= une inférence) *réussit* (et alors est tel que quelqu'un qui accepte ses prémisses devrait aussi accepter la conclusion), l'inférence est dite *« valide »*. Pour un argument valide, il n'est pas requis que quelqu'un accepte *en fait* ses prémisses : il suffit que, si cette personne acceptait les prémisses, elle devrait aussi accepter la conclusion. En ce sens, la logique – l'étude des inférences formelles valides – ne s'occupe pas des vérités (simples), mais des connexions entre elles : elle ne nous dit pas *ce* qu'il faut croire *en fait*, mais nous dit ce qu'il faut croire *sur la base d'autres croyances qu'on a déjà*. Ainsi, un théiste et un athéiste peuvent parfaitement être d'accord sur le statut logique d'un argument (p. ex. le fait que la conclusion s'ensuit réellement des prémisses) et toujours être en désaccord sur la conclusion – ceci en vertu d'être en désaccord sur une ou plusieurs des prémisses.

en termes de structure – soit ils commencent avec le *type* de la raison fournie par une prémisse pour la conclusion, l'appelant « formelle » et argumentent que de telles raisons sont nécessaires ; soit ils posent la *force* des raisons logiques en premier et l'expliquent par le fait qu'elle réside dans leur forme. Notre choix, inspiré par Bolzano, de commencer avec la signification de certains mots arbitrairement considérés comme ‹ logiques › a pour but de rester neutre sur cette question.

[32] Je présuppose ici que « rouge » n'est pas un mot logique. Il pourrait l'être, cependant, dans une ‹ logique chromatique ›, si une telle chose existait. (Ici, le conditionnel équivaut au 'scare quotes'.)

PROOF

À notre classification des arguments correspond une classification des critères de leur évaluation. Dans le cas d'un argument apodictique, l'évaluation examine la relation de conséquence entre les prémisses et la conclusion – la question est de savoir si la conclusion *s'ensuit* des prémisses. Dans le cas des inférences matérielles, cette question dépend de considérations extérieures à l'argument – de la nature des couleurs par ex. Pour les inférences formelles, il s'agit d'une question d'analyticité : quelles sont les significations de mots en vertu desquelles la conclusion s'ensuit des prémisses ? Dans le cas de mots logiques, dont la signification et le comportement inférentiel sont explicitement définis, la relation de conséquence s'ensuit de la définition de ces mots – elle peut être prouvée, à partir de ce que nous avons déterminé de sa signification :[33]

<table>
<tr><td colspan="4">arguments</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">inférences</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">inférences formelles</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>inférences logiques</td></tr>
<tr><td>Tous les c. observés étaient noirs.
∴ Ils sont tous noirs.</td><td>Cette surface est entièrement rouge.
∴ Elle n'est pas verte.</td><td>D. est le mari d'A.
∴ D. est un homme.</td><td>Si j'étudie la l., je serai h. et s.
J'étudie la logique.
∴ Je serai heureux et sage.</td></tr>
<tr><td colspan="4">convaincants ou non ?</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">valides ou non ?</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">analytiques ou non ?</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>prouvables ou non ?</td></tr>
</table>

La distinction entre les arguments qui ne sont pas formels, les inférences qui fonctionnent sur des mots qui ne sont pas logiques et les inférences formelles qui ne fonctionnent que sur des mots logiques n'est pas toujours très claire et aisée. Que dire, par exemple, du fameux argument « Je pense ; donc je suis » que Descartes nous présente dans la deuxième *Méditation* ? La présence de « donc » indique qu'il s'agit d'un argument : Descartes veut donner une raison de croire qu'il existe ; et il est certainement vrai que pour penser, il faut exister. Mais est-ce parce que le monde est comme il est (première catégorie), parce qu'il est ainsi nécessairement (deuxième catégorie), parce que nous utilisons « penser » comme nous le faisons (troisième catégorie), ou plutôt parce qu'il y a des prémisses tacites qu'on peut exploiter pour montrer que le « sum » est une conséquence logique du « cogito » ? Difficile à dire.

On observe que tous les arguments dépendent d'une régularité : il s'agit toujours d'établir un nouveau fait sur la base d'autres faits, déjà établis. La base de cette extension de notre savoir peut être constituée par diverses sources. Les différents arguments considérés sont convaincants (s'ils le sont) car

- Les corbeaux observés forment un échantillon représentatif de la totalité des corbeaux.
- Rien d'entièrement rouge peut être vert.
- Seuls les hommes peuvent être des maris.

[33] J'utilise les trois points « ∴ » (prononcés « donc ») pour signifier qu'on tire une conclusion.

PROOF

- S'il y a une seule condition logiquement suffisante pour mon bonheur et que cette condition est remplie, alors je suis heureux.

Dans les deux premiers cas, on a envie de dire que les arguments sont convaincants parce que le monde est comme il est, mais dans différentes circonstances, ces mêmes arguments perdraient leur crédibilité. À propos des deux colonnes au milieu, on a envie de dire que les arguments sont convaincants parce que les choses ont les essences qu'elles ont ou parce qu'on parle une langue particulière et non pas une autre.[34] Si « mari » signifiait « épouse » et que Denis était le mari d'Annette, alors Denis serait une femme.[35] Comme en témoigne le discours raciste en particulier, les significations de nos mots sont floues, flexibles et changent, d'occasion à occasion mais aussi avec le temps. Ce qui est raciste à un temps, dans un contexte et dans une langue particulière ne l'est pas forcément à un autre temps, dans un autre contexte et dans une autre langue.

Mais que dire de la colonne de droite ? Nous disions que ces arguments sont convaincants en vertu de leur forme, plus particulièrement de la signification des mots logiques qu'ils contiennent, c'est-à-dire de « si … alors ⋯ ». Comment pourrait-on expliciter cela ?

1.3 Les langues formelles et naturelles

Afin de mieux comprendre la distinction entre, d'une part, les arguments convaincants en vertu de la signification de certains mots ‹ substantiels › qu'ils contiennent (comme « mari » ou « rouge ») et, d'autre part, les arguments qui ne dépendent que des expressions dites « logiques » (comme « si … alors ⋯ »), il faut comprendre la distinction entre langues formelles et langues naturelles.

Examinons ce que nous devrions faire pour développer une « logique » du mariage et des couleurs. En première étape, nous devrions fixer des définitions précises des mots respectifs (comme « mari » ou « rouge »), peut-être en en prenant quelques-uns comme « primitifs ». Sur la base de ces définitions, nous pourrions ensuite établir quels arguments impliquant ces mots nous comptons comme logiquement valides. En faisant ceci, nous pourrions peut-être clarifier les discours conjugaux et chromatiques et y résoudre des disputes,[36] mais en payant un prix considérable : toute personne n'acceptant pas nos inférences comme valides sera soit accusée d'ignorer la signification de ses propres mots, soit jugée de parler une autre langue que la nôtre. Clairement, de telles accusations seront inappropriées pour un mot comme « mariage » – pour un tel mot (et pour les mariages eux-mêmes), seuls une cer-

[34] Cette disjonction est censée laisser ouverte la question (controversée) s'il y a des essences de choses et de mots. Peut-être toute la structure du monde lui est-elle imposée par notre manière d'en parler, et l'incompatibilité entre le rouge et le vert est réellement une règle d'usage pour les mots de couleurs.

[35] Pour un exemple d'une dispute très concrète sur la signification des mots, voir le témoignage d'expert que la philosophe québécoise Adèle Mercier a donné à l'Ontario Superior Court of Justice (Court files 684/00, 30/2001) en novembre 2003, argumentant contre le philosophe Robert Stainton que la signification de « mariage » n'excluait pas la possibilité d'un mariage entre deux personnes du même sexe (cf. : https://commons.pacificu.edu/eip/vol8/iss1/14/ et https://nanopdf.com/download/mcct-v-ontario-and-canada-equal-marriage-for-same_pdf, accédés le 22 février 2019).

[36] Sur cette motivation de l'idéographie de Frege, cf. Barnes (2002). L'espoir qu'un langage purifié et ‹ formalisé › peut contribuer à la paix jouait un grand rôle pour Leibniz qui espérait réconcilier catholiques et protestants par sa caractéristique universelle : « Alors, il ne sera plus besoin entre deux philosophes de discussions plus longues qu'entre deux mathématiciens, puisqu'il suffira qu'ils saisissent leur plume, qu'ils s'asseyent à leur table de calcul (en faisant appel, s'ils le souhaitent, à un ami) et qu'ils se disent l'un à l'autre : « Calculons ! » » (citation et traduction données dans Wikipedia : Gottfried Wilhelm Leibniz, *Nova methodus pro maximis et minimis* in Acta Eruditorum, 1684). Cf. Hintikka (1997) sur l'importance de cette conception de la logique comme langage pour la philosophie.

PROOF

taine fluidité, du vague et un manque de précision rendent possible la communication parmi des personnes qui diffèrent en conceptions, opinions et associations par rapport au mot et à la chose qu'il dénote. Nous ne pouvons pas mettre de tels mots vivants dans le frigo de la logique. Mais ça n'est pas le cas pour tous les mots, et ça ne pourrait l'être. La raison en est ce qui a été appelé la « systématicité » des langues qui ne peuvent pas seulement être parlées, mais également apprises.

Supposons que nous parlons tous une langue naturelle qui ressemble, plus ou moins, au français : cela implique que les mots que nous utilisons se trouvent (du moins en grande partie) dans des dictionnaires de langue française et composent des expressions plus longues et des phrases en suivant (plus ou moins) les règles de la grammaire française.[37] Notre vocabulaire, cependant, est fini. Sa connaissance, par contre, nous permet de comprendre et d'utiliser une infinité de phrases, la plupart desquelles nous n'avons jamais entendues auparavant. Ce qui permet l'acquisition d'une capacité infinie par l'apprentissage d'une base finie est que la grammaire du français obéit, au moins en principe, à un *principe de compositionnalité* : elle détermine la signification d'une expression complexe sur la base de la signification des expressions plus simples qu'elle contient et de la manière dont celles-ci sont composées pour former l'expression complexe. La signification du complexe est donc (en principe) ‹ calculable › à partir de la signification de ses constituants. Pour les langues vivantes (« langues naturelles »), il s'agit d'une idéalisation. Donald Davidson (1967) a argumenté que c'était ce *principe de compositionnalité* qui nous permettait d'apprendre une langue et de connaître les significations de phrases entièrement nouvelles (encore jamais entendues) sur la base de notre connaissance des mots qu'elles contiennent et des règles grammaticales.

En voici un exemple : Quelqu'un qui connaît ce que veulent dire les mots « le président », « les États-Unis », « le fils de », « sourire à quelqu'un » et « Maria » comprendra (au moins) toutes les phrases suivantes :

- Le fils du président des États-Unis sourit à Maria.
- Le fils du président des États-Unis sourit au fils de Maria.
- Maria sourit au fils du président des États-Unis.
- Le fils de Maria sourit au président des États-Unis.
- Le président des États-Unis sourit au fils de Maria.

Il faut distinguer ces phrases grammaticalement correctes (« bien formées » dans la terminologie de la logique) de celles qui ne sont pas seulement pas vraies mais dénouées de sens : « Maria les États-Unis sourit », « Sourit le fils de Maria États-Unis » et « Maria Maria Maria », par exemple, ne sont pas des suites de mots qui forment des phrases en français.

Même si les langues naturelles sont faciles à apprendre, elles sont extrêmement difficiles à décrire – c'est pour cette raison que la linguistique est une science aussi complexe. Une source de ces difficultés réside dans le fait que les règles qui gouvernent la formation des expressions complexes sur la base d'expressions plus simples ne sont pas seulement sensibles à la catégorie grammaticale de ces expressions, mais également à leurs significations. Même si « les États-Unis » est une expression du même type grammatical que « le fils de Maria », nous reconnaissons que « Les États-Unis sourient au président » n'est pas doué de sens de la même manière que l'est « Le fils de Maria sourit au président ». Le fait que les pays ne puissent pas sourire et ne puissent pas avoir de fils (excepté de façon

[37] J'utilise « expression » pour désigner n'importe quelle partie du discours qui porte une signification indépendante : les mots, les phrases (simples et complexes), les combinaisons de mots comme « fils de Maria », « extrêmement chaud », « il n'est pas le cas que … », etc. Il va de soi qu'une telle caractérisation ne peut être que provisoire.

PROOF

métaphorique) n'est pas dû à la grammaire, mais à la nature des pays, des fils et des sourires.

Dans le cas des langues naturelles, les règles grammaticales ne considèrent donc pas uniquement la catégorie grammaticale des expressions. Le subjonctif en est un exemple probant : le fait qu'il soit correct de dire « je m'attends à ce que tu viennes », mais qu'il ne soit pas correct de dire « j'espère que tu viennes » dépend des *significations* des verbes « s'attendre à ce que » et « espérer que » (et ne dépend pas seulement de leur catégorie grammaticale qui est la même).[38] Un autre exemple est la formation du pluriel en allemand qui, elle aussi, dépend d'autres facteurs que de la seule forme des expressions : « Frau » devient « Frauen », « Bau » devient « Bauten » et « Sau » devient « Säue ».

C'est sur ce plan là que les langues formelles diffèrent des langues naturelles : les langues formelles sont construites de manière explicite d'après des règles qui n'admettent pas d'exceptions. La construction faite à partir des composantes de la phrase est plus simple et suit une méthode qui s'explicite facilement. Contrairement aux langues naturelles, les langues formelles sont des créations artificielles : nous déterminons leur vocabulaire, choisissons une interprétation univoque pour chacune de leurs expressions primitives et donnons les règles selon lesquelles on peut former des expressions complexes à partir d'expressions simples. Bien que ce caractère artificiel des langues formelles les rende plus faciles à décrire, il réduit leur expressivité : l'ironie, les métaphores, le double-sens (etc.) sont tous impossibles dans une langue formelle, et son vocabulaire et ses règles de construction de phrases sont très réduites par rapport aux langues naturelles.

Une autre différence entre langues formelles et naturelles concerne l'ambiguïté. Considérons un cas d'ambiguïté syntaxique. Une suite de mots telle que :

Si tu pars je reste et Marie ne sera pas contente. (1.3)

peut avoir deux analyses syntaxiques :

Si tu pars (je reste et Marie ne sera pas contente). (1.3+)

(Si tu pars je reste) et Marie ne sera pas contente. (1.3∗)

Seulement la deuxième interprétation affirme catégoriquement le mécontentement de Marie et seule la première ne se prononce pas sur ce qui se produit dans le cas où tu restes. Comme le montre cet exemple, l'ordre des mots ne détermine pas la structure syntaxique. Il s'agit alors de deux phrases différentes – ce qui se voit dans leur différence dite « prosodique » (dans la prononciation des deux phrases, peut-être indiquée par une virgule) et également dans leurs formes logiques.[39] On parle d'« ambiguïté

[38] En disant qu'il y a des *raisons* à une telle application du subjonctif, j'idéalise beaucoup, et ceci à contre-cœur – je trouve philosophiquement scandaleuse la raison que me donne ma grammaire de lycée (*Grammaire française* Neuchâtel : Messeiller, 12ème éd. 1992) pour appliquer le subjonctif à ce qui suit « il est nécessaire que … » : « Tandis que l'indicatif exprime un fait réel, sûr, positif, certain, dans l'esprit de celui qui parle, le subjonctif exprime essentiellement un mouvement de l'âme, un fait douteux, possible, souhaitable, incertain (une vérité subjective). » (p. 202).

[39] La forme logique de (1.3+) est celle de « $p \to (q \wedge \neg r)$ », celle de (1.3∗) est celle de « $(p \to q) \wedge \neg r$ » ou « $\to$ » est « si … alors … », « $\wedge$ » est « et », « $\neg$ » est « il n'est pas le cas que », « p » est « tu pars », « q » est « je reste » et « r » est « Marie sera contente ». Il se peut que la différence en forme logique ne soit pas facilement mise au point, par exemple dans le cas de l'exemple fameux de Chomsky : « Visiting relatives can be a nuisance ». Un autre exemple d'une telle ambiguïté syntaxique est le cas de l'adjectif épithète : un philosophe italien, par exemple, est un philosophe et un italien, tandis qu'un philosophe accompli n'est pas accompli absolument, mais ne l'est qu'en tant que philosophe (Aristote a des choses très intelligentes à dire là-dessus) ; un philosophe continental, finalement, peut, mais ne doit pas, travailler sur le Continent et un philosophe manqué n'est pas un philosophe du tout.

PROOF

structurelle » si plusieurs interprétations résultent de différents regroupements logiques des parties de la phrase, à distinguer de l'ambiguïté littérale où un mot a plusieurs interprétations. Par « je n'ai rien fait pour me distinguer de mes collègues », je peux vouloir dire soit (i) que je ne fais rien, afin de me distinguer de mes collègues (qui eux, font des choses), soit (ii) que je ne fais rien qui puisse me distinguer de mes collègues (et de ce qu'ils font).[40] Afin d'indiquer ces formes logiques et pour indiquer l'ambiguïté de la phrase initiale (1.3), nous nous sommes servis des parenthèses qui – dans cet usage-ci, au moins – ne font pas partie du français. Nous avons donc donné les formes logiques de deux interprétations de (1.3) dans une langue semi-formelle qui reprend le vocabulaire basique du français mais contient plus de symboles structurels. Une langue entièrement formelle permet d'aller encore plus loin dans cette direction et d'éviter tous les cas d'ambiguïté.

Les langues naturelles ne contiennent pas seulement des expressions et des phrases ambiguës, mais également des expressions indexicales. Une expression indexicale est une expression dont la signification dépend – de manière systématique et transparente – du contexte de son utilisation.[41] Le mot « je », par exemple, se réfère toujours au locuteur, le mot « aujourd'hui » au jour au cours duquel il est utilisé, le mot « ici » à l'endroit où l'énonciation de la phrase a lieu, etc.[42] Ces expressions indexicales peuvent mener à des arguments fallacieux. Si j'infère « je serai heureux et sage » de *vos* énoncés « si je fais de la logique, je serai heureux et sage » et « je fais de la logique », j'infère une conclusion différente de la proposition exprimée dans la deuxième partie de votre première prémisse. Cette deuxième partie est vraie si et seulement si *vous* êtes heureux et sage. Les langues formelles, en général, font également abstraction de ce trait des langues naturelles et ne contiennent pas d'expressions indexicales.[43] Par conséquent, les phrases dont les relations sont examinées en logique se distinguent des phrases complètes des langues naturelles en ce qu'elles sont vraies ou fausses quelle que soit la personne qui les affirme et quel que soit le temps ou le lieu de leur énonciation.[44]

Nous avons dit que selon le principe de compositionnalité, la signification d'une phrase est fonction de la structure syntaxique de cette phrase et des significations des mots qui la composent. La structure syntaxique est alors une règle qui nous indique de quelle manière il faut combiner les significations des mots pour arriver à la signification de la phrase ; elle représente la structure de la phrase qui ne dépend que de la forme des expressions. Mais que veut-on dire par « forme des expressions » ?

[40] Pour donner encore un exemple, cette fois de pertinence philosophique, abrégeons « ma décision a une cause physique » par « p » et « ma décision a une cause mentale » par « q ». L'affirmation « $p \wedge (\neg q \vee q)$ » est alors compatible avec le parallélisme psycho-physique (une décision peut être surdéterminée par deux causes), bien que « $(p \wedge \neg q) \vee q$ » l'exclut. Merci à Yvan Uhlmann pour cet exemple.

[41] Les indexicaux paradigmatiques sont les pronoms personnels (« je », « tien », « vôtre », etc.), les désignations relatives au temps (« aujourd'hui », « après-demain », « il y a trois mois », etc.) et au lieu (« ici », « dans le voisinage », « près d'ici », etc.). Au-delà de ceux-là, il existe beaucoup de controverses sur l'étendue de la dépendance de la valeur sémantique (de la signification) du contexte d'énonciation (= définition du contextualisme). Je dis « de manière systématique et transparente » pour exclure les dépendances plus subtiles et vagues, comme pour « communiste » ou « libéral », mots qui signifient différentes choses dans différents contextes d'énonciation, mais sans que cette variation se réduise à une règle simple.

[42] Il s'agit ici d'une description idéalisée : les significations des indexicaux dépendent souvent d'autres choses que juste de leurs contextes d'énonciation au sens strict. Nous pouvons, par exemple, utiliser « aujourd'hui » pour parler d'une période de temps plus longue qu'un jour : « Descartes pensait que le vacuum était impossible, mais nous savons aujourd'hui qu'il avait tort. » Nous reviendrons sur les indexicaux aux p. 234 et suivantes dans le ch. 9.4.

[43] Une exception à cette règle, comme le montre déjà son nom, est la ‹ logique des démonstratifs › de Kaplan (1978, 1989).

[44] Nous allons donner, de temps en temps, des phrases temporalisées comme exemples. Nous ignorerons, cependant, toutes les complications liées à leurs temps grammaticaux, excepté dans la discussion sur la logique temporelle au ch. 14.

PROOF

La forme d'une expression est sa catégorie grammaticale, sa *forme syntaxique*. La syntaxe ne considère que les rapports des signes entre eux et fait abstraction de leurs significations. La *sémantique*, à l'inverse, s'occupe de la signification des mots : elle considère le rapport des expressions aux objets et aux situations dont on veut parler. Un concept fondamental de la sémantique est celui de *désignation*. Comme vu précédemment, Frege a institué la distinction entre sens et dénotation, et utilisé la dernière pour parler de la relation entre les objets du monde et les expressions qui nous permettent d'en parler. Cette relation de désignation s'observe, par exemple, entre l'expression « le vainqueur d'Austerlitz » et Napoléon, entre « die Sonne » et le soleil, ou encore entre « Louis XIV » et le Roi Soleil. C'est grâce à sa signification que « le vainqueur d'Austerlitz » nous permet de parler du vainqueur d'Austerlitz, c'est-à-dire Napoléon. Outre la désignation, la sémantique examine les concepts de *satisfaction* et de *vérité* : Napoléon satisfait la phrase ouverte « *x* a vaincu à Austerlitz » et donc la phrase « Napoléon a vaincu à Austerlitz » est vraie.

C'est par la distinction entre syntaxe et sémantique que nous pouvons distinguer les arguments des colonnes du milieu de ceux de la colonne de droite (cf. le tableau à la p. 12) : pour celle de droite, il n'est pas nécessaire de comprendre la signification de « J'étudie la logique » et de « Je serai heureux et sage » pour voir que l'inférence est valide. La validité de cette inférence ne dépend que du fait que ces expressions sont bien formées (= sont des phrases du français), c'est-à-dire de leur syntaxe, et du fait que les mêmes expressions sont répétées. C'est pour cela que tout autre argument qui ne se distingue du nôtre que par la substitution d'autres phrases bien formées est également valide et que la validité de l'inférence ne dépend que de son squelette logique.

Cependant, pour les inférences des deuxième et troisième colonnes, il faut connaître la signification des mots « mari » et « rouge » – elles ne dépendent pas seulement de la syntaxe, mais également de la sémantique. À la distinction entre syntaxe et sémantique correspond une distinction entre deux types de non-sens. Les deux suites de caractères « La rit vache » et « Le nombre 2 est bleu » ne veulent rien dire, mais seule la deuxième est une phrase bien formée du français. La première est un non-sens pour des raisons syntaxiques (elle n'est pas bien formée), alors que la deuxième (si elle l'est) l'est pour des raisons sémantiques.[45]

Mis à part la syntaxe et la sémantique, il faut reconnaître une troisième dimension, qui est celle de la *pragmatique* et qui peut aussi justifier certains arguments :

P Sam a dit que Marie aurait quand même pu venir.
C Donc, Sam aurait voulu que Marie vienne.

Cet argument, s'il est convaincant, l'est en vertu du fait que Sam ne se serait pas exprimé de la même manière s'il n'avait pas voulu que Marie vienne. Il ne dépend donc pas seulement de la sémantique des mots qu'il a utilisés (c'est-à-dire de leurs significations), mais aussi de l'usage que Sam en a fait. Cette influence est parfois difficile à déterminer exactement : quelqu'un qui dit « ils ont eu un enfant et ils se sont mariés » (et non pas « ils se sont mariés et ils ont eu un enfant »), *dit-il* qu'ils ont eu un enfant *après* leur mariage ?[46] Mais tous les arguments pragmatiques ne sont pas contestables au point de l'exemple célèbre du menteur : quelqu'un qui dit « Je ne dis jamais la vérité » ne peut pas

[45] Selon certains, il s'agit d'une « erreur de catégorie » : par sa signification « … est bleu » n'est applicable qu'à des entités étendues. Cf. Ryle (1949) et Magidor (2013) pour en savoir plus.

[46] Il semble incontestable qu'il a au moins *suggéré* qu'ils se sont mariés après la naissance. La différence entre les implications (conséquences logiques) d'une phrase et ses *implicatures* – les croyances qui doivent être attribuées à un locuteur pour rendre son énonciation sensée (cf. Grice 1975 / 1979) – a une importance fondamentale pour la jurisprudence et

PROOF

avoir raison – et ceci n'est pas dû à la forme logique ou la signification de la phrase, mais au fait qu'il l'a dit.[47]

1.4 Syntaxe et sémantique

Nous distinguons donc trois types de questions : syntaxiques, sémantiques et pragmatiques. Les questions syntaxiques sont de type : « quels rapports y a-t-il entre les mots dans une phrase ? », « quels rapports y a-t-il entre les autres parties d'une phrase ? ». Les questions sémantiques sont du type : « quel rapport y a-t-il entre les mots et les choses ? », « quel rapport y a-t-il entre les phrases et le monde ? » et « qu'est le sens d'une expression ? ». Finalement, les questions pragmatiques sont du type : « quel rapport y a-t-il entre la psychologie d'un locuteur et ce qu'il fait avec les mots ? » et « qu'est-ce qu'il a voulu dire avec une phrase qui a comme signification littérale que ... ? ». Une langue comme le français peut alors être décrite à trois niveaux :

par sa syntaxe Quelles sont les expressions bien formées (c'est-à-dire correctes selon les règles de grammaire de cette langue)? Quelles sont les procédures mécaniques qui permettent d'arriver d'une formule à une autre ? Ex. : « La rit vache »,« $p\neg \rightarrow q$ » et « $\exists\forall Rxy$ » sont mal formés (en français et dans le langage de la logique des phrases et de celle des prédicats respectivement) ; « Il pleut et je suis triste » implique « il pleut » indépendamment du fait qu'il pleuve ou non ; « $p \wedge q$ » implique « q » indépendamment de la signification de « p » et de « q ».

par sa sémantique Quelles sont les expressions sensées ? Quelles sont les transitions qui préservent la vérité en vertu de la signification des mots utilisés ? Ex. : « Le nombre 2 est bleu » n'a pas de sens ; « David est le mari d'Annette » implique « David est un homme » en vertu de la signification de « mari » ; « le roi Soleil » désigne Louis XIV ; la phrase « Schnee ist weiss » est vraie en allemand si et seulement si la neige est blanche.

par sa pragmatique Comment ces expressions sont-elles utilisées ? Quelles sont les régularités de leur usage et comment peut-on expliquer leur usage quand elles sont utilisées pour des actes de parole ? Ex. : La phrase « Il fait froid » signifie qu'il fait froid mais peut être utilisée pour donner à quelqu'un l'ordre de fermer la fenêtre, et même pour dire qu'il fait chaud (ce qui serait ironique). Les différences entre « je suis philosophe et heureux » et « je suis philosophe, mais heureux » et entre « ils se sont mariés et ils ont eu un enfant » et « ils ont eu un enfant et ils se sont mariés » sont généralement considérées comme étant de l'ordre pragmatique plutôt que sémantique.

La distinction entre sémantique et pragmatique est controversée en philosophie du langage. La sémantique concerne les relations entre la langue et le monde, c'est-à-dire la référence / la désignation entre phrases nominales et objets, la relation entre les prédicats et les propriétés et la vérité, parfois analysée comme relation entre des phrases et des faits, des états de choses, des situations ou des mondes possibles entiers. La pragmatique tâche d'expliquer l'activité d'utiliser un langage ; cette dernière peut avoir trois fonctions : représenter des choses, des faits, des conditions, etc. ; manifester ce que l'on croit, et, plus généralement, manifester des états mentaux comme des douleurs, des désirs, etc. ; modifier les états mentaux des autres et leurs comportements. Surtout quand la deuxième et la troisième fonction sont réalisées au moins en partie par la première (au moins dans quelques cas,

est également souvent discutée en philosophie du langage contemporaine (cf. par ex. Récanati, 2004).

[47] S'il avait raison, alors il serait faux qu'il ne dit jamais la vérité. Cf. la discussion plus approfondie ci-dessous (sct. 4.4).

PROOF

nous disons ce que nous pensons et influençons les autres en articulant (notre opinion sur) ce qui est vrai), la sémantique influence la pragmatique. Dans le sens inverse, l'expression de mes attitudes et de mes intentions transparentes d'influencer les autres constitue dans certains cas, au moins en partie, une affirmation sur comment est le monde. Les expressions performatives explicites en sont un bon exemple : si je dis « je vous promets que je serai là demain », je crée une obligation de ma part et une attente justifiée de la vôtre et je rends vrai la phrase « je vous ai promis que je serai là demain ».

Deux phénomènes rendent la description des langues naturelles particulièrement difficile : d'une part la distinction floue et inconstante entre des considérations syntaxiques et des considérations sémantiques ; et d'autre part l'influence de la pragmatique sur la sémantique qui elle alors dépend également de l'usage que l'on fait de la langue en question.[48] L'intérêt des langues formelles vient du fait qu'elles n'ont pas à faire face à ces deux problèmes. Elles évitent le premier parce qu'elles sont des langues artificielles, créées, de manière explicite, sur la base des définitions (qui déterminent la syntaxe) et de la stipulation de toutes les significations du vocabulaire (qui déterminent la sémantique) ; elles évitent le second car elles ne sont pas parlées et qu'elles n'évoluent pas dans le temps.

On appelle « langue naturelle » une langue telle que le français, l'anglais ou l'allemand ; l'usage particulier d'une langue fait par chaque individu est appelé « idiolecte ». On appelle « langue formelle » un système symbolique qui génère un ensemble de formules dites « bien formées » à l'aide de définitions récursives. Une définition récursive est une définition qui s'applique à plusieurs niveaux de complexité de manière itérative et montre qu'un certain trait d'un niveau plus simple est 'hérité' par le niveau plus complexe.[49] Elle exploite ainsi le principe de compositionnalité qui nous permet de comprendre des expressions complexes sur la base de notre connaissance des expressions simples et des règles de formation.

C'est pourquoi les mathématiciens utilisent une langue formelle pour parler, par exemple, des ensembles. Un ensemble est une collection de choses qui satisfont une certaine condition : « $\{x|x$ est vert$\}$ », par exemple, se réfère à l'ensemble de tout ce qui est vert, ce qui peut être lu comme « l'ensemble de tous les x tels qu'ils satisfont la condition que x soit vert ». Pour appartenir à cet ensemble, un objet doit être vert, et chaque objet vert appartient à cet ensemble. Pour dire qu'un certain chat, Simone, appartient à l'ensemble, nous écrivons « Simone $\in$ $\{x|x$ est vert$\}$ », ce qui est une autre manière de dire que Simone est vert. Nous effectuons un certain nombre d'opérations avec des ensembles, également représentées par des signes mathématiques. Pour désigner l'ensemble de toutes les choses qui sont soit vertes, soit rouges, nous écrivons « $\{x|x$ est vert$\}$ $\cup$ $\{x|x$ est rouge$\}$ », où « $\cup$ » est le symbole de l'*union* de ces deux ensembles. Pour parler des choses qui sont vertes *et* rouges, nous utilisons « $\{x|x$ est vert$\}$ $\cap$ $\{x|x$ est rouge$\}$ » (« $\cap$ » est le symbole d'*intersection*), ce qui est l'ensemble vide, désigné par « $\varnothing$ ».[50]

Il s'agit maintenant de construire une telle langue formelle pour la logique propositionnelle que nous appelons « $\mathcal{L}$ ». Les symboles primitifs (= non définis) de la langue $\mathcal{L}$ sont les suivants :[51]

[48] Il faut distinguer ici deux thèses : c'est une chose de penser, suivant le célèbre *dictum* de Wittgenstein : « Eine Bedeutung eines Wortes ist eine Art seiner Verwendung. » (1969, §61) (traduction française : « Une signification d'un mot est un mode de son utilisation »(1976, 42)), que la signification d'un mot doit être expliquée en termes de son usage (cf. par ex. Horwich, 1998a), c'est une autre chose de penser qu'une sémantique ‹ pure › est impossible et de défendre une pragmatique dite « radicale » (cf. par ex. Travis, 2008).

[49] Nous reviendrons sur la notion d''héritabilité' (au sens mathématique) à la p. 31 et nous définirons les définitions récursives dans le ch. 4 à la p. 106.

[50] Ces notions seront aussi expliquées plus en détail dans la section 15.1.

[51] Nous reviendrons sur la définition formelle de cette langue formelle à la p. 90. Il ne faut pas penser que « p » et « q »

PROOF

(**A1**) des phrases atomiques « p », « q », « r », « s », « t », etc.,
(**A2**) des constantes logiques « $\wedge$ » (parfois : « & ») (« et »), « $\vee$ » (« ou »), « $\neg$ » (parfois « $\sim$ ») (« il n'est pas le cas que »), « $\rightarrow$ » (parfois : « $\supset$ ») (« si ... alors $\cdots$ ») et « $\leftrightarrow$ » (parfois : « $\equiv$ ») (« ... si et seulement si $\cdots$ »),
(**A3**) des parenthèses « (» et «) ».

Un exemple d'une définition récursive est la définition suivante de ce qu'est une « formule bien formée » de cette langue $\mathcal{L}$:

(**B1**) Toute phrase atomique est une formule bien formée.
(**B2**) Si « p » et « q » sont des formules bien formées, alors « $(\neg p)$ », « $(p \wedge q)$ », « $(p \vee q)$ », « $(p \rightarrow q)$ » et « $(p \leftrightarrow q)$ » sont des formules bien formées.
(**B3**) Il n'y a pas d'autres formules bien formées.

Notons que par « phrase atomique » nous parlons des phrases relativement simples, c'est-à-dire des phrases qui soit n'ont pas de structure analysable par la logique propositionnelle (comme « Je suis heureux », « Maria est une femme »), soit ont une telle structure, mais une dont nous faisons abstraction dans notre formalisation de la langue naturelle.

C'est grâce à (**B2**) que nous appelons nos constantes logiques des « connecteurs » : ils relient des phrases pour en faire d'autres phrases, plus complexes, dont ils déterminent la signification selon le principe de compositionnalité. En appliquant ces définitions, on peut déterminer que

- « $(p \vee q)$ » est une formule bien formée : elle est formée des expressions « p » et « q » (**A1**) par la règle (**B2**).
- « $(p \wedge (p \vee q))$ » est une formule bien formée : elle est formée des expressions « p » (**A1**) et « $(p \vee q)$ » par la règle (**B2**). « $(p \vee q)$ » est bien formée parce qu'elle est formée des expressions « p » et « q » (**A1**) par la règle (**B2**).
- « p » est bien formée (**B1**).
- « $((p\wedge) \vee (p \rightarrow q))$ » n'est pas bien formée : puisque ce n'est pas une phrase atomique (**B1**), elle devrait, à cause de (**B3**), être formée par (**B2**). Mais alors « $(p\wedge)$ » et « $(p \rightarrow q)$ » devraient être des formules bien formées. Or, bien que la deuxième le soit, la première ne l'est pas : elle est ni complexe (**B2**) ni atomique (**B1**) et ne peut être rien d'autre (**B3**).

Les parenthèses servent à lever l'ambiguïté des phrases comme « p et q ou r » – veut-on dire qu'il faut choisir entre « p » et « q » d'une part et « r » d'autre part (« $((p \wedge q) \vee r)$ ») ou que nous avons de toute façon « p » et, également à choix, « q » ou « r » (« $(p \wedge (q \vee r))$ »)?[52] Les parenthèses rendent l'interprétation voulue explicite – quand elles ne sont pas nécessaires, elles peuvent être enlevées.[53]

À partir de la langue formelle $\mathcal{L}$, nous pouvons donc nous faire une idée claire de ce qu'est la forme syntaxique d'une expression : c'est la manière dont elle est formée en appliquant les règles (**B1**) à (**B3**) au vocabulaire défini par (**A1**) à (**A3**).

sont des expressions ‹ formelles › ou ‹ mathématiques ›. Comme nous le verrons par la suite (cf. p. 68), il s'agit de lettres schématiques, de simples abréviations. Ceux qui n'aiment pas leur caractère ‹ abstrait › (et qui ne se lassent pas de la répétition) peuvent substituer partout dans ce livre leurs phrases préférées pour « p » et pour « q ».

[52] Un autre exemple, donné à la p. 15, est l'ambiguïté entre « $p \rightarrow (q \wedge r)$ » et « $(p \rightarrow q) \wedge r$ ».

[53] Pour simplifier l'écriture, on supprime souvent les parenthèses extérieures : « $(p \rightarrow q)$ » devient « $p \rightarrow q$ », « $(p \wedge (q \vee r))$ » devient « $p \wedge (q \vee r)$ ». Nous introduirons plus tard, à la p. 32 quelques conventions qui nous aident également à limiter les parenthèses.

PROOF

Nous voyons aussi comment ces règles récursives génèrent une infinité de formules bien formées d'un vocabulaire qui ne contient qu'un nombre limité de phrases atomiques : à partir de « p », nous formons « $\neg p$ », « $\neg\neg p$ », « $\neg\neg\neg p$ », « $\neg p \vee p$ », « $\neg\neg\neg p \wedge \neg p$ », etc. Notre compréhension de cette infinité de phrases réside dans le fait que nous voyons comment elles sont construites à partir de « p », « $\neg$ », « $\vee$ » et « $\wedge$ ».

1.5 Formalisation

Ce qui distingue des arguments tels que « Sam est le mari d'Annette. Donc, Sam est un homme » des arguments comme « Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage. J'étudie la logique. Donc, je serai heureux et sage » est que les premiers dépendent des significations des mots qui se trouvent à l'intérieur des phrases simples, alors que la validité des deuxièmes ne dépend que des connecteurs (comme « si ... alors ⋯ ») qui relient ces phrases simples. Pour rendre cela plus manifeste, nous introduisons les caractères « p », « q », « r », « s », etc. comme abréviations de phrases telles que « j'étudie la logique », « je serai heureux et sage » :[54]

Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage.	$\rightsquigarrow$	Si p alors q.
J'étudie la logique.	$\rightsquigarrow$	p
Donc, je serai heureux et sage.	$\rightsquigarrow$	Donc, q.

Cet argument est convaincant quelles que soient les phrases que l'on abrège par « p » et « q » dans le schéma à droite. Il faut se rappeler que « convaincant » est utilisé ici dans le sens suivant : quelqu'un qui accepte les prémisses (les deux premières lignes), devrait aussi accepter la conclusion (la troisième ligne). L'argument en faveur du bonheur des logiciens est donc aussi convaincant que le suivant :

P1 Si je m'appelle Mario, alors vous allez mourir d'une maladie infernale.
P2 Je m'appelle Mario.
C Donc, vous allez mourir d'une maladie infernale.

Il est évident que cet argument ne vous donne aucune raison d'avoir peur, puisque vous n'avez aucune raison d'en accepter les prémisses. Mais si vous les acceptiez, il faudrait aussi accepter la conclusion.

Quand un argument est convaincant en vertu de sa forme et exclusivement grâce aux significations des mots logiques qu'il contient, nous l'appelons « valide ». À la place du mot du langage ordinaire « donc », nous pouvons alors tirer un trait :

$$\begin{array}{l}\text{Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage.}\\ \text{J'étudie la logique.}\\ \hline \text{Je serai heureux et sage.}\end{array} \tag{1.4}$$

Le trait signifie que l'on peut ‹ tirer › la conclusion à la suite des deux premières prémisses :[55] que la troisième ligne s'ensuit logiquement ou est une conséquence logique des deux premières. Cette relation de conséquence logique est d'importance primordiale pour la logique : on peut dire que toute

[54] Dans la terminologie de Quine que nous introduirons à la p. 68, il s'agit de « lettres schématiques ».

[55] Je mets « ‹ tirer › » ici entre guillemets simples pour indiquer qu'il s'agit d'un emploi figuratif, d'une idéalisation dans la mesure où nous ne présupposons pas qu'il y ait réellement quelqu'un qui tire cette conclusion. En ce qui nous concerne, il pourrait même ne jamais y avoir quelqu'un qui considère les phrases en question.

PROOF

la logique essaie de déterminer quelles phrases s'ensuivent de quelles autres. Si la logique concernée nous est donnée par un calcul (un système d'axiomes et de règles d'inférence), on peut dire qu'une phrase est « déductible » (peut être déduite ou inférée) d'une autre (par rapport à ce calcul) : cela veut dire que les règles de ce calcul nous permettent le passage de l'une à l'autre grâce à un schéma d'inférence. Nous utilisons le symbole « $\vdash$ » pour représenter la déductibilité : « $p \vdash q$ » veut dire que « q » peut être déduit de « p » à l'aide des règles d'inférence du calcul en question.

Il est crucial de distinguer la *validité* d'un argument de ce qu'on appelle sa « *solidité* » (« soundness » en anglais) : un argument peut être valide peu importe si ses prémisses sont vraies ou fausses – tout ce qui est requis est que l'implication suivante soit vraie : *si* les prémisses sont vraies, *alors* la conclusion l'est aussi. Pour la solidité, par contre, la vérité des prémisses est requise : les prémisses sont vraies *et* la conclusion s'ensuit de ces prémisses (et, par conséquent, est également vraie). Si j'admets, en logique, le raisonnement de quelqu'un, mais reste non convaincu de sa conclusion, je reconnais la validité, mais je conteste la solidité de son inférence.

En introduisant les abréviations « p » pour « J'étudie la logique » et « q » pour « Je serai heureux et sage » et en simplifiant la formule « si ... alors ⋯ » par la flèche « ... $\rightarrow$ ⋯ », nous obtenons, comme forme ou squelette de l'inférence (1.4), le schéma suivant :

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q} \tag{1.5}$$

Mais comment faut-il interpréter (1.5) ? Si les symboles vous font peur, substituez toujours les phrases « J'étudie la logique » pour « p » et « Je serai heureux et sage » pour « q ». Il est clair, cependant, que ces phrases ont été choisies de manière arbitraire : n'importe quelle autre phrase pourrait être insérée tout en préservant la validité de l'inférence. Nous avons, par exemple, l'inférence suivante qui a elle également la forme de (1.5) :

$$\frac{\begin{array}{c} \text{Si je m'appelle Mario, alors vous allez mourir d'une maladie infernale.} \\ \text{Je m'appelle Mario.} \end{array}}{\text{Vous allez mourir d'une maladie infernale.}} \tag{1.4+}$$

(1.5) ne représente que le squelette de toutes ces inférences également convaincantes qui ont la même forme que (1.4) et (1.4+) : (1.4) et (1.4+) sont des instances du schéma (1.5), comme beaucoup d'autres. C'est pour cela que l'on appelle (1.5) le « schéma » (d'une inférence) et les abréviations « p », « q », etc. des « lettres (caractères, symboles) schématiques ».[56]

Le schéma (1.5) représente une *formalisation* de l'argument principal au sens où

- toutes les expressions non nécessaires à une éventuelle validité de l'inférence sont abrégées ; et
- les expressions pertinentes à la validité éventuelle de l'argument sont remplacées par les expressions correspondantes d'une langue formelle (de $\mathcal{L}$, dans notre exemple).

La formalisation est le dégagement de l'ossature logique d'un raisonnement, par le dépouillement progressif de son contenu non logique. Le schéma que nous avons dégagé n'est qu'un ‹ moule › qui donnera lieu à un raisonnement lorsqu'on y laissera couler de la matière. C'est en ce sens-là que la logique est l'art de bien penser : elle nous fournit des recettes pour des arguments logiquement

[56] Nous reviendrons sur l'usage de lettres schématiques et ses problèmes à la p. 68.

PROOF

convaincants, des prototypes de raisonnements qui préservent la vérité des phrases (prémisses) qu'ils prennent comme leurs points de départ.[57]

La formalisation d'un passage de texte est la première étape pour son traitement logique (l'évaluation des arguments, l'identification de leur structure, la distinction entre prémisses et conclusion, etc.). Elle est souvent difficile. Considérez l'argument suivant :

> Peu importe si l'on croît en Dieu ou pas, Dieu – s'Il existe – est omnipotent et est donc un être qui peut tout faire. L'omnipotence est un trait essentiel de tout ce qui mérite le nom de Dieu. Si Dieu existe, alors Il est omnipotent et peut tout faire. Pouvant tout faire, Il peut créer une pierre si lourde que personne ne peut la soulever. Si personne ne peut soulever cette pierre, alors même Dieu ne peut pas la soulever. Alors Il ne peut pas tout faire. Mais s'Il existe, Il peut tout faire. Alors Dieu n'existe pas.

Il est clair qu'il y a de bonnes raisons de douter de cet argument. Mais lesquelles ? C'est à ce stade-là que la logique peut nous rendre service. Notre doute concerne principalement la solidité de l'argument : nous doutons de sa conclusion et alors soit de la vérité des prémisses soit de la validité de l'argument. Dans les deux cas nous avons l'obligation intellectuelle de préciser nos raisons de douter : quelle prémisse nous paraît discutable ? Quelle étape du raisonnement ne nous semble pas contrainte ? La logique nous permet une formalisation de l'argument qui distingue clairement les prémisses de la conclusion :

P1	Si Dieu existe, alors Dieu est omnipotent.	$p \to q$
P2	Si Dieu est omnipotent, alors Dieu peut tout faire.	$q \to r$
P3	Si Dieu peut tout faire, alors Dieu peut créer une pierre si lourde.	$r \to s$
P4	Si Dieu peut créer une pierre si lourde, une pierre si lourde est possible.	$s \to t$
P5	Si une pierre si lourde est possible, Dieu ne peut pas la soulever.	$t \to u$
P6	Si Dieu ne peut pas soulever une telle pierre, alors il ne peut pas tout faire.	$u \to \neg r$
C7	Si Dieu ne peut pas tout faire, alors il n'est pas omnipotent.	$\neg r \to \neg q$
C8	Si Dieu n'est pas omnipotent, alors Dieu n'existe pas.	$\neg q \to \neg p$
C9	Si Dieu existe, alors Dieu n'existe pas.	$p \to \neg p$
C10	Alors Dieu n'existe pas.	$\neg p$

Que dire de cet argument ? Quelles sont ses prémisses, quelles sont ses conclusions ? Pouvons-nous, par exemple, nier (**C7**), sans pour autant nier (**P2**)? Dans la mesure où nous acceptons la validité de l'argument, la réponse est négative : (**C7**) est ici traité comme conclusion (intermédiaire) car, comme nous le verrons, elle s'ensuit d'autres prémisses (de (**P2**)) en particulier). L'affirmation de (**C7**) par quelqu'un qui défend cet argument n'est pas un engagement supplémentaire de sa part : s'il a déjà affirmé (**P2**), l'affirmation de (**C7**) n'y ajoute rien. Dans un certain sens, (**C7**) est donc redondant : le contenu du passage cité reste le même si nous l'enlevons. L'importance de (**C7**) est autre : elle rend intelligible le cheminement de la pensée et nous aide à discerner sa structure.

De quoi dépend la validité de cet argument ? Quelles prémisses peut-on nier tout en acceptant les autres ? C'est ici que la logique nous aide, en nous apprenant que, par exemple :

[57] Parler d'« ossature logique » est une manière d'éviter le terme technique « forme logique » qui est au centre d'une controverse en philosophie de la logique : y a-t-il une telle chose qu'une forme logique déterminée pour chaque phrase du langage ordinaire (cf. Iacona (2016) pour des raisons d'être sceptique)?

PROOF

- Nous ne pouvons pas accepter (**P1**) à (**P6**) sans accepter (**C7**) et (**C8**).
- Nous ne pouvons pas accepter (**P1**) à (**P3**) et nier que si Dieu existe, il peut créer une pierre si lourde ($p \rightarrow s$).
- Nous ne pouvons pas accepter (**P1**) à (**C8**) et nier (**C9**).
- Nous ne pouvons pas accepter (**C9**) et nier (**C10**).

En nous apprenant cela, la formalisation limite les possibilités de critiques. Elle nous aide à distinguer les prémisses des conclusions en montrant par exemple que (**C7**) est une conclusion de (**P1**) à (**P6**) (et plus précisément une conclusion de (**P2**)) et que (**C10**) s'ensuit logiquement de (**C9**). La différenciation entre prémisses et conclusions est une distinction relative : (**C7**) est la conclusion d'une inférence valide qui a comme seule prémisse (**P2**), mais est elle-même une prémisse pour l'inférence qui a (**C9**) comme conclusion.

D'un autre côté, la formalisation rend la critique de l'argument plus facile, en ce qu'elle nous force à distinguer les prémisses les unes des autres. Par conséquent, celles-ci peuvent être évaluées de manières différentes. C'est ainsi que l'on voit que

- la plausibilité de (**P1**) dépend (entre autres) du concept « Dieu ».
- la plausibilité de (**P2**) dépend (entre autres) du concept « omnipotent ».
- la plausibilité de (**P3**) dépend (entre autres) du concept « une pierre de type F » (si lourde que personne ne peut la soulever).
- la plausibilité de (**P4**) dépend (entre autres) de la question de savoir si tout ce qui peut être créé par Dieu est possible.
- la plausibilité de (**P5**) dépend (entre autres) de la question de savoir si Dieu tombe dans le domaine des choses dont on dit qu'ils ne peuvent pas soulever cette pierre.
- la plausibilité de (**P6**) dépend (entre autres) de la question de savoir ce que l'on entend par « peut tout faire ».
- les autres phrases suivent logiquement de (**P1**) à (**P6**).

Quelqu'un qui veut critiquer l'argument doit donc critiquer une (ou plusieurs) des prémisses (**P1**) à (**P6**). L'argument est valide et la conclusion ne peut donc être attaquée que si l'on attaque une prémisse : étant donné sa validité, seule sa solidité peut encore être mise en doute.

Une personne qui critique le concept d'omnipotence utilisé en (**P2**) en arguant par exemple que l'omnipotence n'inclut pas la capacité d'effectuer ce qui est logiquement impossible, doit par conséquent argumenter qu'il est logiquement impossible, pour Dieu, de créer une pierre qui soit si lourde que même Dieu ne puisse la soulever. On pourrait aussi, avec Descartes, nier la prémisse (**P4**), en arguant que Dieu peut faire des choses impossibles. Contre (**P6**), on pourrait dire que l'omnipotence requiert seulement que Dieu puisse accomplir toutes les tâches 'positives'[58] et que la création d'une pierre si lourde que personne ne peut la soulever n'est pas une de ces tâches 'positives'. Il y a de nombreuses façons de critiquer l'argument – mais ceci sort du domaine de la logique pour entrer dans celui de la métaphysique ou, plus particulièrement, de la philosophie de la religion. Le service rendu par la logique ne concerne que la formalisation : la logique nous dit quelles étapes dans l'argument s'ensuivent de quelles autres, dans le sens où quelqu'un qui a accepté (**P2**), par exemple, devrait aussi accepter (**C7**).

[58] Je mets des 'scare quotes' (« ‘ » et « ’ ») parce que je ne pense pas qu'il fait, à strictement parler, sens de parler de tâches positives et négatives, ni de propriétés positives et négatives.

PROOF

Cependant, la logique n'est pas absolue :[59] l'étape de (**C9**) à (**C10**), par exemple, qui est de la forme $\frac{p \to \neg p}{\neg p}$ (qui s'appelle « reductio ad absurdum » et dont nous reparlerons à la p. 65), peut être contestée : cette inférence est valide dans la logique standard, mais sa validité a été contestée par les partisans d'autres types de logique.[60] Cependant il est important de noter que cette question n'est pas du même registre qu'un doute par rapport à une prémisse, par exemple (**P4**) : en doutant de la validité du schéma d'inférence, c'est-à-dire en niant « $(p \to \neg p) \vdash \neg p$ » (« il s'ensuit de « $p \to \neg p$ » que $\neg p$ » ; « « $\neg p$ »est une conséquence logique de « $p \to \neg p$ » »), nous doutons du fait que toutes les inférences qu'on obtient en remplaçant « p » par des phrases entières soient valides : on est donc de l'avis qu'il y a au moins une inférence qui a cette forme et qui n'est pas valide. On peut justifier un tel doute par des considérations qui n'ont rien à voir avec la métaphysique ou la philosophie de la religion. La justification des schémas d'inférence est le domaine de la *philosophie de la logique*, dont on discutera également dans ce livre. Si l'on parvient à établir que « $(p \to \neg p) \vdash \neg p$ » n'est pas un principe acceptable de la logique, on met un défenseur de l'argument dans l'obligation de justifier l'inférence suivante :

$$\frac{\text{Si Dieu existe, alors il n'existe pas.}}{\text{Dieu n'existe pas.}} \quad \text{de (\textbf{C9}) à (\textbf{C10})}$$

par d'autres considérations : il ne peut donc plus dire que c'est par la logique seule que (**C10**) s'ensuit de (**C9**). Peut-être une telle justification est-elle possible ; mais elle dépendra d'autres prémisses de type métaphysique.

Le même argument peut être formalisé de différentes manières et à l'aide de différentes logiques. La qualité d'une formalisation dépend du degré auquel elle rend manifeste la structure d'un argument et de la finesse du grain avec laquelle elle nous permet de l'évaluer et de le critiquer. Pour une formalisation de l'argument contre l'existence de Dieu, par exemple, la logique modale pourrait être utile : elle nous permettrait de rendre explicite la progression, à l'intérieur de la prémisse (**P4**), de « possible pour Dieu » à « possible » et de mieux étudier la relation entre la prémisse (**P4**) (possible pour Dieu, donc possible) et (**P5**) (impossible pour tout le monde, alors impossible pour Dieu).

[59] C'est aussi pour cela qu'il est toujours faux d'utiliser « logique » pour vouloir dire « trivial » – comme nous le verrons, la logique est loin d'être triviale (cf. également p. 86)!

[60] Une telle résistance peut avoir différents types de motivations : soit on a des exigences plus strictes par rapport à ce qui constitue une preuve (par ex. une conception constructiviste, cf. p. 100), soit une autre conception de la négation (cf. sct. 2.2), soit on n'aime pas une des conséquences de la validité de l'inférence. Si nous acceptons la validité du schéma d'inférence de la réduction à l'absurde, il s'ensuit, par exemple, qu'il n'est pas possible que tout soit vrai, puisque dans ce cas, il serait vrai qu'il n'est pas le cas que tout est vrai (cf. Prior, 1967, 527).
Il est important de distinguer les doutes concernant la validité du schéma d'inférence de la question de quelles sont les prémisses qui entrent en conflit et dont une doit être abandonnée par la réduction à l'absurde. Un ‹ problème › similaire est soulevé par Raymond Smullyan dans 1978, 8 : « What Happens If an Irresistible Cannonball Hits an Immovable Post ? This is another problem from my childhood which I like very much. By an irresistible cannonball we shall mean a cannonball which knocks over everything in its way. By an immovable post we shall mean a post which cannot be knocked over by anything. So what happens if an irresistible cannonball hits an immovable post ? » C'est une chose de conclure que les deux ne peuvent pas exister ensemble ; c'est une autre chose de prendre cette considération comme argument contre l'existence de l'un plutôt que contre l'existence de l'autre.

PROOF

1.6 Vérité et validité

La logique est l'étude des raisonnements valides. La logique propositionnelle classique, par exemple, nous montre qu'une inférence qui suit le schéma suivant que l'on appelle « principe de conversion » :[61]

$$\frac{q \to r}{\neg r \to \neg q}$$

est valide. C'est la validité de ce principe qui soutient la déduction de (**C7**) à partir de (**P2**), par exemple. Dire que les schémas suivants :

$$\frac{q \to r}{\neg r \to \neg q} \quad , \qquad \frac{p \quad p \to q}{q} \quad , \qquad \frac{p \to \neg p}{\neg p}$$

sont valides, c'est affirmer que toute inférence qu'on obtient en remplaçant, dans l'un de ces schémas, les abréviations « p », « q » et « r » par des phrases du langage ordinaire, est valide. Mais en quoi consiste cette validité ?

Il a déjà été dit que pour qu'un argument soit valide, il n'est pas requis que qui que ce soit accepte *dans les faits* les prémisses : il suffit que, *si* une personne acceptait les prémisses, alors elle devrait aussi accepter la conclusion. En tant que logiciens, nous discutons de la qualité de l'argument contre l'existence de Dieu sans déclarer si ou non nous croyons en Dieu : la logique ne se préoccupe pas de la plausibilité des prémisses, mais se charge d'examiner leurs relations et d'identifier les règles d'inférence utilisées. La logique ne se prononce pas sur la vérité de la conclusion ; elle détermine si ou non une conclusion s'ensuit de quelques prémisses, si ou non on est forcé (sous peine d'être irrationnel ou, au moins, 'illogique') à accepter la conclusion *si* on a déjà accepté les prémisses.

Les arguments, par conséquent, ne peuvent pas être dits « vrais » ou « faux » (ceci relève d'une erreur de catégorie). Un argument peut être impeccable même si toutes ses prémisses sont fausses. La qualité d'un argument est avant tout déterminée par le degré auquel les prémisses nous fournissent une raison d'accepter la conclusion. Dans le cas d'une inférence logique, cette question devient : « est-ce que l'argument *préserve* la vérité des prémisses (s'il y en a) » ? Si oui – si la vérité des prémisses entraîne celle de la conclusion – l'argument est dit « valide », autrement – si les prémisses pourraient être vraies sans que la conclusion le soit – l'argument est dit « non valide ».

Il peut donc y avoir des arguments valides dont la conclusion est vraie bien que les prémisses soient fausses :

P1 Tous les tigres sont des humains.
P2 Tous les humains ont la peau rayée.
C Donc tous les tigres ont la peau rayée.

De même, il peut y avoir des arguments valides dont la conclusion est fausse, et des arguments non valides dont les prémisses et la conclusion sont les deux vraies. Mais ce qui est exclu par notre définition de la validité, c'est un argument valide dont la conclusion est fausse bien que les prémisses soient vraies :

[61] La conversion est bien illustrée dans une chanson d'enfant : « Mon chapeau a trois cornes, trois cornes a mon chapeau, et tout ce qui n'a pas trois cornes n'est pas mon chapeau ».

PROOF

prémisses vraies	conclusion vraie	valide ou non
prémisses vraies	**conclusion fausse**	**non valide**
prémisses fausses	conclusion vraie	valide ou non
prémisses fausses	conclusion fausse	valide ou non

En tant que schéma ou squelette d'inférence valide, une règle d'inférence indique simplement la *forme (logique)* de plusieurs phrases prises ensemble et nous affirme que toute suite de phrases ayant la même forme constitue une inférence valide. Dans le langage de la logique formelle, un raisonnement est valide en vertu de sa forme (i.e. de la forme des prémisses et de celle de la conclusion). Ainsi, tout argument de même forme est valide dans ce langage.

Nous avons rencontré deux notions sémantiques, celle de « validité » et celle de « vérité », qu'il faut distinguer clairement. La vérité appartient à des phrases (complètes) ou à des significations de phrases (complètes). Une phrase comme « je suis malade », dite par moi aujourd'hui, exprime la proposition que Philipp est malade le 31 décembre 2018. Si je suis malade, alors cette phrase est vraie ; et si elle est vraie, je suis malade. La phrase indexicale est vraie en tant qu'elle exprime un contenu déterminé, tout en étant fausse si énoncée par quelqu'un d'autre qui n'est pas malade ou par moi un jour où je ne suis pas malade.[62] La propriété d'être vrai et la propriété d'être faux sont des propriétés sémantiques parce que les phrases ne les ont pas simplement en vertu de leur forme – il faut considérer ce qu'une phrase dit pour savoir si oui ou non elle est vraie (si elle exprime un contenu vrai ou faux).

La validité, à l'inverse, n'est pas une propriété des phrases ou de leurs contenus, mais une propriété des arguments et des inférences. Une inférence est dite « valide » si elle transmet la vérité de ses prémisses à sa conclusion – s'il n'est pas possible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse. Il ne faut pas simplement considérer la valeur de vérité actuelle de ces phrases, mais leurs valeurs de vérité possibles : il faut considérer la valeur de vérité que la conclusion *aurait* (cas peut-être purement hypothétique) dans un cas où les prémisses *seraient* vraies. Les notions « vérité » et « validité » ne s'appliquent donc pas aux mêmes choses : les prémisses et la conclusion sont soit vraies soit fausses, l'inférence est soit valide soit non valide. Les deux notions se situent à des échelles différentes.

1.7 Utilisation et mention

Les guillemets et leur usage illustrent bien la différence entre les langues naturelles et les langues formelles : dans les langues naturelles, il y a une multiplicité d'usages des guillemets, en plus de l'usage standard de citer une expression. Nous en avons rencontré déjà deux : l'utilisation de guillemets pour indiquer un usage ‹approximatif› (métaphorique, ironique, figuratif) d'un mot, indiqué

[62] Pour exclure cette variabilité, beaucoup de philosophes disent que la vérité et la fausseté appartiennent en premier lieu à des « propositions » (c'est-à-dire des contenus de phrases complètes et non indexicales). Ces philosophes maintiennent que les propositions sont les premiers porteurs de vérité : bien que les phrases puissent également être dites vraies ou fausses, il s'agit de propriétés dérivées qu'elles ont en vertu du fait qu'elles expriment telles ou telles propositions. Pour des raisons brièvement évoquées à la p. 34, nous n'adopterons pas cet usage par la suite.

PROOF

dans cet ouvrage par les guillemets français simples,[63] et un autre usage, plus critique, pour se distancier d'éventuelles associations liées à un mot (les 'scare quotes'), que j'indique par des 'guillemets anglais simples'.[64]

Il y en a beaucoup d'autres.[65] Il n'est donc pas le cas que tout usage de guillemets est pour mentionner une expression, même si nous le présupposerons pour le reste de ce livre.[66] Inversement, il y a également d'autres moyens de mentionner une phrase que de la citer. Je peux parler de l'objet suivant :

Voici une phrase du français. (1.6)

en utilisant « (1.6) », « la phrase précédente », « la phrase qui commence avec « voici », continue avec l'article défini féminin, « phrase », « du » et le mot pour la langue dans laquelle cet ouvrage est écrit » – aucune de ces expressions cite la phrase (1.6), mais chacune nous sert à en parler.

Plutôt que la distinction entre les guillemets et leur contenu, c'est la distinction entre l'utilisation et la mention d'un mot qui est cruciale. Les guillemets nous servent à éviter la *confusion entre utilisation et mention* que le philosophe américain Willard van Orman Quine, le père de la philosophie du 20ème siècle, a stigmatisée comme l'une des erreurs les plus fréquentes et conséquentes en philosophie.

[63] Je ne les utiliserai donc pas comme signe spécial pour la citation ‹ intérieure › (= citation à l'intérieur d'une autre citation). Cf. n. 13 à la p. 4.

[64] Cf. n. 14 à la p. 5. D'après *Wikipedia* les 'scare quotes' anglais sont appelés en français « guillemets d'ironie », utilisés « pour se désolidariser de ce qu'on dit, pour ajouter une distance, une nuance d'ironie ou d'étrangeté »(d'après Jacques Drillon, cité par Wikipedia).

[65] Un exemple est la citation dans « Mon fils de quatre ans a dit que je suis un « philtosophe » » (cf. Cappelen and LePore, 1997, 436). Il est parfois difficile de distinguer la citation fermée (qui produit un nom singulier d'une expression linguistique) de la citation dite « ouverte » qui ne le fait pas – comme dans « Quine dit que la citation « est d'une difficulté particulière » » (cf. Récanati, 2000, 2001). Davidson (1979) a appelé cette forme de citation « mixte » et disait qu'elle utilise et mentionne à la fois l'expression en question. Il existe un débat vif en philosophie du langage sur la nature de la citation : est-ce que la citation d'une expression est (i) un nom propre (ce qui est la position orthodoxe de Tarski (1933, 159) et de Quine (1940, 23–26); (ii) une description (Geach, 1957, 82); (iii) un démonstratif complexe, où les guillemets ont la fonction sémantique de montrer leur contenu (Davidson, 1979); (iv) une fonction qui s'applique à une expression et l'a en même temps comme valeur (la théorie dite « disquotationelle » de Smullyan (1957), Wallace (1970, 237) et de Mates (1972, 21), développée par Richard (1986), Ludwig and Ray (1998) et par Salmon (1982)); (v) un indice d'un usage particulier (la théorie d'« identité » que Washington (1992) attribue à Frege et qui a été développée par Saka (1998), Reimer (1996) et Récanati (2000, 2001)). Cf. Cappelen and LePore (2005) pour en savoir plus.

[66] Les langues naturelles sont tout à fait inconsistantes dans leur usage des guillemets : ils sont utilisés pour marquer d'autres distinctions que celle entre usage et mention, comme lorsqu'on dit, par exemple, que l'on a lu tel et tel article dans « Le Monde » – se référant au journal et non pas au mot. À l'inverse, les guillemets manquent dans de nombreux cas où il faudrait les mettre : si je dis que je m'appelle Philipp, par exemple, ce que je veux dire est que je m'appelle « Philipp », que mon nom est « Philipp » et que mes parents m'ont baptisé « Philipp ». Il ne s'agit pas ici d'entreprendre une réforme du langage ordinaire, mais seulement de prendre note d'une distinction importante que l'on peut négliger s'il n'y a aucun danger d'équivoque. Cependant, ici, nous ferons comme si les guillemets servaient toujours et uniquement à marquer la distinction entre l'utilisation et la mention des mots. Pour encore un autre usage des guillemets, cf. la section 3.3.
Dans le fait qu'elle attire notre attention sur la multiplicité d'usages que peut avoir une expression aussi banale et triviale que les guillemets, nous verrons une autre utilité de la philosophie du langage. En fait, il semble plausible qu'au moins une partie des fonctions antérieurement attribuées aux guillemets sont aujourd'hui exercés par les émoticônes : si j'écris, par exemple, « nous savons qu'il est un idiot ;-) », je précise le caractère ironique de l'attribution de l'idiotie par le symbole qui la suit. Les philosophes, comme par ex. George Boolos (1995, 400, n. 6), étaient conscients de cette possibilité, même avant l'‹ invention › des émoticônes.

PROOF

Il s'agit de deux *types* d'action que l'on peut opérer avec les mots, d'une côté l'utilisation qui est leur usage quotidien pour parler des choses dans le monde, et de l'autre la mention qui correspond à leur usage réflexif pour parler des mots eux-mêmes. Si je dis

> Paris est une jolie ville. (1.7)

j'*utilise* le mot « Paris » pour dire de la ville qu'elle est jolie – je mentionne la ville et j'utilise un mot qui la désigne.[67] Si, au contraire, je dis

> « Paris » est un mot du français, « Paris » est dissyllabique, « Paris » est aussi un prénom, « Paris » est mon mot préféré. (1.8)

je *mentionne* le mot « Paris » et j'utilise un nom, « « Paris » » (un nom constitué de guillemets, les lettres « P », « a », « r », « i », « s » et encore des guillemets), pour parler de ce mot et pour dire qu'il appartient à la langue française, etc. On utilise des mots pour parler des choses et des noms de ces mots pour parler des mots. Rien ne nous empêche de créer des noms pour des mots, en baptisant « Karl », par exemple, mon mot préféré (« Paris »). Étant donné ce baptême, il est correct de dire que Karl est un mot de la langue française, que j'utilise Karl pour me référer à « Paris », etc. Même si de telles stipulations sont possibles, elles ne sont pas fréquentes : on utilise généralement les guillemets pour transformer n'importe quelle expression en un *nom* de cette expression.

Les guillemets nous servent aussi à parler d'une autre langue que celle que nous utilisons dans la phrase concernée. Considérons la phrase suivante :

> Paris est une ville beautiful. (1.9)

Cette phrase n'appartient ni au français, ni à l'anglais – elle n'est pas bien formée.[68] La phrase suivante, cependant, est bien formée et est une phrase du français :

> Le mot « beautiful » est utilisé pour dire d'une chose qu'elle est jolie. (1.11)

La suite de lettres ⟨ «, b, e, a, u, t, i, f, u, l, » ⟩ *est* un mot du français, un nom d'un certain mot de l'anglais. Nous pouvons constater que les guillemets nous servent à rendre cohérentes des phrases à première vue mal formées.[69]

[67] « Mentionner » n'est donc pas utilisé au sens de « citer », mais au sens de « désigner », « faire mention de » ou « parler de ». Malheureusement, il existe un autre usage technique en linguistique selon lequel « mention » désigne le statut d'un signe autonyme.

[68] Ceci ne veut pas dire que l'on ne comprenne pas *quelque chose* en entendant cette phrase ou, par exemple, la suivante :

> If philosophy didn't exist, said Voltaire, il faudrait l'inventer. (1.10)

Néanmoins il s'agit ici d'une citation impropre : elle ne nous informe pas exactement sur ce que Voltaire a dit (ni exclut qu'il parlait anglais) – il faudrait ajouter des guillemets pour clarifier sa phrase.

[69] Il peut y avoir plusieurs manières de mettre des guillemets. Considérez le limerick suivant de Richard Cartwright (cf. Boolos, 1995, 392) :

> According to W. Quine
> Whose views on quotation are fine,
> Boston names Boston,
> And Boston names Boston,
> But 9 doesn't designate 9.

La tâche est de placer les guillemets de telle sorte que le résultat soit correct et intéressant. Il existe plusieurs façons de le faire.

PROOF

Mais les guillemets créent aussi leurs propres difficultés. Considérons l'expression « ajouté à sa propre citation » (« appended to its own quotation »).[70] Elle nous donne un signe qui se dénote lui-même, c'est-à-dire « « ajouté à sa propre citation » ajouté à sa propre citation », comme on peut voir ci-dessous :

« ajouté à sa propre citation » ajouté à sa propre citation
= « ajouté à sa propre citation » ajouté à la citation de « ajouté à sa propre citation »
= « ajouté à sa propre citation » ajouté à « « ajouté à sa propre citation » »
= « « ajouté à sa propre citation » ajouté à sa propre citation »

Cette chaîne d'identités peut être justifiée comme suit : le signe « « ajouté à sa propre citation » ajouté à sa propre citation » (qui est composé de douze mots) *est* l'expression qui ajoute « ajouté à sa propre citation » à la citation de cette expression (première identité). La citation de « ajouté à sa propre citation » est l'expression dénotée par « « ajouté à sa propre citation » » (deuxième identité). Mais alors c'est l'expression qui ajoute sa propre citation au *nom* de l'expression « ajouté à sa propre citation » (troisième identité). Le résultat, cependant, est inquiétant : Puisque il a la forme « $a =$ « a » », « a » est une expression qui se dénote elle-même. Ceci, cependant, n'est que rarement le cas et peut entraîner des conséquences paradoxales.[71]

Points à retenir

1. La logique moderne a été créée par Gottlob Frege en 1879.
2. La philosophie est la science des arguments.
3. La logique est l'étude des inférences valides.
4. La logique porte sur un langage simplifié, idéalisé et formel.
5. La logique propositionnelle étudie les connecteurs propositionnels qui relient des phrases ; la logique des prédicats étudie en plus la quantification, les relations et les fonctions.
6. La syntaxe concerne la forme des expressions, la sémantique, leurs significations et la pragmatique, leur usage.
7. La formalisation des arguments est un art.
8. Les arguments ne sont pas vrais ou faux, mais valides ou invalides.
9. Une inférence est valide si et seulement s'il est impossible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse.
10. Il faut distinguer l'utilisation et la mention des mots et mettre des guillemets si l'on veut parler d'une expression linguistique et non pas de la chose qu'elle représente.

[70] Il s'agit ici du fameux paradoxe de Grelling (cf. Grelling and Nelson, 1908) dont nous reparlerons à la page p. 321 dans la leçon 15.

[71] Il est possible de reproduire l'argument qui est à la base du fameux paradoxe de Grelling à l'aide du prédicat « … donne une fausseté si ajouté à sa propre citation ». Il suffit de se demander si ce prédicat s'applique à lui-même. S'il s'applique de façon réflexive, alors « « donne une fausseté si ajouté à sa propre citation » donne une fausseté si ajouté à sa propre citation » est vrai et la phrase citée est fausse car il s'agit de la citation de « donne une fausseté si ajouté à sa propre citation » suivi de ce même prédicat. Si elle est fausse, elle est ce qu'elle dit d'elle et alors elle est vraie. Les paradoxes de ce type, y compris le paradoxe de Russell, étaient à la base de l'effondrement du programme dit « logistique » de Frege et de la fameuse preuve de l'incomplétude de l'arithmétique par Gödel (1931). Consultez les sections (4.3) et (15.5) respectivement pour en savoir plus.

PROOF

2 Les connecteurs propositionnels

2.1 La formalisation des arguments

Nous avons vu (à la p. 9) qu'un argument est une inférence s'il est convaincant (s'il l'est) en vertu des significations de certains mots qu'il contient. Et, qu'un argument est formel (est une inférence logique) si ces mots sont des mots logiques.

Les différents systèmes de logique diffèrent en raison de ce qu'ils considèrent être des mots logiques. La logique standard propositionnelle ne traite comme ‹logiques› que les connecteurs propositionnels (des connecteurs qui relient des phrases entières) comme « ... et ⋯ », « ... ou ⋯ », « il n'est pas le cas que ... », « si ... alors ⋯ » et « ... ssi ⋯ » (= « si et seulement si »). La logique standard des prédicats considère en outre les quantificateurs (« pour tous ... ⋯ », « il y a au moins un ... tel que ⋯ »), des relations (par ex. « ... est identique à ⋯ ») et des fonctions (par ex. « la mère de ... »). La logique des prédicats est appelée ainsi parce qu'elle permet le traitement logique des expressions sub-sententielles (plus petites que des phrases entières), par ex. des termes singuliers (noms) et des prédicats.

Le calcul des propositions (la logique propositionnelle) étudie de quelle manière la vérité (ou la fausseté) d'une phrase complexe est fonction de la vérité (ou la fausseté) des phrases élémentaires qui la composent. Dans les langues naturelles, où la forme grammaticale ne coïncide pas toujours avec la forme logique, cette dépendance de la phrase complexe de ses constituants simples n'est pas toujours apparente. C'est pour cela que la logique ne traite pas directement le langage ordinaire, mais travaille à partir d'un langage artificiel et simplifié, déterminé par des définitions explicites. À cet effet, nous avons introduit un langage $\mathcal{L}$, qui sera notre langage de la logique propositionnelle, et dont les symboles primitifs sont les suivants :

(**A1**) des phrases atomiques « p », « q », « r », « s », « t », etc.,
(**A2**) des constantes logiques « $\wedge$ » (parfois : « & ») (« et »), « $\vee$ » (« ou »), « $\neg$ » (parfois « $\sim$ ») (« il n'est pas le cas que »), « $\rightarrow$ » (parfois : « $\supset$ ») (« si ... alors ⋯ ») et « $\leftrightarrow$ » (parfois : « $\equiv$ ») (« ... si et seulement si ⋯ »),
(**A3**) des parenthèses « (» et «) ».

Nous appelons « $\wedge$ » « conjonction », « $\vee$ » « disjonction », « $\neg$ » « négation », « $\rightarrow$ » « implication » et « $\leftrightarrow$ » « équivalence ».

Nous avons aussi donné une définition récursive de ce qu'est une formule bien formée de $\mathcal{L}$:[1]

(**B1**) Toute phrase atomique est une formule bien formée.
(**B2**) Si « p » et « q » sont des formules bien formées, alors « $(\neg p)$ », « $(p \wedge q)$ », « $(p \vee q)$ », « $(p \rightarrow q)$ » et « $(p \leftrightarrow q)$ » sont des formules bien formées.

[1] Comme nous l'avons dit, les définitions récursives exploitent l'héritabilité d'un certain trait, ici de la caractéristique d'être une formule bien formée, qui est préservée par une bonne application des règles de formation.

PROOF

(**B3**) Il n'y a pas d'autres formules bien formées.

On voit que les connecteurs propositionnels binaires s'appliquent à deux phrases pour en faire une troisième, plus complexe. Le seul connecteur unaire que nous étudierons, la négation, ne s'applique qu'à une seule phrase pour en faire une deuxième, plus complexe.

Ces deux définitions du vocabulaire primitif et des règles qui permettent d'en construire des expressions plus complexes, déterminent la *syntaxe* de notre langue $\mathcal{L}$.

En syntaxe, on peut définir ce que l'on appelle le « *connecteur principal* » d'une phrase, c'est-à-dire le connecteur le moins imbriqué dans les parenthèses, celui qui ‹ vient en premier › mais que l'on ‹ calcule en dernier ›. L'arithmétique nous fournit ici une analogie utile. Dans l'expression « $((2+3)\cdot 4)-5$ », le connecteur principal est la soustraction parce que c'est celui que l'on considère en dernier :

$$\begin{aligned} &((2+3)\cdot 4)-5\\ &((5)\cdot 4)-5\\ &(20)-5\\ &=15 \end{aligned}$$

Notons ici l'importance des parenthèses : bien que $((2+3)\cdot 4)-5=15$, $((2+(3\cdot 4))-5=9$ et $(2+3)\cdot(4-5)=-5$. Les parenthèses déterminent l'ordre du calcul et le résultat. De même, dans l'expression « $(p\wedge(q\rightarrow r))\leftrightarrow s$ », le connecteur principal est « $\leftrightarrow$ », dans « $\neg(\neg p\wedge\neg q)$ » c'est le premier « $\neg$ » et dans « $((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow(p\rightarrow r)$ » le troisième « $\rightarrow$ ». Savoir quel connecteur est le connecteur principal d'une phrase dépend essentiellement des parenthèses qui sont utilisées pour l'exprimer. Les parenthèses nous servent à indiquer quelles sont les phrases liées par les connecteurs (et également, dans la logique des prédicats, à indiquer la portée des opérateurs). Pour dire par exemple qu'une négation nie l'ensemble d'une conjonction, on la place devant cette conjonction entourée de parenthèses : « $\neg(p\wedge q)$ ». On remarque la différence entre cette phrase et celle où seul le premier conjoint est nié : « $\neg p\wedge q$ ». En principe, on aurait dû mettre « $(\neg p)\wedge q$ », mais on adoptera la convention que « $\neg$ » relie plus fortement que « $\wedge$ » : ce qui signifie que « $\wedge$ » relie des phrases avec leurs éventuelles négations.[2]

En déterminant que « $\wedge$ », par exemple, est un connecteur qui relie deux formules bien formées pour en faire une nouvelle formule bien formée, on n'a encore rien spécifié sur la *signification* de ce connecteur. D'après tout ce que nous savons (‹ officiellement ›[3]), ce connecteur pourrait signifier la même chose que « il est le cas en Australie que ... mais ici il est le cas que ⋯ », « Sam a dit que ... mais il me semble plutôt que ⋯ », « ... et je suis malade si et seulement si ⋯ ». Comment alors donner une signification précise à ces connecteurs ?

C'est là que *la sémantique* commence à intervenir. Donner la sémantique d'une expression, c'est lui attribuer une signification particulière. Dans les langages naturels, beaucoup de facteurs contri-

[2] Nous rencontrons une convention similaire en arithmétique, où on suppose normalement que la multiplication et la division lient ‹ plus fortement › que l'addition et la soustraction : « $3+5\cdot 4/2$ », par exemple, est « $3+(5\cdot\frac{4}{2})$ », c'est-à-dire désigne 13.

[3] Je dis « ‹ officiellement › » parce que j'ai déjà introduit des significations ‹ informelles › entre parenthèses. Je l'ai fait pour rendre possible la lecture des formules – mais rien dans notre petite théorie ne détermine qu'avec « ...et ⋯ » j'aie voulu parler de la conjonction : j'aurais pu parler d'un connecteur bizarre comme « ...est vrai selon Sam mais Maria affirme que ⋯ ».

PROOF

buent à la signification d'un mot, et le même mot peut avoir plusieurs significations (un cas d'ambiguïté) ou varier de signification selon son contexte d'utilisation (un cas d'indexicalité). Dans des langues formelles, qui ne sont pas parlées et sont construites artificiellement, la signification des mots est beaucoup plus facile à déterminer, car en effet la signification d'une phrase coïncide avec ses *conditions de vérité*; et ce sont ces conditions de vérité qui forment la *proposition* qui elle, est exprimée par une phrase dans un certain contexte d'énonciation (cf. p. 34). Dire que la proposition exprimée par une phrase est vraie (et donc que la phrase, telle qu'elle est utilisée dans ce contexte, est elle-même vraie), c'est dire que ses conditions de vérité sont satisfaites. Connaître la signification d'une phrase (savoir quelle proposition elle exprime), c'est pouvoir déterminer, de n'importe quelle situation possible, si la phrase décrit correctement cette situation ou non (si elle est vraie ou fausse par rapport à cette situation). Autrement dit, les conditions de vérité sont des conditions que le monde doit satisfaire pour rendre vraie la phrase en question.[4]

Dans l'œuvre de Frege, déjà, la connexion entre la logique et la philosophie du langage était très étroite. Dans « Sens et dénotation » (1892b / 1971d), Frege fait la distinction entre le sens (« Sinn », « sense ») et la référence (ou dénotation, « Bedeutung » en allemand, « reference » en anglais) d'un terme singulier. Une telle distinction, selon lui, est nécessaire pour expliquer la différence entre

L'étoile du matin est (identique à) l'étoile du soir. (2.1)

L'étoile du matin est (identique à) l'étoile du matin. (2.2)

Bien que les deux affirmations d'identité soient vraies, dit Frege, la première nous informe d'un fait astrologique ignoré par les Babyloniens (qui furent les premiers à donner le nom « étoile du matin » ou « étoile du berger » à l'astre le plus clair du ciel matinal et le nom « étoile du soir » à l'astre le plus clair du ciel vespéral). Nous pouvons donc conclure, d'après Frege, que les ‹ significations › – ce mot ici pris dans un sens intuitif – de « étoile du matin » et « étoile du soir » ne sont pas les mêmes.[5] Comme cette différence ne peut pas être due à une différence de référence, comme les deux désignent la même planète, à savoir Vénus, il doit y avoir une autre composante à leurs significations : leurs sens, qui nous donnent le référent de manières différentes.

Selon Frege, un terme singulier comme « l'actuel président des États-Unis » a comme référent un individu spécifique, c'est-à-dire Donald Trump dans notre cas, et comme sens une condition que cet individu doit remplir pour être le référent du terme, c'est-à-dire *être le (seul) président (actuel et présent) des Etats-Unis*.[6] En distinguant la référence et le sens des termes singuliers, Frege pouvait donner un critère pour l'extensionnalité des contextes linguistiques : un contexte linguistique (une phrase) est « extensionnel » s'il permet l'intersubstituabilité de termes singuliers co-référentiels (ayant la même référence, mais pouvant avoir des sens différents) *salva veritate* (c'est-à-dire en préservant la valeur de

[4] Les conditions de vérité constituent l'obligation que l'on accepte (au séminaire de philosophie, au moins) en faisant une assertion. Si j'affirme la phrase (déclarative, non ambiguë, etc.) « *p* », je fais un pari sur sa vérité, je m'oblige à ce que le monde soit tel que ma phrase le décrit. Au moins une partie de ce qui est dit par mon assertion, alors, est que ses conditions de vérité sont satisfaites.

[5] Nous reviendrons sur le fonctionnement exact de cet argument célèbre à la p. 318.

[6] Je rajoute les expressions entre parenthèses pour ceux qui pensent que les sens des termes singuliers doivent être individualisants, c'est-à-dire s'appliquer, pour des raisons sémantiques et par nécessité, à au plus un individu.

PROOF

vérité de la phrase entière). Un contexte tel que « ... illumine le mariage de Sam et Marie » est extensionnel : la vérité de la phrase qui en résulte est indifférente au sens du nom que l'on insère – seule leur référence importe. C'est la planète qui illumine le mariage, peu importe comment ‹ elle nous est donnée ›. Un contexte comme « les Babyloniens savaient que ... est l'étoile du matin », par contre, n'est pas extensionnel, puisque nous obtenons une vérité si nous substituons « étoile du matin » pour les trois points, mais une fausseté si nous y mettons « étoile du soir ». La vérité de la phrase qui en résulte dépend alors d'autre chose que des références des noms et des propriétés qui leur sont attribuées. Ce sont les contextes extensionnels qui peuvent être formalisés par la logique des prédicats.

La distinction entre sens et référence est davantage controversée en ce qui concerne les prédicats (« termes généraux »). Dans la théorie originale de Frege, la référence d'un prédicat comme « ... est bleu », est le concept (« Begriff » en allemand) Bleu, bien que la plupart des auteurs contemporains qui se considèrent « fregéens » suivent Carnap (1947 / 1997) en prenant la référence ou dénotation d'un prédicat pour son extension, c'est-à-dire l'ensemble des choses auxquelles il s'applique (les choses bleues dans notre exemple) et identifient le concept avec le sens ou l'intension : la fonction qui détermine quels objets, dans une situation donnée, sont les choses bleues. Le sens ou l'intension de « ...est bleu », par conséquent, sera une fonction qui, appliquée à une situation quelconque (ou même à un 'monde possible') nous donne l'ensemble de toutes les choses qui, dans cette situation, sont bleues.

Frege identifiait la référence d'une phrase à sa valeur de vérité et son sens à ce qu'il appelait « une pensée » (« Gedanke » en allemand). Il pensait donc qu'une phrase dénote sa valeur de vérité, soit le Vrai soit le Faux, et qu'elle exprime une ‹ manière dont cette valeur de vérité nous est donnée ›. Aujourd'hui, cependant, la conception majoritaire est que la référence (ou le vérifacteur) d'une phrase est un état de choses ou un fait (tel que *cette tomate devant moi est rouge*) et que son sens est une « proposition » (« proposition » en anglais), c'est-à-dire le contenu exprimé par une phrase bien formée, déclarative et non ambigüe.[7]

Mais il reste toujours une distinction importante à faire, à savoir celle entre les logiques extensionnelles et les logiques intensionnelles.[8] La logique propositionnelle et la logique des prédicats sont des logiques extensionnelles, alors que la logique modale, la logique épistémique et beaucoup d'autres logiques sont des logiques intensionnelles. Comparons les arguments suivants :

> Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage. J'étudie la logique. Donc je serai heureux et sage. (2.3)

> Tous les humains sont mortels. Socrate est un humain. Donc Socrate est mortel. (2.4)

[7] Les propositions ou contenus de phrases peuvent ou non être identifiés avec des pensées, si (à la différence de Frege) par « pensée » on entend une représentation mentale d'un état de choses. Mais même si les propositions sont identifiées avec des contenus abstraits, elles restent différentes des phrases : une phrase telle que « les enfants sont agités » exprime deux propositions – qui sont également exprimées par « Maria et Paul sont agités en ce moment » et « tous les enfants sont agités » respectivement. Pour cette raison, il est malheureux que la logique des phrases (la logique qui prend comme expressions logiques les connecteurs qui relient des phrases entières comme « ...et ⋯ », « soit ..., soit ⋯ » et « si ..., alors ⋯ ») soit appelée « logique propositionnelle » ou « logique des propositions ». La logique des phrases, comme nous l'appelons, ne traite qu'indirectement des propositions (voire pas du tout) : elle ne distingue pas les propositions exprimées par la même phrase, mais elle distingue par contre des phrases qui ont des structures logiques différentes (qui, elles, peuvent très bien exprimer la même proposition).

[8] On appelle « logique intensionnelle » une logique qui ne permet pas l'intersubstituabilité des termes co-référentiels *salva veritate*. « Intensionnel » vient de « intension » (fonction qui attribue une extension dépendant du contexte d'évaluation) et ne doit pas être confondu avec « intentionnel » (dit d'un acte fait de manière intentionnelle, ou avec une intention).

PROOF

> Il est nécessaire que 8 soit la somme de 5 et 3. 8 est la somme de 4 et 4. Donc il est nécessaire que la somme de 5 et 3 soit (identique à) la somme de 4 et 4. (2.5)

> Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage. Je sais que j'étudie la logique. Donc je serai heureux et sage. (2.6)

Dans leurs contextes respectifs, ces quatre arguments sont tous convaincants. Mais seulement les deux premiers sont valides dans la logique propositionnelle et dans la logique des prédicats respectivement (le premier sera également valide dans la logique des prédicats qui est une extension de la logique propositionnelle). Cela veut dire que c'est grâce à la présence de connecteurs et de quantificateurs (respectivement) que si leurs prémisses sont vraies, alors leurs conclusions le sont aussi. La validité de (2.6), par contre, dépend également du fait que l'on ne peut savoir que ce qui est vrai. En logique épistémique, ceci est considéré comme découlant de la ‹logique› de l'expression « sait que », et alors (2.6) est considéré comme valide, mais ceci n'est pas le cas pour la logique propositionnelle et la logique des prédicats. La validité de (2.5), à son tour, dépend de la sémantique de « il est nécessaire que », c'est-à-dire du fait qu'il n'est pas suffisant, pour la vérité de « il est nécessaire que p » que « p » soit vrai tout court.

Nous avons dit que la validité des inférences ne dépend que de leur forme et que toutes les inférences ayant la même forme sont également valides. La première inférence (2.3), par exemple, est conforme au schéma valide suivant, que l'on appelle « modus ponendo ponens » (ou plus court « modus ponens ») :

$$\frac{p \to q \quad p}{q}$$ (modus ponendo ponens)

Pour arriver à ce schéma à partir d'une inférence particulière comme (2.3), il faut faire abstraction de toutes les particularités des phrases et ne les considérer que par rapport à leur capacité à être vraies ou fausses. Pour savoir si je peux ou non conclure que je serai heureux et sage car je fais de la logique, et que si je fais de la logique, alors je serai heureux et sage, il ne me faut pas connaître la vérité de ces prémisses : *si* elles sont vraies, alors je serai heureux et sage. Je pourrais conclure mon bonheur et ma sagesse d'une infinité d'autres prémisses, si elles étaient également vraies :

> Si je n'étudie pas la logique, je serai heureux et sage. Je n'étudie pas la logique. Donc je serai heureux et sage. (2.3+)

> Si je vais à la maison maintenant, je serai heureux et sage. Je vais à la maison maintenant. Donc je serai heureux et sage. (2.3*)

C'est pourquoi la logique propositionnelle standard est une logique que l'on appelle « extensionnelle » : la validité de ses inférences ne dépend que de la vérité (= l'extension) des phrases qu'elles contiennent. Pour la solidité des instances d'un schéma valide comme celui du modus ponens, seule la vérité des phrases simples importe.

Contrastons ce cas avec (2.5). Savoir si je peux ou non inférer, en logique modale, la (vérité de la) conclusion de (la vérité de) ses prémisses ne dépend pas seulement de la vérité de ses prémisses : il importe également de savoir si la deuxième prémisse est nécessaire ou pas. Ceci devient apparent si on remplace la deuxième prémisse par une autre ayant la même valeur de vérité, c'est-à-dire une prémisse qui est également vraie :

> Il est nécessaire que 8 soit la somme de 5 et 3. 8 est le nombre des planètes. Donc il est nécessaire que le nombre des planètes soit la somme de 5 et 3. (2.5+)

PROOF

> Il est nécessaire que 8 soit la somme de 5 et 3. 8 est mon nombre préféré. Donc il est nécessaire que mon nombre préféré soit la somme de 5 et 3. (2.5*)

Même si leurs prémisses sont vraies, les conclusions de ces deux arguments sont fausses. La non-validité de ces deux arguments est due au fait que les faits astronomiques et mes préférences numériques sont contingentes – même si « le nombre des planètes » et « mon nombre préféré » dénotent les deux le nombre 8, ceci est dû à des circonstances (astronomiques et psychologiques) particulières.[9] Il n'y a pas d'intersubstituabilité des termes singuliers co-référentiels *salva veritate* – en échangeant la deuxième prémisse avec une phrase de la même valeur de vérité, j'ai rendu la conclusion fausse.

C'est pour cette raison que la logique modale n'est pas une logique extensionelle : en substituant un terme singulier avec un autre ayant le même référent, nous passons d'une phrase vraie (« Il est nécessaire que 8 soit la somme de 5 et 3 ») à une phrase fausse (« Il est nécessaire que le nombre de planètes soit la somme de 5 et 3 »). La validité d'une inférence en logique modale ne dépend pas seulement de la vérité des phrases concernées, mais également de leurs intensions,[10] en particulier de la question de savoir si elles sont nécessaires ou non.

En général, nous pouvons dire qu'une logique est extensionnelle si le principe suivant est vrai d'elle :

> Si une formule comme « $p \leftrightarrow q$ » est vraie, alors la logique ne distingue pas entre « ... $p \cdots$ » et « ... $q \cdots$ ». (ext)

Le principe (ext) veut dire qu'une logique extensionnelle ne s'intéresse qu'aux composants des phrases dont elle traite qui en affectent la vérité ou la fausseté. En ceci, (ext) est un principe de substitution, qui nous permet de substituer deux phrases qui ont la même valeur de vérité (qui sont matériellement équivalentes, comme nous dirons plus tard) dans n'importe quel contexte de la logique propositionnelle. Une telle logique fait abstraction de tous les aspects de nos langues qui n'affectent pas les valeurs de vérité des phrases : elle s'occupe uniquement des conditions de vérité des phrases et ignore les autres aspects de leurs significations.

La distinction entre logiques extensionnelles et logiques intensionnelles repose sur la distinction entre extension et intension, une distinction technique de la philosophie du langage qui s'applique à toutes les expressions.[11] Ne considérant que les expressions qui sont des phrases (et dont l'extension

[9] Le cas des planètes illustre une deuxième source de contingence, à savoir la fluidité du langage naturel. En effet, en 2006, l'Union astronomique internationale a révisé la définition de « planète », excluant Pluton et faisant par la même occasion passer le nombre des planètes du système solaire de 9 à 8.

[10] « Intension » désigne l'ensemble de conditions qui permettent de définir un concept. Bien que l'extension de « la lune » et « le corps céleste le voisin le plus proche de la Terre dans l'espace » ont la même extension (= se réfèrent à la même chose), leurs définitions ou intensions doivent être différentes, parce qu'il est (métaphysiquement) possible que Vénus soit plus proche de la terre que la lune ne l'est maintenant.

[11] Comme nous l'avons vu à la p. 33, la distinction entre « intension » et « extension » a été introduite par Carnap (1947) qui voulait ainsi préciser une distinction faite par Gottlob Frege (1892b) entre le sens (« Sinn », « sense ») et la référence (ou dénotation, « Bedeutung », « reference ») d'un terme singulier (un mot qui ne désigne qu'une chose) (cf. Frege, 1971d, pour une traduction française). Selon Frege, un terme singulier comme « le président des États-Unis » a comme référence un individu spécifique, c'est-à-dire Donald Trump dans notre cas, et comme sens une condition que cet individu doit remplir pour être le référent du terme, c'est-à-dire *être le président des États-Unis*. La différence pour les prédicats (« termes généraux ») et les phrases, est déjà plus controversée. Dans la théorie originale de Frege, la référence d'un prédicat comme « ... est bleu » était le concept (« Begriff ») Bleu ou Bleuté, et la référence d'une phrase était sa valeur de vérité (pour Frege, le sens d'une phrase était la pensée qu'elle exprime). Carnap remplaçait cette distinction par la suivante :

	extension	intension
terme singulier « Fred »	le référent Fred, l'homme	un critère d'identification *le père de Nathalie, frère de Gerhard, etc.*
prédicat « bleu »	l'ensemble toutes les choses bleues	le concept fonction qui détermine quels objets, dans une situation considérée, sont les choses bleues
phrase	la valeur de vérité	la proposition

PROOF

est donc la valeur de vérité), on obtient un cas spécial de l'extensionnalité : le principe de *vérifonctionnalité*, qui dit que la valeur de vérité d'une phrase complexe ne dépend que des valeurs de vérité de ses phrases constituantes et des connecteurs logiques qui les relient. Le principe de vérifonctionnalité est donc aussi un cas particulier du principe de compositionnalité.

Les connecteurs propositionnels sont dit « vérifonctionnels », parce qu'en formant des formules complexes à partir de constituants plus simples, ils fixent la valeur de vérité de la formule complexe à partir des valeurs de vérité des constituants plus simples.[12] Pour observer la vérifonctionnalité des connecteurs propositionnels dans une formule, on peut essayer d'attribuer une à une les valeurs de vérité possibles à ses constituants, et observer comment varie la valeur de vérité de la formule complexe. On appelle une telle manière d'attribuer des valeurs de vérité aux constituants une *valuation* de la phrase complexe.[13] Une valuation de la phrase complexe « Si Jean est malade, alors Maria est sage et heureuse et Pierre a eu raison », par exemple, consiste en l'attribution de **v** (vrai) à « Jean est malade » et à « Pierre a eu raison » et de **f** (faux) à « Maria est sage et heureuse ».[14] Cette attribution de valeurs de vérité aux constituants simples nous oblige, logiquement, à attribuer **f** à la conjonction « Maria est sage et heureuse et Pierre a eu raison » (puisqu'une conjonction ne peut pas être vraie si un des conjoints est faux) et elle nous oblige aussi à attribuer la valeur **f** à l'implication toute entière, puisque son antécédent est vrai et son conséquent faux. C'est la logique propositionnelle qui détermine ces obligations en nous montrant comment la valeur de vérité de la phrase complexe dépend de la valuation choisie.

C'est par une *table de vérité* que l'on montre de quelle manière la valeur de vérité de la phrase complexe est fonction de la valeur de vérité de ses constituants. Par exemple, on dit ce qu'on entend par le connecteur unaire « $\neg$ » en disant que « $\neg p$ » est vrai si « p » est faux et que « $\neg p$ » est faux si « p » est vrai. On détermine la signification de « $\wedge$ » en disant que « $p \wedge q$ » est vrai si « p » et « q » sont tous deux vrais, et faux autrement. Mais considérons ces connecteurs plus en détail.

2.2 La négation

Dans les langues naturelles, il existe de nombreuses manières de nier une phrase telle que « j'aurais pu l'aider » :

N1 Il n'est pas le cas que j'aurais pu l'aider.

N2 Il était impossible pour moi de l'aider.

« p »	**v** ou **f**	fonction qui détermine si, dans une situation considérée, « p » est vraie

Nous reviendrons sur ces notions dans le ch. 9.2 à la p. 220.

[12] Cela signifie pour les connecteurs qu'ils sont fonctionnels, des fonctions de vérité : ils *déterminent*, pour une liste d'arguments donnée, un résultat, une valeur de vérité précise. Pour en savoir plus sur ces notions, cf. le glossaire à la p. 475.

[13] Nous définirons plus formellement ce qu'est une valuation à la p. 117 du ch. 5. Pour l'instant, il s'agit simplement d'une attribution de valeurs de vérité aux phrases simples – si nous l'effectuons en changeant l'interprétation de ces phrases ou en imaginant comment les choses seraient si les phrases, avec leurs significations actuelles, étaient vraies, n'a pas d'importance à ce stade.

[14] En parlant ici de « valeur de vérité », je mets entre parenthèses la question ce que sont ces objets, et s'il y a de telles choses (cf. n. 16 à la p. 38).

PROOF

N3 Je n'aurais pas pu l'aider.
N4 L'aider m'était impossible.
N5 Aurais-tu pu l'aider ? Non.
N6 C'est faux que j'aurais pu l'aider.

Ce que toutes ces manières de nier « j'aurais pu l'aider » ont en commun, et la raison pour laquelle toutes ces phrases sont formalisées par « $\neg p$ », est qu'elles sont vraies si et seulement s'il est faux que j'aurais pu l'aider. L'essence de la négation est donc qu'elle inverse la valeur de vérité de la phrase à laquelle elle est attachée : si cette dernière est vraie, sa négation est fausse ; si elle est fausse, sa négation est vraie. Nous pouvons donc définir la signification de « $\neg$ » par la table de vérité suivante :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Ce tableau détermine la valeur de vérité de « $\neg p$ » pour toutes les possibilités logiques concernant la valeur de vérité de « p » et montre donc comment la deuxième valeur est une fonction de la première.[15] Comme dans une logique qui obéit au principe de bivalence (comme les logiques standards propositionnelles et des prédicats), toute phrase est ou bien vraie ou bien fausse, il n'y a que deux valeurs de vérité : « V » (« vrai ») et « F » (« faux »).[16] Chacune de ces possibilités logiques correspond à une *valuation* de la phrase abrégée par la lettre « p ». Dans la première valuation, « p » est vrai et « $\neg p$ » est donc faux. Dans la deuxième, « p » est faux et « $\neg p$ » est donc vrai. Une valuation en logique propositionnelle consiste en l'attribution d'une valeur de vérité (de « V » ou de « F ») à une phrase. Pour donner la sémantique de « $\neg$ » dans une logique extensionnelle, il suffit de spécifier de quelle manière la valeur de vérité d'une phrase complexe qui contient « $\neg$ » dépend des valeurs de vérité de ses constituants – c'est ce que fait notre table de vérité. C'est pourquoi la table de vérité ci-dessus

[15] Nous appelons « possibilités logiques » les combinaisons de valeurs de vérité pour les phrases atomiques : une possibilité logique correspondra à une ligne dans un tableau comme celui que l'on vient de donner.

[16] La définition des valeurs de vérité est une question intéressante. Comme il les a pris pour les *référents* de phrases, Gottlob Frege les a considérées comme des objets (‹ logiques ›). Heureusement pour les philosophes scrupuleux, rien en logique ne nous oblige à suivre Frege en ceci. Tous nos usages de « V » et « F » admettent une paraphrase qui ne les utilise pas. Lorsque j'utilise « V » et « F » dans les tables de vérité, je ne veux pas parler d'objets, mais seulement spécifier la possibilité logique en question (comme possibilité qui est telle que si elle était actuelle, alors la phrase en question serait vraie ou fausse respectivement). Pour parler des valeurs de vérité conçues comme objets, j'utilise « **v** » et « **f** ». La table de vérité donnée en haut pour la négation, par exemple, est une autre manière de dire :

1. Si « p » est vrai, alors « $\neg p$ » est faux.
2. Si « p » est faux, alors « $\neg p$ » est vrai.

Ces deux phrases ne contiennent pas de noms pour des valeurs de vérité, mais seulement les prédicats « ...est vrai » et « ...est faux ».

Plus précisément encore, et pour éviter une ontologie de propositions (qui seraient des porteurs de vérité et de fausseté ‹ primaires ›, cf. p. 9), il faut construire les attributions de valeurs de vérité comme des opérateurs, qui prennent des phrases pour en faire des phrases :

1. S'il est vrai que p, alors il est faux que $\neg p$.
2. S'il est faux que p, alors il est vrai que $\neg p$.

Comme il ne s'agit pas ici de prédications de propriétés (la propriété d'être vrai et la propriété d'être faux), ces phrases n'entraînent pas l'existence de porteurs de vérité.

PROOF

détermine (complètement) la signification de « ¬ ».[17]

C'est l'inversion des valeurs de vérité qui définit la négation, le caractère de la relation que nous rencontrerons plus tard sous le nom de « contradiction » (cf. p. 78) : une phrase est la négation d'une autre si elle est vraie exactement dans les cas où la deuxième est fausse. La présence d'une particule linguistique comme « non » ou « ne ...pas » n'est ni nécessaire ni suffisante pour ceci.[18] En conséquence, la formalisation est souvent difficile :

N7 Nul n'est volontairement méchant.
N8 Je n'ai rien dit.
N9 Je n'ai point parlé.
N10 Je suis resté sur ma faim.

N7 n'est pas la négation d'une affirmation universelle (« il n'est pas le cas que tout le monde est volontairement méchant »), mais l'affirmation universelle d'une affirmation négative portant sur les méchants (« il est le cas pour tout le monde que si la personne est méchante, elle ne l'est pas volontairement »). **N8**, par contre, est une simple qualification négative (« il n'est pas le cas que j'ai parlé ou dit quelque chose ») et est équivalente, au moins si c'est la même chose de parler que de dire quelque chose, à **N9**. De manière analogue, **N10**, même si c'est une phrase superficiellement positive, peut être prise pour équivalente à « Je n'ai pas mangé assez ».

On peut distinguer la négation interne de la négation externe. La négation externe, qui correspond à notre connecteur « ¬ », est un opérateur : elle s'applique à une phrase pour en faire une autre phrase (la négation de la première). Au contraire, la négation interne s'applique à un prédicat et en fait un autre, qui, au moins dans les cas paradigmatiques, s'applique à un objet si et seulement si le premier ne s'applique pas à cet objet. Dans les langues naturelles, il n'est souvent pas clair quel est le type de négation dans une phrase. Considérons

N11 Il n'est pas le cas que la solution de cette équation est plus grande que 2.
N12 La solution de cette équation n'est pas plus grande que 2.

La deuxième phrase, surtout si elle est interprétée comme synonyme de « la solution de cette équation est égale ou plus petite que 2 » présuppose que cette équation a une solution, ce que la première phrase ne fait pas. Si la deuxième est prise comme synonyme de « la solution de cette équation est 1 ou 2 », elle présuppose même que la solution est un nombre naturel.[19] Ces présuppositions peuvent échouer. C'est pour cela que la négation interne dans les langues naturelles ne manifeste souvent pas ce que nous avons identifié comme l'essence de la négation (en logique) : elle n'est pas toujours vraie si la phrase – positive ou elle-même négative – qu'elle modifie est fausse. C'est pour cela que nous nous

[17] Nous faisons ici un choix important de formalisation qui est de traiter « ¬ » comme une partie la phrase (du porteur de la valeur de vérité) en question. Pour la négation, ainsi que pour les autres connecteurs, d'autres options sont possibles : nous pourrions traiter les expressions respectives comme exprimant une attitude (comme des marqueurs de force ou de ton) plutôt qu'une partie du contenu. Nous reviendrons sur cette conception de la négation comme rejet à la p. 266.

[18] En adoptant une telle notion relationnelle de la négation, nous évitons les discussions difficiles (et peut-être non sensées) sur le statut de la ‹ négativité ontologique › (est-ce que l'immortalité est la négation / privation / absence de la mortalité ou plutôt la mortalité la négation / privation / absence de l'immortalité ?).

[19] Cette distinction a motivé Russell dans son analyse des descriptions définies comme « le roi de France ». Si nous nous posons la question de savoir si ou non le roi de France est chauve, une réponse affirmative *et* une réponse négative semble nous obliger à l'affirmation qu'il y a un roi de France. Russell (1905) a argumenté que la négation externe de « le roi de France est chauve » est « il n'est pas le cas qu'il y a exactement un individu qui est le roi de France et qui est chauve ». Nous parlerons de cette analyse des descriptions définies à la p. 238. Elle est applicable également aux problèmes soulevés par les erreurs de catégorie (cf. n. 45 à la p. 17).

PROOF

occupons uniquement de la négation dite « propositionnelle », qui nie une phrase entière.

En langue naturelle, il est souvent très difficile de distinguer une négation interne (qui ne nie qu'une partie de l'assertion à laquelle elle s'oppose)[20] de la négation externe, qui s'applique comme opérateur « il n'est pas le cas que … » à l'ensemble de la phrase.[21] La logique propositionnelle ne considère que l'espèce externe comme négation. En plus, en langue naturelle, il faut distinguer la négation externe de la négation appelée « méta-linguistique » (qu'en logique nous formulerions avec des guillemets, ce qui est souvent grammaticalement incorrect en langue naturelle) :[22]

N13 ex3

N14 ex4

Suivant Frege, nous adopterons par la suite la thèse selon laquelle toute phrase qui n'est pas vraie est fausse et toute phrase qui n'est pas fausse est vraie.[23] Ceci s'ensuit de notre acceptation des trois principes suivants :

- Le *principe de bivalence* dit que ou bien une phrase « p » est vraie ou bien « p » est fausse (il n'y a pas de troisième 'valeur de vérité' comme ‹ indéterminé ›, ‹ vrai et faux ›, ‹ ni vrai ni faux ›, ‹ inconnu ›, etc.).
- Le *principe de non-contradiction* dit que, pour toute phrase « p », il n'est pas possible que « p » *et* « $\neg p$ » soient vrais ensemble. Si « p » est vrai, alors « $\neg p$ » ne l'est pas ; si « $\neg p$ » est vrai, alors « p » ne l'est pas.
- Le *principe du tiers exclu* dit que soit « p » soit « $\neg p$ » est vrai – que « $p \vee \neg p$ » (« soit p, soit $\neg p$ ») est une vérité logique (une phrase que nous expliquerons plus tard).

Par rapport à la distinction entre vérité et fausseté, appliquée à des phrases déclaratives, non ambiguës, etc., le principe du tiers exclu en garantit l'application, le principe de bivalence la caractérise comme exhaustive et le principe de non-contradiction comme exclusive.

Graphiquement, ces trois principes peuvent être interprétés comme suit : Imaginons une partition des possibilités logiques pour les valeurs de vérité des phrases. Le principe de bivalence dit alors qu'il ne faut considérer que deux possibilités – qu'une phrase soit vraie ou qu'elle soit fausse :

[20] Typiquement, l'imperfection de l'opposition entre la négation interne et la phrase qu'elle nie crée la possibilité que les deux phrases soient fausses (dans le cas où ce que les deux assertent est faux) : dans la terminologie du « carré des oppositions » (cf. sct. 3.5), elles ne sont que contraires, non contradictoires.

[21] Voici quelques exemples clairs :
- pour la négation interne : « si p, alors $\neg p$ », « tout non-A est un non-B », « il sera le cas que $\neg p$ », « il sait que $\neg p$ », « l'actuel roi de France n'est pas chauve » ;
- pour la négation externe : « $\neg$(si p, alors p) », « il n'est pas le cas que tout A est un B », « $\neg$(il sera le cas que p) », « il ne sait pas que p », « il n'est pas le cas que l'actuel roi de France est chauve » ;

Les exemples nous montrent également qu'il s'agit d'une distinction relative (interne *à quelle* phrase ?).

[22] La difficulté de savoir si toute négation ‹ méta-linguistique › est en effet la prédication, au sujet d'une phrase, qu'elle est fausse, surgit, par exemple, dans la discussion si une telle négation d'une phrase non sensée peut avoir un sens (une position que Shorter (1956, 83) attribue à Wittgenstein, cf. Prior (1967, 524)). Si tel est le cas, ce type de ‹ négation › n'est pas une négation en notre sens, puisqu'elle n'obéit pas à la table de vérité que nous avons donnée.

[23] Appliquée aux langues naturelles, cette thèse semble incorrecte. Mis à part les phrases qui commettent des erreurs de catégorie comme « Le nombre 2 est célibataire », les langues naturelles contiennent également des phrases qui ont des présuppositions qui peuvent ne pas être satisfaites, comme « Le roi de France est chauve » présuppose qu'il y ait un roi de France qui est soit chauve, soit chevelu. De telles présuppositions existentielles semblent mettre en péril la thèse de Frege, puisqu'elles résistent aux deux catégories proposées (si ce n'est pas vrai, alors c'est faux ; si ce n'est pas faux, alors c'est vrai). Nous reviendrons sur cette idéalisation à la p. 238.

PROOF

vrai	faux

Les trois principes nous obligent à ranger toutes les phrases (déclaratives, non ambiguës, etc.) et leurs négations dans exactement une des colonnes. Pour une telle phrase « p », le principe de bivalence nous oblige à la placer soit à gauche soit à droite. Le principe du tiers exclu nous dit que si nous ne plaçons pas « p » à gauche, nous devons y placer « $\neg p$ ». Le principe de non-contradiction nous interdit d'y placer les deux.

Le principe de non-contradiction est formulé sous forme ontologique chez Aristote (« il est impossible d'être et de ne pas être en même temps »),[24] bien que celui du tiers exclu soit formulé comme loi, ou peut-être norme, psychologique (« dans tous les cas, il faut soit affirmer soit nier »], *Mét.* 1011b23-24). Pour nos besoins, nous pouvons adopter les suivants :[25]
NC (non-contradiction) : s'il est le cas que p, alors il n'est pas le cas que $\neg p$; $\neg(p \wedge \neg p)$;
TE (tiers exclu) : s'il n'est pas le cas que $\neg p$, alors il est le cas que p ; $p \vee \neg p$
Ensemble, **NC** et **TE** définissent la négation (externe, propositionnelle) comme inversion de la valeur de vérité :[26]

« p » est vrai $\iff$ il n'est pas le cas que : « $\neg p$ » est vrai

Le principe du tiers exclu (**TE**) doit être distingué du principe de bivalence (**BI**) : seulement ce dernier, mais pas le premier, parle de la fausseté. Avec le principe de bivalence, nous considérons le côté droit de l'équivalence donnée comme affirmant la fausseté de « $\neg p$ » et l'affirmation que « p » n'est pas faux comme affirmant sa vérité. Ensemble, les trois principes nous donnent une équivalence entre la vérité d'une phrase et la fausseté de sa négation :

« p » est vrai $\overset{\text{NC}}{\Longrightarrow}$ il n'est pas le cas que : « $\neg p$ » est vrai $\overset{\text{BI}}{\Longrightarrow}$ « $\neg p$ » est faux

« $\neg p$ » est faux $\overset{\text{TE}}{\Longrightarrow}$ il n'est pas le cas que : « p » est faux $\overset{\text{BI}}{\Longrightarrow}$ « p » est vrai

[24] Chez Aristote, il y a au moins deux questions différentes qui sont controversées. Premièrement, il y a la question de savoir quelles occurrences de « être » (*einai*) chez Aristote devraient être interprétées comme 'prédicatives' et lesquelles comme 'existentielles'. Deuxièmement, il y a la question de savoir si une telle différentiation a du sens systématiquement et du point de vue de l'exégèse. D'autres formulations du principe de non-contradiction sont explicitement prédicatives : « rien ne peut appartenir et ne pas appartenir à la même chose en même temps et sous le même aspect » (*Mét.* 1005b19-23)

[25] Pour des raisons philosophiques, il peut être utile d'adopter les versions sémantiques de Lukasiewicz 1922 :
NC+ deux phrases contradictoires ne sont pas les deux vraies ;
TE+ deux phrases contradictoires ne sont pas les deux fausses.
Comme ces principes utilisent l'expression « contradictoire » (elle-même souvent explicitée en termes de négation), ils permettent une application plus subtile et différenciée des principes.

[26] Pour des raisons de lisibilité, j'omets les guillemets qui seraient, cependant, strictement nécessaires.

PROOF

La réduction à l'absurde (cf. p. 24) est une conséquence du principe de non-contradiction : si « q » implique que p et que $\neg p$, alors « q » ne peut être vrai.

Il n'y a que très peu de philosophes qui nient le principe de non-contradiction, c'est-à-dire qui pensent que « p » et « $\neg p$ » peuvent tous deux être vrais ensemble – on les appelle les « dialethéistes » et le logicien et philosophe Graham Priest en est un exemple (cf. Priest, 1993).

De nombreux philosophes, cependant, nient le principe du tiers exclu : selon eux, « $p \vee \neg p$ » n'est pas (le schéma d') une vérité logique. Les intuitionnistes, par exemple, interprètent l'affirmation qu'on a prouvé « $p \vee \neg p$ » comme une affirmation que soit on a prouvé que p, soit on a prouvé que $\neg p$ (cf. Dummett, 2000). Dans de nombreux cas, ni l'un ni l'autre n'est possible (prenons par exemple « soit il pleut demain, soit il ne pleut pas demain » – comment pourrais-je *prouver* la présence ou l'absence de la pluie de demain ?).

Enfin, ceux qui nient le principe de bivalence sont ceux qui préfèrent une logique à plusieurs valeurs de vérité, par exemple une logique qui accorde aux phrases dont on ne sait pas si elles sont vraies ou fausses la valeur de vérité 'inconnu'.

Étant donné que la contribution de « $\neg$ » aux conditions de vérité d'une phrase complexe qui la contient comme connecteur principal est l'inversion des valeurs de vérité (de « V » en « F » et vice versa), une autre caractéristique de la négation est la loi de la double négation :

$$\frac{\neg\neg p}{p}\ \neg\mathbf{E}$$

La validité de ce schéma d'inférence signifie qu'on peut inférer « p » de la phrase doublement niée « $\neg\neg p$ » : elle nous donne le droit d' ‹éliminer› la double négation (d'où le nom « $\neg\mathbf{E}$ » pour **É**limination de la (double) négation).[27]

L'élimination de la double négation s'ensuit des principes de non-contradiction et du tiers exclu. La loi de non-contradiction dit qu'il n'est pas possible que « p » et « $\neg p$ » soient tous deux vrais. Si alors « $\neg\neg p$ » est vrai, alors « $\neg p$ » ne l'est pas. Par le principe du tiers exclu, si « $\neg p$ » n'est pas vrai, alors « p » est vrai. Donc : si « $\neg\neg p$ » est vrai, alors « p » l'est aussi.

La négation est particulièrement importante pour les preuves par réduction à l'absurde (*reductio ad absurdum*). L'idée d'une telle preuve est la suivante : on suppose qu'une phrase particulière soit vraie (même si on croit qu'elle est fausse). Sous cette supposition, on montre qu'il s'ensuit quelque chose d'absurde (une phrase dont on *sait* qu'elle est fausse). On conclut que la supposition initiale était fausse, car si elle était vraie, une chose dont on sait qu'elle est fausse serait vraie, alors elle est fausse. Si on abrège par « $\bot$ » n'importe quelle phrase dont on sait qu'elle est fausse,[28] on peut formuler cette règle comme suit :

$$\frac{p \to \bot}{\neg p}\ \neg\mathbf{I}*$$

Nous reviendrons sur ce schéma d'inférence plus tard.[29]

[27] En acceptant que la règle de l'élimination de la double négation est valide, nous faisons un autre pas qui nous éloigne des langues naturelles. Dans beaucoup de contextes, il y a une différence entre « Je suis d'accord » et « Il n'est pas le cas que je suis en désaccord ».

[28] Nous ne pouvons donc pas dire que « $\bot$ » (prononcé « falsum ») représente 'l'absurde' (même si cela avait un sens) : « $\bot$ » n'est pas un *nom* d'une phrase, mais une phrase elle-même, le signe nous sert comme abréviation pour une phrase logiquement fausse – une phrase concrète, mais arbitrairement choisie. La même chose vaut pour l'autre 'nom' de « $\bot$ », « contradiction », et pour sa converse, « $\top$ », que nous utilisons pour abréger n'importe quelle tautologie, par ex. « Socrate est mortel ou il ne l'est pas ».

[29] La règle $\neg\mathbf{I}*$ n'est pas une **I**ntroduction de la négation standard, puisqu'il est difficile d'imaginer une version de « $\bot$ » qui

PROOF

2.3 La conjonction

Considérons les phrases suivantes :

C1 Ils se sont mariés et ont eu un enfant.
C2 Ils ont eu un enfant et se sont mariés.
C3 Pierre et Paul étudient la logique, et ils sont heureux et sages.
C4 Elle est allée voter bien que sa mère lui disait de rester à la maison.
C5 Je suis heureux et sage.
C6 Je suis heureux, mais sage.

Qu'est-ce qui nous permet de dire qu'il s'agit de phrases conjonctives, même si, par exemple « je suis heureux parce que je suis sage » et « je suis heureux ou sage » ne le sont pas ? L'important semble être que la vérité d'une phrase conjonctive entraîne la vérité de ses deux conjoints et que la vérité de ses deux conjoints entraîne la vérité de la phrase conjonctive. La conjonction, comme elle est étudiée par la logique propositionnelle, est donc un connecteur vérifonctionnel : la vérité ou fausseté d'une phrase conjonctive ne dépend que de la vérité ou fausseté de ses conjoints.[30] On peut donc dire que l'essence de la conjonction, « $\wedge$ », est qu'elle rend les inférences suivantes valides :

$$\frac{p, q}{p \wedge q}\ \wedge\mathbf{I} \qquad \frac{p \wedge q}{p}\ \wedge\mathbf{E} \qquad \frac{p \wedge q}{q}\ \wedge\mathbf{E}$$

Il s'agit des règles d'introduction (« $\wedge\mathbf{I}$ ») et d'élimination (« $\wedge\mathbf{E}$ ») de notre connecteur « $\wedge$ » : on peut inférer une conjonction de ses deux conjoints et on peut inférer les conjoints de la conjonction.

Si on considère que le comportement inférentiel (et donc, dans une logique extensionnelle, la signification) du connecteur « et » est déterminé par $\wedge\mathbf{I}$ et $\wedge\mathbf{E}$ et si on formalise les phrases (**C1**) à (**C6**) au moyen de « $\wedge$ », on perd de nombreuses nuances de significations que ces phrases ont dans la langue naturelle. Par exemple, on ne fait pas de distinction entre « et » et « mais » (et donc pas de distinction entre (**C5**) et (**C6**)). Frege, en argumentant pour une logique extensionnelle, disait que cette différence n'appartient pas au domaine de la signification au sens restreint du mot, mais au domaine de ce qu'il appelle le « ton » ou la « couleur » (« Färbung ») d'une phrase.

Nous avons vu, à la p. 33 que Frege distinguait les sens de « étoile de soir » et de « étoile du matin » pour expliquer le fait qu'un énoncé d'identité vrai comme « L'étoile du soir est l'étoile du matin » nous informe sur le monde et peut être ignoré même par quelqu'un qui utilise les expressions de manière compétente. Il en tirait la conclusion que les deux expressions se distinguent par leur sens, qu'une 'nous donne' son référent d'une autre manière que l'autre. Nous avons donc un premier critère pour la différence entre deux sens fregéens : le sens de « e_1 » est différent du sens de « e_2 » si l'énoncé « $e_1 = e_2$ » nous informe sur le monde. Également important pour Frege, cependant, est un critère pour l'*identité* des sens de deux expressions. Si la différence entre deux expressions n'est que notationnelle ou ne concerne que la psychologie de leurs utilisateurs, leur 'signification cognitive' et alors leur sens est le même.

ne contiendrait pas de négation. Nous avons rencontré ce schéma d'inférence déjà dans l'argument contre l'existence de Dieu à la p. 24 : conclure de « si Dieu existe, alors il n'existe pas » que Dieu n'existe pas est une instance de $\neg\mathbf{I}*$.

[30] En cela, la conjonction se distingue des connecteurs intensionnels comme « mais » ou « parce que ». Bien que ces deux connecteurs soient aussi « factifs » dans le sens que de « je suis heureux parce que je suis sage » et de « je suis heureux bien que je sois sage », il s'ensuit que je suis à la fois heureux et sage, l'inférence converse n'est pas valide : il est tout à fait possible que je sois heureux et sage sans être heureux parce que je suis sage.

PROOF

La signification d'une expression, au sens restreint, est ce qui est préservé par une bonne traduction.[31] Les différences entre « et » et « mais », cependant, sont des différences de tonalité qui peuvent même se perdre dans une bonne traduction. En général, le ‹ ton › sert à manifester l'attitude de celui qui utilise une phrase par rapport à ce qu'il dit. En utilisant « mais » au lieu de « et », par exemple, je peux rendre visible que je pense qu'il y a un contraste entre les deux phrases. En utilisant « canasson » au lieu de « cheval », je peux exprimer une attitude négative, etc.[32]

Nos exemples nous montrent aussi qu'il faut parfois reformuler une phrase pour rendre manifeste sa structure logique : (**C3**), par exemple, devient la phrase barbare : « Pierre étudie la logique et Paul étudie la logique et Pierre est heureux et Paul est heureux et Pierre est sage et Paul est sage ».[33] Cette transformation n'est pas toujours évidente par rapport à des phrases de la langue naturelle.[34] C'est aussi pour cette raison que nous travaillerons avec une langue formelle.

La conjonction, formalisée par « $\wedge$ », est commutative : cela veut dire que « $p \wedge q$ » et « $q \wedge p$ » sont équivalents – il n'y a pas de raisons logiques de les distinguer. Ce qui distingue « Ils se sont mariés et ont eu un enfant » (**C1**) et « Ils ont eu un enfant et se sont mariés » (**C2**) ne concerne donc pas la logique. La logique extensionnelle ne concerne que la manière dont la valeur de vérité d'une phrase de la forme « $p \wedge q$ » dépend des valeurs de vérité de « p » et de « q ».

La signification de « $\wedge$ » est donc déterminée par la table de vérité suivante :

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

On voit que la conjonction « $p \wedge q$ » n'est vraie que si les deux phrases « p » et « q » sont vraies – si au

[31] Cette thèse concernant le caractère non indispensable du ton dans les traductions est à prendre avec un grain de sel : évidemment, il s'agit d'une simplification massive. Ce qui nous concerne ici c'est l'aspect de la signification parfois appelée « signification cognitive », celle qui concerne la vérité et la fausseté de ce qui a été dit. Traduire un poème en faisant abstraction du ton, par exemple, serait le transformer en manuel d'opération.

[32] Il est souvent difficile de dire quelle est l'attitude signalée par l'usage d'un certain mot : il n'est pas, p. ex., exact de dire que « p, mais q » signale toujours un contraste entre ces phrases – parfois le contraste est plutôt entre des raisons pour et contre une autre phrase, par exemple lorsqu'on me demande s'il faut inviter un professeur X à donner une conférence, et que je réponds « Il est un très bon philosophe, mais est actuellement aux États-Unis ». Même si je crois qu'il y a de très bons philosophes aux États-Unis, sa localisation présente et le coût de l'invitation qui en résulte peuvent être une raison de ne pas l'inviter.

[33] Étant donné que la conjonction est commutative (c'est-à-dire qu'une phrase du type « p et q » et vraie si et seulement si « q et p » l'est aussi), nous n'avons pas besoin de mettre des parenthèses.

[34] Considérons par exemple « Marie et Simone ne sont pas contentes de leurs maris ». Le sens de la phrase, mais pas forcément sa forme, nous oblige à transformer cette phrase en « Marie n'est pas contente de son mari et Simone n'est pas contente de son mari *à elle* », même si, par exemple « Marie et Simone ne sont pas contentes des élections » donne « Marie n'est pas contente des élections et Simone n'est pas contente des élections ». Un autre problème concerne la conjonction 'collective' comme dans « Pierre et Paul ont soulevé le piano ». Ceci peut être vrai sans que « Pierre a soulevé le piano » et « Paul a soulevé le piano » soient vrais (aucun des deux possède, à lui tout seul, la force nécessaire pour soulever le piano). Il ne s'agit donc pas d'une conjonction au sens logique. Nous reviendrons à cet usage de « et » dans le contexte de notre discussion de la logique plurielle, à la p. 298.

PROOF

moins une est fausse, « $p \wedge q$ » l'est aussi.

2.4 La disjonction

Considérons les assertions suivantes :

D1 Il pleut ou il ne pleut pas.
D2 [Qu'est-ce que tu veux dans la vie ?] Me marier, être heureux ou gagner un million.
D3 [Qui prendras-tu dans ta voiture ?] Jean-Pierre ou Paul.
D4 [Qui gagnera à la loterie ?] Je vais gagner ou tu vas gagner.
D5 [A quelle heure arriveras-tu ?] A six ou sept heures.
D6 Tu es ou seras soit heureux soit sage.

Ce que toutes ces phrases ont en commun, c'est qu'elles sont vraies si un de leurs disjoints est vrai. Il suffit qu'il ne pleuve pas pour que la phrase (**D1**) soit vraie, que je me marie pour avoir réussi ma vie (**D2**), prendre Paul ou arriver à six heures pour tenir mes promesses (**D3** et **D5**), que tu gagnes (**D4**) et que tu sois sage (**D6**) pour que les phrases respectives soient vraies. Comme auparavant, il faut parfois élargir les phrases pour rendre explicites leurs formes logiques : (**D6**), par exemple, devient : « tu es heureux ou tu seras heureux ou tu es sage ou tu seras sage ».

Il nous faut distinguer la disjonction inclusive de la disjonction exclusive. Une disjonction inclusive est vraie si et seulement si *au moins un* des disjoints est vrai, y compris lorsque les deux phrases disjointes sont vraies. C'est l'interprétation naturelle des phrases (**D2**) et (**D4**) : il serait absurde, au cas où tous mes vœux se réalisent, ou dans celui où nous gagnons tous deux à la loterie, de dire que les réponses aux questions (**D2**) et (**D4**) sont fausses. C'est la disjonction inclusive qui est formalisée par « $\vee$ » (qui vient du latin « vel »). Une disjonction exclusive (« aut » en latin) est vraie si et seulement si l'un des disjoints, mais pas les deux, est vrai. C'est l'interprétation naturelle de (**D3**) (étant donné que je n'ai qu'une seule place de libre dans ma voiture) et de (**D5**) (étant donné que je n'arrive qu'une seule fois). Dans certains cas, l'interprétation exclusive est la seule possible, comme pour le panneau de prévention d'accidents routiers : « boire ou conduire ».[35]

L'incompatibilité des disjoints dans un cas de disjonction exclusive vraie peut être due à différentes raisons. Même dans le cas où ces raisons sont des raisons logiques, comme dans (**D1**), nous ne sommes cependant pas obligés de formaliser une disjonction comme disjonction exclusive. Quand il le faut, nous pouvons toujours ajouter « et non pas les deux » à une disjonction inclusive.[36] Un test pour l'inclusivité de la disjonction nous est fournit par la négation : dans les cas où la négation d'une disjonction « p ou q » est « ni p ni q » (ce qui correspond, en anglais, à la transition de « either ...or ... » à « neither ...nor ... »), la disjonction est inclusive.[37]

L'essence de la disjonction (inclusive) est qu'une phrase disjonctive est vraie si et seulement si au

[35] Si nous le formalisons avec la disjonction exclusive, le principe du tiers exclu (que « $p \vee \neg p$ » est une vérité logique) impliquera le principe de non-contradiction (que « p » et « $\neg p$ » ne sont pas les deux vrais).

[36] De même, on peut ajouter « ou les deux » pour rendre explicite qu'il s'agit d'une disjonction inclusive, ce qui peut avoir des effets rhétoriques : « Interrogé sur les auteurs [des] attaques [récentes], George W. Bush a estimé « qu'ils sont soit, ou à la fois, et probablement les deux, des baassistes ou des terroristes étrangers », faisant allusion aux membres du parti du dirigeant déchu Saddam Hussein. « Ils veulent tuer et créer le chaos », a-t-il souligné, ajoutant que les terroristes « veulent nous voir partir, mais nous ne partons pas ». » (*Le Monde*, 29 octobre 2003) – même s'il nous semble difficile d'imaginer quelqu'un qui soit à la fois iraqien et terroriste étranger.

[37] Nous discuterons de ce connecteur, appelé « nor » (↓), à la p. 55.

PROOF

moins l'un de ses disjoints est vrai. La signification du connecteur « $\vee$ » est donc déterminée par la table de vérité suivante :

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Comme dans le cas de la conjonction, on peut également caractériser la signification de « $\vee$ » en termes d'inférences qui l'introduisent dans des formules ou l'éliminent d'une formule :

$$\frac{p}{p \vee q}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{q}{p \vee q}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{p \vee q, \neg p}{q}\ \vee\mathbf{E}$$

Les deux règles d'introduction nous disent qu'on peut inférer « $p \vee q$ » si l'on a établi « p » (et aussi qu'on peut inférer « $p \vee q$ » si l'on a établi « q »). Pour la vérité d'une disjonction, la vérité d'un de ses disjoints est une raison suffisante.

La règle d'élimination $\vee$**E** dit que l'on peut éliminer des disjonctions dont on a établi que l'un des disjoints est faux : si l'un est faux, l'autre doit forcément être vrai. Cette règle d'inférence $\vee$**E** s'appelle « le syllogisme disjonctif » et sa validité avait déjà été reconnue par Aristote. Le syllogisme disjonctif s'ensuit du principe du tiers exclu : si « q » est impliqué à la fois par « p » et par « $\neg p$ », alors « q » doit être vrai. L'alternative est exhaustive et couvre toutes les possibilités. Voici quelques exemples :

- Je serai heureux ou sage. Je ne serai pas sage. Donc je serai heureux.
- Je choisis soit la soupe soit une salade. Je ne choisis pas la soupe. Donc je choisis une salade.
- Il faut soit être vigilant soit ne pas avoir peur. Il n'est pas le cas qu'il faut être vigilant. Donc il faut ne pas avoir peur.

On rencontrera, à la p. **??** du ch. 6, une règle d'élimination de la disjonction un peu plus compliquée que $\vee$**E**.

2.5 L'implication et l'équivalence matérielle

Considérons les assertions suivantes :

I1 Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage.
I2 À condition qu'elle fasse les exercices, elle réussira l'examen.
I3 Étant donné que je n'ai rien d'autre à faire, je peux très bien sortir ce soir.
I4 Quand il pleut, je suis triste.
I5 Si je m'appelle « Arthur », je ne ferai jamais de logique.
I6 Si je ne fais jamais de logique, alors je ne m'appelle pas « Arthur ».

Toutes ces phrases peuvent être formalisées par le connecteur « $\rightarrow$ » (« si ... alors $\cdots$ »), qu'on appelle l'« implication matérielle », à condition qu'elles soient fausses si et seulement si leur antécédent (la phrase qui suit le « si ») est vrai et leur conséquent (la phrase qui suit le « alors ») est faux. Même si

PROOF

cette condition est certainement nécessaire,[38] il peut paraître douteux qu'elle soit aussi suffisante. Les cas délicats sont ceux dans lesquels l'antécédent est faux : est-ce que cela suffit pour que l'implication soit vraie quel que soit le conséquent ? Dans la langue naturelle, on est dans de nombreux cas tenté de dire non : il faut qu'il y ait une connexion entre l'antécédent et le conséquent, que l'antécédent, s'il est vrai, rende le conséquent probable, qu'il explique pourquoi le conséquent est vrai, etc.[39]

Les défenseurs de cette thèse et de ce qu'ils appellent l'« implication stricte » pensaient qu'une implication n'est vraie que si l'antécédent nécessite le conséquent – s'il est impossible (et pas seulement faux) que l'antécédent soit vrai et le conséquent soit faux (Ackermann, 1950). La logique propositionnelle standard, cependant, n'a pas choisi cette voie : pour elle, il suffit pour la vérité d'une implication « si p alors q » qu'il ne soit pas le cas que « p » est vrai et « q » est faux – l'antécédent ne formule qu'une condition suffisante, mais aucunement nécessaire pour le conséquent.[40] C'est pour distinguer cette relation d'implication, dont traite la logique standard, des types d'implications qui requièrent un lien plus étroit entre antécédent et conséquent, qu'on appelle la première « implication matérielle ».

Il y a différentes manières de justifier cette décision d'interpréter « si p alors q » comme équivalent à « soit $\neg p$ soit q ». L'argument le plus pertinent est que cette relation joue certainement un rôle important dans notre raisonnement propositionnel : des 16 connecteurs binaires vérifonctionnels (qui correspondent aux différentes possibilités de distribuer V et F sur quatre places, cf. ci-dessous, p. 55), V-F-V-V est celui qui correspond le plus à notre usage de « si … alors ⋯ ». Un autre argument consiste à dire que les phénomènes qui intéressaient les défenseurs de l'implication stricte sont mieux expliqués à l'aide d'une distinction entre implication et conséquence (cf. les pages p. 81 et suivantes dans la leçon 3) et entre les conditionnelles indicatives et subjonctives. Supposons que je tienne un crayon particulier et que je ne le lâche pas. Considérons les phrases suivantes :

Si je lâche le crayon, il tombe par terre. (2.7)

Si je lâche le crayon, il se colle au plafond. (2.8)

Nous pensons, intuitivement, que si l'une des deux phrases doit être vraie, ce sera plutôt la première. Pourtant, l'antécédent des deux conditionnels (« Je lâche ce crayon ») est faux dans la situation envisagée et donc les deux sont vrais dans la logique propositionnelle standard. Au lieu d'introduire une

[38] Il me semble incontestable que quelqu'un qui affirme (**I1**) à (**I6**) a tort si, respectivement, j'étudie la logique mais je ne serai pas heureux ni sage ; elle fait les exercices mais elle échoue à l'examen ; je n'ai rien d'autre à faire mais il n'est pas le cas que je peux sortir ce soir ; il pleut, mais je ne suis pas triste ; je m'appelle « Arthur » et ferai de la logique ; je ne fais jamais de logique, mais je m'appelle « Arthur ». Même si l'implication dite « matérielle » (celle étudiée en logique propositionnelle) est trop faible pour garantir la *transmission* de la vérité (celle-ci entendue en un sens intuitif), au moins la *préservation* de la vérité est nécessaire pour qu'il y ait implication.

[39] Cependant, cela n'est pas toujours évident. Même dans le langage naturel nous reconnaissons un certain type d'équivalence entre « Si je ne me trompe, vous êtes déjà venu » (« $\neg p \rightarrow q$ ») et « Soit je me trompe fort, soit vous êtes déjà venu » (« $p \vee q$ ») et entre « S'il me rencontre, il me salue toujours » (« $p \rightarrow q$ ») et « Il ne me rencontre jamais sans me saluer » (« $\neg(p \wedge \neg q)$ »).

[40] Une manière de rendre cela plausible est de penser les tables de vérité comme indiquant les possibilités que l'on exclut en affirmant une phrase complexe. Si je te dis « si tu es gentil, je te donnerai un bonbon », j'exclus la possibilité que tu sois gentil sans recevoir un bonbon. Cependant, je n'exclus pas que je te donne un bonbon pour d'autres raisons que ta gentillesse.

PROOF

implication plus 'stricte', leur différence est expliquée par la différence entre deux autres phrases, à savoir les suivantes :

Si je lâchais le crayon, il tomberait par terre. (2.7+)

Si je lâchais le crayon, il se collerait au plafond. (2.8+)

(2.7+) et (2.8+), qu'on appelle des « implications subjonctives », ont un autre comportement logique que (2.7) et (2.8) : pour qu'elles soient vraies, il est requis qu'il soit *impossible* que je lâche le crayon sans qu'il tombe par terre et qu'il soit *impossible* que je le lâche sans qu'il se colle au plafond. Comme la deuxième n'est pas le cas, (2.8+) est faux.[41]

Une implication matérielle, dans la logique propositionnelle standard, est vraie si et seulement s'il n'est pas le cas que l'antécédent est vrai et le conséquent faux. « Si p alors q » est donc traité comme équivalent à « ou bien $\neg p$ ou bien q ». En appliquant le syllogisme disjonctif ($\vee$**E**) à la formule « $\neg p \vee q$ », on obtient « si $\neg\neg p$, alors q ». En éliminant la double négation ($\neg$**E**), on retourne à « si p, alors q ». La signification de « $\rightarrow$ », qui représente l'implication matérielle, est donc donnée par la table de vérité suivante :

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Cette table de vérité pour « $\rightarrow$ » a comme conséquence immédiate que toute implication matérielle ayant un antécédent faux (comme (**I5**)) et toute implication matérielle ayant un conséquent vrai (comme (**I6**)) est vraie. Elle dit que si l'implication « $p \rightarrow q$ » est vraie, alors la vérité de « p » est une *condition suffisante* pour la vérité de « q » et la vérité de « q » est une *condition nécessaire* pour la vérité de « p » : « p » ne peut pas être vrai sans que « q » le soit aussi et la vérité de « p » exclut le cas où « q » est faux. L'implication matérielle est donc étroitement liée à la validité du schéma d'inférence

[41] Le problème de l'interprétation des implications subjonctives, qui sont aussi appelées « contrefactuelles » (puisque l'usage du conditionnel suggère que l'antécédent n'est pas le cas), est un problème majeur de la philosophie du langage. Certains, dont Quine, ont exprimé des doutes quant à l'existence d'une systématisation générale et satisfaisante de leur usage ordinaire, vu qu'ils demandent une logique intensionnelle. Comment attribuer, demandent-ils (cf. Quine, 1950, 23), des valeurs de vérité aux phrases suivantes qui paraissent être incompatibles :

Si Bizet et Verdi avaient été des compatriotes, Bizet aurait été italien. (2.9)

Si Bizet et Verdi avaient été des compatriotes, Verdi aurait été français. (2.9+)

Nous n'avons aucune raison (respectable) de préférer une de ces phrases à l'autre, et pourtant elles ne peuvent pas être les deux vraies.

PROOF

suivant qui n'est rien d'autre que le schéma appelé « modus ponens »(ou « MP ») :

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ p \to q \end{array}}{q} \to \mathbf{E}$$

Cette inférence, qui nous autorise à éliminer une implication si l'on a établit son antécédent est aussi appelée « modus ponendo ponens » parce que c'est en ‹ posant › quelque chose (à savoir « p ») que nous pouvons ‹ poser › quelque chose d'autre (à savoir « q »).

L'implication matérielle pose quelques problèmes particuliers de formalisation, comme en témoigne la confusion entre conditions suffisantes et nécessaires dans les discours quotidiens. Dans le langage ordinaire, on trouve souvent des énoncés qui ne formulent pas une condition suffisante, mais seulement une condition nécessaire :

I9 Il n'est content que si elle vient aussi.

(**I9**) ne spécifie pas une condition suffisante pour son bonheur futur, mais une condition nécessaire : si elle ne vient pas, il ne sera pas content. Il faut donc mettre la flèche dans la bonne direction : « s'il est content alors elle vient aussi » – on voit dans cet exemple que le langage ordinaire présuppose souvent un lien de causalité ou d'explication dans des phrases de la forme « si... alors ⋯ ». La logique, cependant, ne s'en occupe pas : tout ce qu'il faut pour rendre vraie la phrase « s'il est content alors elle vient aussi » c'est qu'il ne soit pas le cas qu'il est content et qu'elle ne vient pas.[42]

Un autre problème est posé par l'ordre des constituants. Afin de formaliser les phrases suivantes, il faut intervertir l'ordre des phrases simples :

I10 Nous irons faire un pique-nique pourvu qu'il fasse beau temps.

I11 Je t'aide à condition que tu sois gentil.

I12 Il est invité du moment qu'il amène quelque chose à boire.

I13 Elle pourra venir à moins qu'elle n'amène pas sa sœur.

(**I10**) devient alors « s'il fait beau temps, nous irons faire un pique-nique » (« il n'est pas le cas qu'il fasse beau temps et que nous n'allions pas pique-niquer ») et (**I11**) devient « si tu es gentil, je t'aide » (« il n'est pas le cas que tu es gentil et je ne t'aide pas »).

Considérons maintenant les phrases suivantes :

E1 Je suis content si et seulement si elle me salue.

E2 Il me rend toujours visite – et seulement – quand j'ai quelque chose à manger chez moi.

E3 Elle y arrivera au cas où, mais seulement au cas où elle se dépêche.

E4 Elle y arrivera si, mais seulement si elle se dépêche.

Dans ces phrases, on dit que deux phrases sont soit vraies ensemble soit fausses ensemble – elles ont les mêmes valeurs de vérité. L'implication matérielle assure pour une part ceci : si l'antécédent est vrai, le conséquent doit l'être aussi. Ce que ces cas de l'*équivalence matérielle* ajoutent, c'est que si l'antécédent est faux, le conséquent doit l'être aussi. Si on utilise le principe de conversion (que de « si p, alors q », on peut déduire « si $\neg q$, alors $\neg p$ »), on voit que l'équivalence matérielle est équivalente à une conjonction de deux implications : (**E1**) est équivalent à « Si elle me salue, je suis content et si je suis content, elle me salue » – que son salut est une condition suffisante (premier conjoint) et nécessaire (deuxième conjoint) à mon bonheur. Nous avons donc les règles d'introduction et d'élimination

[42] Il ne faut pas confondre « ... seulement si ⋯ » avec « ... si seulement ⋯ » : dans le dernier cas, il s'agit d'un « si » ordinaire et « seulement » y est ajouté pour mettre une emphase.

PROOF

suivantes :

$$\frac{p \to q, q \to p}{p \leftrightarrow q} \leftrightarrow \mathbf{I} \qquad \frac{p \leftrightarrow q}{p \to q} \leftrightarrow \mathbf{E} \qquad \frac{p \leftrightarrow q}{q \to p} \leftrightarrow \mathbf{E}$$

En termes de tables de vérité, « $p \leftrightarrow q$ » nous dit que « p » et « q » sont soit vrais, soit faux ensemble :

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

2.6 Les tables de vérité

Nous avons vu de quelle manière les différents connecteurs déterminent la valeur de vérité d'une phrase complexe comme une fonction des valeurs de vérité de ses constituants simples. Selon le principe de la vérifonctionnalité des connecteurs de la logique propositionnelle, les valeurs de vérité des phrases atomiques suffisent pour déterminer la valeur de vérité de la phrase complexe qu'elles constituent. Cette dépendance, en matière de vérité, du complexe au simple, nous pouvons la calculer par des tables de vérité. Ces tables nous montrent alors comment la signification d'une phrases complexe est déterminée par sa structure logique et ses parties simples.

Construisons une table de vérité pour « $\neg(\neg p \vee \neg q)$ ». Nous commençons par l'interprétation des phrases atomiques : étant donné qu'il y en a deux, « p » et « q », nous avons deux colonnes, ce qui nous donne, avec les deux valeurs de vérité, quatre ‹possibilités logiques› :

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Ces quatre lignes représentent des valuations atomiques (cf. p. 117) : soit les interprétations différentes de « p » et « q », soit des manières pour le monde d'être par rapport à la vérité, ou non, de « p » et « q ».[43]

Comme les deux phrases atomiques sont niées dans la formule « $\neg(\neg p \vee \neg q)$ », nous ajoutons deux colonnes avec les valeurs de vérité de leurs négations :

[43] Le choix entre ces deux possibilités est sans importance pour la logique, mais très important pour la philosophie de la logique. Nous reviendrons sur cette question à la sct. 5.4.

PROOF

p	q	$\neg p$	$\neg q$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

À partir de ces deux nouvelles colonnes, nous calculons la valeur de vérité de la disjonction des deux négations :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Dans notre formule initiale « $\neg(\neg p \vee \neg q)$ », cette disjonction est niée :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F

Dans la colonne de droite, on retrouve maintenant les valeurs de vérité de la formule initiale « $\neg(\neg p \vee \neg q)$ » pour les quatre valuations différentes de ses phrases atomiques. On voit que « $\neg(\neg p \vee \neg q)$ » n'est vraie qu'à condition que les deux phrases atomiques « p » et « q » soient vraies ; si l'une d'entre elles (au moins) est fausse la phrase complexe l'est également.

La table de vérité nous montre de quelle manière la valeur de vérité de cette formule complexe dépend des valeurs de vérité de ses constituants qui – selon le principe de vérifonctionnalité – la composent de manière fonctionnelle.[44]

Il existe une autre méthode pour arriver aux mêmes résultats. Nous commençons directement avec la formule dont les valeurs de vérité pour les différentes valuations nous intéressent, et faisons une colonne pour chaque phrase atomique et connecteur qu'elle contient :

[44] Cela veut dire que l'attribution des valeurs de vérité aux constituants atomiques *détermine* la valeur de vérité de la formule complexe. Mathématiquement, une fonction qui relie deux ensembles, $f : A \to B$, est une relation (un ensemble de paires dont le premier membre appartient à A et le deuxième à B ($\{\langle a, b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$), qui est telle que le choix de a détermine celui de b : il n'est pas le cas qu'on a $\langle a, b'\rangle$ et $\langle a, b''\rangle$ pour deux $b', b'' \in B$ différents : $(f(a) = b' \wedge f(a) = b'') \to b' = b*$. Cf. la p. 227 et le glossaire (p. 475) pour en savoir plus.

PROOF

¬	(¬	p	∨	¬	q)

Nous ajoutons les valuations pour les phrases atomiques dans toutes les colonnes correspondantes :

¬	(¬	p	∨	¬	q)
		V			V
		V			F
		F			V
		F			F

Nous commençons avec la première étape de complexité, et calculons d'abord les négations des phrases atomiques :

¬	(¬	p	∨	¬	q)
	F	V		F	V
	F	V		V	F
	V	F		F	V
	V	F		V	F

Toujours selon l'ordre dont la formule est construite de ses constituants, nous calculons la disjonction à partir des colonnes 2 et 5 :

¬	(¬	p	∨	¬	q)
	F	V	F	F	V
	F	V	V	V	F
	V	F	V	F	V
	V	F	V	V	F

Nous sommes donc arrivés au connecteur principal, qui est la négation de toute la parenthèse :

¬	(¬	p	∨	¬	q)
V	F	V	F	F	V

PROOF

F	F	V	V	V	F
F	V	F	V	F	V
F	V	F	V	V	F

Nous avons mis la colonne de gauche en gras pour montrer qu'il s'agit de la colonne du connecteur principal et donc de celle où figurent les valeurs de vérité de la formule complexe. Cette colonne ne se trouve pas forcément à gauche.

Comme dans la première méthode, les différentes lignes (les différentes attributions de valeurs de vérité aux phrases atomiques) représentent des possibilités logiques. Si la colonne qui correspond au connecteur principal ne contient que des « V », on appelle la formule en question une « *tautologie* ». Si elle ne contient que des « F », on l'appelle une « *contradiction* ». Une tautologie est une phrase vraie quelle que soit la possibilité logique considérée. Elle est vraie dans toutes les possibilités logiques ; elle est donc une ‹ nécessité logique ›.[45] On appelle de telles nécessités des « vérités logiques ». Une phrase est logiquement vraie (une vérité logique) si et seulement si elle est vraie dans toutes les possibilités logiques, c'est-à-dire si elle est une tautologie.

Examinons une tautologie de près :

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

La colonne de droite nous montre qu'une phrase de la forme « $(p \wedge q) \rightarrow p$ » est toujours vraie, parce qu'elle est vraie peu importe l'assignation de valeurs de vérité à ses composantes simples « p » et « q ». Sa vérité ne dépend en rien de ces composantes, elle n'est déterminée que par sa structure logique. Cette structure logique est indiquée par les symboles « $\wedge$ » et « $\rightarrow$ » et la phrase ‹ correspond ›[46] à une des règles d'élimination de la conjonction :

$$\frac{p \wedge q}{p} \wedge\mathbf{E}$$

Notre tautologie peut donc être dite vraie en vertu de la signification du mot logique « $\wedge$ » : le caractère tautologique de « $(p \wedge q) \rightarrow p$ » que nous appelons « implication correspondante » nous assure de la validité de l'inférence. Notre inférence d'élimination de la conjonction préserve la vérité de ses prémisses parce que l'implication matérielle correspondante est une tautologie.

Plus généralement, la notion de tautologie nous aide à établir la validité des inférences. Considérons l'inférence suivante :

[45] Je mets des guillemets simples pour souligner le caractère purement stipulatif de cette désignation : si ou non les vérités logiques sont nécessaires grâce à la nature des lois logiques, ou des lois de la pensée, ou la structure du monde, etc. sont des questions de la philosophie de la logique qui ne peuvent pas être résolues par une simple stipulation terminologique.

[46] Nous allons, au prochain chapitre (sct. 3.6), beaucoup parler de la nature de cette ‹ correspondance ›.

PROOF

P1 Si les communistes n'ont pas de succès, la république sera sauvée.
P2 La république sera sauvée.
C Donc les communistes n'ont pas de succès.

Il s'agit d'un type de raisonnement fallacieux que l'on appelle « sophisme de l'affirmation du conséquent » qui a la forme suivante :

P1	Si les communistes n'ont pas de succès, la république sera sauvée.	$p \rightarrow q$
P2	La république sera sauvée.	q
C	Donc les communistes n'ont pas de succès.	p

Mais pourquoi est-ce un sophisme ? Si nous voulons déterminer la validité de cet argument, nous avons à montrer que les prémisses ne peuvent pas être vraies et la conclusion fausse – qu'il n'y a pas d'attribution de valeurs de vérité à ses constituantes simples qui rende vraies les prémisses et fausse la conclusion. Nous avons donc à montrer que l'implication matérielle correspondante est une tautologie. Construisons une table de vérité pour cette implication matérielle correspondante :

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

L'argument n'est pas valide car la troisième ligne ouvre la possibilité selon laquelle les prémisses seraient vraies et la conclusion fausse. Celui qui pense que les communistes aurons du succès et que la république sera sauvée, pourrait affirmer les prémisses et nier la conclusion : l'échec des communistes est une condition suffisante mais pas forcément nécessaire à la sauvegarde de la république.

Cet exemple nous montre que les tables de vérité nous permettent à la fois de savoir si un argument est valide ou non (il est valide si et seulement si l'implication matérielle entre les prémisses et la conclusion est une tautologie), mais aussi de construire des contre-exemples à de fausses affirmations selon lesquelles telle ou telle phrase est tautologique.

Les tables de vérité sont également utiles pour gérer des arguments complexes ayant plusieurs prémisses. Rien ne nous empêche de considérer plus de deux phrases atomiques à la fois. Étant donné que les possibilités logiques sont déterminées par la vérité et la fausseté des phrases atomiques, il faut alors considérer plus de quatre valuations : 8 ($= 2^3$) pour trois phrases atomiques, 16 ($= 2^4$) pour quatre, 32 ($=2^5$) pour cinq, etc.

2.7 Les circuits logiques et l'ingénierie logique

Les tables de vérité nous permettent d'illustrer la conséquence suivante du principe de vérifonctionnalité : comme le principe de vérifonctionnalité implique que la valeur sémantique (= la signification) d'un connecteur binaire (= à deux places) est complètement déterminée par sa table de vérité, il

PROOF

s'ensuit qu'il ne peut y avoir que 16 ($=2^{2^2}$) connecteurs binaires dans le langage de la logique propositionnelle. On peut constater cela en considérant les 16 possibilités différentes de distribuer les « V » et les « F » sur les quatre attributions possibles de valeurs de vérité à « p » et à « q » :

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

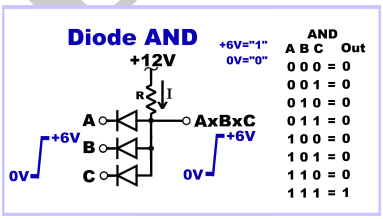
Nous avons déjà considéré les colonnes 2 (disjonction), 4 (« p »), 5 (implication matérielle, « $p \to q$ »), 6 (« q »), 7 (équivalence), 8 (conjonction), 11 (négation de « q »), et 13 (négation de « p »). On retrouve dans la colonne 3, la ‹contre-implication› (« $q \not\to p$ ») et on remarque que chaque opérateur a sa négation dans la colonne qui lui est symétrique par rapport à la double ligne qui se situe entre les colonnes 8 et 9.[47] Ainsi 15 est la ‹non-disjonction› (‹rejet› : « ni p ni q », « $p \downarrow q$ »), 10 la ‹non-équivalence› (‹alternative› ou « disjonction exclusive », « $p \oplus q$ ») et 9 est la ‹non-conjonction› (‹incompatibilité› : « pas à la fois p et q », « $p|q$ »).

La disjonction exclusive « $p \oplus q$ », appelée « alternative » en philosophie et « xor » en informatique, est d'une importance pratique particulière, car elle nous permet de manière très naturelle d'exprimer des conditions nécessaires.

Le connecteur « $p|q$ », est appelé « barre de Sheffer » d'après son inventeur Henry Maurice Sheffer (1913), ou « nand » en informatique. En philosophie, il a été considéré intéressant pour l'étude de l'incompatibilité et de la contrariété (cf. p. 78).

Le connecteur dual (‹contraire›) à la barre de Sheffer est la non-disjonction, « $p \downarrow q$ », appelée « flèche de Peirce » ou « nor » en informatique.

Les connecteurs propositionnels sont des fonctions logiques combinatoires qui forment la base de l'électronique numérique sous forme de « portes logiques ». Les premiers composants électriques à avoir implémenté les portes logiques sont les diodes. La porte logique « and », par exemple, est réalisée selon le circuit qui suit :[48]



Comme le montre le tableau à droite du circuit, le courant n'est transmis de l'entrée « +12V » à la sortie « $A \times B \times C$ » que si chacune des entrées A, B et C sont électrifiées. Il s'agit alors d'une implémentation de la conjonction « $A \wedge B \wedge C$ ». Le fonctionnement de cette opération tient au fait que si

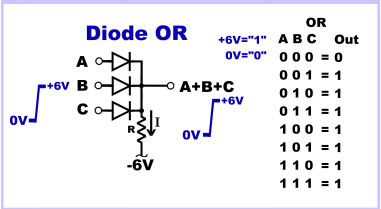
[47] On reviendra sur les lignes 1 (tautologie) et 16 (contradiction) dans la section 3.2.

[48] Cf. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diode_AND2_Ideal_Diode.jpg et https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diode_OR_Ideal_Diode.jpg.

PROOF

A ou B ou C n'est pas alimenté, alors le courant donné en entrée « +12V » sortira par A ou B ou C au lieu de sortir par $A \times B \times C$. En revanche, si A et B et C sont tous trois alimentés avec un voltage positif (ici 6V), alors le courant d'entrée ne pourra pas sortir par A ou B ou C, et sortira par $A \times B \times C$.

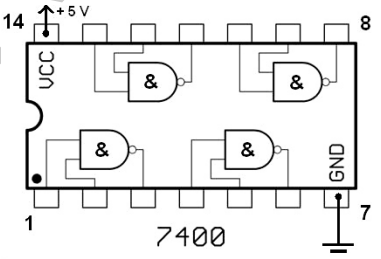
La disjonction est élaborée à partir d'un circuit plus simple :



Cette fois-ci, ce sont A, B et C qui sont pris comme entrées du courant (pôles positif). Si une seule de ces entrées reçoit un courant électrique, alors celui-ci passe à travers la diode (représentée par un triangle) et se dirigera vers la base (-6V) et la sortie « $A + B + C$ ». Notez que même s'il y a deux sorties (la base et la 'vraie' sortie), cela ne change rien à la tension du courant électrique qui reste le même, indépendamment du nombre de sorties branchées en parallèle. Quoi qu'il en soit, ce circuit transmet simplement du courant si du courant est présent dans son entrée.

Pour créer une porte « Not », le niveau de technicité est déjà plus compliqué et nécessite une compréhension basique du fonctionnement des transistors. Puisqu'un tel savoir n'est pas l'objectif de ce livre, nous remarquerons simplement que la porte « Not » inverse le courant électrique : si du courant est présent à une entrée, alors aucun courant n'est présent à la sortie du circuit, et inversement.

Ces circuits sont à la base des micro-processeurs de nos ordinateurs contemporains. Néanmoins, ils ne sont évidemment plus produits à partir de diodes. Une implémentation plus récente des circuits logiques et toujours présente comme composant de base dans nombre de nos appareils électroniques est le circuit intégré. Ce genre de mille-patte est simplement un rassemblement de portes logiques, et chacune de ses pattes en est une entrée ou une sortie (en plus d'une base « GND » et d'une alimentation « VCC »). L'exemple du SN7400 en photo est un circuit contenant quatre fois la combinaison d'une porte « And » et « Not », formant au total quatre portes « Nand », équivalentes à ce que les logiciens appelle « les barres de Sheffer » :[49]



[49] Cf. https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=530548.

PROOF

Même si la représentation binaire des nombres remonte à Leibniz et son application à des opérations logique à C.S. Peirce, ce n'était que dans les années trente (par Konrad Zuse en Allemagne, Claude Shannon aux États-Unis, Akira Nakashima au Japon) que les portes furent utilisées pour implémenter la logique propositionnelle sous forme de circuits électriques, ce qui constitue le fondement du développement des ordinateurs.

Points à retenir

1. La logique propositionnelle étudie les connecteurs propositionnels qui relient des phrases ; la logique des prédicats étudie en outre les quantificateurs, les relations et les fonctions.
2. Le connecteur principal d'une formule est le dernier évalué.
3. La syntaxe détermine quelles sont les formules bien formées d'une langue.
4. La sémantique donne les interprétations des signes ; elle leur associe une signification.
5. Selon le principe de vérifonctionnalité (pour la logique propositionnelle), les valeurs de vérité possibles d'une phrase complexe ne dépendent que des valeurs de vérité des phrases simples qui la constituent et des connecteurs qui les relient.
6. Une négation « $\neg p$ » est vraie si et seulement si « p » est faux.
7. Une conjonction « $p \wedge q$ » est vraie si et seulement si « p » et « q » sont vrais ensemble.
8. Une disjonction « $p \vee q$ » est vraie si et seulement si au moins un de « p » et « q » est vrai.
9. Une implication « $p \rightarrow q$ » est vraie si et seulement si soit « p » est faux, soit « q » est vrai.
10. Une table de vérité détermine la signification d'un connecteur propositionnel en montrant de quelle manière la valeur de vérité d'une phrase complexe qui le contient dépend des valeurs de vérités de ses constituants simples.

PROOF

PROOF

dialectica *series of anthologies*

3 Relations logiques et inférences logiques

3.1 Le langage-objet et le métalangage

Nous avons vu dans la deuxième leçon (p. 37) qu'une négation est vraie si et seulement si la phrase niée *ne* l'est *pas*, qu'une conjonction est vraie si et seulement si le premier *et* le deuxième conjoint sont vrais, qu'une disjonction est vraie ssi (si et seulement si) le premier disjoint *ou* le deuxième est vrai, qu'une implication matérielle est vraie ssi *si* l'antécédent est vrai, *alors* le conséquent l'est aussi et enfin, qu'une équivalence matérielle est vraie ssi la première phrase est vraie *si et seulement si* la deuxième l'est aussi. Pour spécifier les tables de vérité des connecteurs propositionnels, nous avons utilisé des expressions du langage naturel qui leur correspondent. Ces arguments ne sont-ils pas circulaires ? N'utilisons-nous pas exactement les *mêmes* connecteurs pour expliquer leurs significations ? Ne s'agit-il pas d'un cercle vicieux ?

Pour répondre à ces questions, il faut revenir sur la distinction entre usage et mention (que nous avons déjà brièvement discutée dans la section 1.7). Bien sûr il peut y avoir une circularité épistémique – quelqu'un qui ne possède pas les concepts mêmes de ces relations logiques entre phrases, aurait des difficultés à comprendre leur sémantique. Mais, du fait de la distinction entre langage-objet et métalangage, il ne s'agit pas d'une circularité logique, ni d'un cercle vicieux.

Nous nous servons des mots (noms de choses) pour parler du monde et des noms des mots pour parler des mots. Mettre des guillemets autour d'une expression linguistique est une manière – mais pas la seule – de former de tels noms.[1] On utilise un mot en énonçant une phrase qui le contient. On mentionne un mot en utilisant un nom pour ce mot (comme, par exemple, l'expression qui est formée par : des guillemets – le mot en question – et encore des guillemets).

Un avantage de la création des noms d'expressions à l'aide de guillemets est qu'elle peut être itérée : « Paris est jolie » parle de Paris et contient « Paris ». « « Paris » a cinq lettres » mentionne ou parle du mot « Paris » et contient « « Paris » ». Le nom « « Paris » » désigne le mot « Paris » qui désigne Paris (la capitale de France). Le mot « « Paris » » contient cinq lettres, entourées d'une paire de guillemets ; « Paris » contient cinq lettres et ne contient pas de guillemets. Quant à la capitale, Paris contient des personnes, des bâtiments, etc.

À chaque niveau du langage, il y a deux opérations que nous pouvons faire avec les mots : nous les utilisons, en énonçant des phrases qui les contiennent, pour parler de leurs significations (des villes, des philosophes, etc.) ; nous pouvons également les mentionner, pour parler d'eux-mêmes (et dire, par ex., combien de lettres ils contiennent). Pour cette dernière opération, nous utilisons des guillemets. La possibilité de ce double usage crée une hiérarchie de langues – sur le premier niveau, où les mots ne sont utilisés que pour parler du monde, se greffe un deuxième, contenant des mots pour des mots, etc. Il y a alors une distinction entre différents niveaux de langage – entre le *langage-objet*

[1] Une autre manière est de citer une phrase et de lui donner un numéro : c'est ainsi que nous donnons des exemples de phrases, comme les phrases (3.1), (3.2) et (3.3) qui se suivent. Nous utiliserons donc les expressions « (3.1) », « (3.2) » et « (3.3) » comme des noms pour ces phrases.

PROOF

et le *métalangage* – liée à la distinction entre l'utilisation et la mention d'un mot. La phrase :

Paris est une jolie ville. (3.1)

est une phrase du langage-objet, puisqu'elle me sert à parler d'une réalité qui n'est aucunement linguistique. La phrase

« Paris » est mon mot préféré. (3.2)

me sert à parler d'un mot du français : (3.2) fait partie d'un métalangage, c'est-à-dire du langage à l'aide duquel je parle d'un autre langage – du langage-objet dont font partie des phrases comme (3.1). En itérant la procédure, nous obtenons :

« « Paris » est mon mot préféré » est une phrase bien formée du métalangage. (3.3)

(3.3) est une phrase qui appartient à un méta-métalangage, un langage qui permet de parler du métalangage dont fait partie la phrase (3.2). La distinction entre langage-objet et métalangage est une distinction relative. (3.3) est dans un métalangage relatif à (3.2), lequel, à son tour, appartient à un métalangage relatif à (3.1). C'est par rapport à (3.1) que (3.3) appartient à un méta-métalangage.

Nous retrouvons les mêmes phénomènes lorsque nous attribuons la vérité ou la fausseté à une phrase. Pour dire que (3.1) est vrai, nous disons par exemple :

La phrase « Paris est une jolie ville » est vraie. (3.4)

Nous aurions aussi pu utiliser un autre nom pour la même phrase, tel que :

(3.1) est vrai. (3.4+)

ou encore

La première phrase mentionnée dans ce chapitre est vraie. (3.4*)

Il faut distinguer les expressions comme « ... est vrai » qui appartiennent au métalangage et les expressions comme « ∧ » et « ¬ » qui appartiennent au langage-objet. Les premières prennent des noms de phrases (du langage-objet) pour en faire des phrases du métalangage, tandis que les dernières prennent des phrases (du langage-objet) pour en faire des phrases du langage-objet. Pour dire d'une phrase qu'elle est vraie, je dois la mentionner ; pour ceci, il me faut normalement un nom pour elle.[2]

Pour beaucoup d'affirmations méta-linguistiques, mentionner un mot n'est pas l'utiliser – je peux, par ex., mentionner des fautes d'orthographe sans moi-même commettre une faute (« « philesophe » n'est pas un mot du français. » ne contient que des mots de français), dire des mots qu'ils sont racistes sans pour autant moi-même faire une affirmation raciste (« « nègre » est un mot raciste. » n'est pas une phrase raciste, même si elle est vraie),[3] ou encore attribuer des conditions de vérité non indexicales à des phrases indexicales (« Son affirmation « Je suis malade aujourd'hui. » était vraie parce qu'il était malade le 31 décembre 2011. »).

[2] Ce n'est pas toujours vrai. Je peux dire, par exemple, que toutes les phrases exemples dans ce chapitre sont vraies, que tout ce que dit le président est faux et que toute affirmation de Maria a été répétée par Jacques.

[3] Cet exemple illustre encore une fois la variation, l'inconstance et le changement de l'usage des guillemets dans les langages naturels. Il est vrai que, aux États-Unis au moins, non seulement l'utilisation mais même la mention de ce mot (ou plutôt de son équivalent anglais) sont considérées comme racistes, ou – plutôt, me semble-t-il, mais ceci est une

PROOF

Il existe pourtant des exceptions importantes, dont la principale est le prédicat de vérité. Dire d'une phrase qu'elle est vraie, c'est la dire – ce principe de disquotation est formulé dans la célèbre « Convention **T** » du logicien polonais Alfred Tarski :

> La phrase « *p* » est vraie si et seulement si *p*. (T)

À la gauche de cette équivalence, nous trouvons une phrase du métalangage, à sa droite une phrase du langage-objet. À gauche, nous parlons du langage, à droite (normalement, au moins) du monde et c'est le prédicat de vérité qui nous sert de pont entre les deux.[4]

La décision de me servir du français pour les trois langages différents est arbitraire : je peux tout autant choisir l'allemand pour le langage-objet, l'anglais pour le métalangage et réserver le français au méta-métalangage. On aurait alors :

> Paris ist eine schöne Stadt. (3.1+)
>
> « Paris » is my favourite word. (3.2+)
>
> « « Paris » is my favourite word » est une phrase bien formée du métalangage. (3.3+)

Tout comme (3.1) est une phrase bien formée du français, (3.1+) est une phrase bien formée de l'allemand. (3.2+) est une phrase qui appartient à l'anglais et ne contient pas de mot allemand (puisque le mot « « Paris » » appartient à l'anglais).[5] Finalement, (3.3+) est entièrement une phrase de français, comme l'est (3.3).

Nous nous servons d'un métalangage pour donner des traductions :

> En allemand, l'expression « Strassburg » est utilisée pour désigner la ville de Strasbourg. (3.5)

---

hypothèse empirique – que la mention 'ordinaire' (par guillemets) est considérée comme raciste, même si d'autres noms (« the n-word », peut-être aussi « n***** ») restent acceptables. Notons qu'il y a une multiplicité d'options théoriques pour expliquer pourquoi non seulement le mot « nègre », mais également le mot différent « « nègre » » sont les deux inappropriés :

1. peut-être le dernier est-il discriminatoire non en dénigrant certaines personnes, mais parce qu'il rappelle un mot qui a joué un certain rôle sociologique dans l'histoire de l'esclavage ;
2. peut-être n'est-ce pas le mot même mais son utilisation qui est discriminatoire, en évoquant des stéréotypes racistes, soit de manière 'stricte' (implicature conventionnelle, cf. Grice 1975, 25 / 1979), soit de manière plus contextualiste (implicature conversationnelle) ;
3. peut-être l'énonciation de ce mot constitue-t-elle un acte de parole indirect (Searle 1969 ; 1975 / 1972) de discrimination ;
4. peut-être le dernier ne mentionne-t-il pas seulement, mais utilise également le premier mot ;
5. etc.

Il me semble que le cas de « fuck » est encore plus compliqué, comme l'obscénité semble être (considérée comme) plus grande à l'écrit qu'à l'oral – d'où la mention « f*** » même dans les contextes où le mot n'a pas sa signification vulgaire (« Where the f*** is he ? », « I don't give a f*** ! »). Nous constatons que le travail des linguistes est vraiment très dur.

[4] Nous reviendrons sur ce principe important et la définition que Tarski a donnée d'un prédicat de vérité pour un langage-objet dans la sct. 13.6. Le fait que le prédicat de vérité « … est vrai » serve de pont entre le langage et le monde signifie qu'une position relativiste ou subjectiviste par rapport à certaines attributions de vérité (par ex. aux énoncés de goûts culinaires, de jugements esthétiques, sur ce qui est amusant ou non) est également une position relativiste ou subjectiviste par rapport aux domaines dont parlent ces affirmations, c'est-à-dire les qualités gustatives, la beauté et l'humour.

[5] Ceci n'est peut-être pas exactement vrai. Si nous distinguons entre les guillemets français (« « » et « » ») et les guillemets anglais (« " » et « " »), nous aurions dû écrire que « "Paris" is my favourite word. » est une phrase de l'anglais. Que (3.2+) appartient entièrement à l'anglais est montré par le fait que la suite de lettres ⟨ « P », « a », « r », « i », « s » ⟩ qu'elle contient est prononcée à l'anglaise, même si le mot préféré est celui du français.

PROOF

(3.5) est une phrase du français dans laquelle on mentionne le mot allemand « Strassburg ». Des clauses comme (3.5) peuvent aussi nous servir à spécifier les conditions de vérité d'une phrase :

« Paris ist eine schöne Stadt » est vrai si et seulement si Paris est une jolie ville. (3.6)

Les conditions de vérité de la phrase « Paris ist eine schöne Stadt », spécifiées dans (3.6), nous donnent la signification de cette phrase.[6] On utilise donc le métalangage (le français, dans ce cas), pour relier les mots d'un langage-objet (ici l'allemand) avec leurs significations.

L'importance de la distinction entre langage-objet et métalangage apparaît si on revient sur la distinction entre vérité et validité. Déterminer la validité d'un argument revient à déterminer la valeur de vérité de ses constituants. Autrement dit, ce sont les constituants – les phrases – qui sont interprétés comme vrais ou faux. Les arguments, en revanche, ne sont pas vrais ou faux ; ils sont valides ou invalides.[7] En logique, la validité d'un argument ne dépend que de sa forme et est alors déterminée par sa syntaxe, sa forme logique.[8]

Cependant, il est possible de créer une phrase qui mentionne la validité d'un argument, tel que : « cet argument est valide ». Dès lors et puisqu'il s'agit d'une phrase, sa valeur de vérité peut être déterminée, et la phrase « cet argument est valide » peut elle-même être vraie ou fausse.[9] Le prédicat « … est valide », comme le prédicat « … est vrai », s'applique à des expressions linguistiques ; il faut les composer avec les *noms* de ces expressions pour faire une phrase bien formée.

De manière analogue à (3.1), (3.2) et (3.3), nous obtenons donc :

Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage. (3.1∗)

« Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage » est valide. (3.2∗)

« « Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage » est valide » est une phrase vraie. (3.3∗)

(3.1∗) est une phrase du langage-objet, (3.2∗) du métalangage et (3.3∗) du méta-métalangage. (3.1∗) exprime un argument, dont (3.2∗) dit qu'il est valide, une assertion à laquelle (3.3∗) attribue une valeur de vérité.

[6] Encore une fois, nous idéalisons beaucoup : nous reviendrons sur cet usage des instanciations de la convention T à la p. 309.

[7] Ce phénomène s'insère dans un cadre général : l'attribution de vérité ou de fausseté n'est pas la seule façon d'exprimer qu'une expression linguistique est correcte ou « bonne ». Il y en a beaucoup d'autres. Une question ne peut être ni vraie ni fausse, mais elle peut être appropriée, intéressante, révélatrice, etc. De même, un ordre n'est ni vrai ni faux, mais peut être justifié, une promesse peut être tenue, un désir peut être satisfait, etc. Toutes ces conditions de correction utilisent des notions sémantiques et leurs attributions appartiennent donc à un métalangage par rapport aux phrases d'un langage-objet qu'ils qualifient.

[8] Cette assertion n'est pas vraie sans qualification. Pour que cette détermination ait lieu, la syntaxe de la logique doit correspondre à sa sémantique – une correspondance qui équivaut à la correction et à la complétude du calcul de la logique en question, un résultat que nous prouverons dans le ch. 7.

[9] Dans cet exemple, « cet argument est valide » fait partie du langage-objet, puisqu'il s'agit d'une affirmation portant sur un objet (un argument en l'occurrence) et « « cet argument est valide » est vrai ou faux » fait partie du métalangage, puisqu'il s'agit d'une affirmation portant sur des mots (sur le langage même et non les objets qu'il dénote). Si nous remplaçons « cet argument » par un autre nom de l'argument dont nous voulons parler, par exemple par « « Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage » », nous voyons que « cet argument est valide », à son tour, appartient à un métalangage par rapport au langage dont nous nous servons pour parler du bonheur engendré par la logique.

PROOF

La nécessité d'avoir des noms d'expressions pour former des phrases bien formées n'a plus lieu d'être si on transforme des prédicats comme « ... est vrai » et « ... est valide » en opérateurs propositionnels (des expressions qui prennent des phrases pour former des phrases) comme « il est vrai que ... » et « étant donné que ..., il s'ensuit de ⋯ ». Mais ces expressions appartiennent également au métalangage puisqu'elles nous servent à parler des expressions (propositions, phrases).[10] Au lieu de (3.3*), par exemple, on peut donc aussi dire :

> Il est vrai que « si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage » est valide. (3.3**)

(3.3**), comme (3.3*), appartient au métalangage par rapport à (3.2*). Au lieu de (3.2*), nous pouvons utiliser l'opérateur propositionnel binaire « étant donné que ..., il s'ensuit que ⋯ » (un opérateur qui prend deux phrases pour en faire une troisième) :

> Étant donné que si j'étudie la logique, je serai heureux et sage, et que j'étudie la logique, il s'ensuit que je serai heureux et sage. (3.2**)

Il est essentiel de ne pas confondre cette relation de « étant donné que ..., il s'ensuit que ⋯ » avec la relation de « si ... alors ⋯ ». « Si ... alors ⋯ » est une expression qui appartient au langage-objet : elle prend (*utilise*) deux phrases pour en faire une troisième. « Étant donné que ..., il s'ensuit que ⋯ », au contraire, appartient au métalangage et nous sert à dire (en *mentionnant* les phrases) qu'il y a une relation de *conséquence logique* entre deux phrases, que l'une s'ensuit de l'autre. Nous abrégeons la relation exprimée par « étant donné que ..., il s'ensuit que ⋯ » par un nouveau signe, « ⊨ ».[11] Plus généralement, pour parler d'une relation de conséquence métalinguistique (non spécifiée), nous utilisons la flèche longue et ‹ épaisse › « ⟹ », pour faire un contraste avec la flèche ‹ simple › « → » que nous utilisons pour la relation exprimée par « si ... alors ⋯ ». En lieu et place de :

> « Si p alors q » est vrai ssi si « p » est vrai alors « q » l'est aussi. (3.7)

nous pourrons donc maintenant dire

> « $p \to q$ » est vrai ssi $p \Longrightarrow q$ (3.7+)

Il ne s'agit pas ici d'introduire un nouveau formalisme, mais d'abréger de manière semi-formelle des locutions du langage ordinaire (ici : « si ... alors ⋯ »), qui, tout au long de ce cours, nous servent de métalangage pour parler de notre langage-objet $\mathcal{L}$, le langage de la logique propositionnelle.[12]

[10] Qu'il existe cette possibilité nous montre que le français est une langue « sémantiquement fermée » dans le sens de Tarski, c'est-à-dire qu'elle permet de parler d'elle-même, en incluant des noms pour ces propres expressions. Pour achever sa célèbre définition de la vérité (cf. 13.6) et pour éviter le paradoxe du menteur (cf. la sct. 4.4), Tarski (1933 / 1972) excluait les langues sémantiquement fermées de ses considérations, développant ainsi la notion de « langue formelle ».

[11] Dans la leçon 5 (cf. p. 119) nous verrons que « ⊨ » est utilisé non seulement pour parler de la relation de conséquence logique, mais aussi pour parler des tautologies (des phrases qui sont des conséquences logiques de n'importe quelle phrase).

[12] « → », par contre, n'est *pas* une abréviation de « si ... alors ⋯ », mais un signe autonome et nouveau, qui est seulement prononcé de la même manière. « ⟹ », malgré son apparence, n'est pas une expression d'un langage formel, mais une expression du métalangage informel, comme l'est le « ssi » utilisé en (3.7+), qui appartient au méta-métalangage.

PROOF

Nous pouvons faire une distinction similaire pour d'autres connecteurs propositionnels. « $\wedge$ », on l'a vu, exprime la relation de conjonction – ce connecteur fait partie du langage-objet dont nous étudions le comportement logique. Nous utilisons un autre connecteur, « & », pour parler *de* ce langage-objet. « & » appartient par conséquent au métalangage. De même pour notre négation du langage-objet, « $\neg$ », qui correspond dans le métalangage à « $\sim$ » et la disjonction du langage-objet « $\vee$ » qui correspond à « || ». Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\text{« } \neg p \text{ » est vrai} \quad &\text{ssi} \quad \sim p \\
\text{« } p \wedge q \text{ » est vrai} \quad &\text{ssi} \quad p \,\&\, q \\
\text{« } p \vee q \text{ » est vrai} \quad &\text{ssi} \quad p \,||\, q \\
\text{« } p \rightarrow q \text{ » est vrai} \quad &\text{ssi} \quad p \implies q \\
\text{« } p \leftrightarrow q \text{ » est vrai} \quad &\text{ssi} \quad p \iff q
\end{aligned}$$

Nous voyons maintenant que la crainte d'un cercle vicieux, évoquée au début de ce chapitre, n'était pas justifiée, même s'il y a peut-être un cercle épistémique dans le sens que quelqu'un qui ne comprend pas ce qu'est la négation (ne possède pas le concept de négation) ne pourrait ni comprendre « $\neg$ », ni « $\sim$ ».[13]

Mais il n'y a pas de cercle vicieux logique : l'explication que nous avons donnée de la signification de la négation « $\neg$ » ne contenait pas le signe « $\neg$ » qu'on était en train d'expliquer (ce qui constituerait de fait un cas de cercle vicieux). Nous expliquons « $\neg$ » en exploitant notre compétence d'un langage différent – du français, qui nous sert de métalangage – qui pourrait lui-même, si on en avait besoin, être formalisé et équipé d'une sémantique rigoureuse (comme nous l'avons fait avec le langage-objet, le langage de la logique des phrases).[14]

3.2 La validité et la vérité logique

Supposons qu'une inférence logique ait la forme suivante :

p. Et *q*. Mais aussi *r*. Donc *s*. (3.8)

Nous avons vu qu'on peut mettre cette inférence dans la forme suivante :

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \\ r \end{array}}{s} \qquad (3.8+)$$

[13] La remarque entre parenthèses ne devrait pas être considérée comme équivalente à ce qui la précède. Même s'il y a souvent, en particulier parmi les philosophes analytiques en Allemagne dans la deuxième moitié du 20ème siècle, une forte tendance à évoquer une notion substantielle de « possession de concept », il s'agit d'un choix théorique facultatif (cf. notre discussion de la relation entre la possession du concept exprimé par « $\rightarrow$ » et la validité des inférences du type MP à la p. 82 et suivantes).

[14] Il y aura une étape dans la régression du langage-objet au métalangage au méta-métalangage (et ainsi de suite) où nous retomberons dans le langage ordinaire. Mais ceci ne signifie pas qu'il s'agit d'un cercle vicieux, puisque ce n'est pas la signification de la négation *du langage ordinaire* que nous voulons expliquer (mais plutôt la signification de « $\neg$ », un signe de notre langage formel $\mathcal{L}$). Le fait que l'on puisse toujours continuer à demander « pourquoi ? » ne signifie pas qu'il n'y ait pas d'explications (entièrement) suffisantes et acceptables.

PROOF

Étant donné la signification du connecteur « $\wedge$ » (« et »), on peut également écrire l'inférence (3.8+) comme suit :

$$\frac{p \wedge q \wedge r}{s} \tag{3.8*}$$

Nous avons dit qu'en affirmant qu'un argument de la forme (3.8+) ou (3.8*) est valide, on mentionne les phrases « p », « q », « r » et « s », mais on ne les utilise pas. En d'autres mots, l'affirmation de validité peut être faite en français même si « p », « q », « r » et « s » abrègent des phrases anglaises. Dire qu'un argument de cette forme est valide revient à dire que

Si « p », « q » et « r » sont vrais, alors « s » l'est également. (3.8**)

Il s'agit ici d'une affirmation dans le métalangage : on n'utilise pas les phrases « p », « q » et « r » (rappelons qu'il s'agit d'abréviations pour des phrases comme « j'étudie la logique », « il pleut », « Dieu est omnipotent » – on ne parle pas des études, du temps ou de Dieu), mais on les mentionne – on parle de ces phrases et on dit qu'elles se trouvent dans une certaine relation de *conséquence logique*. C'est cette relation de conséquence logique qui rend les inférences valides (cf. le ch. 3.7 plus tard).

Une inférence est valide si et seulement s'il n'est pas logiquement possible que les prémisses soient vraies et la conclusion fausse – autrement dit, s'il n'y a pas d'attribution de valeurs de vérité qui interprète les prémisses comme étant toutes vraies et la conclusion comme étant fausse. Une inférence de la forme (3.8*) est valide si et seulement si la conclusion, « s », est une conséquence logique des prémisses « p », « q » et « r ». Il n'y a pas alors de possibilité logique selon laquelle les prémisses sont toutes vraies et la conclusion fausse. C'est dans ces cas-là que l'implication correspondante « $(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s$ » est une tautologie. L'implication dite « correspondante » est l'implication qui a la conjonction des prémisses comme antécédent et la conclusion comme conséquent.

Nous avons dit, à la p. 27, qu'il faut distinguer la validité d'une inférence de la vérité de ses prémisses et de sa conclusion et que la première question est décidée par la syntaxe, même si la deuxième relève de la sémantique. Nous devons maintenant qualifier ces assertions. Nous avons introduit, à la p. 53, le nom « tautologie » pour des phrases dont la colonne de la table de vérité correspondante au connecteur principal ne contient que des « V ». Souvent, les tautologies sont appelées des « vérités logiques » – il s'agit des phrases dont la vérité ne dépend pas de facteurs contingents, mais est déterminée exclusivement par leur forme logique. Nous remarquons maintenant une correspondance entre la notion de validité, appliquée à des inférences, et la notion de tautologie, appliquée à des implications matérielles.

Si, par exemple, nous voulons savoir si l'inférence de la *réduction à l'absurde*, que nous avons rencontrée à la p. 24 :

$$\frac{p \rightarrow \neg p}{\neg p} \tag{3.9}$$

est valide, il faut voir s'il est possible que la prémisse « $p \rightarrow \neg p$ » soit vraie et qu'en même temps la conclusion « $\neg p$ » soit fausse. Nous en faisons donc les tables de vérité :

p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$
V	F	F
F	V	V

PROOF

p	$\neg p$
V	F
F	V

Nous observons qu'il n'y a pas de ligne dans le premier tableau (à gauche) qui contient un « V » et dont la ligne correspondante dans le deuxième tableau (à droite) contient un « F ». Nous en concluons qu'il n'y a pas de possibilité logique pour « $p \rightarrow \neg p$ » d'être vrai qui est en même temps une possibilité logique selon laquelle « $\neg p$ » est faux. L'inférence (3.9) de la première phrase à la deuxième est donc valide.

Nous pouvons également vérifier la validité de l'argument (3.9) en faisant la table de vérité de l'implication matérielle de la prémisse à la conclusion, l'implication que nous appelons « l'implication matérielle correspondante » :

p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$
V	F	F	V
F	V	V	V

Nous voyons que l'implication de la conclusion par la prémisse est une vérité logique : peu importe comment est la monde (peu importe si « p » est vrai ou faux), « $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$ » est vrai. Un argument est valide si et seulement si sa conclusion est une conséquence logique de ses prémisses. Pour ça, il est suffisant et nécessaire que l'implication matérielle correspondante soit une tautologie. Suffisant parce que, si l'implication matérielle est une tautologie, alors il n'est pas possible que la prémisse (= l'antécédent de l'implication) soit vraie et la conclusion (= le conséquent de l'implication) soit fausse. Notre critère est également nécessaire parce que si l'implication n'est pas une tautologie, il y a une possibilité où la prémisse est vraie et la conclusion fausse, ce qui nous fournit également un contre-exemple à la validité de l'inférence.

Nous avons la relation suivante entre ces deux notions clef : une phrase « q » est une conséquence logique (« $\vDash$ ») d'une autre « p » si et seulement si l'implication correspondante est une vérité logique :[15]

$$p \vDash q \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vDash p \rightarrow q$$

À droite de cette équivalence, nous utilisons « $\vDash$ » pour dire que « $p \rightarrow q$ » est une tautologie, c'est-à-dire n'a pas besoin de prémisses pour être valide. On parle alors d'« implication formelle » :

implication matérielle de q par p	$\Longleftrightarrow$	« $p \rightarrow q$ » est vrai
(« p seulement si q »)		(soit « p » est faux soit « q » est vrai)

[15] Il ne s'agit pas ici d'une définition, mais d'un résultat substantiel portant sur la logique propositionnelle, que nous appelerons « théorème de déduction » et prouverons dans le ch. 7.2.

PROOF

implication formelle de q par p	$\Longleftrightarrow$	« $p \rightarrow q$ » est une tautologie
(« q » est une conséquence sémantique de « p »)		(il n'est pas logiquement possible que « p » soit vrai et « q » faux.)

La distinction « matériel » / « formel » correspond à la distinction entre langage-objet et métalangage.[16] Lorsque je dis que si p, alors q, j'utilise les phrases « p » et « q »; lorsque je dis que « q » est une conséquence logique de « p », que l'argument « p; donc q » est valide ou que « $p \rightarrow q$ » est une tautologie, j'utilise des noms pour ces phrases (ces noms sont des expressions de la forme ⟨ guillemets, la phrase concernée, guillemets ⟩) et je dis que ces phrases se trouvent en relation de conséquence logique.

Cette relation de « conséquence logique » est une relation sémantique puisqu'elle subsiste entre des phrases en vertu de leurs significations (qui nous sont données par les tables de vérité). Il est crucial de distinguer cette relation de la relation de déductibilité (dont nous parlerons au début du prochain chapitre, à la p. 89 et suivantes) qui est parfois appelée « conséquence syntaxique ».[17] La déductibilité est une relation syntaxique, une relation qui obtient entre des phrases en vertu de leur syntaxe, leurs formes logiques, et non pas de leurs significations : elle est purement ‹ formelle › et ne prend pas en compte les valeurs de vérité.

Nous pouvons maintenant introduire une abréviation spécifique pour dire qu'un argument est valide :[18]

$$\text{« Un argument de la forme } \frac{\begin{array}{c}p\\q\\r\end{array}}{s} \text{ est valide. »} \rightsquigarrow \text{« } \{p, q, r\} \vDash s \text{ »}$$

$$\text{« Un argument de la forme } \frac{p \wedge q \wedge r}{s} \text{ est valide. »} \rightsquigarrow \text{« } \{p \wedge q \wedge r\} \vDash s \text{ »}$$

Dans le cas où on n'a qu'une seule prémisse (par ex. une conjonction, comme dans le deuxième exemple précédent), nous pouvons omettre les crochets « { » et « } » : on écrira seulement « $p \wedge q \wedge r \vDash s$ ».

Nous avons remarqué que « $\vDash$ », faisant partie du métalangage, peut tout de même être interprété comme un opérateur propositionnel. Au lieu de le lire comme « ... est une conséquence logique de ⋯ » – expression qui a besoin de deux *noms de phrases* pour former une phrase –, on peut aussi l'interpréter comme « Il s'ensuit de l'affirmation que ... que ⋯ » ou « Étant donné que ..., il s'ensuit que ⋯ », qui sont des expressions qui ont besoin de deux *phrases* pour former une phrase – mais qui appartiennent néanmoins au métalangage.[19] Interprétant « $\vDash$ » de cette manière, nous pouvons nous

[16] Cette terminologie vient de l'usage des adverbes latins « formaliter » et « materialiter » par les logiciens médiévaux pour marquer la distinction entre langage-objet et métalangage. Ils parlaient également d'un « mode matériel » de l'usage des mots (pour dire que ces mots étaient utilisés) et d'un « mode formel » de leur usage (pour dire qu'ils étaient mentionnés).

[17] C'est pour cette raison que la conséquence logique est également appellée « conséquence logique sémantique », ce qui la distingue des « conséquences logiques syntaxiques », qui sont des relations de déductibilité (dans un certain calcul) dont on parlera plus tard dans la sct. 4.1.

[18] J'utilise le signe « $\rightsquigarrow$ » pour parler du processus de formalisation.

[19] Il ne faut pas penser que toute expression appartenant au métalangage opère sur des noms d'expressions. L'opérateur « il est vrai que ... », l'exemple paradigmatique d'une expression du métalangage, a besoin d'une phrase (et non pas d'un nom d'une phrase) pour en former une phrase plus complexe.

PROOF

passer des guillemets et écrire :

$$p \vDash q \tag{3.10}$$

(3.10) désigne le résultat de la juxtaposition de l'expression « Il s'ensuit de l'affirmation que », de la phrase représentée par « p », de l'expression « que » et la phrase représentée par « q ». Si « p » représente « Anne est amoureuse de Jean » et que « q » représente « Anne est amoureuse de quelqu'un », alors (3.10) devient la phrase suivante :

> Il s'ensuit de l'affirmation qu'Anne est amoureuse de Jean que Anne est amoureuse de quelqu'un. (3.10+)

Même si cette abréviation « $\vDash$ » est communément utilisée et utile, elle entraîne une certaine confusion entre usage et mention. Étant donné qu'on se trouve dans le métalangage, une meilleure manière de dire que « q » est une conséquence logique de « p », serait la suivante :

$$\text{« } p \text{ » } \vDash \text{« } q \text{ »} \tag{3.10*}$$

Dans (3.10*), les phrases « p » et « q » sont mentionnées et « $\vDash$ » est utilisé pour signifier la relation de conséquence logique (« $\vDash$ » est lu comme : « a comme conséquence (logique) » ou « implique formellement »). (3.10*) rend explicite le fait que la relation de conséquence représentée par « $\vDash$ » appartient au métalangage et non pas au langage-objet.

Néanmoins, (3.10*) pose un problème subtil. En logique, on l'a vu, on n'a pas seulement affaire à des arguments concrets, formulés dans le langage ordinaire (le français), mais à des schémas ou des squelettes d'arguments : on étudie la *forme* des arguments. Un argument n'est considéré comme valide que si tous les autres arguments ayant la même forme le sont aussi. Nous avons essayé de représenter cet aspect de généralité en remplaçant les phrases concrètes (« j'étudie la logique », « je serai heureux et sage », etc.) par des lettres appelés « schématiques » (« p », « q », etc.) – et on a vu que les lettres qui substituaient ces phrases ordinaires étaient arbitraires.

Cette manière de capturer l'aspect de généralité – faire un choix concret, mais arbitraire – est une manière simple et claire pour parler de toutes les choses d'un certain type : nous la rencontrons dans des domaines aussi divers que sont les mathématiques, l'économie ou encore la publicité.[20] Le processus qui nous permet d'obtenir la généralité requise est un processus d'abstraction : nous ne considérons que les aspects pertinents de l'exemple choisi et en ignorons les autres. C'est ainsi que nous ne nous intéressons, dans un langage vérifonctionnel, qu'aux valeurs de vérité des parties simples d'une phrase complexe, pour en déterminer la valeur de vérité.

Obtenir la généralité par l'abstraction, cependant, pose problème au niveau du métalangage. Le problème vient du fait que l'on veut dire, par une assertion de la forme « $p \vDash q$ » que, quelles que soient les phrases substituées pour « p » et « q » dans « $p \vDash q$ », la phrase qui en résulte est vraie. Malheureusement, la phrase « « p » $\vDash$ « q » » n'affirme pas cela – dans cette phrase, les noms de phrases « « p » » et « « q » » désignent des phrases précises. Puisque les phrases « p » et « q » sont *citées* (mentionnées) dans (3.10*), cette phrase ne parle que de ces phrases concrètes.

[20] Voici quelques exemples : nous disons en mathématiques, pour parler par ex. de *n'importe quel* nombre rationnel, comme dans notre exemple de preuve à la p. 2 : « Soit a un nombre rationnel ... ». En économie, nous parlons par ex. de l'inflation mesurée par l'indice des prix à la consommation, mesuré par les prix des biens et des services consommés par un ménage ‹ moyen ›. Les entreprises évaluent l'impact d'une campagne publicitaire sur le public ciblé en délibérant sur son effet sur le comportement d'un membre ‹ typique › de ce public.

PROOF

Afin de mieux comprendre ce problème, nous pouvons penser à la situation suivante : supposons que nous introduisions un mot qui permette d'avoir des référents variables. Par exemple, nous introduisons un nom 'variable' ou 'schématique', « Legrand », pour désigner la personne la plus grande dans la salle, quelle qu'elle soit.[21] Ce même mot peut donc désigner des personnes différentes dans chaque cours, et il est possible de créer, à partir de ce nouveau mot, des phrases telles que « Legrand fait plus de 2 mètres », « parmi nous, Legrand est celui qui voit le mieux au cinéma », etc., désignant à chaque fois, quelle que soit la personne la plus grande dans la salle (supposons qu'on ne le sache pas), celle qui sera plus grande que 2 mètres, privilégiée au cinéma, etc. Évidemment, dans une salle de cours particulière, lorsqu'un individu particulier est désigné par le mot « Legrand », ces phrases peuvent être vraies et fausses.

Même si nous parvenons, à l'aide de « Legrand », à avoir un 'nom variable' pour une personne, cela ne signifie pas que le *nom* lui-même est variable, mais seulement que la personne qu'il désigne se modifie suivant la composition de la salle dans laquelle nous nous trouvons : dans une autre salle, le nom désignera une autre personne. Mais cela ne veut pas dire que le nom change : lorsque le nom est mentionné (est pris entre une paire de guillemets), il ne se réfère plus à l'individu le plus grand de la salle. Peu importe la composition de la salle, il restera vrai, par exemple, que « Legrand » est un nom composé de sept lettres, que nous l'avons inventé, etc. Même si la personne désignée par « Legrand » s'appelle également « Otto », il n'est pas le cas que la phrase « l'expression « Legrand » est composée de quatre lettres » devienne vraie. La variabilité que « Legrand » possède dans le langage-objet est donc perdue au niveau du métalangage : même si « p » et « q » abrègent des phrases arbitraires, leurs noms ne désignent pas des phrases arbitraires.[22] Les valeurs de vérité des énoncés métalangagiers ne sont pas influencées par l'interprétation des mots qu'ils contiennent. Par exemple, « « Legrand » est fait de sept lettres » sera toujours vrai, et cela indépendamment de la personne que le mot « Legrand » désigne ici, puisqu'il n'est pas question de cette personne dans la phrase, mais du mot « Legrand », désigné par le nom « « Legrand » ».

Notre objectif de base était de trouver un moyen de rendre « p » et « q » dans « « p » $\vDash$ « q » » variables, c'est-à-dire de rendre possible leur substitution par d'autres phrases. Cependant, nous avons remarqué, avec l'exemple du mot « Legrand », qu'il est aisé de créer des mots 'variables' (avec des dénotations qui dépendent de circonstances contingentes), mais qu'il est bien plus dur de créer des noms 'variables'. En effet, un nom tel que « « p » » ne peut pas faire référence à autre chose que ce qui est littéralement écrit entres ses premiers guillemets. Il faut dès lors trouver un moyen de contourner ce problème.

Tout d'abord, il faut introduire des noms pour des phrases dans notre langage-objet. Nous introduisons des lettres minuscules grecques « ϕ » (prononciation : « phi »), « ψ » (« psi »), « χ » (« khi ») et « ξ » (« xi ») pour parler des phrases de n'importe quelle complexité. « ϕ » est donc le nom d'un nom d'une phrase – ϕ est soit « p », soit « q », soit « $p \wedge q$ » ou encore « $(p \rightarrow q) \wedge r$ ». Il y a donc une différence cruciale entre les lettres romaines et grecques : les lettres romaines nous servent comme *abréviations* des phrases. Nous pouvons, par exemple, remplacer toute occurrence de « p » par la phrase « Sam veut se marier » et toute occurrence de « q » par « Marie a faim ». Les lettres grecques, au contraire, sont des *noms* de phrases : nous pouvons, si nous voulons, remplacer « ϕ » par « « Marie a faim » » et

[21] Je mets « variable » et « schématique » entre 'scare quotes' puisque nous discuterons en détail, dans le ch. 9, de la problématique d'ainsi introduire l'idée de variable. En fait, aucun mot n'est variable.

[22] Nous reviendrons sur cette notion problématique d''individu arbitraire' aux p. 296 et suivantes.

PROOF

« ψ » par « « Sam veut se marier » ». Si ϕ est un nom désignant la phrase « Marie a faim » et ψ un nom désignant la phrase « Sam veut se marier », nous pouvons donc dire :

- « Marie » fait partie de ϕ.
- ψ consiste en quatre mots.

En bref, « ϕ » et « ψ » ne sont pas des abréviations de phrases, mais des abréviations de noms de phrases. Au lieu de (3.10∗), nous dirons donc :

$$\phi \vDash \psi \tag{3.10∗∗}$$

(3.10∗∗) résout notre problème : la phrase dit que n'importe quelle phrase est une conséquence sémantique de n'importe quelle autre (ce qui est, bien évidemment, faux). Substituons « $p \wedge q$ » pour ϕ et « q » pour ψ, nous en obtenons une instance vraie :

$$\text{« } p \wedge q \text{ » } \vDash \text{« } q \text{ »} \tag{3.10∗ ∗ ∗}$$

3.3 La quasi-citation et les demi-crochets de Quine

Malheureusement, (3.10∗∗) n'est pas la solution à tous nos problèmes. Comme nous nous intéressons à toutes les inférences d'un certain type, aux squelettes d'arguments, nous n'avons pas seulement besoin de noms pour des phrases, mais aussi de noms pour les phrases d'un certain type. Par exemple, nous voudrions dire que toute phrase conjonctive a comme conséquence sémantique chacun de ses conjoints. Jusqu'à maintenant, on s'est servi d'expressions comme « toute phrase ayant la même forme que « $p \wedge q$ » », « le résultat de l'addition de phrases au connecteur « ... $\rightarrow \cdots$ » », etc. Mais ceci ne nous aide pas à exprimer qu'une conjonction implique formellement ses conjoints. Si nous disions

$$\phi \wedge \psi \vDash \phi \tag{3.11}$$

nous ne pourrions plus substituer « ϕ » par « « Sam a faim » » et « ψ » par « « Marie veut se marier » » car dans ce cas-là nous aurions :

$$\text{« Sam a faim » } \wedge \text{ « Marie veut se marier » } \vDash \text{« Sam a faim »} \tag{3.11+}$$

(3.11+) est un non-sens, car « $\wedge$ » relie des phrases et non pas des noms de phrases.[23] Essayons la formalisation suivante :

$$\text{« } \phi \wedge \psi \text{ » } \vDash \phi \tag{3.11∗}$$

Le problème avec (3.11∗), comme avec (3.10∗), est que nous avons perdu la généralité. « $\phi \wedge \psi$ » n'est un nom que pour cette expression précise (la lettre grecque « ϕ », suivie de « $\wedge$ » et de la lettre grecque « ψ »). Cependant, nous cherchons une manière de mentionner une phrase variable au sein d'une forme fixe.

[23] Dans la terminologie de la grammaire catégorielle (cf. p. 244 et suivantes) les connecteurs propositionnels sont des expressions du type **S**/**SS**, et non pas des expressions du type **S**/**NN**. Nous définirons formellement ce qu'est une relation à la p. 321.

PROOF

À ce propos, Quine a introduit ce que nous appellerons la « quasi-citation », qui se fait avec des demi-crochets, appelés « demi-crochets de Quine » (« Quine corners »). Nous stipulons simplement que l'expression

$$\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner \tag{3.12}$$

désignera la formule qui commence avec ϕ (c'est-à-dire la phrase arbitraire dénotée par « ϕ »), continue avec « $\wedge$ » et finit par ψ. Utiliser les demi-crochets de Quine permet donc de créer un nom pour un certain type de phrases à partir d'autres noms, comme dans (3.12), où le nom « $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ » est obtenu à partir des noms « ϕ » et « ψ ». (3.12) nous permet de parler de toutes les expressions de n'importe quelle complexité, ayant une certaine forme (en l'occurrence, une forme conjonctive). De la même manière, $\ulcorner(\mu)\urcorner$ dénote le résultat de la mise entre parenthèses de l'expression μ. En d'autres mots, la raison d'être des demi-crochets de Quine est de nous permettre des expressions du langage-objet (« $\wedge$ », « (» et «) », par exemple) à l'intérieur des expressions du métalangage.

Il est à souligner qu'il s'agit ici d'une solution artificielle à un problème artificiel. Nous introduisons « $\ulcorner \ldots \urcorner$ » comme nouvelle expression dans notre métalangage et stipulons sa signification :[24] ce serait l'expression qui met des guillemets 'ordinaires' autour de l'expression ..., mais 'omet' (ou 'annule', 'biffe') tous les guillemets à l'intérieur de .... En voici quelques exemples :

- Nous utilisons « $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ » pour parler de toutes les phrases conjonctives, par ex. « $p \wedge q$ », « $(p \vee q) \wedge s$ », « $p \wedge (q \rightarrow s)$ », etc. ;
- Nous utilisons « $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ » pour parler de toutes les implications matérielles, quelle que soit leur complexité ;
- Nous utilisons « $\ulcorner(\phi)\urcorner$ » pour parler de toutes les expressions qui commencent avec une parenthèse gauche et finissent par une parenthèse droite ;
- Nous utilisons « $\ulcorner$ Paris $\urcorner$ » pour parler du nom de la ville de Paris, c'est-à-dire pour parler de « Paris » ; c'est donc un nom de la même expression que « « Paris » » !

En général, des matrices comme par ex. « $\ulcorner \ldots \wedge \cdots \urcorner$ », « $\ulcorner(\ldots)\urcorner$ », etc. nous servent à construire des noms complexes, comme le font par exemple « le père de ... » ou « la moitié de ... ». Si Sam est une personne, alors « le père de Sam » dénote le père de cette personne. Si a est un certain nombre, alors « la moitié de a » dénote la moitié de ce nombre.[25] Si ϕ est une certaine phrase, alors $\ulcorner(\phi)\urcorner$ dénote le résultat de la mise entre parenthèses de cette phrase. Si ϕ est « Sam est triste », alors $\ulcorner(\phi)\urcorner$ est l'expression «(Sam est triste) ». Si ϕ est « Sam a faim » et ψ est « Marie veut se marier », alors $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ devient « Sam a faim et Marie veut se marier » (le nom de la phrase conjonctive). Nous pouvons, bien sûr, substituer ce que désigne ϕ par la phrase « p » et ce que désigne ψ par la phrase « q », obtenant alors à partir de (3.12) l'expression suivante :

$$\text{« } p \wedge q \text{ »} \tag{3.12+}$$

(3.12+) est un nom de la conjonction des deux phrases simples, concrètes, qui parlent par exemple de la logique et du bonheur. Si nous abrégeons par « s » la phrase « le soleil brille », alors « $p \wedge (q \wedge s)$ » est une autre instance de (3.12), qui parle du soleil, de la logique et du bonheur.

[24] De la même manière, je pourrais introduire un type de 'citation' « $*\ldots*$ » et lui donner la signification « la phrase qui est la meilleure réponse à « ... » ». Ainsi, l'expression « $*$ quel est le sens de la vie ? $*$ » serait un nom pour l'expression « 42 ! » (pour en savoir plus, consultez *Le Guide du voyageur galactique*).

[25] Nous retournerons, dans la sct. 10.1, à ces noms complexes qu'on appellera « fonctions ».

PROOF

Contrairement à cette spécificité du langage-objet, nous pouvons concevoir (3.12) comme le nom d'une phrase contenant des lacunes « … ∧ ⋯ », où la première lacune (représentée par les points de suspension « … ») est remplie par la désignation du nom ϕ et la deuxième lacune (représentée par « ⋯ ») est remplie par (la désignation du nom) ψ. L'avantage d'avoir des noms pour des phrases non spécifiées est que ϕ et ψ peuvent être de n'importe quelle complexité : dans (3.12), nous pouvons aussi substituer ϕ par « $p \rightarrow q$ » et ψ par « $(p \vee q) \wedge r$ ». L'avantage des demi-crochets ne concerne que les noms complexes : en l'absence de connecteurs, les demi-crochets n'ont pas d'effet autre que les guillemets ordinaires. $\ulcorner\phi\urcorner$ est simplement ϕ. Leur utilité réside dans le fait qu'ils nous permettent d'*utiliser* des connecteurs du langage-objet pour spécifier la forme logique des phrases que nous voulons *mentionner*. C'est avec ces demi-crochets que nous parvenons finalement à une formulation satisfaisante de (3.11) :

$$\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner \vDash \phi \tag{3.11**}$$

L'expression (3.11**) désigne le résultat de la juxtaposition de l'expression « Étant donné l'affirmation que », de n'importe qu'elle phrase *désignée* par ϕ, du connecteur « ∧ », de n'importe quelle phrase *désignée* par ψ, de l'expression « il s'ensuit que » et de la phrase *désignée* par ϕ. Peu importe quelle est la phrase ϕ, elle s'ensuit de n'importe quelle conjonction dont elle fait partie. Si ϕ désigne « Sam a faim » et ψ désigne « Marie veut se marier », alors (3.11**) devient la phrase suivante :

> Étant donné que Sam a faim et que Marie veut se marier, il s'ensuit que Sam a faim. (3.11* * *)

C'est cet usage que nous adopterons par la suite.

3.4 Les tautologies et les contradictions

Une inférence logique est valide si et seulement s'il n'est pas logiquement possible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse, c'est-à-dire si toute attribution de valeurs de vérité à ses constituants simples qui rend vraies les prémisses rend également vraie la conclusion. Étant donné la signification de l'implication matérielle « → » – qu'elle est vraie s'il n'est pas le cas que l'antécédent est vrai et le conséquent faux – une inférence qui a « p » comme prémisse et « q » comme conclusion est valide si et seulement si « $p \rightarrow q$ » est une tautologie.

Une phrase est une tautologie si et seulement si elle est vraie dans toutes les possibilités logiques, c'est-à-dire vraie sous toutes les attributions de valeurs de vérité à ses constituants simples. C'est pour cette raison que les tautologies sont appelées « *vérités logiques* ». La négation d'une tautologie, étant donné la signification de « ¬ », est une phrase fausse dans toutes les possibilités logiques – il n'y a aucune attribution de valeurs de vérité à ses constituants simples qui la rende vraie. On appelle ces faussetés logiques des « *contradictions* ».[26]

[26] Nous avons déjà rencontré les tautologies et les contradictions dans les colonnes 1 et 16 du tableau des 16 connecteurs binaires possibles (cf. p. 53 et 55). Elles correspondent à des « fonctions de vérité » (« truth-functions ») dans le même sens qu'une fonction constante peut être appelée « une fonction ». Rien ne nous empêche d'introduire des connecteurs « ⊤ » et « ⊥ » avec les tables de vérité suivantes :

p	q	$p \top q$

PROOF

Il s'ensuit de leurs définitions que les tautologies et les contradictions jouent un rôle particulier dans les inférences : une tautologie, puisqu'elle ne peut pas être fausse, peut être inférée de n'importe quelle prémisse.[27] Quelles que soient les prémisses dont on infère la tautologie, il n'est pas logiquement possible que ces prémisses soient vraies *et* la tautologie fausse. Une tautologie peut même être inférée d'un ensemble vide de prémisses. Une contradiction, au contraire, est une prémisse dont on peut inférer n'importe quelle conclusion. Quelle que soit la conclusion qu'on veut en tirer, il n'est pas logiquement possible que la prémisse (la contradiction) soit vraie et que la conclusion soit fausse.

Une tautologie paradigmatique est la phrase « $p \vee \neg p$ ».[28] « $p \wedge \neg p$ » est une contradiction exemplaire. Selon les considérations précédentes, on voit que les inférences

$$\frac{q}{p \vee \neg p} \qquad \frac{\neg(p \vee \neg p)}{q} \qquad \frac{p \wedge \neg p}{q} \qquad \frac{q}{\neg(p \wedge \neg p)}$$

sont valides, quelle que soit la phrase désignée par « q » : on peut inférer une tautologie de n'importe quelle phrase et on peut inférer n'importe quelle phrase d'une contradiction. Puisqu'une tautologie s'ensuit de n'importe quelle prémisse, on peut dire de la manière suivante que « $p \vee \neg p$ » est une tautologie :

$$\vDash p \vee \neg p \tag{3.13}$$

Ceci s'accorde avec notre explication de la conséquence logique : la phrase « $\phi \vDash \psi$ » est vraie si et seulement s'il est vrai pour n'importe quels ϕ et ψ que : si ϕ est vrai, alors ψ l'est aussi. S'il est impossible

V	*V*	*V*
V	*F*	*V*
F	*V*	*V*
F	*F*	*V*

p	q	$p \perp q$
V	*V*	*F*
V	*F*	*F*
F	*V*	*F*
F	*F*	*F*

Comme les valeurs de vérité de « $p \top q$ » et de « $p \perp q$ » ne dépendent pas des valeurs de vérité de « p » et de « q », une telle stipulation a peu d'intérêt (cf. aussi Blanché, 1969, 136). Elle présente également l'inconvénient d'être en conflit avec un autre usage de « $\top$ » et de « $\perp$ », introduit à la p. 42 (cf. n. 28), comme lettres schématiques pour des tautologies et contradictions arbitraires.

[27] Dès lors, l'expression « argument tautologique » est ambiguë : en un sens, tout bon argument en logique est tautologique, dans le sens qu'il est valide seulement si l'implication correspondante est une tautologie. En un autre sens, les arguments qui ont une tautologie comme conclusion sont toujours valides, quelles que soient leurs prémisses. C'est pour exactement cette raison, cependant, qu'ils ne sont pas bons : comme les prémisses sont arbitraires, elles ne nous donnent pas de raison pour accepter la vérité de la conclusion.

[28] Comparez cette phrase avec « toute phrase $\ulcorner \phi \vee \neg \phi \urcorner$ est une tautologie ». Dans « une tautologie paradigmatique est la phrase « $p \vee \neg p$ » », on parle d'une phrase précise, par exemple de « il pleut ou il ne pleut pas ». Dans « toute phrase $\ulcorner \phi \vee \neg \phi \urcorner$ est une tautologie » on parle de toutes les phrases qui ont une certaine forme, c'est-à-dire de celles qui sont composées d'une phrase, d'une expression pour la disjonction et de la négation de cette phrase. C'est la raison pour laquelle on utilise les demi-crochets de Quine dans ce cas.

PROOF

tout court que ψ soit fausse, alors cette condition est toujours remplie : pour n'importe quelle phrase « p », la disjonction « $p \vee \neg p$ » est vraie – elle est une conséquence logique de l'ensemble vide de prémisses.

Pour dire que « $p \wedge \neg p$ » est une contradiction, on peut affirmer :

$$\vDash \neg(p \wedge \neg p) \tag{3.14}$$

(3.14) dit que « $\neg(p \wedge \neg p)$ » est une tautologie et alors sa négation est une contradiction.

Si deux phrases complexes ont la même table de vérité, il n'y a aucune raison logique de les distinguer : en ce qui concerne une logique extensionnelle, elles disent la même chose.[29] Entre les deux, il s'agit d'*équivalence logique*. La relation entre la notion d'« équivalence logique » du métalangage et l'équivalence matérielle du langage-objet est la même que celle entre la notion de « conséquence logique » et l'implication matérielle. Dire que $p \rightarrow q$, revient à dire qu'il n'est pas le cas que « p » est vrai et « q » faux. Dire que ψ est une conséquence logique de ϕ revient à dire qu'il n'y a aucun cas (aucune possibilité logique) où ϕ est vrai et ψ faux. Dire que $p \leftrightarrow q$, revient à dire que les deux phrases « p » et « q » sont soit les deux vraies soit les deux fausses. Dire que ϕ est logiquement équivalente à ψ, finalement, revient à dire que ces deux phrases reçoivent les mêmes valeurs de vérité dans tous les cas possibles, c'est-à-dire que leurs tables de vérité sont les mêmes.[30]

Une implication matérielle telle que « $p \rightarrow q$ » est vraie si et seulement si, soit « p » est faux, soit « q » est vrai. Nous pouvons formuler ses conditions de vérité en utilisant la disjonction : « $p \rightarrow q$ » est vrai si et seulement si « $\neg p \vee q$ » est vrai. Cette équivalence est une équivalence au niveau du métalangage : « $p \rightarrow q$ » est une conséquence logique de « $\neg p \vee q$ » et « $\neg p \vee q$ » est une conséquence logique de « $p \rightarrow q$ ». En bref, leurs tables de vérité sont les mêmes. On parlera d'« *équivalence logique* ».

Nous remarquons d'autres équivalences logiques. Deux paires d'équivalences importantes sont appelées « lois de Morgan », d'après Auguste De Morgan (1806–1871).[31] En voici une formulation préliminaire :

$$\begin{aligned} \neg(p \wedge q) &\iff \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) &\iff \neg p \wedge \neg q \end{aligned}$$

Il faut bien interpréter ces équivalences. L'utilisation de la flèche double « $\iff$ » signifie qu'il s'agit d'assertions du métalangage. Bien que les équivalences matérielles « $(\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ » et « $(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ » soient également vraies, les lois de Morgan font une assertion plus forte, à savoir que ces équivalences matérielles sont non seulement vraies mais aussi tautologiques.

[29] C'est pourquoi nous ne devrions pas penser que la 'logique propositionnelle' traite des propositions de la même manière que la logique des prédicats traite des prédicats. En examinant les équivalences logiques, la logique des phrases étudie plutôt les différentes manières 'comment les propositions nous sommes données' (pour utiliser l'expression de Frege pour caractériser le sens), c'est-à-dire la structure logique des *phrases*.

[30] C'est cette notion d'« équivalence logique » qui nous permet de dire que « $p \vee \neg p$ » est la *seule* tautologie, et que « $p \wedge \neg p$ » est la *seule* contradiction. On y arrive par des transformations de formules. Considérons une tautologie complexe comme « $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)) \leftrightarrow \neg p$ ». Puisqu'il s'agit d'une tautologie, elle est vraie dans les quatre manières différentes d'attribuer des « V » et des « F » à « p » et à « q ». Elle est donc équivalente à « $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ », formule qui combine (par la disjonction) les quatre valuations possibles de « p » et de « q ». En appliquant une des lois de distribution ($\ulcorner(\phi \vee (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi))\urcorner$ et $\ulcorner(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi))\urcorner$), on obtient « $(p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (\neg p \wedge (q \vee \neg q))$ ». Puisque les conjoints tautologiques « $(q \vee \neg q)$ » n'attribuent rien aux conditions de vérité de la disjonction, on peut les omettre, et ainsi arriver à « $p \vee \neg p$ ».

[31] Cf. de Morgan (1847, 116). D'après Łukasiewicz (1934a), Guillaume d'Ockham les avait déjà reconnues.

PROOF

Les lois de Morgan sont parfaitement générales : elles signifient non seulement, comme notre formulation le veut, que la table de vérité de la négation d'une conjonction de *phrases simples* est équivalente à la disjonction des négations de ces phrases simples, mais elles s'appliquent à toutes les phrases, complexes et simples. Si nous utilisons les lettres minuscules grecques pour signifier ces phrases d'une complexité arbitraire et les demi-crochets de Quine pour construire des noms de phrases ayant une certaine forme, on obtient la formulation correcte :

$$\begin{array}{lcl} \ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\neg\phi \vee \neg\psi\urcorner \\ \ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\neg\phi \wedge \neg\psi\urcorner \end{array} \tag{3.15}$$

Ces deux équivalences logiques nous informent que nous pouvons, en toute généralité, remplacer une phrase $\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$ (c'est-à-dire toute négation d'une conjonction) par la phrase $\ulcorner\neg\phi \vee \neg\psi\urcorner$ (c'est-à-dire une disjonction de négations).[32] Les lois de Morgan nous permettent de 'pousser' des négations devant des conjonctions et des disjonctions à l'intérieur de ces formules, en échangeant le connecteur « $\wedge$ » ou « $\vee$ » avec son connecteur ‹ opposé › « $\vee$ » ou « $\wedge$ ».[33]

C'est grâce à cette généralité que les lois de Morgan nous permettent de *définir* « $\wedge$ » à partir de « $\vee$ » et de « $\neg$ ». Mais qu'est-ce qu'une définition ? Une définition, dans l'usage que nous en faisons ici, est une équivalence logique qui introduit une nouvelle expression et dont on stipule qu'elle fixe, au moins en partie, le sens de cette nouvelle expression. C'est grâce à l'équivalence logique que le *definiendum* (la nouvelle expression à définir) peut être substitué dans n'importe quel contexte au *definiens* (les expressions 'anciennes' qui définissent la nouvelle expression). Au lieu de définir l'implication matérielle « $\rightarrow$ » par sa table de vérité, nous pouvons nous servir de l'équivalence logique entre $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ et $\ulcorner\neg\phi \vee \psi\urcorner$ (si nous avons déjà introduit « $\vee$ » et « $\neg$ ») :

$$\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner \quad :\Longleftrightarrow \quad \ulcorner\neg\phi \vee \psi\urcorner \tag{3.16}$$

(3.16) nous assure que toutes les formules ayant la forme exposée à gauche ont la même table de vérité que la formule exposée du côté droit de l'équivalence. Nous introduisons l'expression de gauche

[32] Nous avons besoin des demi-crochets car les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lcl} \neg(\phi \wedge \psi) & \Longleftrightarrow & \neg\phi \vee \neg\psi \\ \neg(\phi \vee \psi) & \Longleftrightarrow & \neg\phi \wedge \neg\psi \end{array}$$

sont mal formées. Si on remplace ϕ par « Marie a faim » et ψ par « Sam veut se marier », on obtient la formule mal formée « « Marie a faim » $\wedge$ « Sam veut se marier » » – qui est mal formée puisque « $\wedge$ » est un connecteur propositionnel, qui se relie avec des phrases, et non pas une relation entre des phrases, qui relierait des *noms* de ces phrases. On pourrait penser qu'il faut simplement ajouter des guillemets :

$$\begin{array}{lcl} \text{«}\neg(\phi \wedge \psi)\text{»} & \Longleftrightarrow & \text{«}\neg\phi \vee \neg\psi\text{»} \\ \text{«}\neg(\phi \vee \psi)\text{»} & \Longleftrightarrow & \text{«}\neg\phi \wedge \neg\psi\text{»} \end{array}$$

Ces formulations posent également un grave problème du fait de ne pas être générales. Les expressions à gauche et à droite de la flèche double « $\Longleftrightarrow$ » ne dénotent que ces expressions particulières. Celle en haut à gauche, par exemple, désigne l'expression qui commence par une négation, continue avec une parenthèse, la lettre grecque « ϕ », le signe de la conjonction, la lettre grecque « ψ » et une parenthèse. Nous voyons donc que ces deux dernières équivalences souffrent d'un triple défaut :

- elles sont mal formées ;
- dans la mesure où elles sont intelligibles, elles sont fausses ;
- même si elles étaient vraies, elle souffriraient d'un défaut de généralité.

La formalisation à l'aide des demi-crochets de Quine (3.15) résout ces trois problèmes à la fois.

[33] Nous donnerons plus tard (à la p. 128) une signification plus exacte à ce terme « opposé », qui est ici utilisé dans un sens informel.

PROOF

(le *definiendum*) comme une autre manière d'écrire celle de droite (le *definiens*). Le fait que nous interprétons l'équivalence logique comme équivalence qui détermine la signification du connecteur principal de la formule à gauche est indiqué par les deux points « : » devant le signe d'équivalence logique. Par (3.16), nous annonçons notre intention d'utiliser la formule de gauche comme variante notationnelle de celle qui est à droite.[34]

Nous pouvons donc maintenant constater que les connecteurs propositionnels introduits ne sont pas tous indépendants (qu'ils peuvent être définis en d'autres termes). Les connecteurs du langage de la logique propositionnelle sont interdéfinissables : différents choix de connecteurs ‹ primitifs › (= non définis) rendent possibles les définitions des autres en ces termes :

1. Si l'on ne prenait que « ¬ » et « ∧ » comme primitifs (comme Brentano (1874) et Johnson (1947)), nous pourrions définir les autres comme suit :

$$\begin{aligned} \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner &:\Longleftrightarrow \ulcorner \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \\ \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner &:\Longleftrightarrow \ulcorner \neg(\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \\ \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner &:\Longleftrightarrow \ulcorner \neg(\phi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\neg\phi \wedge \psi)\urcorner \end{aligned}$$

2. On pourrait aussi (comme Whitehead and Russell (1910) et Hilbert and Ackermann (1928)) ne prendre que « ¬ » et « ∨ » comme primitifs, et définir les autres en ces termes.

3. Si on ne prenait que « ¬ » et « → » comme primitifs (comme Frege (1879) et Łukasiewicz (1904)), on pourrait définir les autres comme suit :

$$\begin{aligned} \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner &:\Longleftrightarrow \ulcorner \neg(\phi \rightarrow \neg\psi)\urcorner \\ \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner &:\Longleftrightarrow \ulcorner \neg\phi \rightarrow \psi\urcorner \\ \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner \Longleftrightarrow \ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)\urcorner &:\Longleftrightarrow \ulcorner \neg((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \phi))\urcorner \end{aligned}$$

Dans ces définitions, les signes définis n'apparaissent pas à la droite d'une définition (ils apparaissent dans la dernière ligne, dans une simple équivalence qui nous sert de modèle pour la définition). Nous avons le droit d'enchaîner des définitions. Ayant défini « ∧ », par exemple, à partir de « ¬ » et de « → », nous pouvons l'utiliser ensuite avec « ¬ » et « → » pour définir « ∨ ».

Les équivalences logiques ne nous servent pas seulement à réduire le nombre de connecteurs primitifs (c'est-à-dire ceux qui ne sont pas définis en termes d'autres connecteurs), mais elles sont également utiles pour la simplification de formules difficiles.

Certaines équivalences nous assurent, par exemple, que dans la conjonction et la disjonction, l'ordre des membres n'importe point. En d'autres mots, la conjonction et la disjonction sont commu-

[34] Lorsque la définition est basée sur une identité plutôt que sur une équation, nous ajoutons les deux points au signe d'identité : « définissons « a » comme suit : $a := \sqrt{b}$ … ». Un problème additionnel, et important, dans le cas des définitions basées sur des identités est la non-existence possible de la chose en question. Nous retournerons à ces problèmes dans le contexte des descriptions définies à la p. 234.
À la place des deux points, on utilise aussi « déf. » comme indice :

$$\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner \underset{\text{déf.}}{\longleftrightarrow} \ulcorner \neg\phi \vee \psi \urcorner \qquad \text{et} \qquad a \underset{\text{déf.}}{=} \sqrt{b}$$

PROOF

tatives ; « $p \wedge q$ » et « $q \wedge p$ » sont équivalents, ainsi que « $p \vee q$ » et « $q \vee p$ » :

$$\begin{array}{lll} \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner & \iff & \ulcorner \psi \wedge \phi \urcorner \\ \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner & \iff & \ulcorner \psi \vee \phi \urcorner \end{array} \tag{3.17}$$

Une autre 'loi' (équivalence logique générale)[35] nous permet de distribuer la conjonction sur une disjonction et vice versa :

$$\begin{array}{lll} \ulcorner \phi \vee (\psi \wedge \chi) \urcorner & \iff & \ulcorner (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi) \urcorner \\ \ulcorner \phi \wedge (\psi \vee \chi) \urcorner & \iff & \ulcorner (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi) \urcorner \end{array} \tag{3.18}$$

Nous appellerons (3.18) la « loi de distributivité ». Cette loi, comme son équivalent en algèbre « $x(y + z + ... + w) = xy + xz + ... + xw$ »,[36] nous permet de ‹ factoriser ›, c'est-à-dire de transformer

$$(p \vee t) \wedge (q \vee r \vee s)$$

en

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (t \wedge q) \vee (t \wedge r) \vee (t \wedge s)$$

Étant donné ce que nous avons dit des tautologies et des contradictions, il est toujours possible d'omettre une tautologie qui apparaît à l'intérieur d'une conjonction et une contradiction à l'intérieur d'une disjonction :

$$\begin{array}{lll} \ulcorner \phi \wedge (\psi \vee \neg\psi) \urcorner & \iff & \phi \\ \ulcorner \phi \vee (\psi \wedge \neg\psi) \urcorner & \iff & \phi \end{array} \tag{3.19}$$

D'autres simplifications sont rendues possibles par le fait que ϕ est équivalent à toutes les phrases suivantes :

$$\ulcorner \neg\neg\phi \urcorner, \ulcorner \phi \wedge \phi \urcorner, \ulcorner \phi \vee \phi \urcorner, \ulcorner \phi \vee (\phi \wedge \psi) \urcorner, \ulcorner \phi \wedge (\phi \vee \psi) \urcorner, \ulcorner (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \neg\psi) \urcorner, \ulcorner (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \neg\psi) \urcorner \tag{3.20}$$

Cette dernière observation donne de la substance à notre affirmation (faite à la p. 20) que si une langue contient une phrase et un de ces connecteurs, alors elle contient automatiquement une infinité de phrases.

L'équivalence logique, même si elle est d'une utilité particulière pour la transformation de formules, n'est qu'une seule de toute une famille de relations sémantiques.

3.5 Le carré des oppositions

On dit souvent d'une contradiction qu'elle est contradictoire avec elle-même ou qu'elle se contredit elle-même. Nous avons ici une relation du même niveau que la conséquence logique : la relation de contradiction appartient aussi au métalangage. Deux phrases sont *contradictoires* si elles ne peuvent pas être vraies ensemble et ne peuvent pas être fausses ensemble ; une seule d'entre elles doit être

[35] Je mets « loi » en 'scare quotes' puisqu'il s'agit tout simplement d'une équivalence logique, tautologique grâce à la sémantique et prouvable grâce à la syntaxe de la logique propositionnelle. Parler de 'lois' évoque l'image de 'lois de la pensée' dont il n'est pas question ici. La distinction entre axiomes et théorèmes, que nous introduisons dans le prochain chapitre rendra ces notions intuitives beaucoup plus claires.

[36] Cette ‹ équivalence › peut être rendue plus claire (et moins métaphorique) à l'aide des algèbres de Boole, comme on le verra dans le ch. 7.6

PROOF

vraie, puisque la vérité de la première entraîne la fausseté de la deuxième et la fausseté de la deuxième entraîne la vérité de la première.[37]

Le dernier conjoint est important : être contradictoire n'est pas la seule manière d'être incompatible pour des phrases. Comparons les deux paires de phrases suivantes :

« La logique me rend heureuse. » et « La logique ne me rend pas heureuse. » (3.21)

« La logique me rend heureuse. » et « La logique me rend malheureuse. » (3.22)

Dans les deux cas, il est impossible que les deux phrases soient vraies (en même temps, pour la même personne). Mais il y a une différence :

1. Dans le premier cas (3.21), on peut conclure la vérité de la deuxième phrase par la fausseté de la première.
2. Dans le deuxième cas (3.22), on ne le peut pas : les deux phrases pourraient être fausses, par exemple dans le cas où la logique me laisse indifférente.

Les phrases de la première paire ne peuvent être ni vraies ensembles ni fausses ensembles ; les phrases de la deuxième paire ne peuvent pas être vraies ensemble, mais elles peuvent être fausses ensemble.

Si deux phrases sont reliées de la même manière que (3.21), c'est-à-dire de telle manière qu'on puisse conclure la vérité de l'une par la fausseté de l'autre *et* la fausseté de l'autre par la vérité de la première, on les appelle « *contradictoires* ». Si les deux phrases sont reliées de la même manière que (3.22), il est possible de déduire la fausseté de l'une à partir de la vérité de l'autre, mais l'inverse n'est pas vrai : nous ne pouvons pas déduire la vérité de l'une par la fausseté de l'autre. Ces énoncés sont ainsi qualifiés de « *contraires* ». D'autres exemples de phrases contraires (mais pas contradictoires) sont les paires suivantes :

(i) « Mon livre est (uniformément) rouge. », « Mon livre est (uniformément) bleu. »
(ii) « Je suis à Genève. », « Je suis à Paris. »
(iii) « Benjamin est célibataire. », « Benjamin est marié. »

Mon livre pourrait avoir d'autres couleurs que le rouge et le bleu ; je pourrais être à Lyon et Benjamin est peut-être un gorille ou un objet inanimé (ou peut-être le Pape ou un enfant de trois ans). On voit ici qu'il faut distinguer la possibilité et l'impossibilité *logique* d'autres formes de possibilité et d'impossibilité. Le fait que deux phrases ne puissent pas être vraies ensemble (qu'elles sont contraires) peut avoir différentes raisons : le monde (i), la métaphysique (ii), la langue (iii), etc.

En distinguant les relations de contradiction et de contrariété, la logique propositionnelle nous fournit un outil pour analyser les discours de la vie ordinaire. Prendre une relation qui n'est que contraire pour une contradiction est un des types de raisonnement fallacieux les plus communs, souvent utilisé pour transformer un argument négatif en une proposition positive.[38]

Mis à part les relations de contradiction et de contrariété, la tradition a reconnu un troisième type d'opposition qui est la relation de *subcontrariété*. Deux phrases sont subcontraires si et seulement s'il n'est pas possible que les deux soient fausses ensemble, même s'il est possible qu'elles soient vraies

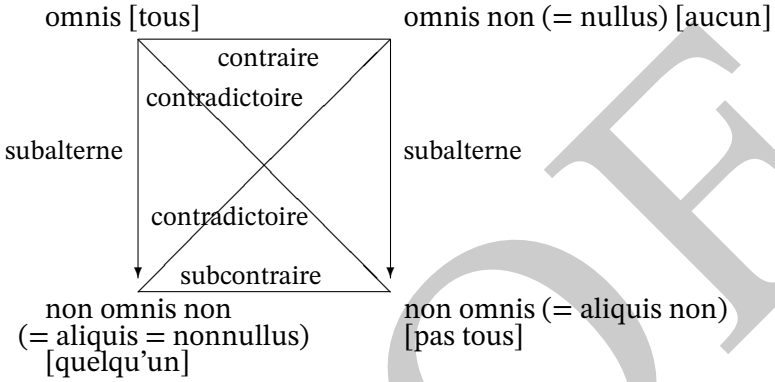
[37] J'utilise « entraîne » ici pour désigner la relation de conséquence logique, également désignée par « ⊨ ».

[38] Un exemple très simple serait un discours en faveur du néolibéralisme qui se limite à une critique du communisme, comme s'il s'agissait d'une disjonction qui couvre toutes les possibilités. Plus subtils sont les arguments qui prétendent être basés sur une contradiction mais qui exploitent une ambiguïté ou ont une présupposition contingente qui rendent l'opposition seulement contraire. Un exemple du dernier cas est « si le meurtrier de Jean n'est pas en France, il doit être à l'étranger ».

PROOF

ensemble. Les deux phrases « il y a une fête gratuite » et « il y a une fête qui n'est pas gratuite », par exemple, peuvent être vraies ensembles (s'il y a et des fêtes gratuites et des fêtes payantes), mais elles ne peuvent pas être fausses ensembles : il n'est pas possible que « il y a une fête gratuite » soit faux (et donc qu'il n'y ait que des fêtes payantes) et que « il y a une fête qui n'est pas gratuite » soit aussi faux (et donc qu'il n'y ait pas de fêtes qui ne sont pas gratuites).[39]

Une manière de présenter les relations sémantiques parmi des phrases est ce qu'on appelle un « carré des oppositions ». Le plus ancien de ces carrés, lié au nom d'Apulée (né +/- en 125 av. J.C.) et développé par Boèce (né +/- en 480), est basé sur la théorie des oppositions d'Aristote (*De l'interprétation*, 17b17-26) et se fait dans la logique syllogistique comme suit :[40]



La relation de contradiction qui tire des diagonales entre les coins de ce carré signifie que l'un est la négation de l'autre. Les phrases contraires, cependant, se distinguent par une négation interne (cf. p. 39) : elles ne peuvent pas toutes deux être vraies, mais elles peuvent toutes deux être fausses – il n'est pas possible que toutes les choses soient F et que toutes les choses ne soient pas F (au moins s'il n'est pas le cas qu'il n'y ait rien du tout), mais il est possible qu'il y ait des F (et que donc « toutes les choses ne sont pas F » soit faux) et des non-F (et que donc « toutes les choses sont F » soit également faux). La relation de subalternation est la relation de conséquence logique. Si toutes les choses sont F (et s'il y a quelque chose), alors il n'est pas vrai que toutes les choses ne sont pas F ; si toutes les choses ne sont pas F (et s'il y a des choses qui peuvent être F), alors il n'est pas le cas que toutes les choses sont F. La subcontrariété correspond à la vérité logique (= validité) de la disjonction. S'il y a des choses et que nous en choisissons une, appelée « a », alors soit a est F, soit a n'est pas F. Si a est F, alors il n'est pas vrai que toutes les choses ne sont pas F ; si a n'est pas F, alors il n'est pas vrai que toutes les choses sont F. Alors au moins une des deux phrases préfixées par « non omnis non » et par « non omnis » est vraie. La contrariété veut dire « pas les deux vraies » ; la subcontrariété dit « pas les deux fausses ».

Nous pouvons caractériser les relations contradictoires, contraires et sub-contraires comme suit :
Des phrases contradictoires ne peuvent pas être toutes deux vraies ou toutes deux fausses.
Des phrases contraires ne peuvent pas être toutes deux vraies.

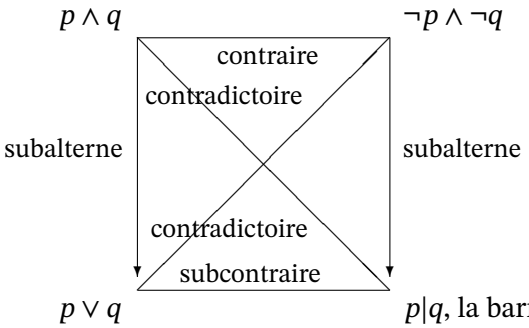
[39] Il faut présupposer, pour pouvoir montrer que les deux phrases ne peuvent pas être fausses ensemble, qu'il y a des fêtes. On reviendra sur le problème des termes vides en syllogistique à la p. 207. Aristote ne regarde pas la sub-contrariété comme un type d'opposition, la caractérisant comme « purement verbale » (*Premiers Analytiques*, 63b21–30) – ceci parce qu'il n'accepte pas le principe du tiers exclu (cf. p. 42).

[40] Nous reviendrons sur ce carré dans le contexte de la logique des prédicats, à la p. 193 dans le chapitre 8. Sur l'histoire du carré, cf. Parsons (2017) et sur sa représentation géométrique chez Apulée Londey and Johanson (1984).

PROOF

Des phrases subcontraires ne peuvent pas être toutes deux fausses.
La relation de subalternation est telle que : une phrase subalterne est nécessairement vraie si sa superalterne est vraie. C'est le cas des relations de haut en bas sur le carré des oppositions.[41] Cette relation est celle de la validité logique (il n'est jamais le cas que, si l'antécédent est vrai, alors le conséquent est faux), et plus généralement de la conséquence sémantique.

On peut adapter le carré des oppositions d'Apulée à la logique propositionnelle comme suit :[42]



$p|q$, la barre de Sheffer, définie par :

p	q	$p\|q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

On vérifie ce carré d'oppositions à l'aide des tables de vérité :

Contrariété Il n'y a pas d'attribution de valeurs de vérité qui rende « $p \wedge q$ » et « $\neg p \wedge \neg q$ » simultanément vrais.

Subcontrariété Il n'y a pas d'attribution de valeurs de vérité qui rende « $p \vee q$ » et « $p|q$ » simultanément faux.

Subalternation à gauche Toute attribution de valeurs de vérité qui rend « $p \wedge q$ » vrai, rend « $p \vee q$ » vrai. Où conversement : toute attribution qui rend « $p \vee q$ » faux, rend « $p \wedge q$ » faux.

Subalternation à droite Toute attribution de valeurs de vérité qui rend « $\neg p \wedge \neg q$ » vrai, rend « $p|q$ » vrai. Où conversement : toute attribution qui rend « $p|q$ » faux, rend « $\neg p \wedge \neg q$ » faux.

Contradiction descendante Une attribution de valeurs de vérité rend « $p \wedge q$ » vrai si et seulement si elle rend « $p|q$ » faux.

Contradiction ascendante Une attribution de valeurs de vérité rend « $p \vee q$ » vrai ssi elle rend « $\neg p \wedge \neg q$ » faux.

Au lieu de comparer des tables de vérité, nous pouvons combiner les formules dont nous voulons déterminer les relations sémantiques en une, et en faire une seule table de vérité. Il s'agit alors de vérifier le caractère tautologique des formules correspondantes en langage-objet :

ψ est une conséquence logique de ϕ	ψ vrai si ϕ est vrai	$\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ tautologie
ϕ et ψ sont logiquement équivalents	vrais ou faux ensemble	$\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$ tautologie
ϕ et ψ sont contradictoires	ni vrais ni faux ensemble	$\ulcorner \neg(\phi \leftrightarrow \psi) \urcorner$ tautologie
ϕ et ψ sont contraires	pas vrais ensemble	$\ulcorner \neg(\phi \wedge \psi) \urcorner$ tautologie
ϕ et ψ sont subcontraires	pas faux ensemble	$\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$ tautologie

[41] À l'inverse, on parle également de relation de superalternation : une proposition superalterne est nécessairement fausse si sa subalterne est fausse. C'est le cas des relations de bas en haut du tableau, correspondantes aux converses des implications.

[42] La barre de Sheffer est le connecteur défini dans la neuvième colonne à la p. 55. Nous verrons à la p. 92 qu'elle peut servir pour définir tous les autres connecteurs propositionnels.

PROOF

Les expressions dans la colonne du milieu doivent être entendues comme portant sur toutes les possibilités logiques, implicitement modifiées par l'opérateur « il est vrai pour des raisons purement logiques que … ».

3.6 Achille, la tortue et la normativité de la logique

La relation entre phrases que nous venons de rebaptiser du nom barbare de « subalternation » est la relation de conséquence (logique). Nous avons vu que « q » est une conséquence logique de « p » si et seulement si « $p \to q$ » est une tautologie. « $\vDash$ » appartient au métalangage et « $\to$ » appartient au langage-objet.

L'importance de la distinction entre les deux relations est illustrée par un paradoxe qu'a soulevé pour la première fois Lewis Carroll, l'auteur d'*Alice au pays des merveilles*, dans un article de deux pages (Carroll, 1895). Achille, le personnage de l'histoire, veut convaincre la tortue de la vérité de « q ». Il produit alors un argument de type *Modus Ponens* (abrégé par « MP »), dont la tortue accepte la vérité des prémisses :

$$\dfrac{\begin{array}{c}p\\ p \to q\end{array}}{q} \tag{3.23}$$

La tortue, cependant, réplique que cet argument est un *enthymème*, qu'il y manque une prémisse, à savoir que « q » s'ensuit de « p » et de « $p \to q$ ». En réponse, Achille est d'accord d'ajouter cette affirmation comme prémisse supplémentaire à (3.23) qui devient alors :

$$\dfrac{\begin{array}{c}p\\ p \to q\\ (p \wedge (p \to q)) \to q\end{array}}{q} \tag{3.23+}$$

Mais la tortue n'est toujours pas convaincue que q. Elle est d'accord qu'il s'ensuit des trois prémisses – « $(p \wedge (p \to q)) \to q$ », « $p \to q$ » et « p »– que q, mais elle insiste pour qu'on rajoute *ce fait-ci* comme prémisse à (3.23+). Achille la lui accorde et se trouve donc dans ce qu'on appelle une « régression à l'infini » ; il n'arrivera jamais à convaincre la tortue que q :

$$\dfrac{\begin{array}{c}p\\ p \to q\end{array}}{q} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}p\\ p \to q\\ (p \wedge p \to q) \to q\end{array}}{q} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}p\\ p \to q\\ (p \wedge (p \to q)) \to q\\ (p \wedge (p \to q) \wedge ((p \wedge (p \to q)) \to q)) \to q\end{array}}{q} \qquad \ldots \tag{3.23*}$$

La tortue a pu ridiculiser Achille grâce à l'absence de distinction entre la relation de conséquence logique, qui justifie la validité du schéma d'inférence qu'on appelle « modus ponens », et la relation d'implication matérielle.[43]

La problématique peut être mise en forme de la manière suivante :

[43] Ryle (1950, 248) distingue l'inférence du « principe » de l'inférence duquel elle est « appliquée » : « Knowing 'if p, then q' is, then, rather like being in possession of a railway ticket. It is having a licence or warrant to make a journey from London to Oxford. (Knowing a variable hypothetical or 'law' is like having a season ticket.) As a person can have a ticket without actually travelling with it and without ever being in London or getting to Oxford, so a person can have an inference warrant without actually making any inferences and even without ever acquiring the premisses from which to make them. » (1950, 250). Traduction : « Savoir « si p alors q » est quelque chose comme être en possession d'un billet

PROOF

- Rien d'autre n'est nécessaire pour légitimer la progression, dans un argument valide, des prémisses à la conclusion, que la reconnaissance de cette validité, c'est-à-dire du caractère tautologique de l'implication correspondante.
- Ajouter cette implication comme prémisse produit un autre argument, dont la validité présuppose le caractère tautologique d'une autre implication correspondante.

Il est possible de tourner l'argument en question ouverte concernant la force normative des arguments logiquement valides : « qu'est-ce que nous entendons par la 'nécessité logique' d'un argument valide si elle est impuissante à forcer la tortue têtue d'accepter sa conclusion ? ».

Bien que la nature exacte de la 'faute' de la tortue soit vivement débattue, nous pouvons au moins dire qu'il s'agit, en partie au moins, du fait qu'elle prend l'implication formelle (qui rend l'inférence valide) pour une implication matérielle (que l'on doit rajouter comme prémisse supplémentaire) et confond alors langage-objet et métalangage. Cet embryon de réponse peut être développé de différentes manières : nous pouvons, par exemple, répondre à la tortue

- qu'il ne s'agit pas d'une *prémisse* supplémentaire, mais plutôt d'une condition cadre ;[44]
- que la règle d'inférence est *constitutive* de la pratique qu'elle gouverne, de sorte que son acceptation comme prémisse est inappropriée ;
- que la modalité en question n'est pas l'obligation, mais la *permission* : la validité d'une inférence logique nous permet de baser notre croyance en sa conclusion sur notre acceptation de ses prémisses. [45]

La réponse la plus communément donnée, cependant, n'est pas si candide que celle de la pauvre tortue. Cette dernière se trouve souvent accusée d'être ignorante de, ou incompétente, par rapport à la signification même de l'implication matérielle.

Un tel diagnostique est au moins suggéré (et peut-être même impliqué) par une théorie populaire concernant la compétence sémantique et conceptuelle qu'un locuteur standard du français exhibe par rapport à l'expression « si ...alors ⋯ » du langage ordinaire. Selon cette théorie, une telle compétence – ce qu'un locuteur doit savoir pour être jugé ‹en possession› du concept de l'implication – est constituée par sa disposition à inférer selon les règles d'inférence qui introduisent et éliminent le connecteur et en particulier de sa disposition à accepter les conclusions des inférences MP sur la base de son acceptation des prémisses.

Cette conception dite « inférentialiste » de la signification des connecteurs propositionnels, cependant, se heurte à des problèmes graves.

Un de ces problèmes a été soulevé par un article qu'un célèbre logicien américain, Vann McGee, a publié dans la revue « Journal of Philosophy », intitulé « A Counterexample to Modus Ponens »

de train. C'est avoir l'autorisation ou le pouvoir de faire le voyage de Londres à Oxford. (Savoir un principe ou une loi générale est comme avoir un abonnement.) Tout comme une personne peut avoir un ticket sans l'utiliser, et sans être jamais à Londres ou sans jamais arriver à Oxford, une personne peut être autorisée à faire une inférence sans jamais la faire et sans jamais acquérir les prémisses à partir desquelles elle pourrait la faire. »

[44] Il est ainsi possible d'argumenter que le problème soulevé par Lewis Carroll ne concerne qu'une position internaliste concernant le raisonnement logique, d'après laquelle nous devons être justifiés dans l'acceptation de l'implication correspondante pour être justifiés dans l'acceptation de la conclusion de l'argument. Une conception externaliste, par contre, peut donner une interprétation plus souple et libérale des conditions requises pour que quelqu'un reconnaisse la validité d'un argument : peut-être est-il suffisant de raisonner en accord avec une règle d'inférence valide, d'être disposé à souscrire à la règle dans les cas où elle est explicitement mentionnée ou de ressentir le caractère 'logique' de la progression d'une pensée à une autre.

[45] C'est peut-être le diagnostique de Ryle (1950) qui fait l'analogie avec les billets de train que l'on peut utiliser ou non.

PROOF

(1985). Le contre-exemple à la validité de MP qu'il a proposé est le suivant :

> Opinion polls taken just before the 1980 election showed the Republican Ronald Reagan decisively ahead of the Democrat Jimmy Carter, with the other Republican in the race, John Anderson, a distant third. Those apprised of the poll results believed, with good reason :
>
> > If a Republican wins the election, then if it's not Reagan who wins it will be Anderson.
> > A Republican will win the election.
>
> Yet they did not have reason to believe
>
> > If it's not Reagan who wins, it will be Anderson. (McGee, 1985, 462)[46]

Il donne une forme épistémologique à son diagnostique :

> These examples show that modus ponens is not an entirely reliable rule of inference. Sometimes the conclusion of an application of modus ponens is something we do not believe and should not believe, even though the premises are propositions we believe very properly. (McGee, 1985, 463)[47]

Comme McGee le dit, une conclusion plus forte est possible. Si l'inférence

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Si un républicain gagne, alors si Reagan ne gagne pas, alors Anderson gagne.}\\ \text{Un républicain gagne.}\end{array}}{\text{Si Reagan ne gagne pas, alors Anderson gagne.}} \tag{3.24}$$

nous amène de prémisses vraies à une conclusion fausse, même si les implications sont formalisées avec l'implication matérielle, alors l'implication matérielle n'est pas gouvernée par sa supposée règle d'introduction MP.

Une conclusion encore plus forte est possible : le simple fait que McGee, un éminent logicien, *doute* de la validité de MP pour le connecteur « → » montre que la compétence vis-à-vis de ce connecteur ou du concept qu'il exprime (que McGee possède certainement) ne peut pas présupposer la disposition à accepter les inférences du type MP (une disposition que McGee ne possède pas).

D'autres contre-exemples au MP ont été proposés dans la littérature. Certains concernent des affirmations probabilistes, comme la suivante : dans un sac se trouvent des balles blanches et des balles noires, à parts exactement égales. Deux tiers des balles blanches sont lumineuses (et aucune balle noire n'est lumineuse), et deux tiers des balles noires sont lourdes (et aucune balle blanche n'est lourde). Sur la base de cette description, les quatre affirmations suivantes semblent justifiées, concernant une balle en particulier que nous appelons « Pappon » :

[46] Nous traduisons comme suit : « Les sondages juste avant les élections [présidentielles aux États-Unis] en 1980 montraient une avance décisive du républicain Ronald Reagan sur le démocrate Jimmy Carter, avec l'autre républicain dans la course, John Anderson, distancié à la troisième place. Ceux qui étaient au courant de ces sondages avaient de bonnes raisons de croire :

> Si un républicain gagne les élections, alors si ce n'est pas Reagan qui gagne, ce sera Anderson.
> Un républicain gagnera les élections.

Mais il n'avaient aucune raison de croire

> Si ce n'est pas Reagan qui gagne, alors ce sera Anderson. »

[47] Traduction : « Ces exemples montrent que modus ponens n'est pas une règle d'inférence entièrement fiable. Il arrive que la conclusion d'une application du modus ponens soit quelque chose que nous ne croyons pas et ne devrions pas croire, même si les prémisses sont des propositions que nous croyons très proprement. »

PROOF

1. Pappon est soit blanc soit noir. ($p \vee q$)
2. Si Pappon est blanc, il est probable qu'il soit lumineux. ($p \to r$)
3. Si Pappon est noir, il est probable qu'il soit lourd. ($q \to s$)
4. Il n'est pas probable que Pappon soit lumineux et il n'est pas probable que Pappon soit lourd. ($\neg r \wedge \neg s$)

Avec deux applications de MP au dilemme constructif « $p \vee q$ », nous en dérivons une contradiction.[48]

Nous retrouvons des exemples similaires en logique déontique. Voici l'exemple des mineurs :[49]

> Dix mineurs sont bloqués dans une mine à deux puits, A et B, en danger de se noyer. Soit ils se trouvent tous dans A, soit tous dans B (nous ne le savons pas et considérons les deux possibilités également probables), et nous ne pouvons bloquer l'eau que dans un seul puits. Si nous bloquons le bon puits, nous sauvons tous les mineurs ; si nous bloquons le mauvais, ils meurent tous ; et si nous ne bloquons ni l'un ni l'autre, l'eau s'équilibre entre les deux puits, provoquant la mort d'un seul mineur qui ne sait pas nager.

Moralement, il semble clair que nous devrions ne rien faire (ne bloquer aucun puits), puisque peu importe quel puits nous bloquons, nous devons nous attendre (en moyenne) à la mort de cinq mineurs. Logiquement, cependant, la situation se présente différemment :

1. Les mineurs se trouvent soit dans le puits A, soit dans le puits B. ($p \vee q$)
2. Si les mineurs se trouvent dans le puits A, alors nous devrions bloquer le puits A. ($p \to r$)
3. Si les mineurs se trouvent dans le puits B, alors nous devrions bloquer le puits B. ($q \to s$).

Par le même raisonnement qu'auparavant, nous en déduisons la conclusion que soit nous devrions bloquer A soit nous devrions bloquer B ($r \vee s$).

Une question difficile et profonde soulevée par ces discussions est celle de la relation entre l'implication matérielle (et plus généralement les conditionnelles en langue naturelle) et la probabilité conditionnelle.[50] Sauf dans des cas très particuliers, il n'est pas possible de définir un connecteur conditionnel dont la probabilité est la même que la probabilité conditionnelle correspondante. En d'autres mots, nous ne pouvons pas expliquer la probabilité conditionnelle en termes de la probabilité d'un conditionnel.

La probabilité conditionnelle d'un évènement est sa probabilité *sous* quelques hypothèses auxiliaires, sa probabilité *étant donné* que certains autres évènements se produisent. Elle est d'une importance fondamentale, à la fois en métaphysique (vu qu'aucun évènement sauf peut-être le Big Bang n'a pas de prédécesseurs) et en épistémologie probabiliste (vu qu'aucune hypothèse ne peut être évaluée sans prendre pour acquises d'autres informations). Dans cette dernière utilisation, elle nous permet des prédictions. Supposons, par exemple, que la probabilité ‹ nue › qu'une personne donnée tousse est de 5% (nous utilisons l'opérateur P pour exprimer ce fait : $\mathrm{P}(p) = 0.05$). *Étant donné*, cependant, que cette personne a la grippe (q), la probabilité qu'elle tousse augmente à 75%, ce que nous exprimons comme probabilité conditionnelle comme suit : $\mathrm{P}(p|q) = 0.75$. Il existe une vive discussion sur la question de savoir s'il faut prendre la probabilité conditionnelle comme primitive (la probabilité nue

[48] Comme nous le verrons plus tard, il s'agit plus précisément d'un contre-exemple à la combinaison de la règle d'« élimination de la disjonction » ($\vee\mathbf{E}$) et de la règle d'« introduction de la disjonction » ($\vee\mathbf{I}$).

[49] Kolodny and MacFarlane (2010) l'attribuent à Parfit (1988) qui à son tour l'attribue à Regan (1980, 264, n. 1).

[50] Le livre de Adams « The Logic of Conditionals. An Application of Probability to Deductive Logic » (1975) et l'article de David Lewis « Probabilities of Conditionals and Conditional Probabilities » (1976) ont initié et fortement influencé ce débat.

PROOF

sera alors la conditionalisation sur une tautologie) ou la définir comme dans la théorie axiomatique de probabilité de Kolmogorov :

$$\mathrm{P}(p|q) \;:=\; \frac{\mathrm{P}(p\wedge q)}{\mathrm{P}(q)} \tag{3.25}$$

Dans l'interprétation bayésienne de la probabilité, la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(p|q)$ exprime l'incorporation d'une nouvelle information (que q) en vue de la probabilité que p : ayant appris que q, nous devrions tenir compte de cette nouvelle information dans notre estimation de la probabilité que p et alors lui attribuer la probabilité conditionnelle.

Pour les probabilités conditionnelles, il est souvent très important de distinguer la condition du conditionné : en général $\mathrm{P}(p|q)$, n'est pas du tout la même chose que $\mathrm{P}(q|p)$. Supposons que nous avons un test fiable pour la dengue : P(personne A a été testée positive pour la dengue | personne A a la dengue) = 0.97. La fiabilité d'un tel test signifie qu'il y aura peu de ‹ faux négatifs › : un résultat positif est fiable parce qu'il est très rare (que dans 3% des cas) qu'une personne ayant la dengue ne soit pas diagnostiquée positivement au test de la dengue. Autrement dit, il n'y a que peu d'infectés qui passent inaperçus au test. L'existence d'un tel test est très bien compatible avec un nombre assez élevé de ‹ faux positifs › : en effet, il est souvent raisonnable d'utiliser un test ‹ sur-sensitif ›, qui produit des résultats positifs aussi dans quelques cas où la personne est en effet saine. Nous pouvons alors avoir P(personne A a la dengue | personne A a été testée positive pour la dengue) = 0.5, c'est-à-dire avoir une situation où un résultat positif d'un premier test ne nous indique qu'une probabilité de 50% que la personne en question ait réellement attrapé la dengue – d'autres tests, plus compliqués, seront alors nécessaires. Autrement dit, le test crée de fausses alarmes, mais au vu de la probabilité $\mathrm{P}(p|q)$, la faible probabilité $\mathrm{P}(q|p)$ est moins indésirable : nous préférons avoir plus d'alarmes couvrant 97 % des cas d'infections, plutôt que d'avoir moins d'alarmes et que plus de personnes infectées passent inaperçues.[51]

Il existe, cependant, une relation mathématique très importante entre les deux types de probabilités conditionnelles, appelée le « théorème de Bayes » :

$$\mathrm{P}(p|q) \;:=\; \frac{\mathrm{P}(p)\cdot\mathrm{P}(q|p)}{\mathrm{P}(q))} \tag{3.26}$$

Ce fameux théorème dit que la proportion entre les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}(p|q)$ et $\mathrm{P}(q|p)$ est la même que la proportion entre $\mathrm{P}(p)$ et $\mathrm{P}(q)$.

Dans beaucoup de cas, nous ne pouvons pas déterminer directement la probabilité inconditionnelle de la condition $\mathrm{P}(q)$ – dans le cas où il s'agit d'un résultat de test positif, par exemple, elle devrait être calculée sur toute la population, testée ou non. Parce que cette probabilité $\mathrm{P}(q)$ est la somme de la probabilité de « q » dans le cas que p et la probabilité de « q » dans le cas que $\neg p$: $\mathrm{P}(q) = \mathrm{P}(q\wedge p)+\mathrm{P}(q\wedge\neg p)$ et parce que ces deux dernières sont égales à $\mathrm{P}(p)\cdot\mathrm{P}(q|p)$ et à $\mathrm{P}(\neg p)\cdot\mathrm{P}(q|\neg p)$

[51] Nous devons être prudents de ne pas sur-généraliser ce diagnostique. Dans notre tradition légale, par exemple, la situation est exactement inverse : il est bien pire de punir des innocents (faux positif) que de ne pas punir les coupables (faux négatif).
ll a même été argumenté que la faute de privilégier les faux négatifs sur les faux positifs (la faute de ne pas comprendre que c'est pire de dire quelque chose de faux (faux positif) que de ne pas dire quelque chose de vrai (faux négatif)) est le problème méthodologique fondamental de la science expérimentale contemporaine. Cf. les articles dans *The Economist* en octobre 2013 (https://www.economist.com/leaders/2013/10/21/how-science-goes-wrong et https://www.economist.com/briefing/2013/10/18/trouble-at-the-lab) et le blog https://replicationindex.com.

PROOF

respectivement, grâce à la définition de la probabilité conditionnelle, nous avons

$$\mathrm{P}(p|q) := \frac{\mathrm{P}(p)\cdot\mathrm{P}(q|p)}{\mathrm{P}(p)\cdot\mathrm{P}(q|p) + \mathrm{P}(\neg p)\cdot\mathrm{P}(q|\neg p)} \tag{3.27}$$

Dans notre exemple, cette formule nous permet de calculer la probabilité que quelqu'un testé positivement est réellement malade (P(dengue | positif)) sur la base de la probabilité de la maladie dans la population testée ($\mathrm{P}(d) = 1\%$) :

$$\mathrm{P}(d|+) = \frac{\mathrm{P}(d)\cdot\mathrm{P}(+|d)}{\mathrm{P}(d)\cdot\mathrm{P}(+|d) \;+\; \mathrm{P}(\neg d)\cdot\mathrm{P}(+|\neg d)}$$
$$= \frac{0.1\cdots 0.97}{0.1\cdot 0.97 \;+\; 0.9\cdot 0.03} = \frac{0.097}{0.097 \;+\; 0.027} = \frac{0.097}{0.124} = 0.78226$$

Une personne testée positivement aura donc une probabilité de plus de 78% de réellement être malade.

3.7 La conséquence logique

Nous pouvons maintenant noter plusieurs propriétés de la relation de conséquence logique qu'on a appelée « $\vDash$ ».[52]

Premièrement, remarquons qu'une assertion de conséquence logique « $\phi \vDash \psi$ » revient à dire que toute attribution de valeurs de vérité qui rend ϕ vrai rend également ψ vrai. Ainsi, la conséquence logique est affaire de validité, puisque selon toute possibilité logique, si ϕ est vrai, alors ψ est vrai également. Cette propriété ne la distingue cependant pas de l'implication matérielle, et il nous faut donc continuer notre investigation pour l'en différencier. Pour cela, il nous faut prendre au sérieux le fait que « $\vDash$ » dénote une *relation* qui relie des phrases, alors que « $\rightarrow$ » est un connecteur qui nous sert à faire à partir de phrases simples d'autres phrases plus complexes.

En général, les arguments peuvent avoir plusieurs prémisses, mais n'ont qu'une seule conclusion.[53] Comme de coutume en mathématiques, nous tenons compte de cette multiplicité en considérant les prémisses comme un ensemble et la conséquence logique comme une relation entre un ensemble de prémisses et une conclusion.

En général, les relations peuvent posséder différents types de propriétés. Par rapport à la relation de conséquence logique, « $\vDash$ », nous remarquons, tout d'abord, que l'ordre des prémisses n'est pas pertinent pour évaluer un argument comme valide ou non valide. Ces prémisses sont donc permutables :

$$\{p_1, p_2, \ldots\; p_n\} \vDash r \quad\Longrightarrow\quad \{p_2, p_3, p_1, \ldots\; p_n, \ldots\; p_7, \ldots\} \vDash r \tag{perm}$$

Ce n'est pas en changeant l'ordre des prémisses que l'on peut rendre non valide un argument valide. Cette propriété de *permutabilité* de la relation de conséquence logique nous apprend que les pouvoirs inférentiels d'une multitude de prémisses restent inchangés sous des permutations de cette multitude.[54]

[52] Pour faciliter l'exposition, nous ne considérons ici que des arguments qui n'ont qu'un nombre fini de prémisses. Mais les propriétés de la validité en question valent aussi pour des arguments qui en ont un nombre infini. Nous reviendrons à ces propriétés de relations à la p. 321 au ch. 15.

[53] Ceci n'est pas vrai de toutes les logiques, comme il existe des logiques à conclusions multiples.

[54] Comme les ensembles sont insensibles à l'ordre de leurs éléments, cette caractéristique justifie notre choix de modélisation de la relation de conséquence logique comme relation entre un ensemble de phrases et une phrase.

PROOF

En second lieu, la conséquence logique est une relation *monotone* :

$$\{p_1, p_2, \ldots\ p_n\} \vDash r \quad \Longrightarrow \quad \{p_1, p_2, \ldots\ p_n, q_1, q_2, \ldots\ q_m\} \vDash r \qquad \text{(mon)}$$

Si vous tenez un argument pour valide, votre interlocuteur ne peut pas vous contredire en lui *ajoutant* une prémisse supplémentaire. Autrement dit, ajouter des prémisses $\{q_1, q_2, \ldots\ q_m\}$ dans l'exemple ci-dessus ne peut pas invalider la conséquence sémantique obtenue avec les prémisses $\{p_1, p_2, \ldots\ p_n\}$. Un tel ajout est appelé « affaiblissement » de l'inférence qui pourtant reste valide. (Dans le cas où l'on ajoute une prémisse qui contredit une prémisse déjà présente, « r » s'ensuit parce que n'importe quelle phrase est une conséquence logique d'une contradiction, c'est-à-dire par le schéma d'inférence appelé « ex falso quodlibet ».)[55] Cette propriété s'appelle « monotonie » parce qu'elle signifie que la fonction qui prend comme argument un certain ensemble de prémisses et donne comme valeur leurs conséquences est monotone dans le sens mathématique de ce terme : représentée comme courbe, la ligne ne baissera pas.

La validité est *transitive* :

$$\{p_1, \ldots\ p_n\} \vDash r \,\&\, \{r, q_1, \ldots\ q_n\} \vDash s \implies \{p_1, \ldots\ p_n, q_1, \ldots\ q_m\} \vDash s \qquad \text{(trans)}$$

Si « r » s'ensuit des prémisses « p_1 », « p_2 », etc. et si « s » s'ensuit de cette prémisse intermédiaire « r » et des prémisses « q_1 », « q_2 », etc., alors on peut directement inférer « s » (sans avoir besoin d'inférer d'abord « r » de « p_1 », « p_2 », etc.).[56]

La validité est *réflexive* :[57]

$$\{p_1, p_2, \ldots\ p_n\} \vDash p_i \qquad \text{(pour toute phrase } p_i \in \{p_1, p_2, \ldots\ p_n\}) \qquad \text{(refl)}$$

De « tous les humains sont mortels, Socrate est un humain », il s'ensuit que Socrate est mortel, mais également que tous les humains sont mortels et que Socrate est un humain.[58]

Points à retenir

1. Il faut distinguer différents niveaux de langage. « Désignation », « vérité » et « validité » sont des expressions qui appartiennent au métalangage.
2. Deux phrases sont en relation de conséquence logique si et seulement si il n'est pas logiquement possible que la première soit vraie et la deuxième fausse ; ssi il y a une inférence valide de l'une à l'autre.
3. Pour rendre compte de la généralité des lois logiques, il convient d'introduire des noms « ϕ », « ψ », etc. pour des phrases arbitraires.

[55] La règle d'inférence « ex falso quodlibet » correspond à la tautologie « $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ » dont nous parlerons à la p. 121.

[56] On obtient une formulation plus facilement reconnaissable comme celle d'un principe de transitivité si on assume qu'il n'y a pas de prémisses supplémentaires « q » et une seule prémisse initiale « p » : $p \vDash r \,\&\, r \vDash s \Longrightarrow p \vDash s$.

[57] Nous utilisons ici le symbole « $\in$ » pour la relation d'appartenance à un ensemble. Cf. la section 15.1 pour une discussion plus approfondie.

[58] Si l'ensemble des prémisses ne contient qu'un seul membre, on a une inférence triviale (mais valide !) : « Il pleut ; donc, il pleut. » Ceci ne veut pas dire que la logique justifie le raisonnement circulaire : la logique ne nous montre pas qu'il pleut, mais qu'il pleut *s'il pleut*.

PROOF

4. Pour dire qu'une loi logique s'applique à toutes les phrases d'une certaine forme, il faut utiliser les crochets de Quine. « $\ulcorner \phi \wedge \neg \psi \urcorner$ » est un nom pour une expression qui est composée de guillemets, de ϕ, du signe de conjonction « $\wedge$ », de « $\neg$ », de ψ et encore de guillemets.
5. Une inférence qui a « p » comme prémisse et « q » comme conclusion est valide si et seulement si « $p \rightarrow q$ » est une tautologie.
6. Une tautologie peut être inférée de n'importe quelle prémisse, et on peut inférer n'importe quelle conclusion d'une contradiction.
7. Mis à part la conséquence logique (ou : subalternation), il y a d'autres relations métalinguistiques entre des phrases : l'équivalence logique (mêmes tables de vérité), la contradiction (exactement une est vraie), la contrariété (pas les deux vraies), la sub-contrariété (pas les deux fausses).
8. La relation de conséquence logique est monotone, transitive, réflexive et ses prémisses sont permutables.
9. Les lois de Morgan :

$$\ulcorner \neg(\phi \wedge \psi) \urcorner \iff \ulcorner \neg\phi \vee \neg\psi \urcorner$$
$$\ulcorner \neg(\phi \vee \psi) \urcorner \iff \ulcorner \neg\phi \wedge \neg\psi \urcorner$$

10. Les lois de distributivité :

$$\ulcorner \phi \vee (\psi \wedge \chi) \urcorner \iff \ulcorner (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi) \urcorner$$
$$\ulcorner \phi \wedge (\psi \vee \chi) \urcorner \iff \ulcorner (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi) \urcorner$$

PROOF

4 La méthode axiomatique

4.1 Déductibilité syntaxique vs validité sémantique

En utilisant les tables de vérité pour déterminer la validité ou la non-validité d'un argument, nous avons supposé que les phrases sont vraies ou fausses, c'est-à-dire qu'elles possèdent l'une ou l'autre de ces valeurs de vérité (mais pas les deux). La méthode des tables de vérité est une méthode *sémantique* précisément parce qu'il est fait référence à des propriétés (la vérité et la fausseté) qui sont ‹ extérieures › à la phrase, au sens où ces propriétés supposent l'existence d'un monde distinct de la phrase, un monde sur lequel ‹ porte › la phrase.

Il existe toutefois une autre méthode, dite *syntaxique*, permettant de tester la validité d'un argument, qui ne suppose pas d'emblée que les phrases aient une valeur de vérité. L'idée centrale consiste à essayer de *dériver* ou de *déduire* la conclusion de l'argument en partant de ses prémisses et en procédant *pas à pas*, au moyen de règles déterminées, jusqu'à sa conclusion.

Pour mieux comprendre cette méthode de *dérivation*, il est utile de considérer une métaphore empruntée aux échecs : les prémisses constituent les positions initiales des pièces sur l'échiquier ; les règles de dérivation correspondent aux règles qui permettent de déplacer les pièces et de poursuivre le jeu, et la conclusion correspond aux positions des pièces sur l'échiquier après un certain temps de jeu. Les règles des échecs sont ‹ syntaxiques › parce que vous n'avez pas besoin de savoir que telle pièce est le roi, ou telle autre le fou, pour apprendre à les manipuler.[1]

Par conséquent, nous pouvons distinguer trois degrés d'abstraction linguistique qui correspondent à différents niveaux de formalisation :

1.	« La terre tourne »	signification	vérité
2.	« p »	–	vérité
3.	ϕ	–	–

Le premier niveau correspond au langage naturel, dans lequel les phrases sont douées de sens et ont des conditions de vérité. Le second niveau correspond aux phrases sur lesquelles porte la méthode sémantique. Les phrases atomiques de ce niveau sont des abréviations de phrases du langage naturel (du niveau 1). De telles abréviations retirent la signification déterminée aux phrases de niveau 2 (considérant les phrases abrégées comme arbitraires) et leur sémantique est alors réduite à leur valeur de vérité. C'est à ce niveau-là qu'on examine les schémas (‹ squelettes ›) d'inférences dont on établit la validité par des tables de vérité. Le troisième niveau fait abstraction non seulement de la signification des phrases, mais également de leur valeur de vérité. Il correspond aux phrases sur lesquelles porte la méthode syntaxique, qui revient à considérer ces phrases comme de purs symboles sans signification

[1] En l'occurrence, l'interprétation ‹ monarchique › des échecs est parfaitement conventionnelle.

PROOF

déterminée et sans valeur de vérité particulière. De plus, le niveau (1) est formalisé par le niveau (2), qui est, à son tour, formalisé par le niveau (3).

Qu'une phrase puisse ou non être dérivée d'autres phrases est une question qui concerne uniquement la syntaxe : il s'agit de la question de savoir s'il est possible de manipuler les symboles représentant les phrases appelées « prémisses », selon certaines règles purement structurelles, de manière à arriver à des symboles représentant une autre phrase, appelée « conclusion ». Cette question est du même ordre que celle de savoir si, selon les règles du jeu, telle ou telle position peut être atteinte par telle ou telle pièce d'échec se trouvant dans telle ou telle position. Bien qu'elle admette en principe une réponse mécanique, une telle réponse (comme c'est le cas pour les échecs) est souvent loin d'être triviale : souvent, il faut faire preuve d'ingéniosité.

Nous utiliserons le symbole « $\vdash$ » pour signifier la conséquence au sens syntaxique, c'est-à-dire la *déductibilité* (ou dérivabilité), et établirons plusieurs correspondances entre cette relation de conséquence logique syntaxique (dérivabilité) $\vdash$ et la relation de conséquence logique sémantique (validité) $\models$. Nous devons au préalable fournir une définition rigoureuse du langage formel de la logique des phrases.

4.2 Le langage de la logique propositionnelle

Pour avoir une idée claire de ce que sera la syntaxe de notre logique propositionnelle, nous devons d'abord définir son langage formel de manière plus rigoureuse que précédemment (cf. p. 31) :

Définition 2 (Alphabet). *L'*alphabet *du langage $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle classique se compose des symboles suivants :*

A1 *des phrases atomiques « p_0 », « p_1 », « p_2 » ... (une infinité dénombrable);*[2]

A2 *les connecteurs « $\neg \ldots$ » (« il n'est pas le cas que »), « ... $\wedge \cdots$ » (« et »), « ... $\vee \cdots$ » (« ou »), « ... $\rightarrow \cdots$ » (« si-alors ») et « ... $\leftrightarrow \cdots$ » (« ssi »);*

A3 *des symboles auxiliaires : parenthèses.*

Au lieu de « p_0 », nous écrivons parfois « p », pour « p_1 » « q », « r » pour « p_2 », etc.

Cette définition (2) détermine l'alphabet (l'ensemble des symboles) du langage $\mathcal{L}$. Elle ne définit cependant pas les règles de formation internes à ce langage. Autrement dit, elle nous donne le vocabulaire, mais pas la grammaire. Afin de définir entièrement le langage $\mathcal{L}$, il nous faut donc définir ces règles de formation qui instaurent une différence entre formules bien formées (selon les règles) et les combinaisons de lettres mal formées (contre les règles)

Définition 3 (Formules). *Une* formule propositionnelle *est définie de manière récursive comme suit :*

B1 *Toute phrase atomique « p_i » (pour n'importe quel $i \in \mathbb{N}$) est une formule propositionnelle.*[3]

[2] Les phrases atomiques sont souvent appelées « phrases variables », pour indiquer qu'elles sont considérées comme variables dans les schémas d'inférence. Puisque nous introduirons plus tard (à la p. 204 dans le chapitre 8) les variables (souvent appelées « variables individuelles ») de la logique des prédicats, qui sont d'un autre type (elles peuvent, par exemple, être liées par des quantificateurs, etc.), j'évite cette dénomination trompeuse, en faveur de notre usage de « phrase schématique »(cf. p 68). La signification exacte de « infinité dénombrable » est expliquée à la p. 306 du chapitre 13 ; pour l'instant il suffit de savoir qu'il s'agit du nombre des nombres naturels.

[3] « $\mathbb{N}$ » dénote ici l'ensemble des nombres naturels (cf. sct. 15.3).

PROOF

B2 *Si ϕ est une formule propositionnelle, alors $\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$ est une formule propositionnelle.*

B3 *Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \vee \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \to \psi)\urcorner$ et $\ulcorner(\phi \leftrightarrow \psi)\urcorner$ sont des formules propositionnelles.*

Comme au préalable, nous utilisons des minuscules grecques « ϕ », « ψ », « χ », … pour les noms des formules arbitraires (pas nécessairement atomiques). Il s'agit de noms métalinguistiques : « ϕ » ne fait pas partie de $\mathcal{L}$, notre langage-objet, mais nous sert à parler *de* ses formules. L'ensemble de toutes les formules du langage $\mathcal{L}$ est dénoté par « $\mathsf{Form}(\mathcal{L})$ ». Les demi-crochets de Quine sont utilisés pour parler de toutes les formules ayant une forme particulière. « $\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$ », par exemple, est un nom pour une formule arbitraire qui consiste en une parenthèse, un signe de négation, une phrase (simple ou complexe) et encore une parenthèse : « $(\neg p_1)$ », mais aussi « $(\neg\neg p_1)$ » et « $(\neg(p_0 \wedge p_1))$ » en sont des exemples.[4]

Pour rendre nos formules plus faciles à lire, nous adoptons les conventions suivantes :

- « $\neg$ » relie son argument plus fortement que « $\wedge$ » et « $\vee$ » : quand il précède une seule proposition, le connecteur « $\neg$ » sera donc écrit sans parenthèses. Au lieu de « $\neg(p) \wedge \neg(p \vee q)$ », nous écrivons donc « $\neg p \wedge \neg(p \vee q)$ ».
- Pour des occurrences répétées de « $\wedge$ » et « $\vee$ », on adoptera la convention « groupement à gauche » : les parenthèses qui se ferment vers la gauche sont implicites. Nous écrivons donc « $(p \wedge q \wedge r)$ » pour « $((p \wedge q) \wedge r)$ ».
- Les parenthèses extérieures (qui ne sont ni précédées ni suivies d'un connecteur) sont implicites. Au lieu de « $(p \wedge q)$ », nous écrivons « $p \wedge q$ ».

On peut omettre davantage de parenthèses en donnant des priorités aux connecteurs, dans l'ordre suivant : « $\leftrightarrow$ », « $\to$ », « $\wedge$ », « $\vee$ », « $\neg$ ». Ainsi, « $\neg p \wedge q$ » correspond à « $(\neg p) \wedge q$ », « $(p \vee q \to r) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$ » à « $((p \vee q) \to r)) \leftrightarrow (((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee r)$ », etc.

Nous avons vu (à la p. 27) que la logique n'est point concernée avec la vérité de ses prémisses, mais ne s'occupe que de la transmission de la vérité, à savoir la validité. Nous pouvons appeler l'ensemble de ses prémisses, souvent tacites en raisonnement ordinaire mais rendues explicites en logique une « théorie » :[5]

Définition 4 (Théories)**.** *Une* théorie *est un ensemble (fini ou infini) de formules propositionnelles.*

Nous abrégeons des théories par « Th_1 », « Th_2 », etc. Pour ne parler que d'une seule théorie, nous utilisons « Th ». Notons qu'une théorie Th peut avoir un seul membre, p. ex. $\mathsf{Th} = \{\phi\}$, ou être vide $\mathsf{Th} = \varnothing$.[6]

Notons que ces définitions sont purement syntaxiques : nous n'avons fait aucune référence aux significations ou valeurs de vérité des formules propositionnelles. Nous avons seulement considéré leurs formes et la manière dont elles sont construites à partir des phrases simples (phrases atomiques).

[4] De manière encore plus mathématique, la définition (3) stipule que l'ensemble des formules bien formées $\mathsf{Form}(\mathcal{L})$ est « fermé » sous certaines opérations, à savoir la négation, la conjonction, la disjonction et l'implication : si ϕ et ψ appartiennent à $\mathsf{Form}(\mathcal{L})$, alors il en va de même pour toutes les formules que nous pouvons obtenir de ϕ et ψ par les opérations de négation, conjonction, disjonction et implication (cf. p. 124 pour une définition de « clôture déductive »).

[5] Plus tard (au ch. 6), nous ferons connaissance d'une méthode de preuve particulièrement adaptée au raisonnement à partir de théories : la déduction naturelle.

[6] « $\varnothing$ » dénote ici l'ensemble qui ne contient pas de membres, l'ensemble vide. Il n'y a qu'un seul ensemble vide (cf. sct. 15.1).

PROOF

Un avantage d'une définition syntaxique rigoureuse de notre langue est qu'elle nous permet de revenir sur la question de l'interdéfinissabilité des connecteurs. Nous avons déjà vu (à la p. 75) de quelle manière nous pouvions définir « $\wedge$ » en termes de « $\vee$ » et de « $\neg$ » grâce aux lois de Morgan. Nous allons à présent avoir un résultat plus radical : il est possible de définir *tous* les connecteurs binaires à partir d'un seul. Mais pour y parvenir, nous devons d'abord élargir (temporairement) notre langage.

Considérons le connecteur « $|$ », appelé « barre de Sheffer » (« Sheffer's stroke »). Il est défini par la table de vérité suivante :

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi\vert\psi\urcorner$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

On voit que $\ulcorner\phi|\psi\urcorner$ représente la ‹ non-conjonction › de ϕ et de ψ ; $\ulcorner\phi|\psi\urcorner$ veut dire que ϕ est incompatible avec ψ, et qu'au moins l'une de ces deux formules (peut-être les deux) est fausse (« pas les deux »). « $|$ » correspond donc, comme signe du langage-objet, à la relation métalinguistique de contrariété ; $\ulcorner\phi|\psi\urcorner$ est équivalente (logiquement) à $\ulcorner\neg\phi \vee \neg\psi\urcorner$ et à $\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$.

Ajoutons « $|$ » à notre langue de la manière suivante.

Définition 5. *Soit $\mathcal{L}$ la langue définie par les définitions (2) et (3). Nous construisons une langue $\mathcal{L}^*$ en ajoutant à (2) la clause*

- *« $|$ » (« est incompatible avec »)*

et en ajoutant à (3) la clause

- *Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi|\psi)\urcorner$ est une formule propositionnelle.*

Nous pouvons montrer que dans $\mathcal{L}^*$, tous les autres connecteurs sont définissables à partir de la barre de Sheffer « $|$ » :

$$\begin{aligned}
\ulcorner\neg\phi\urcorner &:\Longleftrightarrow \ulcorner\phi|\phi\urcorner \\
\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner &:\Longleftrightarrow \ulcorner(\phi|\psi)|(\phi|\psi)\urcorner \\
\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner &:\Longleftrightarrow \ulcorner(\phi|\phi)|(\psi|\psi)\urcorner \\
\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner &:\Longleftrightarrow \ulcorner(\phi|(\psi|\psi))\urcorner \\
\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner &:\Longleftrightarrow \ulcorner((\phi|(\psi|\psi))\,|\,((\phi|\phi)|\psi))\ \mid\ ((\psi|(\phi|\phi))\,|\,((\psi|\psi)|\phi))\urcorner
\end{aligned}$$

Ces définitions peuvent être dites « correctes » dans le sens qu'il s'agit réellement d'équivalences logiques ; c'est-à-dire que les formules à droite du signe de définition ont la même table de vérité que celles de gauche, ce qui garantit leur intersubstituabilité dans tous les contextes extensionnels.[7] Ce

[7] En fait, il suffit de montrer la définissabilité de « $\neg$ » et de « $\vee$ » en termes de « $|$ ». La définissabilité des autres s'ensuit

PROOF

que nous avons dit de la barre de Sheffer vaut également du connecteur ↓ (ni ..., ni ...) dont nous reparlerons dans la série d'exercice 4 (cf. aussi la p. 55) : ces deux connecteurs sont les seuls binaires qui permettent la définition de tous les autres.[8]

4.3 Le paradoxe de Russell

La logique classique moderne, telle qu'elle est enseignée dans ce cours, repose sur les travaux de *Gottlob Frege* (1848–1925), mathématicien et philosophe allemand de la deuxième moitié du 19ème siècle. Frege a observé que les raisonnements des mathématiciens de son temps étaient ‹intuitifs› dans le sens où ils utilisaient des connecteurs ‹logiques› («donc», «il s'ensuit que», «par conséquent», etc.) pour marquer les différentes étapes de leurs raisonnements sans pour autant être capables d'en donner une justification méticuleuse. Ils sautaient, pour ainsi dire, des étapes. Le problème que pose cette méthode de raccourcis, bien qu'elle soit certainement pratique dans l'enseignement des mathématiques et inévitable dans la vie mathématique de tous les jours, est qu'il est très difficile, lorsqu'une preuve n'aboutit pas ou qu'un résultat paradoxal est obtenu, d'identifier l'endroit exact où le raisonnement prend la mauvaise route et où l'erreur a été commise. En insistant sur le fait que les raisonnements en mathématiques devaient être sans lacunes, tels que chaque assertion s'ensuive logiquement des précédentes, Frege a développé, dans son idéographie (1879 / 1999), ce qui est aujourd'hui considéré comme la logique classique (composée de la logique propositionnelle et celle des prédicats).

Plus important encore, il fut le premier à développer une notion purement syntaxique, mécanique ou algorithmique de preuve, de définir ce qu'est un calcul est une axiomatisation d'une certaine théorie.

Frege n'était pas le seul, mais le plus méticuleux, des pionniers des mathématiques modernes. L'italien Giuseppe Peano (1858–1932) et l'américain C.S. Peirce (1839–1914) en sont d'autres.[9] Frege

alors comme suit :

$$
\begin{aligned}
\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner \quad &\Longleftrightarrow \quad \ulcorner \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \\
&:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner (((\phi|\phi)|(\psi|\psi))|((\phi|\phi)|(\psi|\psi))) \mid (((\phi|\phi)|(\psi|\psi))|((\phi|\phi)|(\psi|\psi)))\urcorner \\
\ulcorner \phi \to \psi \urcorner \quad &\Longleftrightarrow \quad \ulcorner \neg(\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \\
&:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \mid ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi)))\urcorner \\
\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner \quad &\Longleftrightarrow \quad \ulcorner (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)\urcorner \\
&:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner (\ ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \mid ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi)))\ ) \mid \\
&\qquad\quad\ ((\psi|(\phi|\phi))|(\psi|(\phi|\phi))) \mid ((\psi|(\phi|\phi))|(\psi|(\phi|\phi)))\quad) \quad \mid \\
&\qquad\quad (\ ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \mid ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi)))\ ) \mid \\
&\qquad\quad\ ((\psi|(\phi|\phi))|(\psi|(\phi|\phi))) \mid ((\psi|(\phi|\phi))|(\psi|(\phi|\phi)))\quad)\urcorner
\end{aligned}
$$

Il est clair que les équivalences non abrégées pour l'implication et l'équivalence sont parfaitement illisibles et qu'une logique qui n'opérerait qu'avec la barre de Sheffer serait impossible à pratiquer (et difficile à enseigner). Son importance réside dans le fait que l'on puisse définir la négation et la conjonction à partir de «|» – la définissabilité des autres connecteurs s'ensuit, puisque tous les autres connecteurs sont eux-mêmes définissables à partir de «¬» et «∧».

[8] Même avant Sheffer (1913), c'était Charles Sanders Peirce qui avait découvert ce fait que l'on appelle la «complétude fonctionnelle» de «|» et de «↓» en

[9] Frege avait, bien sûr, d'autres prédécesseurs, notamment les deux mathématiciens anglais, George Boole (1815–1864), l'inventeur de l'algèbre booléenne (cf. p. 186), et Auguste de Morgan (1806–1871), qui a été le premier à remarquer

PROOF

utilisait une notation bi-dimensionnelle qui, bien qu'elle ait eu certains avantages, s'est avérée trop compliquée par la suite. Pour une implication matérielle « $p \to q$ », Frege écrivait, par exemple, la formule suivante :

La formule commence par un trait vertical, appelé « trait de jugement » (« Urteilsstrich »), qui signifie que l'implication est non seulement entretenue ou supposée, mais également affirmée.[10] Le trait horizontal suivant est appelé « trait de contenu » (« Inhaltsstrich »). Il indique que la formule qui suit exprime une phrase sensée, à savoir un contenu susceptible d'être soit vrai, soit faux.

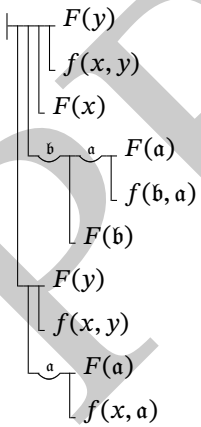
Le trait vertical suivant indique l'implication matérielle, suivi d'un autre trait de contenu et la lettre « p », ayant, chez Frege, une valeur de vérité comme référence et une pensée comme sens (cf. p. 37).

Mis à part la notation bi-dimensionnelle de Frege,[11] il y a la notation ‹ algébrique › de George Boole (où la négation « $\neg p$ » est exprimée par une barre « $\overline{p}$ »)[12]
et la notation dite « polonaise » de Jan Łukasiewicz et l'école polonaise de logique, qui permet de sup-

que la logique d'Aristote était incapable de justifier les inférences basées sur des propriétés de relations (par exemple l'inférence de « Sam aime Marie » à « Sam aime quelqu'un » et à « Marie est aimée par quelqu'un », cf. p. 209) et en a développé une logique. S'inspirant du raisonnement algébrique, Boole a classifié les connecteurs propositionnels d'après leurs effets sur des ensembles. Cette « algèbre de la logique » a été perfectionnée par Jevons, Venn, Schröder et Whitehead (cf. p. 187 pour en savoir plus).

[10] En insistant sur la pertinence de la notion de jugement en logique, Frege suivait la tradition. Wittgenstein, dans le *Tractatus*, a accusé le trait de jugement d'introduire un élément étranger au formalisme : d'après lui, la logique ne s'occupe point de la question de savoir si les phrases sont affirmées ou non. Frege avait argumenté qu'il était nécessaire de considérer toutes les prémisses comme affirmées pour distinguer le discours scientifique (qui cherche à découvrir des vérités, y inclus les vérités logiques) du discours tenu sur scène. Wittgenstein (1921, §4.442) a avancé que les acteurs, pour convaincre leur public, utilisaient eux aussi le trait de jugement.

[11] Pour un exemple plus compliqué de la logique des prédicats (théorème 71 de la *Begriffsschrift*) :



Dans notre notation (future), ceci est équivalent à la formule « $(\forall a(f(x,a) \to F(a)) \to (f(x,y) \to F(y))) \to (\forall b(F(b) \to \forall a(f(b,a) \to F(a))) \to (F(x) \to (f(x,y) \to F(y))))$ ».

[12] Cette notation permet une formulation très élégante des lois de Morgan comme ‹ loi d'élimination des barres doubles › :

$$\ulcorner(\overline{\phi \wedge \psi})\urcorner \iff \ulcorner(\overline{\overline{\phi} \vee \overline{\psi}})\urcorner$$
$$\ulcorner(\overline{\phi \vee \psi})\urcorner \iff \ulcorner(\overline{\overline{\phi} \wedge \overline{\psi}})\urcorner$$

PROOF

primer toute ponctuation sans risquer l'équivoque.[13] Aujourd'hui on utilise généralement un composé de la notation de Peano (qui contenait un simple point « . » pour la conjonction) et celle des logiciens et philosophes anglais Bertrand Russell et Alfred North Whitehead (qui utilisaient « ⊃ » pour l'implication matérielle et « ≡ » pour l'équivalence matérielle ; la flèche « → » vient de Hilbert).

Même si Frege a été le philosophe-mathématicien le plus important à sortir la logique du dogmatisme aristotélicien et à la libérer du paradigme stérile de la syllogistique qui l'avait dominée pendant plus de deux mille ans, ses travaux n'ont pas été reconnus de son vivant.[14] C'est l'œuvre volumineuse des *Principia Mathematica* de Russell et Whitehead (Whitehead and Russell, 1910) qui mit sa contribution en lumière.

Dès le début du développement d'une logique capable de formaliser les raisonnements des mathématiciens, elle a été utilisée pour l'axiomatisation de l'arithmétique (cf. Frege (1884) / 1969 et Dedekind (1888)). Les deux volumes des *Grundgesetze* (« lois fondamentales de l'arithmétique »), 1893 et 1903) ont achevé ce travail. Ce qui n'était jusqu'à la fin du 19ème siècle qu'une étude de certaines entités élusives qu'on appelait des « nombres » est alors devenu une science, fondée sur une base solide. Il était finalement possible de donner des réponses à des questions aussi fondamentales que « qu'est-ce qu'un nombre ? », « sous quelles conditions « n » (p. ex. : « 2+2 ») et « m » (p. ex. : « 4 ») dénotent-ils le même nombre ? », « en quel sens les nombres naturels font-ils partie des nombres rationnels ? », etc.

Espérant dériver des théorèmes mathématiques d'axiomes purement logiques, par des preuves qui suivent des règles d'inférence logiques, Frege avait une motivation philosophique dans son projet de poser les mathématiques sur une base logique : il voulait montrer que les phrases mathématiques n'étaient pas synthétiques, mais analytiques comme le sont les vérités logiques. Kant, dans sa *Critique de la raison pure* (1781 ; 1787), affirmait que les mathématiciens dérivent leurs connaissances de la construction de concepts, c'est-à-dire de l'intuition qui leur est donnée *a priori*, indépendamment de la perception. Contre Kant, Frege maintenait que les mathématiques étaient aussi analytiques (et a priori) que les lois logiques et voulait démontrer ceci en dérivant les premières des deuxièmes. Cette position en philosophie des mathématiques, qui conçoit les mathématiques comme réductibles à la logique, a reçu le nom de « *logicisme* ».

En axiomatisant l'entier des mathématiques, Frege ne voulait pas seulement démontrer que les mathématiques étaient aussi a priori que la logique, mais il voulait également bannir tout psychologisme de ce qu'il considérait comme l'étude d'une réalité abstraite et indépendante de tout humain (cf. la sct. 9.2 pour en savoir plus).

C'est dans le premier volume des « lois fondamentales de l'arithmétique » (Frege, 1893) que Bertrand Russell (1872–1970) a découvert ce qu'on appelle aujourd'hui le « paradoxe de Russell ». Russell, dans une lettre écrite à Frege en 1902,[15] a remarqué que les axiomes que Frege avait donné pour l'arithmétique (en particulier son fameux axiome V qui dit que toute condition (prédicat) détermine

[13] Cf., par ex., Łukasiewicz and Tarski (1930, 31–32). Dans la notation polonaise, les connecteurs sont représentés par des lettres qui précèdent immédiatement ce sur quoi ils portent. L'opérateur principal est donc toujours placé en tête. Si « N » représente la négation, « A » la disjonction, « K » la conjonction et « C » l'implication, « $\neg p \lor q$ » devient « $ANpq$ », « $\neg(p \lor q)$ » devient « $NApq$ », « $((p \lor q) \land \neg r) \rightarrow \neg(p \lor q)$ » devient « $CKApqNrNApq$ » (ce qui se décompose en « $C(K(Apq)r)Nr)(N(Apq))$ » sans equivoque), etc.

[14] Que nous parlions aujourd'hui de Frege est largement dû à Russell qui le mentionne la première fois dans un appendice à ses « Principles of Mathematics » (Russell, 1903) sur les « Logical and Arithmetical Doctrines of Frege » (1903, 501–522).

[15] La lettre est publiée pour la première fois, en traduction, dans van Heijenoort (1967, 124–125)), l'original en allemand se trouve dans Frege (1976, 211-212), une traduction française dans Rivenc and de Rouilhan (1992, 236–243).

PROOF

un ensemble) permettaient la formation de l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. Il dérivait une contradiction de la supposition qu'un tel ensemble existe, montrant ainsi que les axiomes de Frege ne pouvaient pas tous être vrais.[16]

Il y a des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. Les ensembles $\{x \mid x \text{ est un nombre naturel}\}$ ou $\{x \mid x \text{ est une vache suisse}\}$ en sont des exemples : ils ne se contiennent pas puisqu'ils ne sont pas des nombres naturels ni des vaches suisses.[17] Il y a d'autres ensembles qui se contiennent : un ensemble tel que $\{x \mid x \text{ est un ensemble}\}$ *est* un membre de lui-même.[18] Comme nous comprenons l'expression « se contient soi-même », nous pouvons demander, de n'importe quelle chose et de tout ensemble si cette chose se contient elle-même.

Pour dériver le paradoxe, construisons maintenant l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes et appelons-le « Hugo » :

$$\text{Hugo} := \{x \mid x \notin x\}$$

Nous pouvons maintenant formuler la question de savoir si Hugo se contient lui-même, c'est-à-dire si Hugo est un ensemble comme celui des nombres naturels ou plutôt un ensemble comme celui des ensembles. Posons alors la question : « Hugo ∈ Hugo ? » C'est une question que nous comprenons : nous savons ce qu'est Hugo, et nous comprenons le signe « ∈ » d'appartenance à un ensemble. Pourtant, aucune réponse cohérente à cette question ne peut être donnée :

« oui » Si Hugo fait partie de Hugo (s'il se contient lui-même, Hugo ∈ Hugo), alors Hugo doit satisfaire la condition sous laquelle les éléments font partie de cet ensemble : cette condition est justement « $x \notin x$ ». Alors Hugo est l'un des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes (c'est-à-dire que Hugo est un ensemble x tel que $x \notin x$). Alors il ne se contient pas lui-même.

« non » Si, à l'inverse, Hugo ne fait pas partie de lui-même (Hugo ∉ Hugo), alors Hugo satisfait la condition imposée par cet ensemble (à savoir « $x \notin x$ »). Mais alors, il devrait faire partie de cet ensemble (puisqu'il satisfait la condition). Alors, Hugo se contient lui-même.

Et pourtant il s'ensuit du principe de la bivalence que la phrase « Hugo ∈ Hugo » est soit vraie, soit fausse. Dans le dernier cas, où elle est fausse, il s'ensuit du principe du tiers exclu que « Hugo ∉ Hugo » est vrai. En parcourant les raisonnements liés aux deux seules réponses possibles, nous obtenons alors une preuve de l'assertion suivante :

$$\text{Hugo} \in \text{Hugo} \iff \text{Hugo} \notin \text{Hugo}$$

Hugo se contient lui-même (**« oui »**) si et seulement si Hugo ne se contient pas lui-même (**« non »**). Il s'agit d'une contradiction – interdite par le principe de non-contradiction : nos trois principes sur

[16] Nous reviendrons sur le paradoxe de Russell à la p. 321 du ch. 15.

[17] La notation « $\{x \mid \ldots x \ldots\}$ » définit un ensemble par une condition, exprimée par « … » : toutes et seulement les choses qui satisfont cette condition appartiennent à l'ensemble. L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels (introduit à la p. 90), par exemple, peut également être dénoté par « $\{x \mid \ldots x \text{ est un nombre naturel}\}$ ».

[18] D'autres exemples sont : l'ensemble de tous les ensembles mentionnés dans ce livre, les ensembles que l'on peut appeler « un ensemble que l'on peut décrire en moins de 15 mots en français », l'ensemble de tous les sous-ensembles (propres et impropres) de n'importe quel ensemble, etc. Nous verrons plus tard, à la p. 321, qu'il n'y a pas (et ne peut pas y avoir) un ensemble de tous les ensembles et dans la sct. 15.2 que les axiomes de la théorie des ensembles standard excluent l'existence d'ensembles qui se contiennent eux-mêmes.

PROOF

la négation sont en conflit ! On peut donc inférer, par réduction à l'absurde, qu'au moins une des prémisses – desquelles la contradiction a été inférée – doit être fausse. Comme ces prémisses étaient les axiomes du système de Frege qui permettaient la définition de Hugo, la contradiction a montré que ces axiomes ne pouvaient pas tous être vrais. Il y a une faute dans le fondement même des lois fondamentales de l'arithmétique !

Frege a été anéanti par cette découverte de Russell ; il a essayé de rectifier son système dans le deuxième volume des *Grundgesetze* (Frege, 1903) (cette tentative a reçu le nom « Frege's Way Out » par Quine (1955)), mais il n'en était pas satisfait.[19] Par la suite, il a abandonné son logicisme et en a été affligé jusqu'à sa mort.[20] Ses changements ont été attestés inadéquats par Leśniewski en 1938.

Une conclusion qu'on tirait du paradoxe de Russell était que certains ensembles sont trop 'grands' pour pouvoir appartenir à d'autres ensembles : les ensembles ne peuvent pas tous être membres d'autres ensembles.[21] La théorie des ensembles, développée à la fin du 19ème siècle par le mathématicien Georg Cantor (cf., par ex., son 1883), a dû reconnaître ce qu'on appelle des « classes propres », c'est-à-dire des entités qui, comme les ensembles ordinaires, contiennent des membres, mais qui ne peuvent pas eux-mêmes être membres d'autres ensembles. Mais comment exclure les classes propres ?

Russell et Whitehead, dans les *Principia Mathematica*, ont développé ce qu'on appelle une « théorie des types ». De manière analogue à la distinction entre langage-objet et métalangage, ils attribuaient à chaque expression ce qu'on appelle « un type » de la manière suivante : les choses qui ne sont pas des ensembles sont du type 0, les ensembles qui ne contiennent que des choses qui ne sont pas des ensembles sont du type 1, les ensembles qui ne contiennent que des entités du type 0 et 1 sont du type 2, etc. Ils stipulaient qu'une expression de la forme « $x \in y$ » n'est bien formée que si l'entité dénotée par « x » est d'un type inférieur au type de l'entité dénotée par « y », excluant ainsi l'auto-référentialité dans « $a \in a$ » qu'ils regardaient comme source du paradoxe.

Russell lui-même a illustré son paradoxe avec l'exemple du coiffeur du village. Imaginons un coif-

[19] Peu après avoir reçu la lettre de Russell, Frege lui répond, étant parfaitement conscient de l'ampleur du problème : « Ihre Entdeckung des Widerspruchs hat mich auf's Höchste überrascht und, fast möchte ich sagen, bestürzt, weil dadurch der Grund, auf dem ich die Arithmetik sich aufzubauen gedachte, in's Wanken geräth." (Frege, 1976, 213). (Traduction de Rivenc and de Rouilhan (1992, 236–243) : « TRADUCTION ») Il introduit la postface à Frege (1903) par les mots : « Einem wissenschaftlichen Schriftsteller kann kaum etwas Unerwünschteres begegnen, als dass ihm nach Vollendung der Arbeit eine der Grundlagen seines Baues erschüttert wird." (Frege, 1903, 253) (« Il n'y a guère plus indésirable qui puisse arriver à un auteur scientifique que de voir un des fondements de sa construction ébranlé après l'achèvement de son travail ») Dans une lettre du 23 novembre 1962 à van Heijenoort qui publia pour la première fois, en 1967, la lettre de Russell et la réponse de Frege, Russell décrit la réaction de Frege comme suit : « As I think about acts of integrity and grace, I realise that there is nothing in my knowledge to compare with Frege's dedication to truth. His entire life's work was on the verge of completion, much of his work had been ignored to the benefit of men infinitely less capable, his second volume was about to be published, and upon finding that his fundamental assumption was in error, he responded with intellectual pleasure clearly submerging any feelings of personal disappointment. » (van Heijenoort, 1967, 127)) (TRADUCTION)

[20] Certains philosophes ont tenté de réanimer le logicisme au cours de ces vingt dernières années en développant l'arithmétique sur la base d'un axiome plus faible que le fameux axiome V de Frege, à savoir le principe de Hume. Le principe de Hume dit que deux concepts déterminent le même nombre si et seulement si les choses dans leurs extensions se trouvent dans une correspondance bijective : « couteau sur la table » et « fourchette sur la table » sont équinumériques (déterminent le même nombre) ssi pour toute fourchette, il y a un couteau sur la table, et vice versa. L'intérêt philosophique de ce projet porte alors sur la question de savoir en quel sens le principe de Hume mérite d'être appelé « principe logique » (cf. Wright, 1983 ; Hale and Wright, 2001). Nous reviendrons au néo-fregéanisme à la p. 321.

[21] Je mets « grand » ici entre 'scare quotes' pour indiquer qu'il ne s'agit pas de la signification ‹ ordinaire › de ce mot, mais d'une signification technique et précise.

PROOF

feur du village qui coupe les cheveux à toutes les personnes du village qui ne se coupent pas les cheveux eux-mêmes et uniquement à celles-ci. Par qui sont coupés ses propres cheveux? Aucune réponse n'est possible :

- S'il coupe ses propres cheveux, alors il coupe les cheveux à au moins une personne qui se coupe les cheveux elle-même, à savoir à lui-même.
- S'il ne coupe pas ses cheveux lui-même, alors il est parmi ceux qui font appel à quelqu'un d'autre pour se faire couper les cheveux, alors à lui-même, comme il coupe les cheveux à toutes ces personnes.

Quelle conclusion en tirer? Un tel coiffeur est impossible.[22] Dans le cas du coiffeur, cette réponse me semble intuitivement acceptable, puisque son 'existence'[23] dépend d'une condition dont la satisfaction n'est pas sous notre contrôle. Dans d'autres cas, la conclusion analogue est plus difficile à accepter. Prenons l'exemple attribué par Smullyan (1997, 167) à Lisa Collier :

> Le chef d'une entreprise offre une récompense de 100€ pour toute suggestion qui permet à l'entreprise d'économiser de l'argent. Une employée fait la suggestion de ne pas payer la récompense.

Faut-il payer les 100€? Si oui, alors la suggestion de l'employée n'est pas réalisée et ne permet donc pas d'économies. Si non, le chef d'entreprise ne tient pas sa promesse : après tout, l'employée a fait une suggestion telle que si elle avait été réalisée, l'entreprise aurait économisé de l'argent.[24]

Il en va de même avec Hugo : nous comprenons pourquoi la description « le coiffeur du village qui coupe les cheveux à tous et seulement les habitants du village qui ne coupent pas leurs cheveux eux-mêmes » ne peut pas être une description d'un coiffeur – mais pourquoi l'expression « ne se contient pas soi-même » ne peut-elle pas exprimer une condition qui définit un ensemble? C'est pour cette raison que l'on dit que le paradoxe de Russell montre l'inconsistance (= le caractère auto-contradictoire) de la théorie intuitive des ensembles.

Il est donc nécessaire de justifier la non-existence de Hugo, et la théorie intuitive des ensembles ne nous fournit pas les ressources nécessaires à cela. Une autre approche est le développement d'une théorie axiomatique. Etant donnée une telle théorie, nous appellerons « ensemble » tout ce qui satisfait ses axiomes et la théorie sera consistante si elle ne permet pas la construction de Hugo et d'‹ensembles› pareils.

Le mathématicien Ernst Zermelo (1908) a formulé des axiomes pour la théorie des ensembles, de manière à ce qu'ils ne permettent pas de dériver le paradoxe de Russell.[25] Il était donc possible de remplacer la notion intuitive d'ensemble (une sorte de collection d'objets dans laquelle on fait abstraction de tout ce qui leur est particulier) par une définition rigoureuse : on appelle « ensemble » tout ce qui satisfait les axiomes d'une certaine théorie Th, appelée « théorie des ensembles ». La notion intuitive

[22] Nous tirons cette conclusion de manière analogue à celle tirée dans les exercices (cf. p. 361) que Jean-Paul n'est pas à la maison si, si il était à la maison, il serait à la fois avec Jean-Paul et ne serait pas avec Jean-Paul.

[23] Je mets des 'scare quotes' parce qu'il ne s'agit pas de l'existence de la personne, mais du fait qu'il existe quelqu'un que l'on peut désigner de cette manière-là.

[24] Dans le monde réel, la prime serait probablement payée. Mais qu'est-ce qui arriverait si elle était haute et beaucoup d'employés faisaient la même suggestion? Une entreprise pourrait être forcée en faillite, suite à une simple erreur de raisonnement du chef – il serait intéressant de voir un tel cas être discuté en justice.

[25] Ces axiomes sont présentés à la p. 321.

PROOF

(et ‹ sémantique ›) a donc été remplacée par une notion purement structuraliste (‹ syntaxique ›).[26] Impressionné par Frege et par son développement d'une notion purement syntaxique de preuve dont la correction peut être vérifiée mécaniquement, le mathématicien allemand David Hilbert (1862–1943) a fondé une école de philosophie des mathématiques, aujourd'hui appelée « *formalisme* ». Le formaliste considère les mathématiques et la logique comme des manières de manipuler des symboles en suivant certaines règles. Les mathématiques que les réalistes prennent pour une science d'une réalité abstraite et éternelle d'objets mathématiques sont considérées par les formalistes comme une activité essentiellement linguistique, une manipulation de symboles.

Le formalisme a été fortement influencé par le développement de différentes géométries. Kant pensait que la géométrie euclidienne était la science de l'espace et qu'elle était présupposée par tous nos jugements spatiaux. En fait, beaucoup de nos jugements en géométrie sont basés sur la perception, et ses axiomes traditionnels (comme, par exemple, le 5ème axiome d'Euclide qui dit que par un point a donné extérieur à une droite d donnée, il ne passe qu'une seule droite parallèle à d) semblent évidents. Pourtant, au cours du 19ème siècle, Lobachevsky notamment a réussi à construire des géométries sans cet axiome et ainsi à décrire sans auto-contradiction apparente, des situations où il y a plus qu'une parallèle à une droite donnée passant par un seul point.

On découvre alors qu'en dehors de la géométrie euclidienne, il existe d'autres systèmes d'axiomes non équivalents, mais qui traitaient également de notions géométriques comme « point », « ligne », « parallèle », etc. Comme ces systèmes d'axiomes sont également consistants (= non contradictoires), la question s'est posé de savoir si ces différents systèmes sont des théories rivales portant sur le même domaine, en donnant une description soit vraie soit fausse d'une réalité indépendante ou s'il s'agit plutôt de différents langages qui définissent leurs notions de manière implicite et ne se trouvent pas en désaccord. Les formalistes ont pris la deuxième voie et ont décidé de considérer les mathématiques comme construction de systèmes formels qui définissent eux-mêmes le domaine dont ils parlent. Hilbert défendait la position selon laquelle il n'existe pas de contenu intuitif à « point », « ligne », « parallèle », etc. mis à part les significations que les définitions purement structuralistes leur attribuent dans le cadre d'une géométrie axiomatique (cf. Hilbert, 1899).[27]

Hilbert a fondé les métamathématiques, une science qui utilise les outils et les méthodes de la logique et des mathématiques ordinaires pour parler des systèmes formels. Au lieu de développer telle et telle axiomatisation d'un domaine mathématique (comme la logique propositionnelle, des prédicats, l'arithmétique ou la géométrie), les métamathématiques étudient de telles axiomatisations et essayent d'en établir des propriétés telles que la consistance, la complétude, la décidabilité, etc. Hilbert a formulé un programme de ‹ méta-mathématisation › des mathématiques en 1920. Ce « programme de Hilbert » essayait de montrer que la totalité des mathématiques pouvait être déduite d'un système d'axiomes et démontré être consistant.

Cependant, ce programme a été heurté par l'annonce d'une découverte historique du jeune lo-

[26] Pour mieux comprendre l'approche ‹ structuraliste ›, considérons les axiomes de Peano pour l'arithmétique qui stipulent que les nombres naturels constituent une progression : o est un nombre naturel, et tout nombre successeur (« +1 ») d'un nombre naturel est un nombre naturel (cf. p. 321). Le problème avec ces axiomes est que mis à part la série que nous reconnaissons intuitivement comme celle des nombres naturels, à savoir $\langle 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$, beaucoup d'autres progressions les satisfont, par ex. les nombres pairs $\langle 0, 2, 4, 6, \ldots \rangle$. Dans ce cas, un structuraliste défendrait la position selon laquelle nous n'avons aucune raison d'attribuer le nom de « nombres naturels » à la première progression sans l'attribuer à la deuxième.

[27] Nous parlerons, à la p. 111 d'une position analogue en philosophie de la logique.

PROOF

gicien autrichien Kurt Gödel qui, en 1931, a démontré l'incomplétude de l'arithmétique. La preuve fournie montrait que tout système formel consistant et susceptible de formaliser en son sein l'arithmétique des nombres entiers, est incomplet. Autrement dit, il permet la formulation d'une formule qui – d'après le système – exprime une phrase vraie mais qui ne peut pas être démontrée dans ce système.[28]

Outre le logicisme de Frege et le formalisme de Hilbert, une troisième tradition en philosophie des mathématiques a émergé au début du 20ème siècle, à savoir l'*intuitionnisme* du logicien hollandais Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966). Brouwer (1918) et son étudiant Arendt Heyting (1956) adhéraient à une philosophie constructiviste qui rejette les preuves non constructives. Un exemple d'une preuve non constructive est une preuve qui démontre une disjonction $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$ sans pour autant montrer lequel des disjoints est vrai.[29] Les intuitionnistes ont également rejeté le principe du tiers exclu (cf. p. 42). Ce rejet était justifié par leur interprétation de la prouvabilité : prouver que $p \vee q$, pour les intuitionnistes, veut dire prouver soit que p soit que q : nous ne pouvons pas prouver une disjonction sans prouver au moins un des disjoints. Ils ont également donné une interprétation dite « prouvabiliste » à la négation ; prouver que $\neg p$, c'est prouver qu'on ne peut pas prouver que p. C'est pour cette raison qu'ils rejetaient le tiers exclu : il existe de nombreux cas dans lesquels on n'arrive ni à prouver que p ni à prouver que $\neg p$. L'école des intuitionnistes a donc développé sa propre logique (la logique dite « intuitionniste »), dans laquelle $\ulcorner \phi \vee \neg \phi \urcorner$ n'est pas un théorème.

Au centre de cette grande renaissance que la logique et les mathématiques ont connue entre 1879 et 1931 se trouvaient donc les notions que l'on discutera par la suite : la distinction entre la syntaxe et la sémantique, ainsi que les notions purement syntaxiques d'un calcul (un système axiomatique) et d'une preuve (un raisonnement à l'intérieur d'un tel système).

4.4 Le paradoxe du menteur

En lien avec le paradoxe de Russell, d'autres paradoxes sémantiques ont également été soulevés dans l'histoire de la logique. Un d'entre eux et le plus ancien, est souvent appelé « le Menteur » et est illustré par l'exemple du Crétois qui dit que tous les Crétois sont des menteurs. Un meilleur exemple[30] est le suivant :

(M) est faux. (M)

[28] Nous reviendrons sur cette découverte au chapitre 15 (p. 321 et suivantes). Il est vrai que le principal souci des mathématiciens n'est pas la sémantique en soi, mais la traduction de la syntaxe à la sémantique. Néanmoins, la preuve de Gödel était très importante pour la technique qu'elle employait, le codage de la syntaxe à l'intérieur de cette syntaxe même.

[29] Une telle preuve est celle que l'on a déjà rencontrée dans la première leçon (p. 2) : cette preuve ne nous apprend pas quels sont les nombres irrationnels spécifiques a et b tels que a^b est rationnel. Elle montre qu'il doit y en avoir, sans pour autant nous en fournir d'exemplaires particuliers. C'est pour cette raison qu'elle est appelée « non constructiviste » : elle ne nous permet pas de 'construire' des nombres concrets qui prouvent l'affirmation.

[30] Smullyan (1997, 164) explique très bien les faiblesses de l'exemple traditionnel : qu'il ne fonctionne que si « menteur » ne désigne que des personnes qui mentent toujours. Il s'ensuit alors que la phrase est fausse, qu'il y a un Crétois qui dit quelques fois la vérité – mais ce n'est pas encore un paradoxe. Smullyan compare ce cas à celui qui pense que toutes ses croyances sont fausses – il s'ensuit que cette croyance est fausse et qu'au moins une de ses croyances est vraie : nous ne pouvons pas correctement croire que toutes nos croyances sont fausses, mais ce n'est pas encore un paradoxe. Je suis l'excellente petite introduction de Smullyan dans ce qui suit.

PROOF

(M) est une phrase qui s'appelle « (M) » et parle d'elle-même. Si (M) est vraie, alors elle est ce qu'elle dit, alors elle est fausse. À l'inverse, si (M) est fausse, alors elle est ce qu'elle dit, alors elle vraie. On a donc une preuve de la contradiction suivante :

(M) est vrai. $\iff$ (M) est faux.

Nous avons donc le choix entre :

- (M) est à la fois vrai et faux, une violation du principe de non-contradiction ;[31]
- (M) est ni vrai ni faux, une violation du principe du tiers exclu.[32]

Nous pourrions penser que la faute est au principe de bivalence – peut-être suffit-il d'accepter une troisième valeur de vérité, peut-être « paradoxal » ? La variation suivante du paradoxe du Menteur, appelée le « Menteur Renforcé » nous montre que cet espoir est illusoire :

(M*) n'est pas vrai. (M*)

Même si (M*) est ‹ paradoxal › (et alors ni vrai ni faux), (M*) n'est certainement pas vrai. C'est ce que dit (M*) de (M*) : que (M*) n'est pas vrai. Comme (M*) correspond à la description du monde donnée par (M*), alors (M*) est vrai. Nous avons donc :

(M*) est vrai $\iff$ ¬((M*) est vrai)

Ici, la contradiction est la nôtre : même si nous acceptons des contradictions, nous ne pouvons pas à la fois les accepter et ne pas les accepter !

Nous pourrions croire que l'auto-référence est essentielle au paradoxe. Mais elle ne l'est pas. Au lieu de (M), on peut choisir :

> La première phrase à la p. 101 qui est mentionnée et qui commence avec l'article défini féminin est une phrase fausse. (M+)

La description que (M+) utilise pour parler d'elle même pourrait très bien être vraie d'une autre phrase, par exemple de la phrase « la lune est belle », si j'avais choisi de mentionner celle-là en premier. (M+) dirait alors que la lune n'est pas belle, ce qui est triste si vrai, mais pas un paradoxe.

Nous pouvons même faire dépendre le caractère paradoxal du Menteur d'une relation qu'elle entretient avec une autre phrase. Imaginons que le président de la République, accusé de trahison et collusion avec un pays ennemi, et l'investigateur spécial du parlement donnent les deux une conférence de presse. Ils disent :

> Le Président : « Tout ce que dit l'investigateur spécial à sa conférence de presse à mon sujet est faux ». – Investigateur spécial : « Ce que dit le président à mon sujet lors de sa conférence de presse aujourd'hui est vrai. ». (M∗)

Si l'investigateur spécial ne dit alors rien d'autre au sujet du président lors de sa conférence de presse (mais également seulement dans ce cas),[33] nous avons alors la contradiction suivante :

[31] Si (M) est vrai, alors le principe de non-contradiction nous dit que ¬*M* n'est pas vrai. Si (M) est faux, alors le principe de bivalence dit que (M) n'est pas vrai, alors ¬*M* doit l'être, par le principe du tiers exclu. Alors ¬*M* est vrai et en même temps n'est pas vrai.

[32] Si (M) n'est pas vrai, alors ¬*M* doit l'être, par le principe du tiers exclu. Si (M) n'est pas faux, alors (M) doit être vrai, par le principe de bivalence, ce qui exclut la vérité de ¬*M* par le principe de non-contradiction. Alors ¬*M* est vrai et en même temps n'est pas vrai.

[33] L'investigateur spécial peut facilement lever le caractère paradoxal de la situation en affirmant une seule vérité sur le président, par exemple qu'il est accusé de trahison.

PROOF

- Si le président dit la vérité, alors l'investigateur a tort – ce que disait le président à son sujet lors de sa conférence de presse était faux, y inclus la première affirmation, qui était alors fausse.
- Si le président affirme quelque chose de faux, alors au moins une chose de ce que l'investigateur spécial dit sur lui est vraie – si la seule telle affirmation est que tout ce que dit le président à son sujet est vrai, alors la première affirmation du président était vraie.

Nous concluons que nous avons affaire à un président qui ne dit ni la vérité ni quelque chose de faux.[34]

Voici un exemple tiré de Smullyan : sur l'île des chevaliers et des valets, les chevaliers ne font que des assertions vraies et les valets ne font que des assertions fausses – et il n'y a personne d'autre. Sur cette île, un nombre de choses intéressantes se passent :

- Il n'est pas possible de dire « Je ne suis pas un chevalier »– aucun chevalier ne pourrait le dire (parce que l'énoncé ne serait alors pas vrai), mais il est également impossible pour les valets de le dire (parce que leur phrase serait alors vraie).
- Imaginons que nous visitions cette île et qu'un habitant nous dise : « Vous ne saurez jamais que je suis un chevalier. » Nous réalisons alors que si nous venions à savoir, un jour, que cette personne était un chevalier, son affirmation serait fausse et alors il serait un valet. Comme nous ne pouvons savoir ce qui est vrai, nous ne pouvons donc jamais savoir qu'il est un chevalier. Mais c'est justement ce qu'il a dit ! Alors il doit être un chevalier, comme il a dit la vérité.
- Par le raisonnement précédent, nous savons qu'il doit s'agir d'un chevalier. Mais il a dit le contraire. Alors il doit être un valet !

Même si l'indexicalité au sens strict n'est pas nécessaire au paradoxe,[35] un certain type d'auto-référentialité semble essentiel : (M) est une phrase qui parle d'elle-même, même si c'est de manière indirecte comme en (M+) et (M∗). C'est pour cela que son appellation d'elle-même ne peut pas être éliminée en faveur d'une description purement 'qualitative' comme l'est le nom formé par les guillemets :[36]

« (M∗∗) est une phrase fausse » est une phrase fausse. (M∗∗)

« « (M∗ ∗ ∗) est une phrase fausse » est une phrase fausse » est une phrase fausse. (M∗ ∗ ∗)

« « « (M∗ ∗ ∗) est une phrase fausse » est une phrase fausse » est une phrase fausse » est une phrase fausse. (M∗ ∗ ∗)

Nous avons une regression de phrases et une regression de niveaux du langage : (M∗∗) se trouve au métalangage par rapport à (M∗); (M∗ ∗ ∗) se trouve au métalangage par rapport à (M∗∗) et au méta-métalangage par rapport à (M∗); et ainsi de suite.

La regression est particulière – c'est comme si j'expliquais qui je suis par : « je suis la personne qui porte mon T-shirt » et ceci par « la personne qui porte mon T-shirt est celle qui porte mes chaussettes », et cela par « la personne qui porte mes chaussettes est la personne qui porte mes chaussures »

[34] Est-ce qu'il *affirme* alors quoi que ce soit ? Pour les difficultés de caractériser les usages du langage qui font semblant d'être affirmatoires, mais ne le sont pas en réalité, cf. l'excellente étude de Harry Frankfurt, *Sur l'art de dire des conneries* (1988b / 2008).

[35] Nous discuterons plus tard, à la p. 234, d'autres arguments pour l'inéliminabilité des indexicaux, et plus particulièrement en faveur de la thèse que les indexicaux augmentent le pouvoir expressif d'un langage, c'est-à-dire peuvent servir à faire des distinctions qui ne pourraient pas être faites en leur absence.

[36] Je mets « qualitatif » ici entre guillemets de distanciation, puisqu'il ne me semble pas clair que la description utilisée en (M+) n'est pas qualitative.

PROOF

et ainsi de suite. C'est toujours la même personne que l'on présente dans ces phrases, et toutes ces phrases sont vraies, mais je ne vous aiderais pas à m'identifier, car je n'élimine pas ainsi l'indexicalité en question (ce que je ferais, par exemple, en vous communiquant mon nom).

La progression de (M∗) – (M∗∗) – (M∗ ∗ ∗) – (M∗ ∗ ∗) nous montre que l'auto-référence des expressions n'est possible que dans une langue que l'on appelle « sémantiquement fermée » (n. 10 à la p. 63) et nous avons déjà vu (à la p. 29) qu'une telle langue contient des expressions qui sont identiques à leurs propres citations. Nous ne pouvons pas ‹ interdire › de telles langues (même si nous saurions le faire et saurions ce que cela voudrait dire) et le prédicat de vérité que nous utilisons et qui est même indispensable pour la disquotation – l'enlèvement des guillemets – en fait partie. Il semble donc qu'un prédicat aussi fondamental que « ...est vrai » est contradictoire.

Faut-il donc accepter que le monde est également contradictoire ?[37] Pas forcément. En 1933, le logicien et métamathématicien Alfred Tarski (1933), issu de la fameuse école polonaise de logique (Twardowski, Łukasiewicz, Adjukiewicz, Kotarbiński, Leśniewski), est parvenu à donner une définition non contradictoire de « ... est vrai », en faisant la distinction entre langage-objet et métalangage. Ce fut le début de la sémantique systématique.[38]

Comme le fait la théorie axiomatique des ensembles avec le prédicat « ...est un ensemble », la théorie de la vérité de Tarski définit un prédicat de vérité par son rôle, de manière structuraliste. Ce rôle est défini principalement par la schéma **T** que nous avons introduit à la page p. 61 :

La phrase « *p* » est vraie si et seulement si *p*. (T)

Les deux directions de cette équivalence sont utilisées dans la dérivation de la contradiction comme suit :

P1	Si (M) est vrai, alors (M)	(**T** →)
P2	Si (M), alors (M) est faux.	déf. de (M)
P3	Si (M) est faux, alors (M).	déf. de (M)
P4	Si (M), alors (M) est vrai.	(**T** ←)
C	(M) est vrai ↔ (M) est faux	

Nous remarquons l'importance de la distinction entre langage-objet et métalangage une fois que nous essayons de rendre cet argument grammaticalement correct en introduisant des guillemets. Pour que **P1** soit grammaticalement correct, par exemple, « (M) » doit être une phrase (puisque « alors ... » doit être suivi d'une phrase), mais en même temps le nom d'une phrase (puisque « ...est vrai » est un prédicat).

Si notre théorie de la vérité permet seulement la dérivation des instances de (T) qui ne sont pas problématiques, nous évitons le paradoxe du Menteur. C'est exactement ce que la théorie de Tarski est censée faire.

Les exemples de l'ensemble de Russell et du Menteur illustrent comment les paradoxes peuvent servir le progrès en philosophie, en motivant des distinctions fructueuses et des techniques appli-

[37] Il y a toute une série d'arguments, remontant à Aristote, qui semble montrer que cette hypothèse ne constitue pas une possibilité logique. L'école logique des dialethéistes, dont nous avons brièvement parlé à la p. 42 et dont le représentant le plus connu est Graham Priest, n'est guère convaincue par ces arguments : d'après eux, il faut changer de logique et accepter des contradictions vraies, tout en évitant ce qu'ils appellent le principe de l'« explosion » (cf. p. 121).

[38] Nous discuterons des développements ultérieurs de la théorie de la vérité de Tarski dans la sct. 13.6.

PROOF

cables également dans d'autres domaines.

Nous avons déjà rencontré une version d'un troisième paradoxe dit « de Grelling », qui part de l'observation que plus les nombres naturels sont grands, plus il faut de mots pour former leurs noms. Considérons donc :

le nombre le plus petit descriptible en moins de 11 mots (G)

Nous savons qu'il existe un tel nombre (puisqu'il y en a une infinité et que l'un d'entre eux doit être le plus petit), et (G) semble une description parfaitement adéquate pour en parler. Mais comptez le nombre de mots dans (G) !

Ce paradoxe est différent de celui de Russell, puisqu'il ne s'agit pas d'une question d'existence (personne ne nie que l'ensemble des nombres dont tous les noms ont une certaine complexité a un élément minimal), et du Menteur, puisqu'il ne s'agit pas d'un problème de vérité, mais de désignation. Il s'agit sans doute d'un paradoxe sémantique, mais sa relation avec le Menteur est un sujet controversé.[39]

4.5 Ce qu'est un calcul

Si on entend par « logique » un ensemble de phrases considérées comme logiquement vraies (par rapport à cette logique) ou une relation de conséquence logique particulière, un calcul est un système formel qui *axiomatise* cet ensemble de phrases ou cette relation de conséquence. Une telle axiomatisation consiste en la différentiation de deux types de phrases : d'*axiomes* et de *théorèmes* – tels que les théorèmes peuvent être déduits des axiomes. Les axiomes forment le noyau de la formalisation ; typiquement, ils postulent que la relation de conséquence a certaines propriétés particulières. Les théorèmes nous permettent d'évaluer la qualité d'une axiomatisation particulière ; ils sont des phrases dérivées du calcul à l'aide des règles d'inférence permises dans ce calcul.

Une analogie peut servir à mieux comprendre la relation entre les axiomes et les théorèmes, créé par l'application des règles d'inférence. Lorsque nous voulons transporter (ou vendre) une soupe, il est souvent pratique de l'épaissir, de faire sortir l'eau, ne gardant que le condensé. Le condensé, cependant, conserve tout l'essentiel de la soupe : il peut facilement être reconverti en soupe complète juste en rajoutant de l'eau. Ce condensé correspond aux axiomes, la totalité de la soupe aux théorèmes (qui incluent les axiomes), et le rallongement de la soupe par l'ajout de l'eau au processus de dérivation, à l'aide de règles d'inférence, de théorèmes à partir d'axiomes.

Le calcul, lui aussi, n'est rien d'autre qu'un ensemble de phrases ; c'est une entité purement syntaxique, comme une langue, et comme une langue il est construit à l'aide d'une définition récursive – à la différence qu'il ne s'agit pas d'une définition de « formule bien formée » (selon les règles de formation, cf. p. 31 et sct. 4.2), mais d'une définition de « théorème » (règles de transformation, aussi appelées « règles d'inférence »). Les axiomes correspondent aux phrases atomiques (= la base de la recursion) et les théorèmes aux formules bien formées :

Définition 6 (Calcul). *Un* calcul *est un ensemble de formules propositionnelles déterminé par un ensemble de formules propositionnelles qui sont appelées* « axiomes » *et des règles d'inférence. Un élément de cet ensemble est appelé* « théorème ». *Ce qu'est un théorème est déterminé par la définition récursive suivante :*

[39] Nous rediscuterons de ces questions dans le contexte des théories formelles de la vérité à la p. 321.

PROOF

1. *Tout axiome est un théorème.*
2. *Une formule propositionnelle obtenue par l'application d'une règle d'inférence à des théorèmes est un théorème.*
3. *Rien d'autre n'est un théorème.*

On peut dire qu'un calcul est un ensemble de formules généré par les règles d'inférence sur la base des axiomes.[40] Nous avons vu, déjà à la p. 21, que les règles d'inférence en logique propositionnelle ne considèrent que les squelettes des arguments logiques, et déterminent leur validité sur la base de la forme logique des phrases qu'ils contiennent. Nous formalisons maintenant cette relation de conséquence logique au niveau du métalangage, sous forme d'un *schéma d'inférence* :

$$\frac{\phi, \psi, \chi, \ldots}{\xi} \tag{4.1}$$

Les formules $\phi, \psi, \chi, \ldots$ sont appelées « *prémisses* » de la règle d'inférence, la formule ξ « *conclusion* ». À ce stade, il n'est pas requis que ces règles d'inférence soient valides ou que ces prémisses soient vraies. Il ne s'agit pas ici de notions sémantiques, mais d'une pure manipulation syntaxique de symboles.[41] Une règle d'inférence nous permet de 'générer' des théorèmes à partir des axiomes : dire que (4.1), par exemple, est une règle d'inférence d'un certain calcul, est dire que toute formule ξ obtenue en remplaçant ϕ, ψ et χ par des théorèmes du calcul est un théorème.

La notion de « théorème » est relative à un calcul ; différents calculs auront différents théorèmes. Nous appellerons le nôtre « HC », en l'honneur des **c**alculs de David **H**ilbert. Pour dire qu'une formule propositionnelle ϕ est un théorème du calcul particulier HC, nous écrivons « $\mathsf{HC} \vdash \phi$ ». « $\vdash$ », on l'a dit, représente la relation de *déductibilité* : « $\mathsf{HC} \vdash \phi$ » veut dire que ϕ peut être déduite des axiomes du calcul HC – c'est-à-dire qu'il y a dans HC une preuve dont ϕ est la conclusion. Mais qu'entendons-nous par cette notion de preuve ?

La notion syntaxique la plus importante de la logique est celle de *preuve*. Ce fut en clarifiant la notion de preuve que Frege a apporté sa contribution la plus importante au développement moderne des mathématiques et de la logique. Une preuve est une suite de formules bien formées qui satisfait quelques critères purement syntaxiques.

Une preuve est relative à un certain calcul. Une suite de formules propositionnelles est une preuve d'un certain calcul si elle ne consiste qu'en : soit (i) des formules qui sont des axiomes, soit (ii) des formules pouvant être obtenues en appliquant une règle d'inférence à des formules qui la précèdent dans la suite. « $\mathsf{HC} \vdash \phi$ » signifie qu'il y a une preuve, dans HC, dont ϕ est la conclusion : il y a une suite de formules dont ϕ est le dernier membre et qui ne contient que des axiomes de HC ou des formules obtenues par les règles d'inférence propres à HC.

On peut inférer ou déduire des phrases non seulement à partir d'un calcul, mais aussi à partir d'une théorie. ϕ peut être inférée d'une théorie Th par rapport à un calcul HC si on peut construire, en appliquant des règles d'inférence de HC aux membres de Th et aux axiomes de HC, une preuve qui a ϕ comme conclusion. La théorie en question peut alors être conçue comme un calcul élargi par d'autres axiomes. Nous avons ainsi une définition officielle de preuve :

[40] Il s'agit à nouveau d'une condition de clôture d'un ensemble telle que celle que nous avons rencontrée dans la n. 4 à la p. 91.

[41] Cependant, pour que le calcul soit *correct* par rapport à une sémantique particulière, il est requis que les axiomes soient des tautologies et que les règles d'inférence soient valides. Nous reviendrons sur cette question (de la correction du calcul) par la suite (cf. par ex. p. 168).

PROOF

Définition 7 (Preuves dans HC). *Une* preuve, *dans un calcul* HC *et à partir d'une théorie* Th, *est une suite finie de phrases* $\langle \phi_1, \dots \phi_n \rangle$ *telle que, pour tout* i *entre* 1 *et* n ($1 < i \leq n$), *on a que* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \cup \{\phi_1, \dots, \phi_{i-1}\} \vdash \phi_i$.

Comme la logique n'est jamais sans présuppositions, une preuve est toujours à partir, et sur la base d'une théorie. Très souvent, cependant, les présuppositions sont toutes intégrées dans nos formules, et alors nous prouvons des théorèmes. Dans ces cas, la théorie en question Th est vide et nous parlons tout simplement d'une preuve dans un certain calcul.

Il est important de noter qu'une preuve est toujours une suite *finie* de formules. Une preuve, étant une suite de formules, constitue un discours réalisable en principe par un logicien, mathématicien ou philosophe humain (donc ayant une période de vie finie). Nous pouvons maintenant définir le signe « $\vdash$ » représentant la relation de déductibilité :

Définition 8 (Déductibilité dans HC). *Si* HC *est un calcul,* Th *une théorie et* ϕ *une formule propositionnelle, nous définissons «* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *» (quel que soit le nombre naturel* $n \in \mathbb{N}$*) par induction mathématique sur les nombres naturels :*

1. *Si* ϕ *est un axiome de* HC, *alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Si* ϕ *est un membre de* Th, *alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Si nous avons* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{m_i} \psi_i$ *(avec* $m_i < n$*) pour toutes les prémisses* ψ_i *d'une règle d'inférence de* HC, *alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour la conclusion* ϕ *de cette règle d'inférence.*

Les deux premières conditions nous disent que nous pouvons toujours, à n'importe quelle étape, introduire un axiome ou un élément de la théorie dans notre preuve ; la troisième condition nous montre comment nous réalisons des preuves à l'aide de règles d'inférence.

Le nombre n dans « $\vdash^n$ » nous indique la longueur de la preuve.[42] « $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ » veut dire qu'il existe, dans HC et à partir de Th, une preuve de n étapes de ϕ. (1) et (2) dans la définition (8) signifient qu'à n'importe quelle étape, on peut considérer les axiomes et les phrases de la théorie comme prouvés (ils ont une preuve ‹ de longueur o ›). (3) nous permet de prouver une phrase qui s'ensuit par une règle d'inférence de phrases prouvées à des étapes antérieures. Nous écrivons « $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi$ » pour dire qu'il y a un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ (qu'il y a une preuve d'une certaine longueur).

Voici un exemple : la suite des trois phrases $\langle$ « $p \to q$ », « p », « q » $\rangle$ est une preuve relative à une théorie $\mathsf{Th} = \{$ « $p \to q$ », « p »$\}$ et un calcul HC qui reconnaît *modus ponens* comme règle d'inférence :

$$\begin{array}{lll} \mathsf{HC} \cup \{\text{« } p \to q \text{ »}, \text{« } p \text{ »}\} & \vdash^0 & p \to q \\ \mathsf{HC} \cup \{\text{« } p \to q \text{ »}, \text{« } p \text{ »}\} & \vdash^1 & p \\ \mathsf{HC} \cup \{\text{« } p \to q \text{ »}, \text{« } p \text{ »}\} & \vdash^2 & q \end{array}$$

Dans les deux premières lignes, nous appliquons les conditions (1), (2) et la définition (8) : « $p \to q$ » et « p » sont les deux membres de Th et nous pouvons donc les prouver ‹gratuitement›. Dans la troisième ligne, nous réalisons la condition (3) : la règle *modus ponens*, appliquée aux deux premières lignes, nous permet d'inférer « q ».

[42] Il ne s'agit pas toujours de la longueur minimale : si nous avons $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^2 p$, par exemple, nous aurions également $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^3 p$, $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^4 p$, etc. Cette caractéristique correspond au fait que nous pouvons toujours prolonger des preuves en rajoutant des étapes superflues (par exemple des dérivations de « $p \to p$ »). Nous n'aurions pas, par contre, $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^1 p$ si $\mathsf{Th} = \{$ « p », « $p \to q$ » $\}$ – parce que dans ce cas-ci la plus courte preuve possible (par *modus ponens*) aura deux étapes.

PROOF

Nous avons utilisé dans la définition de « $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ » une procédure de preuve très commune en métamathématiques (ou métalogique), à savoir une *preuve par induction (mathématique)*. Une preuve par induction exploite le fait que les nombres naturels $\mathbb{N}$ forment une progression : on prouve, par induction, que tout nombre $n \in \mathbb{N}$ a une certaine propriété F en montrant que le nombre 0 a cette propriété et que, si un nombre n l'a, alors son successeur $n + 1$ l'a aussi. On a donc montré par les deux premières conditions que $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^0 \phi$ si ϕ est un axiome ou un membre de Th et que si on a $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \psi_i$ pour toutes les prémisses ψ_i d'une inférence valide, on a $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{n+1} \phi$ pour sa conclusion ϕ.[43]

On voit que les notions de « calcul », « axiome », « théorème » et « preuve » sont des notions purement syntaxiques : elles s'appliquent à des formules propositionnelles uniquement en vertu de leurs formes et indépendamment de leurs significations ou valeurs de vérité.

4.6 Un calcul pour la logique propositionnelle

Nous allons maintenant considérer une axiomatisation particulière de la logique propositionnelle. Cette axiomatisation consiste en une infinité d'axiomes – heureusement, beaucoup de ces axiomes sont de la même forme. C'est pourquoi nous donnons les axiomes comme *schémas*, ce qui veut dire que toutes les formules propositionnelles de $\mathcal{L}$ ayant la même forme que les formules qu'on énumère dans la suite sont des axiomes de notre calcul HC.[44]

Définition 9 (HC). *Le calcul* HC *a comme axiomes toutes les formules de* $\mathcal{L}$ *qui ont la forme d'un des schémas suivants :*

$\mathbf{H_1}$	$\ulcorner \phi \to \phi \urcorner$	*réflexivité*
$\mathbf{H_2}$	$\ulcorner (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi)) \urcorner$	*transitivité*
$\mathbf{H_3}$	$\ulcorner ((\phi \wedge \psi) \to \chi) \to (\phi \to (\psi \to \chi)) \urcorner$	*conditionaliser l'antécédent*
$\mathbf{H_4}$	$\ulcorner (\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \wedge \psi) \to \chi) \urcorner$	*augmenter l'antécédent*
$\mathbf{H_5}$	$\ulcorner \phi \to (\phi \vee \psi) \urcorner$	*introduire « $\vee$ » à droite*
$\mathbf{H_6}$	$\ulcorner \psi \to (\phi \vee \psi) \urcorner$	*introduire « $\vee$ » à gauche*
$\mathbf{H_7}$	$\ulcorner (\phi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\phi \vee \psi) \to \chi))) \urcorner$	*alternative*
$\mathbf{H_8}$	$\ulcorner (\phi \wedge \psi) \to \phi \urcorner$	*éliminer « $\wedge$ » à droite*
$\mathbf{H_9}$	$\ulcorner (\phi \wedge \psi) \to \psi \urcorner$	*éliminer « $\wedge$ » à gauche*
$\mathbf{H_{10}}$	$\ulcorner (\phi \to \psi) \to ((\phi \to \chi) \to (\phi \to (\psi \wedge \chi))) \urcorner$	*composition*

[43] Nous rencontrerons encore quelques preuves par induction mathématique : elles ont toutes en commun qu'elle prouvent

1. qu'une certaine caractéristique est possédée par un des membres de la progression (cette étape de la preuve est appelée « base de l'induction »);
2. que la caractéristique en question est ‹héritée› par les membres successifs dans la progression : si le n-ième membre le possède, alors le $(n + 1)$-ième le possède aussi (ce qui est appelé le « pas de l'induction »). Dans cette preuve, nous supposons que la conclusion voulue est vraie de n (« hypothèse de l'induction ») et la prouvons pour $n + 1$.

C'est en vertu de cette succession de pas que les preuves par induction mathématique réussissent à prouver qu'un certain trait est possédé par une infinité de choses, exploitant à ce propos le fait que l'infinité est structurée d'une certaine manière (qui permet la définition d'une opération de succession, comme l'est $+1$ pour les nombres naturels).

[44] Je suis, à la fois dans la présentation et dans le contenu, le manuscrit distribué lors du cours d'introduction à la logique de J. Adler et G. Jäger en 2003.

PROOF

$\mathbf{H_{11}}$	$\ulcorner(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)\urcorner$	*conversion*
$\mathbf{H_{12}}$	$\ulcorner\phi \to (\neg\phi \to \psi)\urcorner$	*ex falso quodlibet*
$\mathbf{H_{13}}$	$\ulcorner(\phi \to (\phi \wedge \neg\phi)) \to \neg\phi\urcorner$	*reductio ad absurdum*
$\mathbf{H_{14}}$	$\ulcorner((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)) \to (\phi \leftrightarrow \psi)\urcorner$	*introduire « ↔ »*
$\mathbf{H_{15}}$	$\ulcorner(\phi \leftrightarrow \psi) \to ((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi))\urcorner$	*éliminer « ↔ »*
$\mathbf{H_{16}}$	$\ulcorner\phi \vee \neg\phi\urcorner$	*tautologie*

La seule règle d'inférence de HC *est modus ponens* MP *:* $\dfrac{\phi, \ulcorner\phi \to \psi\urcorner}{\psi}$.

La règle que nous appelons « MP » signifie : si une implication matérielle $\ulcorner\phi \to \psi\urcorner$ et son antécédent ϕ ont été prouvés, alors le conséquent ψ de cette implication matérielle peut aussi être considéré comme prouvé.

Il est important de bien lire notre définition du calcul HC. Elle nous dit que nous considérons, parmi les formules bien formées du langage $\mathcal{L}$, un certain sous-ensemble comme des « axiomes » : c'est-à-dire toutes les formules qui ont une des formes des théorèmes $\mathbf{H_1}$ à $\mathbf{H_{16}}$. En effet, les assertions $\mathbf{H_1}$ à $\mathbf{H_{16}}$ *stipulent* que toute formule qui a la forme indiquée est un théorème ; en faisant ceci, notre définition définit tout simplement un ensemble de phrases. La règle d'inférence nous dit sous quelle opération cet ensemble est fermé, c'est-à-dire que toute formule que nous pouvons obtenir à l'aide de MP à partir de formules dans notre ensemble appartient également à cet ensemble.

Il y a plusieurs calculs équivalents pour la logique des phrases. En 1879, Frege fut le premier à axiomatiser la logique propositionnelle et à fournir des règles formelles d'inférence. Bertrand Russell a ensuite développé plusieurs calculs. Dans son article « The theory of implication » (1906), Russell a donné les schémas d'axiomes suivants :

1 $\ulcorner\phi \to \phi\urcorner$
2 $\ulcorner\phi \to (\psi \to \psi)\urcorner$
3 $\ulcorner(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))\urcorner$
4 $\ulcorner(\phi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\phi \to \chi))\urcorner$
5 $\ulcorner(\neg\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \phi)\urcorner$
6 $\ulcorner(\phi \to \neg\phi) \to \neg\phi\urcorner$
7 $\ulcorner(\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\phi)\urcorner$

Dans les *Principia Mathematica*, Russell et Whitehead ont proposé :

1 $\ulcorner(\phi \vee \phi) \to \phi\urcorner$
2 $\ulcorner\psi \to (\phi \vee \psi)\urcorner$
3 $\ulcorner(\phi \vee \psi) \to (\psi \vee \phi)\urcorner$
4 $\ulcorner(\phi \vee (\psi \vee \chi)) \to (\psi \vee (\phi \vee \chi))\urcorner$
5 $\ulcorner(\psi \to \chi) \to ((\phi \vee \psi) \to (\phi \vee \chi))\urcorner$

Hilbert et Ackermann ont montré que l'axiome 4 n'était pas indépendant (c'est-à-dire qu'il pouvait être déduit des autres). Un autre système axiomatique est celui de Łukasiewicz (1929) :

PROOF

1 $\ulcorner(\phi \vee \phi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))\urcorner$
2 $\ulcorner\phi \rightarrow (\neg\phi \vee \psi)\urcorner$
3 $\ulcorner(\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi\urcorner$

On voit alors qu'il est parfaitement possible qu'une phrase qui est un théorème dans un calcul soit un axiome dans un autre. Bien qu'ils se distinguent par leurs axiomes, ces calculs sont tous équivalents dans le sens qu'ils permettent la dérivation des mêmes phrases (et qu'ils ont en conséquence les mêmes théorèmes).

Celui que nous avons donné n'est ni le plus court ni le plus simple, mais il est à mon avis l'un des plus pratiques pour obtenir des preuves.

Dire que ces axiomes sont des schémas signifie que toute phrase pouvant être dénotée par l'un des noms complexes donnés est un axiome du calcul : « $p \rightarrow p$ », par exemple, est un axiome parce que cette phrase complexe est de la même forme que le schéma $\ulcorner\phi \rightarrow \phi\urcorner$. Nous disons alors que la phrase complexe est une *instance* du schéma. La phrase « $(q \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$ » est un axiome parce qu'elle est de cette même forme (une instance du même schéma), « $(p \vee ((q \wedge (r \leftrightarrow s)) \rightarrow t) \rightarrow (p \vee ((q \wedge (r \leftrightarrow s)) \rightarrow t)$ » l'est aussi, et ainsi de suite.[45] On peut donc constater que HC contient une infinité d'axiomes. De la même manière, les phrases « $p \leftrightarrow p$ », « $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge q)$ », « $(p \vee ((q \wedge (r \leftrightarrow s)) \rightarrow t) \leftrightarrow (p \vee ((q \wedge (r \leftrightarrow s)) \rightarrow t)$ » sont des théorèmes parce qu'ils peuvent, par MP, être déduits des instances des schémas d'axiomes $\mathbf{H_{14}}$ et $\mathbf{H_1}$.

L'équivalence des différentes axiomatisations de la logique des phrases signifie qu'elles ne se distinguent que par le choix de leurs axiomes : elles ont la même règle d'inférence et se composent des mêmes théorèmes. Opérer un choix parmi ces différents types d'axiomatisation est donc une question pratique, indépendante de considérations purement logiques. Le fameux logicien français Jean Nicod (duquel l'Institut Nicod à Paris a tiré son nom) a montré que la barre de Sheffer (cf. p. 92) permet la formulation d'un calcul équivalent à HC qui n'a qu'un seul axiome (cf. Nicod, 1917–1920) :[46]

$$\ulcorner(\phi|(\psi|\chi)) \quad | \quad ((\xi|(\xi|\xi)) \,|\, ((\rho|\psi) \,|\, ((\phi|\rho)|(\phi|\rho))))\urcorner$$

Les axiomes que nous venons de donner dans notre calcul HC ne forment pas une axiomatisation indépendante. Il serait possible de dériver certains de ces axiomes à partir des autres.

4.7 Les preuves dans et les preuves sur le calcul

Considérons quelques preuves dans ce calcul. Pour commencer, nous démontrons que la disjonction est commutative, c'est-à-dire que toute phrase ayant la même forme que « $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ » est un théorème :[47]

[45] Une autre manière de formuler un calcul est de spécifier les axiomes utilisant des abréviations pour des phrases « p » et « q » et d'adopter une règle d'inférence supplémentaire de *substitution* qui dit que tout résultat d'une substitution d'une phrase par une autre dans un théorème donne lieu à un théorème.

[46] Wajsberg et Łukasiewicz ont aussi établi chacun un système d'un seul axiome. Leurs systèmes ont l'avantage supplémentaire de ne contenir que quatre phrases différentes.

[47] Nous relâcherons par la suite nos règles strictes sur l'usage des guillemets. « HC $\vdash p \vee \neg p$ », par exemple, est une phrase qui appartient au métalangage (elle dit *de* la phrase « $p \vee \neg p$ » qu'elle peut être dérivée dans HC). Nous l'écrivons sans guillemets pour ne pas trop nous compliquer la vie.

PROOF

(1)	$\mathsf{HC} \vdash p \to (q \vee p)$	$\mathbf{H_6}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash q \to (q \vee p)$	$\mathbf{H_5}$
(3)	$\mathsf{HC} \vdash (p \to (q \vee p)) \to ((q \to (q \vee p)) \to ((p \vee q) \to (q \vee p)))$	$\mathbf{H_7}$
(4)	$\mathsf{HC} \vdash (q \to (q \vee p)) \to ((p \vee q) \to (q \vee p))$	(MP) de (1) et (3)
(5)	$\mathsf{HC} \vdash (p \vee q) \to (q \vee p)$	(MP) de (2) et (4)

Nous énumérons les lignes de la preuve dans la colonne de gauche pour une référence future. Dans la colonne de droite, nous indiquons soit le numéro du schéma d'axiomes dont la ligne en est une instance, soit la règle d'inférence utilisée et les lignes auxquelles elle a été appliquée. Dans la troisième ligne, par exemple, nous avons substitué χ dans $\mathbf{H_7}$ par « $q \vee p$ ». La difficulté principale avec les preuves dans les calculs est de savoir quelles sont les formules qu'il faut substituer dans les schémas d'axiomes pour être ensuite capable de déduire la conclusion voulue avec MP.

Il est évident qu'une preuve comme celle de la commutativité de la disjonction est purement formelle : il s'agit d'une manipulation de symboles qui ne fait aucune référence à leurs significations. Nous aurions pu argumenter la commutativité de la disjonction d'une autre manière : de manière sémantique, en considérant que la table de vérité donnée pour « $\vee$ » était symétrique et qu'on pouvait librement échanger « p » pour « q » sans aucune altération dans la table de vérité,[48] ou encore par un argument pragmatique, en argumentant que l'usage du « ou » inclusif dans le langage ordinaire ne distingue pas l'ordre des disjoints.[49] La preuve syntaxique est particulière en ce qu'elle est une application complètement mécanique de schémas d'axiomes et de règles d'inférence, application qui peut être vérifiée par un ordinateur. Étant donné que les schémas d'axiomes $\mathbf{H_5}$, $\mathbf{H_6}$ et $\mathbf{H_7}$ stipulent un certain rôle pour le signe « $\vee$ », ce signe s'applique à deux phrases quel que soit leur ordre respectif – peu importent les autres aspects de sa signification.

Il n'est pas tout à fait correct, par conséquent, de dire que ce qu'on a prouvé par la preuve purement syntaxique était la commutativité de la disjonction. Au sens restreint, tout ce qu'on a prouvé est que toute formule $\ulcorner(\phi \vee \psi) \to (\psi \vee \phi))\urcorner$ est un théorème du calcul HC. Parler d'une preuve à propos de la *disjonction*, présuppose déjà une certaine interprétation de ce signe « $\vee$ », qui n'est pas forcée par le calcul, mais compatible avec lui. Jusqu'à maintenant, tout ce que nous avons pu dériver de HC à propos de « $\vee$ » est que quelle que soit la relation signifiée par « $\vee$ » (son interprétation), elle sera commutative.

Nous voyons qu'un calcul peut admettre différentes interprétations. Si ce n'était que pour l'axiome $\mathbf{H_7}$, « $\vee$ » pourrait aussi signifier la conjonction. Les axiomes ne spécifient que des conditions nécessaires pour qu'une interprétation des symboles qu'ils contiennent soit admissible ou acceptable. Même la conjonction d'un grand nombre de conditions nécessaires ne constitue pas toujours une condition suffisante. Dans un tel cas, on dirait que le calcul HC n'a pas de *modèle* unique, un modèle étant une structure mathématique (comme, par exemple, notre système de connecteurs propositionnels donné par les tables de vérité) dont nous nous servons pour interpréter un calcul purement syntaxique.[50] Les axiomes restent indéterminés parmi différentes interprétations sans en spécifier une

[48] Les deux conditions sont équivalentes : échanger la première et la quatrième ligne et la deuxième et la troisième revient à remplacer « p » par « q » et vice versa.

[49] Ce dernier argument serait difficile à faire : il semble que les disjoints ne sont pas échangeables dans « il gagne mille euro par mois ou même plus », par exemple – un autre exemple qui montre à quel point nous idéalisons le langage naturel en logique.

[50] L'interprétation de « $\vee$ » comme conjonction, compatible avec $\mathbf{H_7}$, poserait des problèmes avec $\mathbf{H_5}$ et $\mathbf{H_6}$, mais rien ne

PROOF

comme la seule correcte.[51]

Puisque le raisonnement sémantique 'par modèles' nous est souvent beaucoup plus naturel que la manipulation purement syntaxique de symboles non interprétés, les preuves dans les calculs axiomatiques deviennent vite assez compliquées.[52] Pour une preuve plus compliquée, voici une démonstration que « $(\neg p \vee q) \to (p \to q)$ » est un théorème :

(1)	$\mathsf{HC} \vdash p \to (\neg p \to q)$	$\mathbf{H_{12}}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash (p \to (\neg p \to q)) \to ((p \wedge \neg p) \to q)$	$\mathbf{H_4}$
(3)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge \neg p) \to q$	(MP) de (1) et (2)
(4)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \wedge p) \to p$	$\mathbf{H_9}$
(5)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \wedge p) \to \neg p$	$\mathbf{H_8}$
(6)	$\mathsf{HC} \vdash ((\neg p \wedge p) \to p) \to (((\neg p \wedge p) \to \neg p) \to ((\neg p \wedge p) \to (p \wedge \neg p)))$	$\mathbf{H_{10}}$
(7)	$\mathsf{HC} \vdash ((\neg p \wedge p) \to \neg p) \to ((\neg p \wedge p) \to (p \wedge \neg p))$	(MP) de (4) et (6)
(8)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \wedge p) \to (p \wedge \neg p)$	(MP) de (5) et (7)
(9)	$\mathsf{HC} \vdash ((\neg p \wedge p) \to (p \wedge \neg p)) \to (((p \wedge \neg p) \to q) \to ((\neg p \wedge p) \to q))$	$\mathbf{H_2}$
(10)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \wedge \neg p) \to q) \to ((\neg p \wedge p) \to q))$	(MP) de (8) et (9)
(11)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \wedge p) \to q)$	(MP) de (3) et (10)
(12)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \wedge p) \to q) \to (\neg p \to (p \to q))$	$\mathbf{H_3}$
(13)	$\mathsf{HC} \vdash \neg p \to (p \to q)$	(MP) de (11) et (12)
(14)	$\mathsf{HC} \vdash ((q \wedge p) \to q) \to (q \to (p \to q))$	$\mathbf{H_3}$
(15)	$\mathsf{HC} \vdash (q \wedge p) \to q$	$\mathbf{H_8}$
(16)	$\mathsf{HC} \vdash q \to (p \to q)$	(MP) de (14) et (15)
(17)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \to (p \to q)) \to ((q \to (p \to q)) \to ((\neg p \vee q) \to (p \to q)))$	$\mathbf{H_7}$
(18)	$\mathsf{HC} \vdash (q \to (p \to q)) \to ((\neg p \vee q) \to (p \to q))$	(MP) de (13) et (17)
(19)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \vee q) \to (p \to q)$	(MP) de (16) et (18)

On voit dans cette preuve que de nombreuses étapes intermédiaires sont nécessaires pour prouver des phrases à première vue 'triviales' comme l'équivalence entre $\ulcorner \neg\phi \vee \psi \urcorner$ et $\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$. Les huit premières lignes, par exemple, servent à établir la commutativité de la conjonction ; à la ligne 11 on a l'équivalent de l'affirmation que n'importe quelle phrase s'ensuit d'une contradiction.

L'utilisation de l'axiome $\mathbf{H_{16}}$ est la marque des preuves non constructives. En voici un exemple, la preuve de « $(p \to q) \to (\neg p \vee q)$ » :

(1)	$\mathsf{HC} \vdash (p \to q) \to (p \to q)$	$\mathbf{H_1}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \to q) \to (p \to q)) \to (((p \to q) \wedge p) \to q)$	$\mathbf{H_4}$

nous garantit qu'il y aura toujours assez d'autres axiomes pour parvenir à une interprétation unique.

[51] Nous adoptons donc en logique un point de vue structuraliste (cf. p. 98) : aucun théorème de la logique propositionnelle ne saura distinguer une interprétation de « $\vee$ » comme « ou » d'une interprétation qui lit « $p \vee q$ » comme « p ou q et soit il pleut soit il ne pleut pas ».

[52] C'est aussi pour cela qu'on a donné des noms aux différents schémas d'axiomes (comme « réflexivité » pour l'axiome **H1**) – ces noms ne font pas partie du calcul ‹ officiel › , mais nous servent à mieux retenir les schémas et à faciliter leur utilisation.

PROOF

(3)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \to q) \wedge p) \to q$	(MP) de (1) et (2)
(4)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge (p \to q)) \to q$	de (3) par la 'commutativité de $\wedge$'
(5)	$\mathsf{HC} \vdash q \to (\neg p \vee q)$	$\mathbf{H_6}$
(6)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge (p \to q)) \to (\neg p \vee q)$	par 'transitivité' de (4) et (5)
(7)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \wedge (p \to q)) \to (\neg p \vee q)) \to (p \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q)))$	$\mathbf{H_3}$
(8)	$\mathsf{HC} \vdash p \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q))$	(MP) de (6) et (7)
(9)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \wedge (\neg(p \to q))) \to \neg p$	$\mathbf{H_8}$
(10)	$\mathsf{HC} \vdash \neg p \to (\neg p \vee q)$	$\mathbf{H_5}$
(11)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \wedge (\neg(p \to q))) \to (\neg p \vee q)$	de (9) et (10) par 'transitivité'
(12)	$\mathsf{HC} \vdash ((\neg p \wedge (\neg(p \to q)) \to (\neg p \vee q)) \to (\neg p \to ((\neg(p \to q) \to (\neg p \vee q)))$	$\mathbf{H_3}$
(13)	$\mathsf{HC} \vdash \neg p \to (\neg(p \to q)) \vee (\neg p \vee q))$	de (11) et (12) par (MP)
(14)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \to q) \to (\neg(p \to q)) \to (\neg p \vee q)$	$\mathbf{H_{12}}$
(15)	$\mathsf{HC} \vdash (((p \to q) \to (\neg(p \to q)) \to (\neg p \vee q)) \to (((p \to q) \wedge (\neg(p \to q)) \to (\neg p \vee q))$	$\mathbf{H_4}$
(16)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \to q) \wedge (\neg(p \to q)) \to (\neg p \vee q)$	de (14) et (15) par (MP)
(17)	$\mathsf{HC} \vdash ((\neg(p \to q) \wedge (p \to q)) \to (\neg p \vee q)$	de (16) par la 'commutativité de $\wedge$'
(18)	$\mathsf{HC} \vdash ((\neg(p \to q) \wedge (p \to q)) \to (\neg p \vee q) \to (\neg(p \to q) \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q))$	$\mathbf{H_3}$
(19)	$\mathsf{HC} \vdash \neg(p \to q) \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q))$	de (17) et (18) par (MP)
(20)	$\mathsf{HC} \vdash ((\neg p \vee q) \wedge ((p \to q)) \to (\neg p \vee q)$	$\mathbf{H_8}$
(21)	$\mathsf{HC} \vdash (((\neg p \vee q) \wedge ((p \to q)) \to (\neg p \vee q)) \to ((\neg p \vee q) \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q)))$	$\mathbf{H_3}$
(22)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \vee q) \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q))$	de (20) et (21) par (MP)
(23)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg(p \to q) \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q))) \to (((\neg p \vee q) \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q))) \to ((\neg(p \to q) \vee (\neg p \vee q) \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q))))$	$\mathbf{H_7}$
(24)	$\mathsf{HC} \vdash ((\neg p \vee q) \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q))) \to ((\neg(p \to q) \vee(\neg p \vee q) \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q))))$	de (19) et (23) par (MP)
(25)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg(p \to q) \vee (\neg p \vee q)) \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q))$	de (22) et (24) par (MP)
(26)	$\mathsf{HC} \vdash \neg p \to (((p \to q) \to (\neg p \vee q))$	de (13) et (25) par 'transitivité'
(27)	$\mathsf{HC} \vdash (p \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q)) \to ((\neg p \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q)) \to ((p \vee \neg p) \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q)))$	$\mathbf{H_7}$
(28)	$\mathsf{HC} \vdash ((\neg p \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q)))) \to ((p \vee \neg p) \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q)))$	de (13) et (27) par MP
(29)	$\mathsf{HC} \vdash (p \vee \neg p) \to ((p \to q) \to (\neg p \vee q))$	de (26) et (28) par MP
(30)	$\mathsf{HC} \vdash p \vee \neg p$	$\mathbf{H_{16}}$
(31)	$\mathsf{HC} \vdash (p \to q) \to (\neg p \vee q)$	de (29) et (30) par MP

Nous avons utilisé ici deux résultats que nous n'établirons que plus tard : principalement la transitivité des preuves (voir ci-dessous), mais aussi la commutativité de la conjonction ($\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$) à

PROOF

la ligne (4) (cf. la question (7a) de la série 4, p. 380).

Nos exemples montrent qu'il est assez pénible de faire des preuves dans un calcul. L'utilité principale de ces calculs ne réside cependant pas dans leur application pour faire des preuves, mais dans le fait que ces preuves sont parfaitement mécaniques : pour tester, par exemple, que la preuve donnée pour $\ulcorner(\neg\phi \vee \psi) \to (\phi \to \psi)\urcorner$ est correcte il suffit de vérifier que les instances des schémas d'axiomes en soient réellement des instances et que la règle MP ait été appliquée correctement – c'est un travail qu'un ordinateur peut faire. Les calculs trouvent donc leur principale utilité dans la *vérification* de preuves.

Un autre point fort des calculs est qu'il est relativement simple d'établir des théorèmes métamathématiques qui prouvent qu'un certain calcul a une certaine propriété métamathématique. Un théorème métamathématique sur HC n'est pas un théorème de HC, mais un théorème obtenu par des méthodes de preuves 'ordinaires' en mathématique qui parlent *de* HC et en établissent des propriétés. En faisant ces preuves, nous opérons dans un métalangage par rapport au langage de HC et nous mentionnons ses formules.

Par exemple, nous pouvons prouver (dans le métalangage) que si HC peut prouver (dans le langage-objet) deux implications matérielles telles que le conséquent du premier est l'antécédent du deuxième, alors HC peut également prouver l'implication matérielle du conséquent du deuxième par l'antécédent du premier (cf. 4.2 en bas). On peut également prouver que s'il y a deux preuves pour deux phrases, il y aura aussi une preuve pour la phrase complexe qui est leur conjonction (cf. 4.3). La première preuve établit la transitivité de la relation de déductibilité $\vdash$ de HC, la seconde que l'on peut combiner deux preuves dans une seule preuve.[53]

Théorème 10. *Soient ϕ, ψ, χ des formules propositionnelles :*[54]

$$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi \quad \& \quad \mathsf{HC} \vdash \psi \to \chi \implies \mathsf{HC} \vdash \phi \to \chi \tag{4.2}$$

$$\mathsf{HC} \vdash \phi \quad \& \quad \mathsf{HC} \vdash \psi \implies \mathsf{HC} \vdash \phi \wedge \psi \tag{4.3}$$

Démonstration. **Preuve de (4.2) :** L'antécédent de (4.2) signifie qu'il y a des nombres n_1 et n_2 tels que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1} \phi \to \psi \qquad \mathsf{HC} \vdash^{n_2} \psi \to \chi$$

Un des deux nombres n_1 et n_2 n'est pas plus grand que l'autre. Supposons que $n_2 \leq n_1$. Nous devons démontrer qu'il existe un nombre n_3 tel que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_3} \phi \to \chi$$

Par $\mathbf{H_2}$, nous savons que

$$\mathsf{HC} \vdash^{0} (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$$

Avec (MP), nous pouvons donc dériver à partir de « $\mathsf{HC} \vdash^{n_1} \phi \to \psi$ » :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1+1} (\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi)$$

[53] Dans la leçon 3 (p. 87), nous avons établi un résultat similaire pour la relation *sémantique* $\vDash$ de conséquence logique. Nous reviendrons sur ce parallélisme dans le chapitre 7. Nous remarquons également que les deux preuves se font par induction mathématique 'ordinaire', cf. n. 43 à la page 107.

[54] Notez l'utilisation des signes « & » et « $\implies$ », qui appartiennent au métalangage (cf. p. 64).

PROOF

Avec (MP), nous dérivons à partir de ceci et de « $\mathsf{HC} \vdash^{n_2} \psi \to \chi$ » ce dont nous avons besoin pour prouver (4.2) :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1+2} \phi \to \chi$$

Preuve de (4.3) : L'antécédent de (4.3), « $\mathsf{HC} \vdash \phi$ & $\mathsf{HC} \vdash \psi$ », signifie qu'il y a des nombres n_1 et n_2 tels que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1} \phi \qquad \mathsf{HC} \vdash^{n_2} \psi$$

Supposons que $n_2 \leq n_1$. Nous devons démontrer qu'il y a un nombre n_3 tel que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_3} \phi \wedge \psi$$

Par $\mathbf{H_1}$, nous savons que

$$\mathsf{HC} \vdash^{0} (\phi \wedge \psi) \to (\phi \wedge \psi)$$

Par $\mathbf{H_3}$, nous savons également que

$$\mathsf{HC} \vdash^{0} ((\phi \wedge \psi) \to (\phi \wedge \psi)) \to (\phi \to (\psi \to (\phi \wedge \psi)))$$

En appliquant (MP) à ces deux théorèmes, nous obtenons :

$$\mathsf{HC} \vdash^{1} \phi \to (\psi \to (\phi \wedge \psi))$$

A partir de cette ligne et de « $\mathsf{HC} \vdash^{n_1} \phi$ », nous dérivons par (MP) :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1+1} \psi \to (\phi \wedge \psi)$$

A partir de cette ligne et de « $\mathsf{HC} \vdash^{n_2} \psi$ », nous dérivons par (MP) :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1+2} \phi \wedge \psi$$ □

Cette preuve n'est pas faite *dans* le calcul HC : elle explique comment nous pouvons manipuler des preuves de ce calcul pour en obtenir d'autres. Elle établit ainsi un résultat en métamathématique : elle ne prouve pas de théorème (de HC), mais montre que si des phrases de telles formes sont des théorèmes, alors une autre phrase d'une autre forme l'est également. Elle nous montre ce que nous pouvons accomplir avec notre outil purement syntaxique HC.

En nous montrant comment combiner les deux preuves de ϕ et ψ en une preuve de $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$, notre preuve en métamathématique profite du fait que les preuves à l'intérieur de HC sont purement mécaniques. C'est parce qu'elles se font toujours de la même manière que nous pouvons les généraliser. Raisonnant de manière abstraite sur la forme de ces preuves, nous démontrons par quelles manières nous pouvons les changer, tout en préservant leur caractère démonstratif. Raisonnant dans un métalangage, nous avons ainsi établi notre premier résultat métamathématique.

Points à retenir

1. Mis à part la méthode sémantique des tables de vérité, il existe une méthode syntaxique, qui ne fait pas seulement abstraction des significations des phrases, mais aussi de leurs valeurs de vérité.

PROOF

2. Il est possible de définir la syntaxe de la langue $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle de manière rigoureuse.
3. Tous les connecteurs de la logique propositionnelle sont définissables par un seul, la barre de Sheffer.
4. La logique moderne a pris sa source dans les travaux de Frege (*Begriffsschrift* / *Idéographie*, 1879) et les travaux de Russell et Whitehead (*Principia Mathematica*, 1910).
5. La révolution en logique a rendu possibles d'importants progrès en mathématiques (axiomatisation de l'arithmétique et de la géométrie) et leur a ajouté deux nouvelles branches, les métamathématiques (étude des calculs formels, Hilbert) et la théorie des ensembles (Cantor, Zermelo).
6. Dans la première moitié du 20ème siècle, les trois grands courants en philosophie des mathématiques étaient le logicisme de Frege (les mathématiques comme partie de la logique), le formalisme de Hilbert (les mathématiques comme manipulation de symbole) et l'intuitionnisme de Brouwer et Heyting (constructivisme, rejet du tiers exclu).
7. Un calcul consiste en des axiomes et des règles d'inférence qui permettent de déduire des théorèmes à partir des axiomes.
8. Il est possible de définir de manière purement syntaxique ce qu'est une preuve (dans un certain calcul).
9. La logique propositionnelle peut être axiomatisée de différentes manières.
10. Il faut distinguer les preuves dans le calcul (qui se font par les règles d'inférence et des substitutions dans des axiomes) et les preuves sur le calcul (qui parlent, par exemple, en général de l'existence de certaines preuves) qui se font par les méthodes mathématiques 'ordinaires'.

PROOF

PROOF

dialectica *series of anthologies*

5 La méthode des arbres

5.1 La sémantique de la logique propositionnelle

Nous avons introduit dans la leçon 4 une méthode pour faire des preuves purement syntaxique, laquelle nous a permis de déduire des phrases à partir de quelques axiomes d'un calcul. Il nous fallait faire abstraction non seulement des significations de ces phrases, mais aussi de leurs valeurs de vérité. Bien que nous n'ayons aucunement utilisé ce fait, les phrases ainsi prouvées étaient des tautologies (ce que l'on peut aisément démontrer par des tables de vérité). On peut donc se demander quelle est la relation entre la méthode des tables de vérité qui nous permet de vérifier si une phrase donnée est une tautologie et la méthode des calculs axiomatiques qui nous permet de dériver, à l'aide de MP, des théorèmes à partir des axiomes $\mathbf{H_1}$ à $\mathbf{H_{16}}$. Pour pouvoir répondre à cette question, nous devons introduire une sémantique rigoureuse pour le langage $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle, dont on a défini la syntaxe dans la leçon 4 (cf. p. 90 et suivantes).

Comme la logique propositionnelle obéit au principe de vérifonctionnalité (cf. p. 37), sa sémantique nous permet d'attribuer des valeurs de vérité, **v** (« vrai ») ou **f** (« faux »), à des formules complexes sur la base des valeurs de vérité des phrases atomiques dont elles sont composées.[1]

Définition 11 (Valuations propositionnelles atomiques)**.** *Une* valuation propositionnelle atomique *V^* est une fonction qui assigne à toute phrase atomique « p_i », $i \in \mathbb{N}$, l'une des valeurs de vérité* **v** *ou* **f**. *En formules, $V^* : \{ \text{« } p_i \text{ » } \mid i \in \mathbb{N}\} \to \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$.*[2]

Une valuation atomique correspond à une ligne dans la table de vérité couvrant toutes les phrases simples de notre langage $\mathcal{L}$ – une table infinie, de longueur $2^{\aleph_0}$, puisqu'elle couvre toutes les possibilités de combiner la vérité et la fausseté d'une infinité de phrases.[3]

La définition 11 ne couvre que le cas des phrases atomiques. La définition générale nous montre comment étendre, par des clauses récursives, une telle valuation propositionnelle atomique à une valuation (attribution de valeurs de vérité) de toutes les formules de notre langage :

[1] J'utilise « **v** » et « **f** » pour indiquer qu'on traite ici les valeurs de vérité comme des ‹ objets logiques ›, c'est-à-dire des choses qui peuvent être valeurs de fonctions. Par contre, l'utilisation de « V » et « F » dans les tables de vérité pourrait être paraphrasée de manière à ne pas réifier (traiter comme objets) les valeurs de vérité (cf. n. 16 à la p. 38). Au lieu de dire, par exemple, que « $p \to q$ » reçoit « F » comme valeur de vérité dans la deuxième ligne de la table de vérité pour cette phrase complexe (phrase qui m'engage à l'existence de valeurs de vérité), on pourrait dire que la phrase est fausse si son antécédent est vrai et son conséquent faux.

[2] Pour désigner la valeur de vérité (**v** ou **f**) que est la valeur de cette fonction, pour une phrase « p » comme argument, on utilise non seulement « $V^*(\text{« } p \text{ »})$ » (ou même « $V^*(p)$ »), mais aussi « $[p]_{V^*}$ ».

[3] On appelle par le premier lettre de l'alphabet hébreu, « $\aleph$ » (« aleph ») les nombres cardinaux des ensembles infinies qui 'mesurent leur taille', et on utilise le premier de cette série « $\aleph_0$ » (« aleph zéro ») pour parler de la cardinalité (le 'nombre') des nombres naturels $\mathbb{N}$. Notre notion intuitive de 'nombre' (le résultat d'un compte), cependant, ne s'applique que très imparfaitement à des ensembles infinies. Les deux séries que les structuralistes compteraient au même type comme 'les' nombres naturels, $\langle 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$ et $\langle 0, 2, 4, 6, \ldots \rangle$ (cf. n. 26 à la p. 99), par exemple, ont la même cardinalité. Et pourtant nous allons voir, à la p. 306, qu'il existent différents types d'infinité : $2^{\aleph_0}$ est strictement plus grand que $\aleph_0$!

PROOF

Définition 12 (Valuations propositionnelles). *Étant donné une valuation propositionnelle atomique V^*, nous définissons une* valuation propositionnelle *V (qui est une fonction associant à toute formule propositionnelle une et une seule valeur de vérité ; en symboles, $V : \mathrm{Form}(\mathcal{L}) \to \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$) par des clauses récursives :*

I1 *Si ϕ est une phrase atomique « p », $V(\phi) := V^*(\text{« } p \text{ »})$*

I2 $$V(\neg\phi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } V(\phi) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & \text{si } V(\phi) = \mathbf{v} \end{cases}$$

I3 $$V(\phi \wedge \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } V(\phi) = \mathbf{v} \text{ et } V(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & \text{si } V(\phi) = \mathbf{f} \text{ ou } V(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$$

I4 $$V(\phi \vee \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } V(\phi) = \mathbf{v} \text{ ou } V(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & \text{si } V(\phi) = \mathbf{f} \text{ et } V(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$$

I5 $$V(\phi \to \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } V(\phi) = \mathbf{f} \text{ ou } V(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & \text{si } V(\phi) = \mathbf{v} \text{ et } V(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$$

I6 $$V(\phi \leftrightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } V(\phi) = V(\psi) \\ \mathbf{f} & \text{si } V(\phi) \neq V(\psi) \end{cases}$$

On reconnaît, dans la spécification de cette fonction V, le même raisonnement qui nous a permis de définir les connecteurs par des tables de vérité.[4] Les valuations correspondent aux possibilités logiques, aux lignes dans une table de vérité.

Une valuation atomique V^* qui attribue $\mathbf{v}$ à « p », à « q » et à « r » et $\mathbf{f}$ à « s » et à « t » ($V^*(\text{« } p \text{ »}) = V^*(\text{« } q \text{ »}) = V^*(\text{« } r \text{ »}) = \mathbf{v}$ & $V^*(\text{« } s \text{ »}) = V^*(\text{« } t \text{ »}) = \mathbf{f}$), par exemple, nous donnera une valuation V qui attribuera $\mathbf{v}$ à « $p \wedge q$ », à « $p \vee s$ », etc. et $\mathbf{f}$ à « $p \to s$ », à « $t \vee s$ », etc.[5] Elle correspond à une possibilité logique dans laquelle « p », « q » et « r » sont vrais et « s » et « t » faux. Elle correspond ainsi à la quatrième ligne dans la table de vérité de ces cinq phrases (qui comporte, au total, 32 lignes) : *V-V-V-F-F*.

Si une phrase « p » reçoit la valeur $\mathbf{v}$ sous une valuation V, nous pouvons dire que cette valuation *satisfait* la phrase : elle nous montre comment le monde pourrait être si « p » était vrai.

Définition 13 (Satisfaisabilité). *Une formule propositionnelle ϕ est* satisfaisable *si et seulement si elle est vraie sous au moins une valuation de ses constituants simples.*

Si une phrase ϕ reçoit la valeur $\mathbf{v}$ sous une valuation V, nous pouvons dire que cette valuation nous montre comment construire un *modèle* de cette phrase : un modèle pour ϕ est une structure (normalement mathématique) dont ϕ, sous une certaine valuation de ses constituants simples, est une description correcte. Dans le cas où nous examinons une affirmation qu'une certaine formule est

[4] La définition (12) est formulée dans le métalangage ; elle utilise les expressions « et », « ou » et « si ...alors »du métalangage pour spécifier la signification des expressions « $\neg$ », « $\wedge$ », « $\vee$ », « $\to$ » « $\leftrightarrow$ »du langage-objet (cf. p. 59 pour le problème de la circularité epistémique).

[5] Plus simplement, et en confusant utilisation et mention :

$$(V(p,q,r) = \mathbf{v} \;\&\; V(s,t) = \mathbf{f}) \implies (V(p \wedge q, p \vee s) = \mathbf{v} \;\&\; V(p \to s, t \vee s) = \mathbf{f})$$

À strictement parler, une valuation attribue des valeurs de vérité à des phrases – mais l'expression ci-dessus se comprend.

PROOF

une tautologie, la satisfaisabilité de sa négation nous donne un contre-exemple à l'affirmation de caractère tautologique : pour réfuter quelqu'un qui dit qu'une certaine thèse est vraie nécessairement, c'est-à-dire dans *toutes* les possibilités logiques, est réfuté par la démonstration que sa thèse est fausse dans *une seule* de ces possibilités, c'est-à-dire que sa négation est satisfaisable (a un modèle). La *théorie des modèles* (cf. p. 111 et p. 308 et suivantes) est cette branche de la sémantique formelle qui étudie les interprétations des systèmes formels par des structures mathématiques, souvent construites à l'aide de la théorie des ensembles.[6]

Nous pouvons maintenant donner une définition rigoureuse de la relation de conséquence logique :

Définition 14 (Conséquence logique)**.** *Une formule propositionnelle ψ est* une conséquence logique *d'une formule propositionnelle ϕ (écrit : « $\phi \vDash \psi$ ») si et seulement si toute valuation qui satisfait ϕ satisfait également ψ.*

Si aucune valuation qui assigne **v** à ϕ n'assigne **f** à ψ, alors il n'y a que des « V » dans la table de vérité pour $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ – puisque l'implication matérielle est une tautologie, il s'agit d'une implication formelle.

Nous pouvons étendre notre définition de la relation de conséquence logique (sémantique) aux théories :

Définition 15 (Conséquence logique d'une théorie)**.** *Une formule propositionnelle ϕ est une* conséquence *(logique) d'une théorie* Th *(écrit : « $\mathsf{Th} \vDash \phi$ ») si et seulement si toute valuation qui rend vraies toutes les formules propositionnelles dans* Th *rend vraie la formule ϕ.*[7]

Si ϕ est une conséquence de la théorie vide ($\mathsf{Th} = \varnothing$) et s'ensuit donc seulement des axiomes d'un certain calcul, nous écrivons « $\vDash \phi$ » au lieu de « $\varnothing \vDash \phi$ ». « $\vDash \phi$ » veut donc dire que toute valuation rend vraie ϕ, c'est-à-dire que ϕ est valide ou est une tautologie.

Puisqu'une valuation correspond à une possibilité logique et réciproquement, nous pouvons donner une définition de ce que sont une tautologie et une contradiction en termes de « valuation » :

Définition 16 (Tautologies)**.** *Une formule propositionnelle ϕ est une* tautologie *si et seulement si elle est vraie sous toutes les valuations. Une formule propositionnelle ϕ est une* contradiction *si et seulement si elle n'est vraie sous aucune valuation.*[8]

---

[6] L'usage du mot « modèle » soulève une difficulté, puisqu'il n'est que partiellement analogue à l'usage de ce mot en philosophie des sciences ou, par exemple, en économie. En effet, les structures mathématiques qu'on appelle les « modèles » d'une théorie formelle ont une fonction double : d'une part, elles servent de représentation abstraite d'une application concrète de la théorie que nous pouvons retrouver en liant les éléments du modèle avec les choses ‹réellement existantes›(ce qui correspond à l'usage de « modèle » dans d'autres domaines) ; d'autre part, cependant, elles servent elles-mêmes d'interprétation et d'application : une théorie qui a un modèle dans ce dernier sens *est* réellement applicable à quelque chose, à savoir à la structure mathématique abstraite elle-même.

[7] Pour l'écrire formellement :

$$\mathsf{Th} \vDash \phi \;:\Longleftrightarrow\; \forall V\, \forall \psi \in \mathsf{Th}\; (V(\psi) = \mathbf{v} \;\rightarrow\; V(\phi) = \mathbf{v})$$

[8] Présupposant le principe de bivalence, une contradiction sera alors fausse sous toutes les valuations. Comme nous parlons ici de toutes les valuations (des phrases simples de notre langage $\mathcal{L}$), il n'est pas nécessaire de restreindre la définition aux valuations qui ne concernent que les phrases simples qui composent la tautologie ou la contradiction en question.

PROOF

Nous utilisons le signe « ⊨ » de la conséquence logique pour dire qu'une phrase est une tautologie : « ⊨ ϕ » veut dire que ϕ est une conséquence logique de n'importe quelle phrase ou, de manière équivalente, que ϕ est une tautologie.

Utilisant « ∃ … (⋯ … ⋯) » pour dire « il y a un … qui ⋯ » et « ∀ … (⋯ … ⋯) » pour dire « tous les … sont ⋯ », nous pouvons écrire les trois dernières définitions comme suit :[9]

ϕ est satisfaisable	$:\Longleftrightarrow$	$\exists V\,(V(\phi) = \mathbf{v})$
ϕ est une tautologie	$:\Longleftrightarrow$	$\forall V\,(V(\phi) = \mathbf{v})$
ϕ est une contradiction	$:\Longleftrightarrow$	$\forall V\,(V(\phi) = \mathbf{f})$
ψ est une conséquence logique de ϕ	$:\Longleftrightarrow$	$\forall V\,(V(\phi) = \mathbf{v} \Rightarrow V(\psi) = \mathbf{v})$

Bien que toute tautologie (ainsi que toute formule de notre langage) soit composée d'un nombre fini de phrases simples, il y a non seulement une infinité de formules bien formées, mais également une infinité de tautologies.[10]

Puisqu'elles sont de grande utilité pour faciliter les preuves, il convient tout de même d'en mentionner quelques-unes en particulier :[11]

T1	$\vDash \ulcorner(\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))\urcorner$	analyse de « ↔ »
T2	$\vDash \ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \vee \psi)\urcorner$	analyse de « → »
T3	$\vDash \ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \neg(\phi \wedge \neg\psi)\urcorner$	analyse de « → »
T4	$\vDash \ulcorner\neg(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \vee \neg\psi)\urcorner$	loi de Morgan
T5	$\vDash \ulcorner\neg(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi)\urcorner$	loi de Morgan
T6	$\vDash \ulcorner(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi))\urcorner$	distributivité
T7	$\vDash \ulcorner(\phi \vee (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi))\urcorner$	distributivité
T8	$\vDash \ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)\urcorner$	conversion
T9	$\vDash \ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \neg\psi)) \leftrightarrow \neg\phi\urcorner$	réduction à l'absurde
T10	$\vDash \ulcorner(\phi \rightarrow \neg\phi) \leftrightarrow \neg\phi\urcorner$	réduction à l'absurde
T11	$\vDash \ulcorner(\neg\phi \rightarrow \phi) \leftrightarrow \phi\urcorner$	'conséquence miraculeuse'
T12	$\vDash \ulcorner\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)\urcorner$	verum sequitur ad quodlibet
T13	$\vDash \ulcorner\neg\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)\urcorner$	ex falso sequitur quodlibet
T14	$\vDash \ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge \phi) \rightarrow \psi\urcorner$	modus ponendo ponens
T15	$\vDash \ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\phi\urcorner$	modus tollendo tollens
T16	$\vDash \ulcorner(\neg(\phi \wedge \psi) \wedge \phi) \rightarrow \neg\psi\urcorner$	modus ponendo tollens
T17	$\vDash \ulcorner((\phi \vee \psi) \wedge \neg\phi) \rightarrow \psi\urcorner$	modus tollendo ponens
T18	$\vDash \ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)\urcorner$	transitivité de l'implication
T19	$\vDash \ulcorner\phi \rightarrow \phi\urcorner$	'identité'
T20	$\vDash \ulcorner\phi \vee \neg\phi\urcorner$	tiers exclu

[9] Comme ces quantificateurs feront partie de notre langage de la logique des prédicats, leur utilisation ici – en métalangage, parlant du langage de la logique propositionnelle – est strictement parlant incorrecte ; mais elle se comprend quand même.

[10] Pour comprendre cela, il suffit de remarquer que $\ulcorner(\phi \vee \neg\phi) \vee \psi\urcorner$ est une tautologie pour n'importe quelle formule ψ.

[11] Les tautologies en question sont ici les phrases qui ont la forme des formules qui *suivent* le signe « ⊨ » ; ce signe est utilise pour dire qu'il s'agit des tautologies et appartient (comme le mot « tautologie ») au métalangage.
Nous avons déjà parlé de l'interdéfinissabilité des connecteurs (p. 76) et des lois de Morgan et de distributivité, importants pour la logique algebraique (p. 75 et p. 77), Nous avons rencontré la conversion à la p. 26 et la réduction à l'absurde à la p. 24.

PROOF

T21 $\models \ulcorner\neg(\phi \wedge \neg\phi)\urcorner$ non-contradiction

Dans le cas où une équivalence matérielle n'est non seulement vraie, mais également tautologique, on parle d'« équivalence logique ». Deux formules qui sont logiquement équivalentes peuvent être substituées l'une à l'autre dans n'importe quelle formule sans affecter sa table de vérité.[12] Nous constatons ainsi que la définition de l'équivalence matérielle en terme d'implication matérielle et la définition de l'implication matérielle en terme de négation et disjonction, ou de négation et conjonction (cf. p. 76), sont *correctes* : les tautologies **T1**, **T2** et **T3** nous assurent que nous pouvons universellement substituer le *definiendum* au *definiens* (‹ annulant › ainsi notre définition). Les tautologies **T1**, **T2** et **T3** nous assurent que ces définitions sont correctes dans le sens qu'elle reposent sur des tautologies et ne peuvent donc jamais avoir des instances 'fausses'.[13] De même, **T4** et **T5** nous assurent de la correction des lois de Morgan, ainsi que **T6** et **T7** de la correction des lois de distributivité.[14]

Comme elles nous montrent qu'il n'y existe aucune raison logique de distinguer deux phrases, les équivalences logiques nous permettent de formuler des règles d'inférence dérivées. C'est grâce à (**T8**), par exemple, que nous pouvons passer de $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ à $\ulcorner\neg\psi \rightarrow \neg\phi\urcorner$, ce que nous pouvons adopter comme la règle d'inférence dérivée appelée « conversion » (CP, cf. p. 26) :

$$\frac{\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner}{\ulcorner\neg\psi \rightarrow \neg\phi\urcorner}\ \text{CP} \qquad \text{(CP)}$$

De telles règles d'inférence dérivées facilitent les preuves dans le calcul parce qu'elles épargnent la pénible tâche qui consiste à chercher les substitutions adéquates dans les axiomes.

La réduction à l'absurde, connue déjà en antiquité,[15] a souvent soulevé des doutes par rapport à sa validité.

La 'conséquence miraculeuse' (« consequentia mirabilis ») se trouve également chez Aristote.[16]

Les implications matérielles tautologiques sont des implications formelles, c'est-à-dire des relations de conséquence logique. Elles nous garantissent également la correction des règles d'inférence : le fait que $\ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge \phi) \rightarrow \psi\urcorner$ soit une tautologie (**T14**), par exemple, nous montre que la règle *modus ponens* (MP), à partir de vérités, ne produit que des vérités – que le cas que les prémisses de ce schéma d'inférence soient vraies et la conclusion fausse ne peut pas arriver et, par conséquent, que le schéma d'inférence est valide. De même, les autres implications formelles nous assurent de la correction des règles d'inférence dérivées (« dérivées » parce qu'elles n'étaient pas mentionnées dans notre définition initiale du calcul).

Bien que, par exemple, la tautologie **T14** et la règle MP (et **T8** et CP) soient intimement liées (dans la mesure où la première nous assure de la correction de la deuxième), il faut tout de même

[12] Nous avons mentionné la dispensabilité dans ce sens précis comme condition d'adéquation pour les définitions à la p. 75.

[13] Je met « faux »entre 'scare quotes' ici parce que, strictement parlant, une définition n'est ni vraie ni fausse, mais plus ou moins adéquate, utile, sensible, etc.

[14] Nous parlons ici de « correction » dans le sens qu'une phrase ou règle d'inférence est « correcte » si et seulement si elle est ou correspond à une tautologie. On reviendra sur cette notion ci-dessous, cf. p. 168.

[15] « Si tu sais que tu es mort, alors tu es mort (car on ne peut savoir une chose fausse) ; si tu sais que tu es mort, alors tu n'es pas mort (car un mort ne sait rien) ; donc, tu ne sais pas que tu es mort. » (un stoïcien, rapporté par Origène ; d'après Blanché (1996, 70–71)).

[16] « Soit nous devrions philosopher soit nous ne le devrions pas. Si nous le devrions, nous le devrions. Si nous ne le devrions pas, nous le devrions [afin de justifier cette opinion]. Donc dans tous les cas, nous devrions philosopher. » (*Protréptique*) (cité d'après Kneale and Kneale (1962, 97), cf. aussi Kneale (1957) et Blanché (1996, 71)).

PROOF

les distinguer. Les tautologies sont des phrases du langage-objet qui (quoique dénuées de contenu d'après certains philosophes) parlent des objets (dans le sens dans lequel « Soit Socrate est mort, soit il ne l'est pas » parle de Socrate). Les règles, en revanche, sont des énoncés métalinguistiques, parlant de toutes les phrases ayant une certaine forme syntaxique : MP nous dit, par exemple, que de deux formules $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ et ϕ nous pouvons inférer une troisième, à savoir ψ.

Il a été dit que les implications formelles nous permettent de faciliter les preuves à l'aide de règles d'inférence dérivées. Mais est-ce vraiment le cas ? Qu'est-ce qui nous assure que notre méthode purement syntaxique respecte les relations sémantiques ? Afin de répondre à ces questions, il faut traiter de la relation entre « $\vdash$ » et « $\models$ » plus en détail.

5.2 Les relations entre conséquence logique et déductibilité

Nous avons vu que la logique traite de la relation de conséquence et cherche à déterminer quelles phrases s'ensuivent de quelles autres. Nous avons développé des notions précises de conséquence logique ($\models$) et de déductibilité syntaxique ($\vdash$). Maintenant, nous devons nous demander quelles sont les relations entre ces deux types de ‹ conséquence ›. Quel est le rapport entre « $\phi \models \psi$ » (« ψ est une conséquence logique de ϕ ») et « $\phi \vdash \psi$ » (« ψ peut être dérivé de ϕ dans un certain calcul ») ?

Pour notre calcul HC, deux théorèmes importants en métamathématiques (des preuves *sur* le calcul) nous assurent que les deux notions sont équivalentes. D'une part, HC est correct : HC ne prouve que des tautologies ; d'autre part, HC est aussi complet : HC prouve toutes les tautologie. Ensemble, nous obtenons le résultat que HC prouve toutes et seulement de tautologies :

théorème de correction HC est correct – tout théorème est une tautologie.

théorème de complétude HC est complet – toute tautologie est un théorème.

D'une certaine manière, la correction est la plus importante : un calcul qui n'est pas correct ‹ prouve › quelque chose qui n'est pas une vérité logique – quelque chose qui est soit contingent, soit ‹ matériel ›, soit faux. Un tel calcul est dénoué d'intérêt. Dans un autre sens, cependant, la complétude est plus importante : il s'agit d'un résultat important qui ne peut être établit que pour certains systèmes formels.[17] Ensemble, nous avons la relation suivante (pour n'importe quelle formule propositionnelle ϕ) :

$$\mathsf{HC} \vdash \phi \iff \models \phi$$

La direction « $\Longrightarrow$ » est assurée par le théorème de correction et signifie que HC ne prouve pas *trop*, c'est-à-dire ne prouve pas plus que les vérités logiques. La direction inverse, « $\Longleftarrow$ », est assurée par le théorème de complétude : HC prouve assez – en d'autres termes, il n'y a pas de vérités logiques qui ne soient pas prouvables dans HC.

Pris ensemble, les théorèmes de correction et de complétude nous assurent que notre axiomatisation de la logique propositionnelle par le calcul HC est *adéquate* : on a réussi à prouver toutes les phrases que l'on voulait, et pas plus. Ils nous montrent que le calcul syntaxique est en harmonie avec la sémantique de notre langage formel de la logique propositionnelle.

[17] Nous verrons, dans la sct. 15.5, que le théorème de Gödel de l'incomplétude impose une restriction très rigide à la classe des systèmes formels qui sont complet.

PROOF

Théorème 17 (Correction de HC). *Soient* Th *une théorie et* ϕ *une formule propositionnelle :*

$$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{Th} \vDash \phi \tag{5.1}$$

Démonstration. Elle se fait par induction sur tous les nombres naturels n,[18] nous prouvons que

$$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{n} \phi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{Th} \vDash \phi \tag{HI}$$

par induction mathématique :

Base de l'induction Si $n = 0$, alors soit ϕ est un axiome de HC, soit un élément de Th.[19] Par les tables de vérité, nous prouvons que tous les axiomes $\mathbf{H_1}$ à $\mathbf{H_{16}}$ sont des tautologies. Dans le cas où ϕ est un élément de Th ($\phi \in \mathsf{Th}$), il est évident que $\mathsf{Th} \vDash \phi$.

Hypothèse d'induction Supposons que $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{n} \phi$ et que (HI) est vrai pour tous les nombres naturels $n' < n$. Si ϕ est un axiome ou un théorème, il est vrai que $\mathsf{Th} \vDash \phi$ (selon la base de l'induction). La seule autre possibilité est que l'on ait obtenu ϕ par l'application de MP à deux autres théorèmes. Dans ce cas, il y a une formule ψ et des nombres naturels n' et $n*$ (les deux $< n$) tels que :

$$\begin{array}{lll} (1) & \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{n*} & \psi \rightarrow \phi \\ (2) & \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{n'*} & \psi \\ (3) & \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{n} & \phi \end{array}$$

Par l'hypothèse d'induction, nous savons que l'affirmation (HI) est vraie pour les lignes (1) et (2). Nous avons :

$$\mathsf{Th} \vDash \psi \rightarrow \phi$$
$$\mathsf{Th} \vDash \psi$$

Puisque nous savons que MP est une règle d'inférence valide, nous pouvons inférer à partir de (3) :

$$\mathsf{Th} \vDash \phi$$ □

Pour une preuve de correction, il suffit de prouver que les axiomes sont des tautologies et que les règles d'inférence sont valides. Par la définition de la validité, il s'ensuit que toute implication correspondante à une règle d'inférence est une tautologie. Il s'ensuit alors que tous les théorèmes sont des tautologies (puisque tout conséquent d'une implication qui est une tautologie et qui a une tautologie comme antécédent est lui-même tautologique).

La complétude d'un calcul est, en général, beaucoup plus difficile à prouver que sa correction. Nous nous limitons donc ici à énoncer le théorème :[20]

[18] Une preuve par induction sur les nombres naturels montre qu'une certaine phrase est vraie de o (« base de l'induction ») et que, si elle est vraie pour n (« hypothèse d'induction »), alors elle est aussi vraie pour $n + 1$ (cette deuxième étape s'appelle le « pas de l'induction »). En montrant ainsi que la phrase est vraie de o et qu'elle est héritée par tous les successeurs de o, nous démontrons que la phrase est vraie de tous les nombres (cf. p. 107).

[19] Ceci s'ensuit de la notion même de preuve dans HC.

[20] Nous donnerons une preuve de la complétude de HC dans la leçon 7 (cf. p. 175 et suivantes). La méthode des arbres que nous introduirons par la suite nous facilitera cette tâche.

PROOF

Théorème 18 (Complétude de HC). *Soient* Th *une théorie et* ϕ *une formule propositionnelle :*

$$\mathsf{Th} \vDash \phi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi \tag{5.2}$$

Les tautologies sont les formules propositionnelles logiquement valides de la logique propositionnelle. Étant donné que toute interprétation assigne soit **v** soit **f** à une phrase donnée, une contradiction est une phrase dont la négation est une tautologie (et vice versa).

La plus grande partie de nos formules propositionnelles et toutes les phrases (traitées comme) simples ne sont ni des contradictions ni des tautologies. Alors qu'une tautologie est une *nécessité* logique et une contradiction une *impossibilité* logique, les phrases qui ne sont ni l'un ni l'autre sont dites « *contingentes* » : elles sont vraies sous quelques valuations (selon certaines interprétations et dans quelques mondes possibles), mais fausses sous d'autres.

Les théorèmes de correction et de complétude nous montrent que les notions sémantiques de « tautologie », « contradiction » et « satisfaisabilité » ont des contreparties purement syntaxiques. Dans le calcul HC, nous pouvons dire qu'une phrase est prouvable si elle peut être dérivée des axiomes à l'aide de la règle d'inférence MP. Le théorème de correction limite ce que nous pouvons prouver par le calcul : elle signifie que seules les tautologies peuvent être prouvées, que le calcul ne prouve pas trop. L'inverse, cependant, est également vrai : comme nous allons voir dans la leçon 7, le calcul HC prouve assez : pour toute tautologie, il nous permet de déduire une contradiction à partir de la négation de cette tautologie.

Nous pouvons formuler ces observations de la manière suivante : disons que la « *clôture déductive* » d'une formule propositionnelle ϕ est l'ensemble de toutes les formules qui peuvent être déduites de ϕ à l'aide des axiomes et la règle d'inférence de HC :[21]

Définition 19 (Clôture déductive). *La* clôture déductive *d'une formule propositionnelle* ϕ *ou d'un ensemble de formules propositionnelles* Σ *par rapport au calcul* HC *est l'ensemble des formules qui en peuvent être déduites :* $\mathsf{clo}(\Sigma) := \{\psi \mid \exists \Phi \subset \Sigma : \mathsf{HC} \cup \Phi \vdash \psi\}$.

La clôture déductive d'une théorie sera alors son ‹ potentiel logique implicite › : appartient à la clôture de ϕ toute phrase que nous pouvons obtenir à partir de ϕ à l'aide d'une méthode syntaxique de preuve.[22] Dans notre analogie de la soupe (cf. p. 104), nous pouvons dire que la clôture déductive d'un ensemble de phrases est la soupe maximale que nous pouvons en obtenir en rajoutant de l'eau.

Notre calcul HC définit l'ensemble des théorèmes comme la clôture déductive de ses axiomes. Le théorème de correction (17) nous montre que tout membre de cette ensemble est une tautologie, le théorème de complétude (18) prouve que toute tautologie appartient à cet ensemble. f À l'aide de la notion « clôture déductive », nous pouvons maintenant définir une ‹ contrepartie syntaxique › à la notion sémantique de contradiction. Cette notion est purement syntaxique parce qu'elle ne concerne que la forme des phrases :

Définition 20 (Consistance). *Une formule propositionnelle* ϕ *et un ensemble de formules propositionnelles* Σ *sont* consistants *si et seulement si leurs clôtures déductives ne contiennent pas deux phrases des formes* ψ *et* $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ *respectivement. Autrement (s'ils contiennent deux phrases des formes* ψ *et* $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ *respectivement) ils sont appelés* « inconsistants.

[21] Nous avons déjà utilisé cette notion dans la n. 4 à la p. 91.

[22] Nous remarquons que toute clôture déductive sera un ensemble infini de phrases : $\phi \vdash \phi$, $\phi \vdash \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$, $\phi \vdash \ulcorner\phi \vee \chi\urcorner$, etc.

PROOF

Comme toute phrase fait partie de sa clôture déductive et parce que, si $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ appartient à une clôture déductive, alors ϕ et ψ y appartiennent également (par l'élimination de la conjonction), une contradiction sera inconsistante d'après notre définition. Parce que MP ne nous permet pas de déduire une contradiction à partir d'une phrase qui n'est pas elle-même logiquement équivalente à une contradiction, *seulement* des contradictions seront inconsistantes.

La clôture déductive des axiomes de HC est l'ensemble des théorèmes. Une contradiction, nous l'avons vu, nous permet de déduire n'importe quelle phrase : $\ulcorner (\phi \wedge \neg\phi) \rightarrow \psi \urcorner$ est un théorème pour n'importe quelle formule ψ. Au lieu de définir une phrase inconsistante comme phrase dont la clôture déductive contient une phrase et sa négation, nous aurions aussi pu la définir comme phrase dont la clôture déductive est *triviale*, c'est-à-dire contient toute phrase.[23]

Grâce aux théorèmes de correction et de complétude, la notion purement syntaxique de consistance correspond à une notion sémantique : dire qu'une formule propositionnelle est consistante (notion syntaxique) revient à dire qu'elle n'est pas une contradiction (notion sémantique) et donc satisfaisable (cf. la déf. 13 à la p. 118) ; dire que deux formules sont consistantes revient à dire qu'elles ne sont pas contraires, c'est-à-dire qu'elles peuvent être vraies ensemble. La notion syntaxique de consistance correspond donc à la notion sémantique de satisfaisabilité. Nous prouvons cette combinaison de correction et de complétude par le théorème suivant d'adéquation :

Théorème 21 (Adéquation). *Une théorie* Th *est consistante si et seulement s'il y a une valuation qui rend vraies toutes les formules propositionnelles* $\phi \in$ Th. *Autrement, elle est* inconsistante *(c'est-à-dire elle est inconsistante si et seulement si aucune valuation ne rend vraies toutes les formules propositionnelles* $\phi \in$ Th*).*

Ce théorème nous dit que non seulement est notre calcul adéquat, mais il permet d'établir la satisfaisabilité d'une théorie par une preuve de sa consistance : si la clôture d'une théorie n'inclut pas une phrase et la négation de cette phrase, nous pouvons être rassurés qu'il existe en fait une possibilité logique pour elle d'être vraie, de correctement décrire un monde (un monde logiquement possible).

La consistance est une relation entre des (ensembles de) phrases : on dit qu'une phrase ϕ est consistante avec deux autres phrases, ψ et χ, si et seulement s'il y a une valuation qui attribue **v** aux trois phrases ϕ, ψ et χ. La consistance est intimement liée à la relation de conséquence logique : une phrase ϕ est une conséquence logique d'une théorie Th si et seulement si sa négation $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ est inconsistante avec Th. Dans ce cas, toute interprétation qui rend vraie $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ (et qui donc rend fausse ϕ) doit aussi rendre fausse au moins une des prémisses dans Th.

Étant donné que la notion de consistance s'applique à une phrase si et seulement si la négation de cette phrase n'est pas une tautologie, nous avons les relations suivantes :

correction	tout théorème est une tautologie	toute phrase satisfaisable est consistante
complétude	toute tautologie est un théorème	toute phrase consistante est satisfaisable

Il s'agit ici d'une application métalogique de la règle d'inférence de conversion : si tout théorème est

[23] Les dialétheistes, qui acceptent des contradictions vraies, remplacent le principe de non-contradiction par un principe de non-trivialité : au lieu de dire qu'une phrase est prouvable si et seulement si la clôture déductive de sa négation est inconsistante, ils disent qu'elle l'est si et seulement si la clôture déductive de sa négation est non triviale – c'est-à-dire les deux conditions ne coïncident pas dans une logique qui n'accepte pas le principe de l'*explosion déductive* (ou : *ex falso quodlibet*) qui dit que n'importe quelle formule s'ensuit d'une contradiction.

PROOF

une tautologie, tout ce qui n'est pas vrai sous toutes les valuations (n'est pas une tautologie, donc a une négation satisfaisable) ne peut pas être prouvé (n'est pas un théorème, donc a une négation consistante) ; si toute tautologie est un théorème, tout ce qui ne peut pas être prouvé (a une négation consistante) n'est vrai sous aucune valuation (a une négation satisfaisable).

L'harmonie entre la syntaxe et la sémantique de la logique propositionnelle nous donne une correspondance parfaite entre les notions sémantiques et syntaxiques :

ϕ s'ensuit de Th	$\iff$	ϕ est une conséquence syntaxique de Th
ϕ est satisfaisable	$\iff$	ϕ est consistant
ϕ est une contradiction	$\iff$	ϕ est inconsistant
ϕ est une tautologie	$\iff$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$ est inconsistant
$\ulcorner\phi$ donc $\psi\urcorner$ est un argument valide	$\iff$	$\ulcorner\phi \wedge \neg\psi\urcorner$ est inconsistant

5.3 La nature de la logique

Nous avons introduit, à la p. 37, la négation « ¬ » par la table de vérité suivante :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Cette table de vérité montre que la valeur de vérité d'une phrase formée d'une négation (comme connecteur principal) et d'une autre phrase plus simple est l'inverse de la valeur de vérité de cette autre phrase. Selon le principe de vérifonctionnalité (cf. p. 37), cette table de vérité détermine complètement la signification de « ¬ ». Il y a, cependant, une autre manière de spécifier cette signification, que ceux qui ne pensent pas que la logique est l'étude de quelques vérités (les vérités logiques), mais plutôt qu'elle est l'étude des inférences valides, préfèrent. Selon eux, une logique n'est pas caractérisée par ses tautologies, mais par la relation de conséquence qui rend valides certaines inférences. Les connecteurs propositionnels ne sont pas caractérisés par leurs tables de vérité, mais par les règles d'introduction et d'élimination qui gouvernent leur comportement inférentiel.

Parmi les philosophes qui se sont interrogés sur la nature de la logique, on peut en effet distinguer deux courants : selon un premier courant, la logique essaie de trouver, d'expliquer et de systématiser les tautologies :[24] selon un second courant, elle essaie de formaliser les inférences valides.[25] Le premier camp maintient souvent, avec Wittgenstein, que les vérités logiques sont dénuées de contenu (« *sinnlos* »), mais qu'elles ne sont pas dénuées de sens (elles ne sont pas « *unsinnig* ») : quoiqu'elles ne nous informent pas sur le monde (car elles n'excluent aucune possibilité), elles font, en tant que cas limites, partie du langage sensé – « Elles font partie du formalisme. » (Wittgenstein, 1921, §4.4611).

La première approche consiste dans l'élaboration d'un calcul qui axiomatise un certain nombre de phrases, appelées « théorèmes ». La seconde approche formalise certaines inférences, des transitions

[24] Ainsi Blanché, dans son introduction à la logique, dit que la logique (propositionnelle) est la recherche des tautologies (Blanché, 1996, 65). Les figures les plus célèbres de ce groupe sont Quine, Tarski et Wittgenstein.

[25] Pour ce camp là, nous nous devons surtout de nommer le logicien allemand Gerhard Gentzen.

PROOF

de quelques phrases à d'autres. La première approche réussit si et seulement si les théorèmes (les phrases axiomatisées) sont des tautologies (et il ne reste aucune tautologie qui ne soit pas axiomatisée par le calcul), c'est-à-dire si le calcul est complet et correct ; la seconde approche réussit si et seulement si les inférences formalisées sont valides et suffisent pour capturer tout le raisonnement 'logique' en question.

Deux courants en philosophie de la logique :

- la logique comme étude (axiomatisation, systématisation) d'un certain type de vérités, les vérités logiques (vraies en vertu de la signification de quelques mots spéciaux / de la structure de la pensée / des traits les plus généraux de la réalité) : Frege, Quine, Tarski, Wittgenstein ;
- la logique comme étude (formalisation, défense) d'un certain type d'arguments, les arguments logiquement valides (convaincants en vertu de leur formes / de la nature de certains concepts / de la structure de la pensée, ou de la pensée humaine) : Bolzano, Gentzen, Beth, Lemmon.

Selon les premiers, la normativité de la logique est fondée sur sa nécessité ; selon les deuxièmes, sa nécessité résulte de sa normativité.

Les deux projets de recherche peuvent être entrepris de manière sémantique ou de manière syntaxique. Si l'on s'intéresse principalement aux vérités logiques, on cherchera à les axiomatiser à l'aide d'un calcul et à prouver que ce calcul est correct et complet (en bref : adéquat) par rapport à l'ensemble des phrases que l'on voulait axiomatiser.[26] Dans la seconde perspective, qui s'intéresse à la validité des arguments (et à la correction des inférences) plutôt qu'aux vérités logiques (bien que les deux questions soient étroitement liées), on essaie de développer une méthode syntaxique et structurelle de déduction. Cet objectif peut être atteint par deux méthodes distinctes : la déduction naturelle, que l'on abordera dans la leçon 6, et la méthode des tableaux analytiques, également appelée la « méthode des arbres ». La différence principale entre ces deux techniques et le calcul axiomatique c'est qu'elles comportent de nombreuses règles d'inférence, tandis que le calcul hilbertien n'a normalement qu'une seule règle d'inférence (le plus souvent *modus ponens*), mais de nombreux axiomes.

Nous comprenons cette dualité à l'aide de notre analogie de soupe. Si nous avons que peu de manières pour condenser, puis rallonger la soupe, il nous faut un condensé plus grand ; plus que nous avons de mécanismes (= règles d'inférence) pour mettre en œuvre le potential logique 'implicite' d'un condensé, plus petit il peut être.

La méthode de la déduction naturelle a été introduite, d'une part par Jaśkowski (1934) et d'autre part par Gerhard Gentzen (1935 / 1955). Simultanément, Gentzen a défini un calcul de séquents, très similaire à celui que nous présenterons dans la sct. 6.7 (p. 159 et suivantes). Vingt ans plus tard, Beth (1955b) a formulé sa méthode des tableaux analytiques et Hintikka (1955) a proposé la méthode des ensembles de vérité (« truth sets ») qui, dans la systématisation de Smullyan (1968), est devenue la méthode des arbres que nous présenterons à la manière de Lepage (1991). Ce n'est que récemment qu'il a été prouvé que le calcul des tableaux analytiques et le calcul de séquents sont équivalents, c'est-à-dire que tout ce qui peut être prouvé par l'une des méthodes peut être également prouvé par l'autre et vice versa.

[26] Nous parlerons de la correction et la complétude des calculs en général dans la leçon 7.

PROOF

5.4 La méthode des arbres

La méthode des arbres est une méthode syntaxique pour prouver certaines phrases. Elle est cependant 'moins' syntaxique que la méthode des calculs axiomatiques parce qu'elle utilise des règles qui se prêtent à une interprétation en termes de tables de vérité. De manière intuitive, un arbre représente les différentes conditions sous lesquelles une phrase donnée peut être vraie : une disjonction, par exemple, peut être vraie soit en vertu du premier, soit en vertu du deuxième disjoint.[27] Une conjonction, par contre, ne peut être vraie que d'une seule manière : pour qu'elle soit vraie, il faut que et le premier et le deuxième conjoint soit vraie. Plus précisément, l'interprétation sémantique de la méthode syntaxique des arbres est basée sur les neuf faits sémantiques suivants :

F1 Si une négation $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ est fausse, alors ϕ est vrai.
F2 Si une conjonction $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ est vraie, alors ϕ et ψ sont vrais.
F3 Si une conjonction $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ est fausse, alors soit ϕ soit ψ est faux.
F4 Si une disjonction $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ est vraie, alors soit ϕ, soit ψ est vrai.
F5 Si une disjonction $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ est fausse, alors ϕ et ψ sont faux.
F6 Si une implication $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ est vraie, alors soit ϕ est faux soit ψ est vrai.
F7 Si une implication $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ est fausse, alors ϕ est vrai et ψ est faux.
F8 Si une équivalence $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$ est vraie, alors soit ϕ et ψ sont vrais, soit ϕ et ψ sont faux.
F9 Si une équivalence $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$ est fausse, alors soit ϕ est vrai et ψ faux, soit ϕ est faux et ψ vrai.

De ces neuf faits, nous dérivons des règles pour construire des arbres. **F2**, par exemple, nous dit que nous pouvons décomposer $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ en ϕ et en ψ et les placer sur la même branche : si $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ se trouve sur un chemin de l'arbre, alors ϕ et ψ devront se trouver sur ce même chemin, car si $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ est vrai, ϕ et ψ le sont aussi. **F3** nous dit que si $\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$ se trouve sur un chemin, alors soit $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ soit $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ devrait se trouver sur le même chemin : une conjonction ne peut être fausse que si au moins un de ses conjoints est également faux. Tracer un chemin de vérité est dans ce sens-ci une manière de poursuivre les conditions nécessaires pour la vérité de son point de départ.

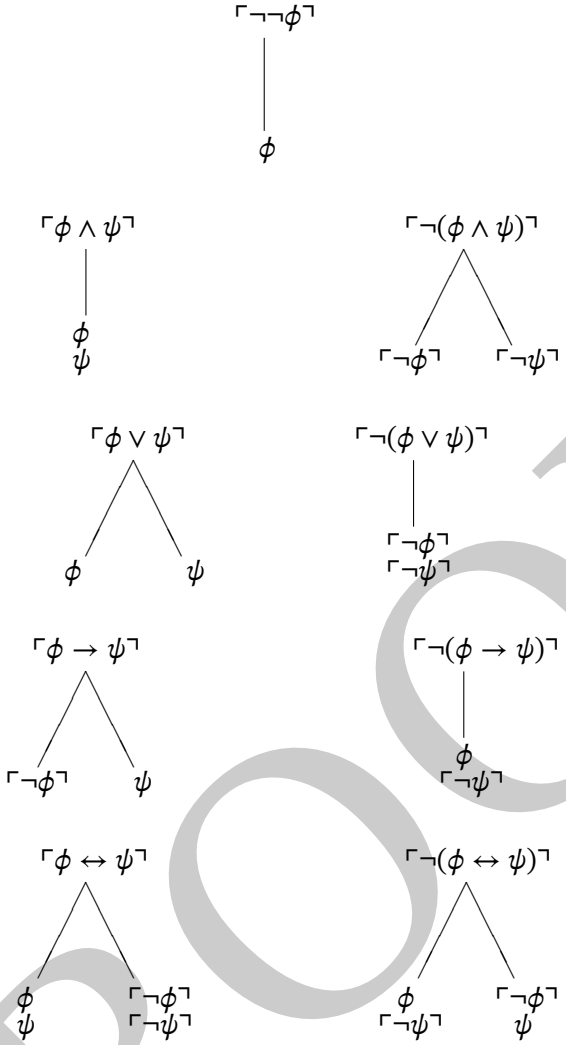
Si nous comparons **F2** et **F3** d'un part avec **F4** et **F5** de l'autre, nous discernons une forte analogie : **F2** correspond à **F5** et **F3** à **F4**, avec « vrai » remplacé par « faux ». La vérité d'une conjonction dépend de la vérité des *deux* conjoints, comme la fausseté d'une disjonction dépend de la fausseté des *deux* disjoints. Il suffit pour la fausseté d'une conjonction et la vérité d'une disjonction qu'*au moins un* des conjoints soit faux et qu'*au moins un* des disjoints soit vrai. Ce phénomène, appelé « dualité », est également visible dans les lois de Morgan : la négation d'une conjonction est équivalente à la disjonction des conjoints niés, la négation d'une disjonction équivalente à la conjonction des disjoints niés. Nous pouvons alors nous attendre à ce que le traitement, en matière de preuve, d'une conjonction soit similaire à celui d'une disjonction niée et celui d'une disjonction similaire à celui d'une conjonction niée.

Construire un arbre correspondant à une expression complexe consistera à construire des chemins à partir de l'expression initiale en utilisant les règles de construction d'arbres. Les chemins ainsi obtenus dans l'arbre (considérés de bas en haut) seront appelés des « chemins de vérité » : ils représentent des manières dont les phrases initiales peuvent être vraies ensemble. La méthode des arbres nous fournit ainsi un test de consistance, respectant la composition d'une phrase complexe à partir de

[27] Ce n'est pas un accident que nous avons illustré l'élimination de la disjonction par le chien de Chrysippe par un branchement de chemins (cf. p. 46).

PROOF

ses constituantes simples. Les neuf faits **F1** à **F9** mentionnés nous assurent la correction de quelques règles d'inférence. Ils correspondent à neuf règles de construction d'arbres :



Nous appliquons ces règles de manière itérative, jusqu'à ce qu'aucune des règles ne soit applicable – cela n'est le cas que si les seules phrases non traitées sont des phrases simples ou des négations de phrases simples. Nous pouvons 'fermer' une branche si et seulement si elle contient n'importe quelle formule propositionnelle, par exemple « p » (ou « $p \wedge (q \vee r)$ »), *et* sa négation « $\neg p$ » (ou « $\neg(p \wedge (q \vee r))$ »).[28] Pour le faire, il n'est pas nécessaire que l'arbre soit entièrement développé : dès que nous trouvons une phrase et sa négation sur une même branche, nous pouvons la fermer, ce que nous indiquons par le symbole « $\bigtriangledown$ ».

Une branche 'fermée' signifie que le chemin de vérité ne nous amène nulle part. La possibilité logique qui semble correspondre à ce chemin n'en est pas une : nous y retrouvons une contradiction, ce qui signifie qu'il n'y a pas de valuation qui attribue les valeurs de vérité correspondantes. Une branche qui reste ouverte, par contre, correspond à une réelle possibilité logique : elle nous définit

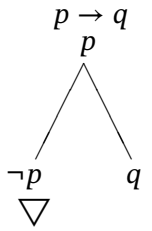
[28] Seules les paires de phrases de la forme $\langle \phi, \ulcorner \neg \phi \urcorner \rangle$ comptent comme contradictoires. Il ne serait pas permis, par exemple, de considérer « $\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$ » comme négation de « $p \wedge (q \vee r)$ », même si la deuxième formule est logiquement équivalente à la négation de la première. Dans un calcul syntaxique, tel que l'est la méthode des arbres, seule la *forme* (syntaxique) des phrases peut entrer en considération.

PROOF

une valuation des constituantes simples de la formule initiale qui nous montre sous quelles conditions cette formule initiale peut être vraie.

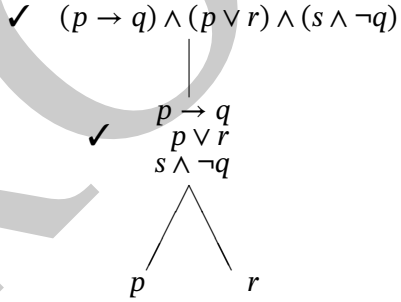
5.5 Le développement syntaxique de la méthode des arbres

Comment interpréter ces arbres ? Leurs règles de construction correspondent à des règles d'inférence. Dans notre nouveau calcul, la règle d'inférence MP, par exemple, correspondra à l'arbre suivant :



Il est aisé d'interpréter cet arbre de manière sémantique. Une implication peut être vraie de deux manières : parce que son antécédent est faux ou parce que son conséquent est vrai. En présence de « p », cependant, nous pouvons exclure la première possibilité – ce que nous faisons en fermant la branche gauche. Ce chemin de vérité n'aboutit pas, il finit dans un cul-de-sac (indiqué par « ▽ »). Le seul chemin de vérité qui reste oubvert contiendra « q » : « q » doit être vrai si « $p \rightarrow q$ » et « p » le sont.

Voici un autre exemple. Nous commençons par une conjonction de trois phrases complexes, appliquons la règle de conjonction et développons ensuite la disjonction qui est le deuxième conjoint :



Après avoir appliqué une règle à une formule dans une branche, nous la marquons par le signe « ✓ ». Après chaque application de règle, nous déterminons si nous pouvons déjà fermer une branche. Ici nous ne pouvons pas encore le faire.

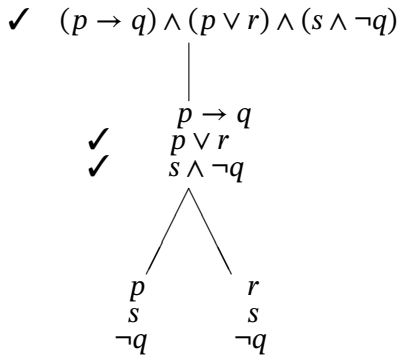
En voici une interprétation sémantique : Nous avons commencé avec trois formules qui étaient peut-être toutes vraies. Ce que notre arbre nous apprend, c'est que les trois formules pourraient être vraies de deux manières : la première serait que « $p \rightarrow q$ », « $s \wedge \neg q$ » et « p » soient vrais, et la deuxième que « $p \rightarrow q$ », « $s \wedge \neg q$ » et « r » soient vrais. À cette étape, nous ne pouvons pas encore en dire plus : nous n'avons qu'encore traité la disjonctin.

Nous pouvons donner une motivation 'dialogique' à cette interprétation sémantique : un arbre représente les choix dialogiques d'un défenseur de la phrase initiale. En défendant la vérité d'une disjonction, par exemple, je peux me contenter de ne défendre que l'un des disjoints ; pour défendre

PROOF

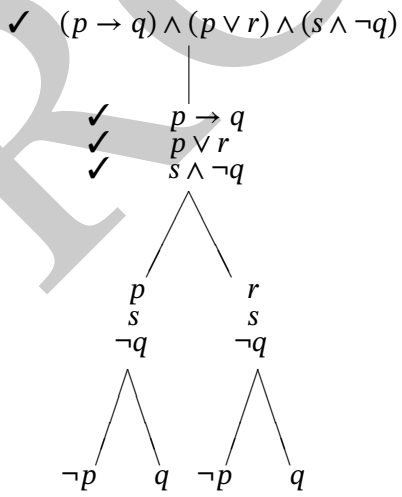
une conjonction, cependant, il faut défendre les deux conjoints, etc. Dire qu'une branche se ferme revient à dire que l'argument qui a pris le chemin de vérité correspondant a échoué : la défense n'a pas pu montrer que la phrase initiale pouvait être vraie.

Pour continuer le développement de notre arbre, nous distribuons la conjonction « $s \wedge \neg q$ » sur les branches (et marquons la troisième formule comme traitée) :



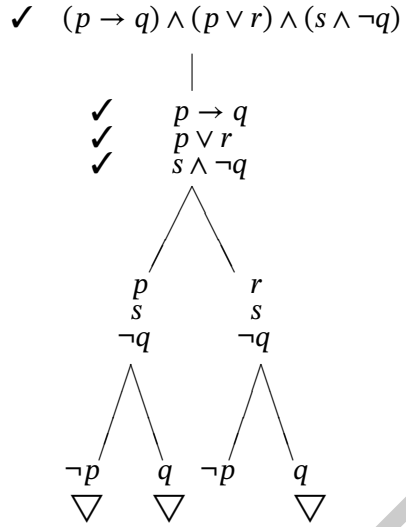
Étant donné que la règle de conjonction nous dit de continuer avec les deux conjoints, il nous faut ajouter « s » et « $\neg q$ » dans chacune des deux branches : toutes les scénarios où les phrases initiales sont vraies doivent être tel que « s » et « $\neg q$ » sont vrais.

Nous vérifions à nouveau si nous pouvons fermer une branche : nous ne le pouvons pas. Nous appliquons maintenant la règle de l'implication à la première de nos trois formules initiales (l'implication est la seule formule complexe qui nous reste, et donc la seule à laquelle nous pouvons appliquer une règle pour développer davantage l'arbre). Cette règle d'implication nous dit d'ouvrir deux nouvelles branches : l'une avec la négation de l'antécédent et l'autre avec le conséquent. Nous obtenons donc :



Cette fois, nous pouvons fermer quelques-unes de nos quatre branches. Celle de gauche contient « $\neg p$ » et « p », la deuxième en partant de la gauche « q » et « $\neg q$ », et celle qui se trouve tout à droite contient également « q » et « $\neg q$ ». Nous indiquons le fait qu'une branche ait été fermée par le signe « $\triangledown$ » :

PROOF



À ce stade, nous ne pouvons plus développer le tableau, puisque toutes les formules non précédées du signe «✓» sont soit des phrases simples, soit des négations de phrases simples, et que les règles dont nous disposons ne s'appliquent qu'à des phrases complexes. Il ne nous reste donc plus rien à faire.

Notre arbre nous montre qu'une seule branche reste ouverte – cette branche nous montre un chemin de vérité pour la formule initiale dans le sens qu'elle nous montre une possibilité logique selon laquelle cette formule est vraie. Plus précisément, la branche nous définit une valuation de la formule initiale qui la rend vraie, une ligne dans sa table de vérité où elle reçoit «*V*» :

p	q	r	s	$p \rightarrow q$	$p \vee r$	$s \wedge \neg q$	le tout
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
V	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*
V	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
V	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*
V	*F*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*
V	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*
V	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*
V	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*
F	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*
F	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*
F	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
F	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*V*	*F*
F	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*

Nous remarquons qu'il n'y a qu'une seule ligne où la conjonction initiale reçoit la valeur «*V*»(la

PROOF

treizième) : la valuation qui rend vraie la formule initiale est celle qui attribue **f** à « p » et à « q » et **v** à « r » et à « s ». La formule initiale sera donc vraie si « $\neg p$ », « $\neg q$ », « r » et « s »le sont aussi – exactement ce qui indique la troisième branche de notre arbre !

Malgré cette correspondance à la méthode sémantique des tables de vérité, il est important de se rappeler que la méthode des arbres est une méthode syntaxique : la preuve d'une phrase par la méthode des arbres est une application mécanique des règles de construction d'arbres et de fermeture des branches qui contiennent une formule propositionnelle simple avec sa négation. La méthode des arbres nous fournit donc un *test de consistance* : la phrase initiale est inconsistante si et seulement si chaque branche de l'arbre se ferme. Dans ce cas, il n'y a aucune possibilité pour la formule initiale d'être vraie et il s'agit alors d'une contradiction.

Grâce à la complétude et la correction de la méthode des arbres, le test de consistance qu'elle nous fournit est également un test de satisfaisabilité. Présupposant que la méthode des arbres est une méthode correcte et complète (ce que nous ne démontrons que dans le ch. 7), nous pouvons donc résumer l'utilité de la méthode des arbres comme suit :

1. Une branche entièrement développée correspond à un chemin de vérité : elle montre sous quelle valuation de ses composantes simples la phrase à l'origine de l'arbre est vraie.
2. Nous pouvons également concevoir une branche comme une stratégie d'argumentation pour défendre la vérité de la phrase à l'origine.
3. Si toutes les branches d'un arbre se ferment, il est logiquement impossible que la formule à l'origine soit vraie : il s'agit d'une contradiction. Dans ce cas (et seulement dans ce cas), sa négation est une tautologie.
4. Si par contre une branche reste ouverte, elle nous indique une valuation qui attribue **v** à la formule initiale : elle nous indique un modèle, une possibilité logique selon laquelle la phrase initiale est vraie.
5. Par ce fait, la méthode des arbres est une méthode de réduction à l'absurde : en fermant toutes les branches de son arbre, nous montrons qu'une formule est logiquement fausse.

Il est important, surtout pour les exercices, de tenir compte que la méthode des arbres est un test de consistance *par la négative*, c'est-à-dire en premier lieu un test d'*inconsistance*. Pour prouver une formule à l'aide de la méthode des arbres, *nous formons sa négation*, développons l'arbre de cette négation et montrons que toutes ses branches se ferment. Soit ϕ une formule quelconque :

1. Si toutes les branches de l'arbre pour $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ se ferment, alors ϕ est une tautologie.
2. Si une branche de l'arbre entièrement développé pour $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ reste ouverte, nous avons trouvé ce que nous appelons un « modèle » pour $\ulcorner\neg\phi\urcorner$, c'est-à-dire une valuation des composantes simples de ϕ qui rend $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ vrai et ϕ faux ; ϕ n'est alors pas une tautologie.

Si l'arbre se ferme, la formule à l'origine est insatisfaisable ; s'il reste ouvert, elle est satisfaisable.

5.6 L'interprétation sémantique de la méthode des arbres

Bien que la méthode des arbres soit un *calcul*, donc une méthode purement syntaxique de prouver des théorèmes, son avantage principal réside dans le fait que son interprétation sémantique est facile et naturelle. Par l'adéquation entre la syntaxe et la sémantique de la logique propositionnelle, les théorèmes de correction et de complétude de la méthode des arbres nous permettent de donner une

PROOF

interprétation sémantique aux règles de construction d'arbres.[29]

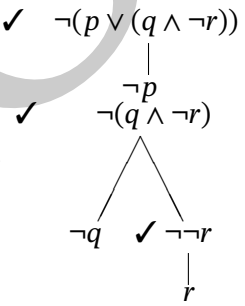
En effet, le fait que nous ayons fermé trois des quatre branches de l'arbre précédent signifie que ces branches ne représentent pas des manières dont les formules initiales pourraient être vraies ensemble. Elles ne correspondent pas à des valuations qui rendent vraie la formule initiale.

Le tableau nous montre donc qu'il n'y a qu'une seule manière pour les formules initiales d'être vraies ensemble : il faut que les formules sur la seule branche ouverte soient toutes vraies, en d'autres termes que « r », « s », « $\neg q$ » et « $\neg p$ » soient toutes vrais. Dans une table de vérité, cette possibilité logique correspondrait à la ligne *F-F-V-V* du tableau. Cette ligne représente la possibilité logique sous laquelle la formule initiale est vraie – elle décrit le modèle dans lequel elle est vraie.

Si nous avions fermé toutes les branches, nous saurions que la ou les formule(s) initiale(s) ne pouvai(en)t pas être vraie(s) : il s'agirait d'une contradiction (dans le cas d'une seule phrase) ou d'un ensemble de phrases insatisfaisables.

Nous voyons ainsi que la méthode des arbres peut nous servir de test de *satisfaisabilité* : si une des branches reste ouverte, il y a une possibilité logique pour les phrases initiales d'être vraies ensemble et elles forment donc un ensemble satisfaisable (présupposant la complétude et la correction de la méthode des arbres). Puisqu'une phrase est une contradiction si et seulement si sa négation est une tautologie, la méthode des arbres nous sert également de test pour savoir si ou non une phrase est une tautologie. Si toutes les branches de l'arbre *de sa négation* se ferment, alors elle est une tautologie. Si au moins une branche reste ouverte, il y a une possibilité pour sa négation d'être vraie, et donc une possibilité pour elle d'être fausse. Dans ce cas-là, elle n'est pas une tautologie.

Les arbres nous permettent donc de visualiser les conditions de vérité d'une phrase complexe. Examinons un deuxième exemple :

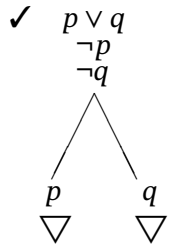


L'application des règles nous permet d'interpréter cet arbre de la façon suivante : « $\neg(p \vee (q \wedge \neg r))$ » est vrai si et seulement si, soit « $\neg p$ » et « $\neg q$ » sont vrais (la branche à gauche), soit « $\neg p$ » et « r » sont vrais (la branche à droite). Il y a donc deux chemins de vérité complets dans cet arbre, deux manières pour la phrase complexe d'être vraie.

Considérons l'arbre suivant :

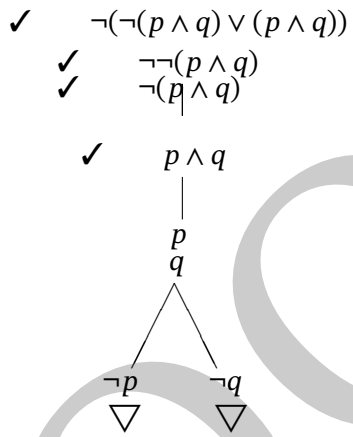
[29] Les théorèmes de correction et de complétude doivent être établis pour chaque calcul syntaxique séparément. Nous n'avons montré la correction que pour HC (p. 123) et avons seulement présupposé la complétude. Nous allons prouver la correction de la méthode des arbres et la complétude des deux systèmes dans la leçon 7.

PROOF



Dans cet arbre, aucun chemin ne reste ouvert : la tentative de trouver une manière dont les phrases initiales peuvent être vraies ensemble échoue – ce qui n'étonne pas, étant donné que la vérité d'une disjonction exclut la fausseté de ses deux disjoints.

Une contradiction est caractérisée par le fait que chacun des chemins de son arbre contient une phrase et aussi sa négation. Autrement dit, toutes ses branches se ferment :



Un des chemins de cet arbre contient « p » et « $\neg p$ », l'autre « q » et « $\neg q$ ».[30]

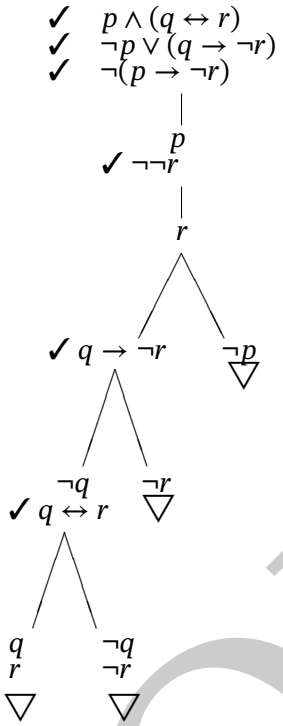
En tant que méthode syntaxique, la méthode des arbres nous permet de *prouver* des phrases : on prouve une phrase en montrant qu'un arbre complet (entièrement développé) *pour sa négation* ne contient que des branches fermées. Interprété sémantiquement, le fait que toutes les branches se ferment signifie qu'il n'y a aucune possibilité pour la phrase initiale d'être vraie, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une contradiction. Puisqu'une phrase est une contradiction si et seulement si sa négation est une tautologie, nous avons une méthode pour tester le caractère tautologique d'une phrase. Il suffit de faire l'arbre *de sa négation* et de voir si toutes les branches se ferment. Si c'est le cas, la phrase initiale est une tautologie ; sinon, elle ne l'est pas.[31]

Un arbre dont toutes les branches se ferment est appelé « fermé ». Une phrase est donc une tautologie si et seulement si sa négation a un arbre fermé. Considérons un autre exemple. Pour prouver « $(p \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge \neg p \vee (q \rightarrow \neg r)) \rightarrow (p \rightarrow \neg r)$ », c'est-à-dire pour montrer que cette phrase complexe est un théorème de la méthode des arbres, nous construisons un arbre pour sa négation. Sa négation est une implication niée, et alors la conjonction de l'antécédent et de la négation du conséquent. Nous continuons avec les autres règles comme suit :

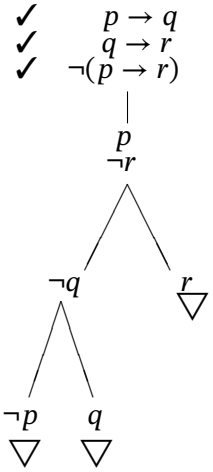
[30] Selon l'interprétation ‹ dialogique › de la méthode des arbres (cf. p. 130), la fermeture d'une branche représente le cul-de-sac dans lequel est tombé un interlocuteur qui a choisi cette stratégie pour défendre sa thèse initiale. S'il n'y a que des culs-de-sac, la thèse ne peut pas être défendue.

[31] J'explique ici une méthode syntaxique en termes sémantiques, présupposant déjà que la méthode des arbres est correcte et complète par rapport à la sémantique de la logique propositionnelle. Nous n'établirons ce résultat que plus tard, dans la leçon 7.

PROOF



Les arbres peuvent donc nous servir de critère lors de la détermination du caractère tautologique ou non tautologique d'une phrase. Une inférence est valide si et seulement si l'implication matérielle de sa conclusion par (la conjonction de) ses prémisses est une tautologie. Nous pouvons donc également utiliser la méthode des arbres pour tester la validité des inférences. Par exemple, pour tester la validité de l'argument « $p \rightarrow q$; $q \rightarrow r$; donc $p \rightarrow r$ » (vérifier si « $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vDash p \rightarrow r$ » est vraie), nous déterminons si la négation de sa conclusion est consistante avec ses prémisses – s'il existe une possibilité logique que les prémisses soient vraies et la conclusion fausse. Si toutes les branches de l'arbre correspondant à cette implication sont fermées, il n'y a aucune valuation qui rende vraies à la fois toutes les prémisses et la négation de la conclusion car la négation de la conclusion est inconsistante avec les prémisses. En d'autres termes, toute valuation qui rend vraie l'ensemble des prémisses rend vraie la conclusion. Par conséquent, l'inférence est valide. Nous construisons l'arbre suivant :



Observant que toutes les branches se ferment, nous concluons qu'il n'y a pas de valuation qui rende

PROOF

vraies « $p \to q$ », « $q \to r$ » et « $\neg(p \to q)$ », c'est-à-dire que toute valuation qui rend vraies « $p \to q$ » et « $q \to r$ » rend également vraie la conclusion de l'argument, « $(p \to q)$ ». L'argument suivant est donc valide :

$$\frac{\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \end{array}}{p \to r} \tag{5.3}$$

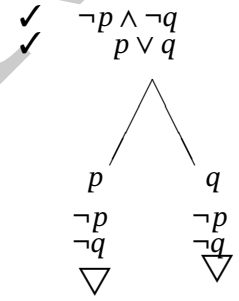
Quelqu'un qui accepte les prémisses mais nie la conclusion de cet argument aura aucune possibilité de convaincre son interlocuteur – toutes les chemins de vérité pour cette combinaison d'affirmations sont fermées.

La méthode des arbres est une méthode efficace permettant de déterminer si un énoncé est une tautologie ou non. L'application d'une règle à une formule a pour résultat de ramener le problème à l'application d'autres règles sur des formules plus courtes. Étant donné qu'au point de départ nous avons un nombre fini de phrases qui possèdent chacune un nombre fini de symboles, après un nombre fini d'étapes, l'arbre sera totalement développé et nous pourrons vérifier si tous les chemins se ferment ou non.

Comme test de validité d'un argument, la méthode des arbres a l'avantage supplémentaire de nous procurer une information cruciale dans le cas où le test échoue : la branche qui reste ouverte nous indique de quelle manière on peut construire un contre-exemple, c'est-à-dire quelle est la valuation atomique qui rend vraies les prémisses et fausse la conclusion.

Néanmoins, il faut faire des choix : dans l'application des règles à certaines phrases plutôt que d'autres, on risque de compliquer l'arbre et de devoir répéter les mêmes formules sur différents arbres. En général, il est conseillé de toujours traiter d'abord les phrases qui n'ouvrent pas de nouvelles branches, ce qui évite de devoir répéter la même formule dans des branches différentes. L'ordre de l'application des règles, même s'il peut être important d'un point de vue pratique, est immatériel logiquement : si nous obtenons un arbre fermé par un ordre de procédure, tout autre ordre nous donnera également un arbre fermé.

Il est important de ne pas oublier d'introduire les nouvelles formules *sur toutes les branches ouvertes*. Supposons, par exemple, que je commence, en développant l'arbre suivant, par la disjonction. Je dois mettre les conjoints de la conjonction sur toutes les branches successives :



En guise de résumé, on peut dire que la méthode des arbres met à notre disposition trois tests fort utiles :

- Comme test de *consistance*, elle nous permet d'établir si une phrase ou un ensemble de phrases sont ou non consistants et, dans le cas d'une réponse affirmative, elle nous permet de trouver une valuation pertinente.

PROOF

- La méthode des arbres nous permet d'établir si une phrase donnée est ou non une *tautologie* : elle l'est si et seulement si les branches de l'arbre de sa négation sont toutes fermées.
- La méthode des arbres nous permet également de tester la *validité* d'un argument, en vérifiant si l'implication correspondante est ou non une tautologie.

Points à retenir

1. Une valuation propositionnelle atomique attribue des valeurs de vérité aux phrases simples. Elle est la base pour une interprétation propositionnelle qui attribue des valeurs de vérité à toutes les formules du langage $\mathcal{L}$.
2. Une valuation propositionnelle correspond à une possibilité logique et à une ligne dans une table de vérité.
3. Les notions sémantiques « tautologie », « contradiction », « satisfaisabilité »et « conséquence logique »peuvent être définies en termes de valuations propositionnelles.
4. Un ensemble de phrases est satisfaisable si et seulement s'il y a une valuation qui rende vraies toutes les phrases de cet ensemble.
5. Un calcul syntaxique (un calcul axiomatique, un calcul d'arbres ou un calcul de la déduction naturelle) est dit « correct » si tous ses théorèmes sont des tautologies.
6. Un tel calcul est dit « complet » si toute tautologie en est un théorème.
7. La méthode des arbres nous fournit un test de consistance : elle nous permet d'établir si oui ou non un ensemble de phrases est consistant. Si l'ensemble en question est effectivement consistant, elle permet également de trouver une valuation qui rende vraies toutes les phrases de cet ensemble.
8. Prouver une phrase ϕ par la méthode des arbres revient à montrer que toutes les branches de l'arbre de sa négation $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ se ferment.
9. Puisqu'elle est correcte, la méthode des arbres nous permet également d'établir si une phrase ϕ est ou non une tautologie : elle l'est si et seulement si l'arbre de sa négation $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ ne contient que des branches fermées.
10. La méthode des arbres nous permet également de tester un argument pour sa validité, en vérifiant le caractère tautologique de l'implication correspondante.

PROOF

6 La déduction naturelle

6.1 Les suppositions

Nous avons rencontré deux manières de construire des preuves :

1. le calcul axiomatique HC, où il faut d'abord trouver les bons axiomes, en faire des substitutions, et enfin appliquer la règle d'inférence MP dans le bon ordre ;
2. la méthode des arbres (ou : la méthode des tableaux analytiques), où l'on décompose successivement la formule initiale en cherchant une valuation sous laquelle elle est vraie.

La méthode de la réduction à l'absurde, que l'on a introduite comme règle d'introduction de la négation, ne s'insère dans aucune de ces catégories car elle utilise essentiellement la notion de « *supposition* ». Dans la langue naturelle, une supposition est l'énonciation d'une phrase qui manque de force assertorique. Au niveau pragmatique, la force assertorique est ce qui distingue une assertion d'une question ou d'un ordre : c'est en vertu de la force assertorique que quelqu'un qui affirme qu'il pleut s'engage pour la vérité de « il pleut ». Si son énonciation manque de force assertorique, on ne peut pas le contredire en disant qu'il ne pleut pas. En effet, il n'a pas affirmé qu'il pleut : il l'a seulement demandé, ordonné ou supposé.

Nous avons dit que la logique s'occupe d'un langage formel, qui fait abstraction de la dimension pragmatique du langage ordinaire. Si nous distinguons la force ou le mode d'un énoncé de son contenu propositionnel et disons que les actes de promettre que p, ordonner que p, prier que p et dire que p concernent toutes la même phrase « p », ce n'est que de cette phrase, considérée comme étant vraie ou fausse, dont nous nous sommes occupés jusqu'à maintenant. C'est pourquoi on pourrait penser que la logique fait abstraction totale de tout acte de parole. Cela n'est plus vrai une fois que les hypothèses sont utilisées, pusique celles-ci concernent des suppositions et non plus des affirmations.[1]

Nous avons déjà fait de nombreuses suppositions tout au long de ce cours. Prenons les exemples suivants :

- « Imaginons que quelqu'un soutienne qu'il ne faut pas manger de la viande. Il pourrait avoir deux types de raisons : … »
- « Quelqu'un qui affirme que « p » et que « $p \to q$ » sont vrais, devrait alors affirmer que q. »
- « Tout en étant convaincus que $\neg p$, supposons que p. Il s'ensuit alors que le numéro 2 n'est pas égal à la somme de $1 + 1$, ce qui, nous le savons, est faux. La supposition que p était donc fausse. Donc $\neg p$. »
- « Si, comme certains l'affirment, il y a un Dieu, alors ce Dieu est omnipuissant. S'il est omnipuissant, alors il peut créer une pierre si lourde que Lui-même ne peut la soulever. Mais c'est impossible. Donc il n'y a pas de Dieu. »

Dans une preuve par la réduction à l'absurde, il serait absurde de reprocher à celui qui la profère

[1] La distinction entre une affirmation que p et une supposition que p se fait par référence aux différentes forces illocutoires de ces deux actes. Ceux-ci, cependant, resteront les seuls à considérer. Nous verrons dans le chapitre 8 sur la syllogistique qu'Aristote en distinguait un troisième acte de parole, le rejet ou la négation illocutoire (cf. p. 193).

PROOF

de s'être contredit en démontrant (et donc en affirmant) que la phrase de départ est fausse. Ceci montre que nous avons affaire à une supposition : c'est en supposant « p » et en montrant qu'une contradiction s'ensuit que l'on démontre que $\neg p$.

C'est l'usage des suppositions qui caractérise la méthode de la déduction naturelle que l'on abordera dans cette leçon.[2] La déduction naturelle est une manière intuitive de faire des preuves qui s'apparente bien aux raisonnements d'une argumentation. Parce qu'elle nous permet de prouver des théorèmes et parce que l'on peut démontrer que ses théorèmes sont des tautologies, la déduction naturelle est de même une méthode permettant de calculer la validité des arguments : opérant étape par étape, chacune contenant sa propre règle pour aller des prémisses à des conclusions intermédiaires, nous arrivons à la conclusion finale de l'argument.

Même si l'on ne s'engage pas à la vérité de ce que l'on suppose, on tombe sous une obligation correspondante : celle de tenir compte de ses suppositions. De nombreux raisonnements fallacieux se produisent en prenant une supposition pour un fait établi. C'est pourquoi, dans la notation des preuves en déduction naturelle que nous adopterons, il faut toujours marquer les suppositions dans la colonne à gauche. Considérons le début d'une preuve que $\neg p$ à partir des trois prémisses « $p \to q$ », « $p \to (q \to r)$ » et « $\neg r$ » :

1	$p \to q, p \to (q \to r), \neg r$	$\vdash\ p \to q$	prémisse
2	$p \to q, p \to (q \to r), \neg r$	$\vdash\ p \to (q \to r)$	prémisse
3	$p \to q, p \to (q \to r), \neg r$	$\vdash\ \neg r$	prémisse
4	$p \to q, p \to (q \to r), \neg r, p$	$\vdash^*\ p$	supposition
5	$p \to q, p \to (q \to r), \neg r, p$	$\vdash^*\ q$	de (1) et (4) par (MP)
6	$p \to q, p \to (q \to r), \neg r, p$	$\vdash^*\ q \to r$	de (2) et (4) par (MP)
7	$p \to q, p \to (q \to r), \neg r, p$	$\vdash^*\ r$	de (5) et (6) par (MP)

Nous commençons la preuve aux trois premières lignes par une énumération des prémisses : toutes les autres phrases de la preuve seront des conséquences logiques des trois prémisses (1), (2) et (3). Nous introduisons une supposition à la ligne (4). Nous la rajoutons à la colonne gauche et marquons le signe « $\vdash$ » pour la relation de déductibilité avec une astérisque : cette astérisque dans « $\vdash^*$ » nous rappelle que nous n'avons encore rien prouvé sans condition. Les lignes 4 à 7 sont toutes gouvernées par la supposition que p – nous avons prouvé, à la ligne (7), « r » *sous la supposition que* p (indiqué par l'astérisque dans « $\vdash^*$ »). Pour pouvoir dire que l'on a réellement prouvé la vérité d'une certaine formule propositionnelle, il faut enlever cette supposition et passer de « $\vdash^*$ » à « $\vdash$ ». Comment se défaire d'une supposition ?

Une règle d'inférence qui nous permet d'ôter une supposition est la *réduction à l'absurde*, que nous avons déjà rencontré à la p. 24. L'introduction des suppositions nous permet de compléter non seulement notre discussion sur la négation, mais également celle sur l'implication matérielle. Nous avons vu que la règle d'élimination pour l'implication matérielle ($\to$ **E**) était la règle d'inférence *modus ponens* (MP) :

$$\frac{\vdash p \to q \quad \vdash p}{\vdash q} \quad \to \mathbf{E} \text{ ou MP}$$

[2] Pour la formulation des règles et quelques exemples, je suivrai largement l'excellente présentation de Lemmon (1965b), qui, lui-même, s'est inspiré de Suppes (1957) et Mates (1965), qui eux suivaient Fitch (1952).

PROOF

Dans la deuxième leçon, nous n'avions pas les ressources suffisantes pour introduire la règle d'introduction correspondante ($\rightarrow$ **I**), celle de la *preuve conditionnelle* (PC) :

$$\dfrac{\begin{array}{ll} p & \vdash^* p \\ & \vdots \\ p & \vdash^* q \end{array}}{\vdash\ p \rightarrow q} \quad \rightarrow \mathbf{I} \text{ ou PC}$$

Cette règle nous permet de remplacer une supposition par une implication matérielle : si « q » a été prouvé sous la supposition que p, nous avons prouvé, sous aucune supposition, que $p \rightarrow q$. Cette dernière formule incorpore notre supposition, la transformant en l'antécédent d'une implication matérielle.

Avec cette règle à notre disposition, continuons notre preuve que $\neg p$:

1	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg r$	$\vdash\ p \rightarrow q$	prémisse
2	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg r$	$\vdash\ p \rightarrow (q \rightarrow r)$	prémisse
3	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg r$	$\vdash\ \neg r$	prémisse
4	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg r, p$	$\vdash^*\ p$	supposition
5	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg r, p$	$\vdash^*\ q$	de (1) et (4) par (MP)
6	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg r, p$	$\vdash^*\ q \rightarrow r$	de (2) et (4) par (MP)
7	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg r, p$	$\vdash^*\ r$	de (5) et (6) par (MP)
8	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash\ p \rightarrow r$	de (4) et (7) par (PC)
9	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash\ \neg r \rightarrow \neg p$	de (8) par *conversion* (CP)
10	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash\ \neg p$	de (3) et (9) par (MP)

À la ligne (8), nous avons enlevé notre supposition que p en la transformant en l'antécédent d'une implication qui a comme conséquent une chose prouvée sous cette supposition. Ici, par exemple, il s'agit d'appliquer PC aux lignes (3) (où la supposition a été faite) et (7), où nous avons annoncé ce qui a été prouvé sous cette supposition. La ligne (9) a été obtenu par une règle d'inférence dérivée, appelée « conversion », dont le schéma est le suivant (cf. les p. 26 et p. 121) :

$$\dfrac{\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner}{\ulcorner \neg\psi \rightarrow \neg\phi \urcorner} \quad \text{CP}$$

Ce schéma correspond à la tautologie « $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ » et est donc valide. Sans la conversion, nous aurions dû faire une autre supposition – cette fois la supposition que $\neg r$ et appliquer PC pour obtenir « $\neg r \rightarrow \neg p$ », avec ce qui nous avons prouvé à la ligne (6). Nous pouvons même économiser encore une autre ligne en utilisant la règle de *modus tollens* (MT) :

3	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash\ \neg r$	prémisse
8	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash\ p \rightarrow r$	de (4) et (7) par (PC)
10*	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash\ \neg p$	de (3) et (8) par (MT)

Avec la nouvelle ligne (10+), la ligne (9) n'est plus nécessaire.

Nous voyons que dans un calcul de déduction naturelle, il est facile d'introduire des règles d'inférence dérivées (comme nous l'avons fait avec CP, la règle de la conversion). Dans un calcul axiomatique, on aurait été obligé de procéder comme suit :

PROOF

3	$p \to q, p \to (q \to p), \neg r$	$\vdash \neg r$	prémisse
8	$p \to q, p \to (q \to p), \neg r$	$\vdash p \to r$	de (4) et (7) par (PC)
8a	$p \to q, p \to (q \to p), \neg r$	$\vdash (p \to r) \to (\neg r \to \neg p)$	axiome ($\mathbf{H_{11}}$)
8b	$p \to q, p \to (q \to p), \neg r$	$\vdash \neg r \to \neg p$	de (8) et (8a) par (MP)
9*	$p \to q, p \to (q \to p), \neg r$	$\vdash \neg p$	de (3) et (8b) par (MP)

La nouvelle règle d'inférence (MT) nous permet d'épargner les lignes (8a) et (8b).

D'une importance particulière pour les suppositions est la réduction à l'absurde : elle nous permet de conclure, sur la base d'un arrière-plan gardé fixe, qu'une certaine supposition ne peut pas être vraie. En soi, cependant, elle ne détermine pas quelle formule était coupable de l'engendrement de la contradiction.

Considérons la preuve suivante :

1	$p \to q, q \to \neg p$	$\vdash p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to \neg p$	$\vdash q \to \neg p$	prémisse
3	$p \to q, q \to \neg p, p$	$\vdash^* p$	supposition
4	$p \to q, q \to \neg p, p$	$\vdash^* q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \to q, q \to \neg p, p$	$\vdash^* \neg p$	de (2) et (4) par (MP)
6	$p \to q, q \to \neg p$	$\vdash \neg p$	de (3) et (5) par *réduction à l'absurde*

Dans cette déduction naturelle, nous avons d'abord supposé que p, à la ligne 3. Néanmoins, cette supposition nous a amené à affirmer que que $\neg p$, à la ligne 5, ce qui est contradictoire avec notre précédente hypothèse. À partir de cette impasse, nous pouvons conclure que notre supposition était fausse, et donc que $\neg p$ – sous aucune supposition et par *réduction à l'absurde* : si la supposition que p nous mène à une contradiction, alors $\neg p$ (ligne 6).

Il aurait été possible, cependant, de regarder la même preuve comme une preuve de la négation d'une prémisse, par exemple :

1	$p \to q, q \to \neg p$	$\vdash p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to \neg p$	$\vdash q \to \neg p$	prémisse
3	$p \to q, q \to \neg p, p$	$\vdash^* p$	supposition
4	$p \to q, q \to \neg p, p$	$\vdash^* q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \to q, q \to \neg p, p$	$\vdash^* \neg p$	de (2) et (4) par (MP)
6	$p \to q, p$	$\vdash \neg(q \to \neg p)$	de (2) et (5) par *réduction à l'absurde*

La contradiction en elle-même ne détermine pas quelle prémisse ou supposition en était coupable : elle nous informe de l'inconsistance de l'*ensemble* des prémisses, du fait qu'*au moins une* doit être fausse.

6.2 Les règles d'introduction et d'élimination des connecteurs

L'utilisation d'une langue formelle pour la logique propositionnelle nous oblige d'expliquer ce que nous voulons dire par les symboles introduits à ce propos : nous devons fixer leur signification. Une manière sémantique de le faire est de donner des tables de vérité, exploitant ainsi le principe de véri-

PROOF

fonctionnalité.

Outre les tables de vérité, il existe une autre méthode sémantique qui permet de déterminer la signification des connecteurs propositionnels : les règles d'introduction et d'élimination déterminent le comportement 'inférentiel' de ces connecteurs – ce qui, pour ceux qui conçoivent la logique comme systématisation d'inférences, comprend l'essentiel de leur signification. Complétant notre discussion des connecteurs dans la leçon 2 (p. 37 et suivantes), nous postulons les règles suivantes comme règles d'introduction et d'élimination pour les connecteurs propositionnels :

$$\frac{\vdash \ulcorner \phi \to \bot \urcorner}{\vdash \ulcorner \neg \phi \urcorner}\ \neg\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash \ulcorner \neg\neg \phi \urcorner}{\vdash \phi}\ \neg\mathbf{E}$$

La règle d'introduction pour la négation (**¬I**), comme nous l'avons vu à la p. 42, utilise « ⊥ », une abréviation pour n'importe quelle phrase contradictoire. La règle (**¬E**) est incomplète : elle nous apprend comment éliminer une *double* négation, mais ne dit rien de l'élimination d'une négation simple.

Les règles pour la conjonction, par contre, ne sont pas problématiques :

$$\frac{\begin{array}{c}\vdash \psi \\ \vdash \phi\end{array}}{\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner}\ \wedge\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner}{\vdash \phi}\ \wedge\mathbf{E} \qquad \frac{\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner}{\vdash \psi}\ \wedge\mathbf{E}$$

Pour la disjonction, nous avions mentionné le syllogisme disjonctif comme règle d'élimination :

$$\frac{\vdash \phi}{\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash \psi}{\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdash \ulcorner \neg \phi \urcorner \\ \vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner\end{array}}{\vdash \psi}\ \vee\mathbf{E}$$

Les règles pour l'implication matérielle sont (CP) et (MP) :

$$\frac{\begin{array}{c}\phi \vdash^{*} \phi \\ \phi \vdash^{*} \psi\end{array}}{\vdash \ulcorner \phi \to \psi \urcorner}\ \to\mathbf{I} \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdash \phi \\ \vdash \ulcorner \phi \to \psi \urcorner\end{array}}{\vdash \psi}\ \to\mathbf{E}$$

On en obtient les règles pour l'équivalence matérielle :

$$\frac{\begin{array}{c}\vdash \ulcorner \psi \to \phi \urcorner \\ \vdash \ulcorner \phi \to \psi \urcorner\end{array}}{\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner}\ \leftrightarrow\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner}{\vdash \ulcorner \phi \to \psi \urcorner}\ \leftrightarrow\mathbf{E} \qquad \frac{\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner}{\vdash \ulcorner \psi \to \phi \urcorner}\ \leftrightarrow\mathbf{E}$$

Ces règles, avec quelques modifications, seront les règles de la déduction naturelle.[3] Au lieu de postuler, comme dans une approche sémantique, que ces règles constituent des inférences valides, nous les prenons simplement comme tels, pour des règles de manipulation de signes. Comme les règles d'inférence d'un calcul axiomatique, elles sont schématiques : pour n'importe quelle phrase « p », la règle (**¬E**), par exemple, nous dit que nous pouvons prouver « p » à partir de sa double négation « $\neg\neg p$ » ; elle nous dit également que nous pouvons prouver « $p \wedge q$ » à partir de « $\neg\neg(p \wedge q)$ », « $(p \to q) \vee r$ » à partir de « $\neg\neg((p \to q) \vee r)$ », etc.

Il est important de noter que ces règles reviennent à une spécification syntaxique des connecteurs propositionnels (puisqu'on n'a pas encore prouvé la validité de ces règles). Comment est-ce possible ?

[3] On fera une modification pour la règle d'introduction de la négation : la règle **¬I** sera remplacée par les règles de modus tollens MT et de la réduction à l'absurde RAA. Une modification correspondante s'appliquera à la règle d'élimination de la disjonction **∨E**.

PROOF

Pour donner une spécification syntaxique de la signification d'un connecteur, nous formulons des règles qui permettent de manipuler des formules qui le contiennent. Nous déterminons ainsi le comportement inférentiel de ce connecteur, en lui donnant une *définition implicite* : quelle que soit la signification de « $\wedge$ », elle est telle qu'elle permet l'introduction de ce signe selon la règle $\wedge\mathbf{I}$.[4]

Il existe différentes façons de fournir une définition implicite des connecteurs propositionnels : par un système d'axiomes comme l'est le calcul HC, par des règles de construction d'arbres et également par des règles d'élimination et d'introduction. Ces dernières sont de loin les plus intuitives et c'est sur elles que la méthode de la déduction naturelle est basée.

6.3 Les règles de la déduction naturelle

Nous avons déjà montré qu'il y a des théorèmes du calcul axiomatique qui correspondent à des règles d'inférence de la déduction naturelle : la règle dérivée de conversion CP, par exemple, correspond au théorème « $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ » de HC. Il s'agit d'un phénomène général : normalement, les calculs axiomatiques consistent en de nombreux axiomes et une seule règle d'inférence – modus ponens (MP). Les calculs de la déduction naturelle – comme celui de la méthode des arbres – n'ont pas d'axiomes, mais de nombreuses règles d'inférence pour déduire des théorèmes à partir des prémisses. Chacune de ces règles nous permet de continuer notre preuve d'une étape, si nous avons déjà établi un certain nombre d'autres : ces autres étapes sont alors mentionnés dans la colonne droite de la preuve, et toutes leurs suppositions sont héritées à la nouvelle ligne. La difficulté principale des preuves par la méthode de la déduction naturelle consiste alors à tenir compte de ces suppositions.

Nous allons discuter maintenant de quelques règles d'inférence en détail. Prises ensemble, ces règles nous permettent de démontrer toute tautologie de la logique propositionnelle : elles forment un calcul correct et complet par rapport à la sémantique donnée de la logique propositionnelle.

La règle des suppositions

À n'importe quel stade de la preuve, nous avons le droit d'introduire une supposition, à condition que nous la marquions dans la deuxième colonne à partir de la gauche :

n	ϕ	$\vdash^* \phi$	supposition

Modus ponens (modus ponendo ponens)

La règle de modus ponens (abrégée «(MP)» ou «($\to$ **E**)») nous permet de passer d'une implication matérielle et de son antécédent à son conséquent :

m	$\vdash \ulcorner \phi \to \psi \urcorner$
⋮	⋮
n	$\vdash \phi$
⋮	⋮

[4] Une définition explicite en revanche, consiste en des conditions nécessaires et suffisantes d'une paraphrase (cf. p. 75) : elle permet de re-écrire tout contexte contenant la nouvelle expression définie en n'utilisant que les expressions qui ont servi à sa définition – le definiens est universellement substituable pour le definiendum.

PROOF

o	$\vdash \psi$	de (m) et (n) par (MP)

Modus tollens (modus tollendo tollens)

La règle de modus tollens (abrégée «(MT)») nous permet de passer d'une implication matérielle et de la négation de son conséquent à la négation de son antécédent :

m	$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \ulcorner \neg \psi \urcorner$	
⋮	⋮	
o	$\vdash \ulcorner \neg \phi \urcorner$	de (m) et (n) par (MT)

La règle de modus tollens remplace la règle de conversion. Si on a prouvé « $p \rightarrow q$ » et « $\neg q$ », la conversion de la première nous donne « $\neg q \rightarrow \neg p$ » et « $\neg p$ » s'ensuit par (MP). Avec (MT), nous pouvons en déduire « $\neg p$ » sans aucune étape intermédiaire.

Preuve conditionnelle

La règle de la preuve conditionnelle (abrégée «($\rightarrow$ **I**)» ou «(PC)») nous permet de transformer une sous-preuve (une preuve gouvernée par une supposition) en une preuve d'une implication matérielle ; elle nous permet de déduire une implication si et seulement s'il est possible de prouver par d'autres moyens que le conséquent de l'implication peut être dérivé de son antécédent.

m	ϕ	$\vdash^* \phi$	supposition
⋮		⋮	
n	ϕ	$\vdash^* \psi$	
⋮		⋮	
o		$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	de (m) et (n) par (PC)

Dans la ligne (o), nous *déchargeons* la supposition ϕ par laquelle nous avons commencé la sous-preuve de (m) à (n) et nous *conditionalisons* le résultat intermédiaire ψ qui était gouverné par la supposition ϕ.

L'introduction et l'élimination de la double négation

La règle de l'élimination de la double négation ((¬**E**) ou (DN)) est la suivante :

m	$\vdash \ulcorner \neg \neg \phi \urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \phi$	de (m) par (DN)

De la même manière, nous pouvons introduire une double négation (par exemple pour une application éventuelle de (MT)) :

PROOF

m	$\vdash \phi$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	de (m) par (DN)

La réduction à l'absurde (reductio ad absurdum)

La règle de la réduction à l'absurde ((RAA) ou (¬**I**)) nous permet de convertir une sous-preuve particulière (qui part de la supposition que p et qui en dérive une contradiction) en une preuve que $\neg p$:

m	ϕ	$\vdash^* \phi$	supposition
⋮		⋮	
n	ϕ	$\vdash^* \psi$	
⋮		⋮	
o	ϕ	$\vdash^* \ulcorner\neg\psi\urcorner$	
⋮		⋮	
p		$\vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$	de (m), (n) et (o) par (RAA)

Sous la supposition ϕ (ligne m), nous avons démontré à la fois ψ (ligne n) et $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ (ligne o). Or ψ et $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ ne peuvent pas être vrais ensemble. Nous pouvons donc conclure que la supposition initiale ϕ était fausse et écrire $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ à la ligne p. Nous avons réduit à l'absurde la supposition ϕ et donc prouvé sa négation.

D'après cette règle, si votre interlocuteur pose une hypothèse (« p ») dont on peut prouver qu'elle nous mène à une contradiction (« $q \wedge \neg q$ »), alors cette hypothèse doit être rejetée et sa négation « $\neg p$ » peut être affirmée.[5]

L'introduction et l'élimination de la conjonction

La règle d'introduction de la conjonction (∧**I**) nous permet d'inférer « $p \wedge q$ » si on a déjà prouvé que p et que q :

m	$\vdash \phi$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \psi$	
⋮	⋮	
o	$\vdash \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	de (m) et (n) par (∧**I**)

L'élimination de la conjonction se fait en inférant un des conjoints de la phrase conjonctive :

m	$\vdash \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \phi$	de (m) par (∧**E**)

Il est immatériel quel est le conjoint en question :

[5] Ce contraste entre la *permission* d'affirmer une conséquence logique de ce qu'on a affirmé auparavant et l'*interdiction* d'en affirmer la négation a déjà été constaté à la p. 82.

PROOF

m	$\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \psi$	de (m) par ($\wedge$**E**)

L'introduction et l'élimination de la disjonction

Les règles d'introduction de la disjonction sont duales aux règles d'élimination de la conjonction :[6]

m	$\vdash \phi$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	de (m) par ($\vee$**I**)

Ceci vaut pour les deux côtés de la disjonction :

m	$\vdash \psi$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	de (m) par ($\vee$**I**)

L'introduction de la disjonction est un ajout qui, bien qu'il puisse sembler inutile, ne change pas la validité de la phrase. Par exemple, à partir de « Louis XVI a été guillotiné », il est possible de créer la phrase « Louis XVI a été guillotiné ou Louis XVI a été pendu »sans porter atteinte à la valeur de vérité de cette phrase. La phrase plus complexe est vraie, même si l'on sait très bien qu'il n'a pas été pendu.

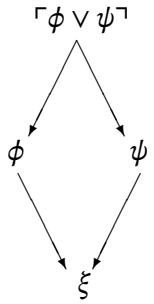
L'élimination de la disjonction est un peu plus complexe et présuppose la règle des suppositions. Considérons le schéma de preuve suivant :

m		$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	
⋮		⋮	
n	ϕ	$\vdash^* \phi$	supposition
⋮		⋮	
o	ϕ	$\vdash^* \chi$	
⋮		⋮	
p	ψ	$\vdash^* \psi$	supposition
⋮		⋮	
q	ψ	$\vdash^* \chi$	
⋮		⋮	
r		$\vdash \chi$	de (m), (n), (o), (p) et (q) par ($\vee$**E**)

L'idée qui motive cette règle d'inférence est la suivante : si une disjonction « $p \vee q$ » a été établie, et qu'on montre que de « p » il s'ensuit « r », et que de « q » il s'ensuit également « r » ; alors, de la disjonction « $p \vee q$ », il s'ensuit que r. Si nous avons, à la ligne **m**, prouvé la disjonction, on a prouvé que r. Ce qui s'ensuit à la fois des deux disjoints s'ensuit de la disjonction même. Nous pouvons donner une interprétation graphique de ($\vee$**E**) comme suit :

[6] Nous appelons « duale » la transformation d'une conjonction en une disjonction niée ou d'une disjonction en une conjonction niée, suivant les lois de Morgan, cf. p. 128.

PROOF



Prenons un exemple : imaginons la phrase « soit Maurice est heureux, soit Maurice est triste ». À partir de cette disjonction, il m'est impossible de déterminer si Maurice est heureux ou triste. En revanche, si j'ajoute également à ma théorie les deux phrases « si Maurice est heureux, il est à la maison »et « si Maurice est triste, il est à la maison », alors je peut déterminer que Maurice est à la maison, et cela sans savoir lequel des deux disjoints est vrai. Ainsi, si les deux disjoints d'une disjonction convergent vers une même conclusion, alors je peux légitimement conclure sans connaître la valeur de vérité des disjoints.

L'introduction et l'élimination de l'équivalence matérielle

Puisque l'équivalence matérielle est simplement l'implication matérielle ‹ réciproque › , nous avons comme règle d'introduction :

m	$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \ulcorner \psi \rightarrow \phi \urcorner$	
⋮	⋮	
o	$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	de (m) et (n) par ($\leftrightarrow$ **I**)

Les règles d'élimination nous montrent que l'équivalence est simplement la conjonction des deux implications matérielles :

m	$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	de (m) par ($\leftrightarrow$ **E**)

L'élimination de l'équivalence peut se faire en favour des deux implications implicites :

m	$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \ulcorner \psi \rightarrow \phi \urcorner$	de (m) par ($\leftrightarrow$ **E**)

6.4 Les preuves par déduction naturelle

Mis à part l'usage des suppositions, une deuxième caractéristique de la méthode de la déduction naturelle est qu'elle nous permet d'incorporer des *prémisses*. Dans un calcul axiomatique, il faut distinguer

PROOF

ce qui est dérivable tout court (les théorèmes) de ce qui est dérivable d'une théorie. Les théories, dans les calculs axiomatiques, jouent un rôle comparable à celui des prémisses dans la déduction naturelle. On marquera les prémisses dans la deuxième colonne à gauche, avec les suppositions. Contrairement aux suppositions il ne faut pas les supprimer pour obtenir une preuve – la preuve elle-même sera conditionnelle : on montrera qu'une certaine phrase (la conclusion) *peut être dérivée à partir de* certaines autres (les prémisses). Toutes nos règles sauf la règle des suppositions, PC et RAA présupposent que l'on ait déjà démontré une ou plusieurs phrases et nous servent donc à établir des phrases à partir de certaines prémisses.

L'usage des prémisses nous permet d'éviter des substitutions. Pour montrer, par exemple, la commutativité de la conjonction, une simple preuve de quatre lignes nous suffit :

1	$p \wedge q$	$\vdash\ p \wedge q$	prémisse
2	$p \wedge q$	$\vdash\ p$	de (1) par ($\wedge$**E**)
3	$p \wedge q$	$\vdash\ q$	de (1) par ($\wedge$**E**)
4	$p \wedge q$	$\vdash\ q \wedge p$	de (3) et (2) par ($\wedge$**I**)

De la prémisse « $p \wedge q$ », nous concluons que p à la ligne (2) et que q à la ligne (3). Comme la règle d'introduction de la conjonction ($\wedge$**I**) nous laisse le libre choix entre les deux conjoints, nous pouvons conclure que $q \wedge p$ à la ligne (4), démontrant ainsi que dans une conjonction, l'ordre des conjoints n'importe peu. On remarque, cependant, que mêmes les prémisses doivent être introduites dans la preuve – seulement leur introduction les rend utilisable par la suite.

Dans la colonne de gauche, on énumère les lignes ; dans la deuxième, on met des prémisses (qu'il n'y a pas dans cet exemple) et des suppositions ; dans la troisième, soit « $\vdash^*$ » (si on est en train de démontrer une phrase sous une supposition), soit « $\vdash$ » (si on n'a pas fait de supposition ou éliminé toutes celles que l'on a faites) ; dans la quatrième colonne, la phrase principale ; dans la cinquième, la manière dont on est arrivé à la phrase principale : s'il s'agit d'une prémisse, d'une supposition ou de la conclusion d'une règle d'inférence.

Chaque ligne doit comporter une justification dans sa quatrième colonne : ce n'est grâce à cette justification qu'un contrôle automatique de la preuve est possible. Il n'est pas toujours nécessaire, cependant, d'avoir des prémisses ou des suppositions : la deuxième colonne peut être vide.

PC et RAA nous permettent de démontrer des tautologies, c'est-à-dire des phrases dont les preuves ne nécessitent pas de prémisses. Pour démontrer la tautologie « $\vdash p \to p$ » par exemple, nous procédons comme suit :

1	p	$\vdash^*\ p$	supposition
2	p	$\vdash^*\ p$	de (1)
3		$\vdash\ p \to p$	de (1) et (2) par (PC)

Si nous avons deux lignes identiques comme dans notre exemple, il n'est pas nécessaire de les répéter. Nous aurions pu écrire également :

1	p	$\vdash^*\ p$	supposition
2		$\vdash\ p \to p$	de (1) et (1) par (PC)

Si on a des prémisses, on commence par les incorporer dans la preuve. Supposons que nous vou-

PROOF

lions prouver « $p \to r$ » à partir des deux phrases « $p \to q$ » et « $q \to r$ ». Nous commençons avec l'énonciation de ces prémisses comme suit :

1	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ q \to r$	prémisse

Cette règle d'incorporation des prémisses correspond au fait que l'on a, dans un calcul axiomatique, $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi$ pour toute formule $\phi \in \mathsf{Th}$.[7] Puisque nous cherchons à établir une conclusion conditionnelle (à savoir « $p \to r$ »), nous supposons son antécédent :

1	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ q \to r$	prémisse
3	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^*\ p$	supposition

Cette supposition nous permet d'appliquer (MP) : nous obtenons ainsi « q » – ce qui, avec la deuxième prémisse, nous permet la dérivation de « r » :

1	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ q \to r$	prémisse
3	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^*\ p$	supposition
4	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^*\ q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^*\ r$	de (2) et (4) par (MP)

En appliquant de la règle de la preuve conditionnelle, nous avons établi notre conclusion sous aucune supposition à partir des deux prémisses originales :

1	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ q \to r$	prémisse
3	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^*\ p$	supposition
4	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^*\ q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^*\ r$	de (2) et (4) par (MP)
6	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ p \to r$	de (3) et (5) avec (PC)

La dernière ligne nous assure maintenant que l'on peut prouver « $p \to r$ » des deux prémisses « $p \to q$ » et « $q \to r$ ». En d'autres mots, nous avons prouvé le séquent « $p \to q, q \to r \vdash p \to r$ » et démontré qu'il existe une relation de déducibilité syntaxique entre les deux premières phrases et la troisième.

Examinons une preuve qui utilise la règle de la réduction à l'absurde et essayons de déduire « $\neg(p \wedge q)$ » à partir de « $p \to \neg q$ ». Nous commençons par l'énonciation de la prémisse et supposons la négation de la conclusion désirée, en vue d'une application de (RAA) :

1	$p \to \neg q$	$\vdash\ p \to \neg q$	prémisse
2	$p \to \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ p \wedge q$	supposition

[7] Cf. déf. 8 à la p. 106. À strictement parler, il ne s'agit pas d'une nouvelle règle, mais d'un cas spécial de la règle de supposition. De même, l'astérisque dans « $\vdash^*$ » n'appartient pas à strictement parler à notre formalisme, mais nous sert comme outil mnémotechnique, pour ne pas oublier les suppositions que nous avons fait.

PROOF

Sous cette supposition, nous cherchons à déduire une contradiction ; (RAA) nous permettra alors de conclure que la supposition est fausse et que par conséquent sa négation est vraie :

1	$p \to \neg q$	$\vdash\ p \to \neg q$	prémisse
2	$p \to \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ p \wedge q$	supposition
3	$p \to \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ p$	de (2) par ($\wedge$**E**)
4	$p \to \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ \neg q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \to \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ q$	de (2) par ($\wedge$**E**)
6	$p \to \neg q$	$\vdash\ \neg(p \wedge q)$	de (2), (4) et (5) par (RAA)

Il est souvent crucial de bien se servir de la règle des suppositions : elle nous permet de ‹sortir› l'information que contiennent les prémisses. Pour pouvoir utiliser, par exemple, « $q \to r$ » dans une preuve qui a « $p \to (q \to r)$ » comme prémisse, on suppose « p ». Le choix des règles est non seulement motivé par les prémisses qui sont à notre disposition, mais également par la conclusion désirée : si la conclusion désirée a par exemple la forme d'une implication, on se servira de la règle de la preuve conditionnelle (PC). Dans le cas où la conclusion est une phrase simple ou une négation, on utilisera la réduction à l'absurde (RAA). La règle de la réduction à l'absurde est particulièrement utile pour prouver des théorèmes, comme dans l'exemple suivant d'une preuve inconditionnelle « $\neg(p \wedge \neg p)$ » :

1	$p \wedge \neg p$	$\vdash^*\ p \wedge \neg p$	supposition
2	$p \wedge \neg p$	$\vdash^*\ p$	de (1) par ($\wedge$**E**)
3	$p \wedge \neg p$	$\vdash^*\ \neg p$	de (1) par ($\wedge$**E**)
4		$\vdash\ \neg(p \wedge \neg p)$	de (1), (2) et (3) par (RAA)

La règle de supposition nous permet de ‹conditionaliser› n'importe quelle ligne de notre preuve : si on a prouvé que q, par exemple, il suffit de supposer « p » pour dériver « $p \to q$ » par la règle (PC). Il est donc aussi possible d'utiliser la même phrase plusieurs fois, par exemple pour prouver « $p \to (p \to q)$ » à partir de « q » :

1	q	$\vdash\ q$	prémisse
2	q, p	$\vdash^*\ p$	supposition
3	q	$\vdash\ p \to q$	de (1) et (2) par (PC)
4	q	$\vdash\ p \to (p \to q)$	de (3) et (2) par (PC)

La règle de preuve conditionnelle (PC) est d'une utilité particulière si on veut établir une conclusion de forme conditionnelle, comme le montre la preuve suivante de « $\neg p \leftrightarrow \neg q \vdash p \leftrightarrow q$ » :

1	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$\vdash\ \neg p \leftrightarrow \neg q$	prémisse
2	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$\vdash\ \neg p \to \neg q$	de (1) par ($\leftrightarrow$ **E**)
3	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$\vdash\ \neg q \to \neg p$	de (1) par ($\leftrightarrow$ **E**)
4	$\neg p \leftrightarrow \neg q, p$	$\vdash^*\ p$	supposition
5	$\neg p \leftrightarrow \neg q, p$	$\vdash^*\ \neg\neg p$	de (4) par (DN)
6	$\neg p \leftrightarrow \neg q, p$	$\vdash^*\ \neg\neg q$	de (3) et (5) par (MT)
7	$\neg p \leftrightarrow \neg q, p$	$\vdash^*\ q$	de (6) par (DN)
8	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$\vdash\ p \to q$	de (4) et (7) par (PC)

PROOF

9	$\neg p \leftrightarrow \neg q, q$	$\vdash^*$ q	supposition
10	$\neg p \leftrightarrow \neg q, q$	$\vdash^*$ $\neg\neg q$	de (9) par (DN)
11	$\neg p \leftrightarrow \neg q, q$	$\vdash^*$ $\neg\neg p$	de (2) et (10) par (MT)
12	$\neg p \leftrightarrow \neg q, q$	$\vdash^*$ p	de (11) par (DN)
13	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$\vdash$ $q \rightarrow p$	de (9) et (12) par (PC)
14	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$\vdash$ $p \leftrightarrow q$	de (8) et (13) par ($\leftrightarrow$ **I**)

La règle d'élimination d'une disjonction ($\vee$**E**) semble un peu compliquée, mais correspond à un principe de raisonnement naturel. À partir d'une prémisse disjonctive, on peut démontrer n'importe quelle phrase dont la vérité ne dépend pas de notre choix du disjoint : même si nous ignorons quel disjoint est vrai, nous pouvons dans tous les cas être certain d'une phrase qui s'ensuit des deux. Si lors d'un branchement de chemin, les deux m'amènent à un endroit, je vais y arriver peu importe lequel je prends.

Si je sais que Marie fait sa fête aujourd'hui ou demain, mais que, de toute façon, je ne serai pas invité, alors je sais que je ne serai pas invité. Si vous êtes d'accord que soit il pleut, soit il fait beau et que, s'il pleut, nous n'allons pas faire de sport aujourd'hui et que, s'il fait beau, il fait trop chaud et donc nous n'allons pas faire de sport aujourd'hui, alors on est d'accord que nous ne ferons pas de sport aujourd'hui. En utilisant la règle ($\vee$**E**), nous démontrons la commutativité de la disjonction comme suit :

1	$p \vee q$	$\vdash$ $p \vee q$	prémisse
2	$p \vee q, p$	$\vdash^*$ p	supposition
3	$p \vee q, p$	$\vdash^*$ $q \vee p$	de (2) par ($\vee$**I**)
4	$p \vee q, q$	$\vdash^*$ q	supposition
5	$p \vee q, q$	$\vdash^*$ $q \vee p$	de (4) par ($\vee$**I**)
6	$p \vee q$	$\vdash$ $q \vee p$	de (1,2,3,4,5) par ($\vee$**E**)

Il est à remarquer que souvent ils existent différentes preuves du même séquent. Voici, par exemple, une preuve de « $p \wedge \neg p \vdash p$ » :

1	$p \wedge \neg p$	$\vdash$ $p \wedge \neg p$	prémisse
2	$p \wedge \neg p, \neg p$	$\vdash^*$ $\neg p$	supposition
3	$p \wedge \neg p, \neg p$	$\vdash^*$ p	de (1) avec ($\wedge$**E**)
4	$p \wedge \neg p, \neg p$	$\vdash^*$ $\neg p$	de (1) avec ($\wedge$**E**)
5	$p \wedge \neg p$	$\vdash$ $\neg\neg p$	de (3) et (4) avec (RAA)
6	$p \wedge \neg p$	$\vdash$ p	de (5) avec (DN)

Une autre preuve, plus courte, est la suivante :

1	$p \wedge \neg p$	$\vdash$ $p \wedge \neg p$	prémisse
2	$p \wedge \neg p$	$\vdash$ p	de (1) avec ($\wedge$**E**)

Un dernier exemple nous montre comment nous servir de la règle (RAA) pour établir une conclusion positive :

PROOF

1	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\vdash \neg(\neg p \wedge \neg q)$	prémisse
2	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^* \neg(p \vee q)$	supposition
3	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), p$	$\vdash^* p$	supposition
4	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), p$	$\vdash^* p \vee q$	de (3) par ($\vee\mathbf{I}$)
5	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), p$	$\vdash^* \neg(p \vee q)$	de (2)
6	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^* \neg p$	de (3), (4) et (5) par (RAA)
7	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), q$	$\vdash^* q$	supposition
8	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), q$	$\vdash^* p \vee q$	de (6) par ($\vee\mathbf{I}$)
9	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), q$	$\vdash^* \neg(p \vee q)$	de (2)
10	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^* \neg q$	de (7), (8) et (9) par (RAA)
11	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^* \neg p \wedge \neg q$	de (5) et (8) par ($\wedge\mathbf{I}$)
12	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^* \neg(\neg p \wedge \neg q)$	de (1)
13	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\vdash \neg\neg(p \vee q)$	de (2), (11) et (12) par (RAA)
14	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\vdash p \vee q$	de (13) par (DN)

Nous répétons la ligne (2) aux lignes (5) et (9) et la ligne (1) à la ligne (12) pour permettre des applications de (RAA) à des lignes qui partagent leurs suppositions : ceci est permis parce que ce qui est prouvé sans supposition reste prouvé même si nous ajoutons d'autres suppositions. La double application de (RAA) aux disjonctions introduits aux lignes (4) et (11) nous permet de déduire une contradiction à la supposition de la négation de la conclusion voulue. Nous omettrons cette complication dans les preuves qui suivent.

La déduction naturelle est une méthode beaucoup moins 'mécanique' que la méthode des arbres ; elle est, cependant, plus intuitive que le calcul axiomatique HC. Surtout avec des règles dérivées, elle correspond assez bien à notre manière 'naturelle' de raisonner, Il est peut-être utile, cependant, de mentionner quelques conseils pratiques.[8]

Essayez de 'faire sortir' le contenu de ce que vous avez déjà démontré. Si vous avez des prémisses ou des phrases déjà démontrées de la forme $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$, utilisez ($\wedge\mathbf{E}$). Si vous avez des prémisses ou des phrases déjà démontrées de la forme $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$, essayez de prouver la conclusion à partir de ϕ et à partir de ψ et utilisez ($\vee\mathbf{E}$). S'il y a une prémisse ou une phrases déjà démontrée de la forme $\ulcorner \neg(\phi \vee \psi) \urcorner$, essayez de prouver ϕ ou de prouver ψ et utilisez ($\vee\mathbf{I}$) pour obtenir une contradiction.

Il est très important de garder un œil sur le connecteur principales. La raison, par exemple, pourquoi dans les cas suivants, l'application de (MP) et de (MT) n'est pas possible :

$$\neg(p \to q) \quad \nvdash \quad \neg p \to \neg q$$
$$\neg(p \to q) \quad \nvdash \quad p \to \neg q$$

est que l'opérateur principale de la prémisse est la négation, et non pas l'implication.

Essayez de 'simplifier' le plus possible. S'il y a deux prémisses ou des phrases déjà démontrées de la forme $\phi, \ulcorner \phi \to \psi \urcorner$, utilisez (MP). S'il y a deux prémisses ou des phrases déjà démontrées de la forme $\ulcorner \neg\psi \urcorner, \ulcorner \phi \to \psi \urcorner$, utilisez (MT).

Laissez-vous guider par la forme de la conclusion envisagée. Si elle a la forme d'une implication $\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$, supposez que ϕ, prouvez que ψ et utilisez (PC). Si elle a la forme $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$, prouvez que ϕ, prouvez que ψ et utilisez ($\wedge\mathbf{I}$).

[8] Je suis ici de très près Lepage (2001, 149).

PROOF

Si vous souhaitez obtenir une conclusion négative ou atomique, utilisez (RAA). Si la conclusion est de la forme $\ulcorner\neg\phi\urcorner$, supposez que ϕ, prouvez, sous cette supposition, que ψ et que $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ (pour n'importe quelle formule ψ) et utilisez (RAA). Si vous voulez prouver « p », supposez « $\neg p$ », prouvez, sous cette supposition, que ψ et que $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et utilisez (RAA).

Attention avec les disjonctions ! Si la conclusion a la forme $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$, il y a trois possibilités :

(i) essayez de prouver ϕ,
(ii) essayez de prouver ψ ou
(iii) essayez de réduire $\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$ à l'absurde.

La méthode de la déduction naturelle consiste essentiellement en les douze règles suivantes : ces règles nous disent comment nous pouvons manipuler des séquences de symboles de la forme « $\phi \vdash \psi$ », en composant une preuve d'un certain théorème (« $\vdash \chi$ ») ou d'une phrase à partir de quelques prémisses (« $\zeta \vdash \chi$ »). Il est important de noter que ces règles nous donnent que des permissions. Elles ne nous obligent à rien. La seule 'obligation' dont on peut parler en logique est celle d'éviter des erreurs dans l'application des règles données. Les règles elles-mêmes nous donnent la permission de passer de certaines phrases à certaines autres.

C'est en ce sens-là que la logique ne s'occupe pas de vérités, mais de connexions, surtout de connexions inférentielles, entre des phrases. Elle ne se préoccupe pas de savoir comment est le monde, mais cherche à déterminer comment il peut ou doit être à partir d'autres phrase dont la vérité est considérée comme acquise.[9] Par conséquent, l'usage des suppositions n'est pas seulement important pour la déduction naturelle, mais il est essentiel à la nature-même de la logique.

6.5 Les règles dérivées

Nous verrons à p. 164 du chapitre 7 que nous pouvons prouver ψ à partir de ϕ ($\phi \vdash \psi$) si et seulement si nous pouvons prouver l'implication de ψ par ϕ : $\vdash \ulcorner\phi \to \psi\urcorner$. Ce caractéristique de notre logique justifie notre règle d'inférence de preuve conditionnelle (PC).

Même en présence d'un tel « théorème de déduction », il est important de distinguer les conclusions conditionnelles des théorèmes. Une conclusion conditionnelle a la forme suivante :

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi \tag{6.1}$$

La conclusion ψ est 'conditionnelle' parce qu'elle dépend des prémisses $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$. Nous appellerons toute expression de la forme (6.1) un « *séquent* ». Un séquent est un schéma d'une inférence ; (6.1) dit qu'à partir des prémisses $\phi_1, \phi_2, \dots \phi_n$, on peut déduire ψ. Parce qu'il contient des prémisses et une conclusion, la forme d'un séquent rappelle celle d'un argument. La différence entre ces deux objets est que le séquent est uniquement fait de noms de phrases de type ϕ et ψ, et qu'il est donc marqué par un niveau d'abstraction élevé : (6.1) est une affirmation du métalangage. Un argument, en revanche, est fait de phrases déterminées, telle que « tout événement physique a une cause physique ».

Un théorème, cependant, est un séquent qui manque de prémisses :

$$\vdash \psi \tag{6.2}$$

(6.2) dit que ψ peut être prouvé sans aucune prémisse et que, par conséquent, ψ est un théorème. Ce sont des théorèmes qui, en premier lieu, sont appelés «(logiquement) vrais » ou «(logiquement) faux »

[9] Nous avons souligné ce caractéristique 'relativiste' de la logique dans la sct. 1.6.

PROOF

et les séquents qui sont proprement dits « valides » ou « invalides ». Notre test sémantique de validité correspond donc maintenant à un test syntaxique de déductibilité. Nous avons dit qu'un argument de la forme « p ; q ; r ; donc s » est valide si et seulement si l'implication matérielle correspondante « $(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s$ » est une tautologie. Étant donné le théorème de déduction, ceci revient à dire qu'un séquent « $\phi \vdash \psi$ » peut être prouvé si et seulement si l'implication correspondante est un théorème : $\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$.

Nous remarquons qu'il n'est pas le cas que toutes nos règles de déduction naturelle sont indépendentes – quelques-unes peuvent être définies en termes d'autres.[10] Par exemple, nous pouvons nous passer de la règle de conversion (CP) en faveur des règles de supposition et de modus tollens (MT). De même, nous passer de la règle de modus tollens (MT), en remplaçant chacune de ses applications par une application de (MP), suivi d'une application de (RAA) :

m		$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	
⋮		⋮	
n		$\vdash \ulcorner \neg\psi \urcorner$	
⋮		⋮	
q	ϕ	$\vdash^* \phi$	supposition
q + 1	ϕ	$\vdash^* \psi$	de (m) et (q) par (MP)
o		$\vdash \ulcorner \neg\phi \urcorner$	de (q), (n) et ($q+1$) par (RAA)

En voici une instance concrète :

1	$p \rightarrow q, \neg q$	$\vdash\ p \rightarrow q$	prémisse
2	$p \rightarrow q, \neg q$	$\vdash\ \neg q$	prémisse
3	$p \rightarrow q, \neg q, p$	$\vdash^*\ p$	supposition
4	$p \rightarrow q, \neg q, p$	$\vdash^*\ q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \rightarrow q, \neg q$	$\vdash\ \neg p$	de (3), (2) et (4) avec (RAA)

Une axiomatisation utilisant les onze autres règles sauf (MT) serait donc également correcte et complète.

Le schéma précédent peut nous servir à démontrer un fait important *sur* l'application des règles de déduction naturelle (comme elle est faite dans l'instance concrète) et nous montre comment nous pouvons remplacer n'importe quelle application de la règle (MT) par une application successive de deux autres règles. Il correspond à une preuve *sur* le calcul, pareille à celle que nous avons rencontré dans la sct. 4.7.

Même si la legitimité de tels remplacement de règles est peut-être évidente, la preuve du métathéorème nécessite quelques préparations. Une telle preuve est utile parce que l'usage des règles dérivées est un avantage majeur de la méthode de la déduction naturelle.

Au lieu de (∨**E**), nous aurions aussi pu choisir le syllogisme disjonctif (SD) pour éliminer la disjonction « ∨ » d'une formule. Le syllogisme disjonctif, que nous avons introduit comme notre ancienne règle d'élimination de la disjonction à la p. 46, correspond aux deux règles de déduction naturelle suivantes.

[10] Nous avons déjà remarqué des phénomènes similaires : l'interdefinissabilité des connecteurs (p. 76) et les différents axiomatisations du même ensemble de tautologies de la logique propositionnelle (p. 108 et suivantes).

PROOF

m	$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \ulcorner \neg \phi \urcorner$	
⋮	⋮	
o	$\vdash \psi$	de (m) et (n) par (SD)

Encore une fois, il est immatériel lequel des disjoints nous éliminons de cette manière :

m	$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \ulcorner \neg \psi \urcorner$	
⋮	⋮	
o	$\vdash \phi$	de (m) et (n) par (SD)

Le syllogisme disjonctif correspond à un cas spécial de la règle ($\vee$**E**). Voici comment nous déduisons un cas particulier du syllogisme disjonctif, à savoir « $\neg p, p \vee q \vdash q$ ».

1	$\neg p, p \vee q$	$\vdash$	$\neg p$	prémisse
2	$\neg p, p \vee q$	$\vdash$	$p \vee q$	prémisse
3	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
4	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	$\neg p \vee q$	de (1) par ($\vee$**I**)
5	$\neg p, p \vee q, p, p \wedge \neg q$	$\vdash^*$	$p \wedge \neg q$	supposition
6	$\neg p, p \vee q, p, p \wedge \neg q, \neg p$	$\vdash^*$	$\neg p$	supposition
7	$\neg p, p \vee q, p, \neg p$	$\vdash^*$	$\neg(p \wedge \neg q)$	de (5), (3) et (6) par (RAA)
8	$\neg p, p \vee q, p, p \wedge \neg q, q$	$\vdash^*$	q	supposition
9	$\neg p, p \vee q, p, p \wedge \neg q, q$	$\vdash^*$	$\neg q$	de (5) par ($\wedge$**E**)
10	$\neg p, p \vee q, p, q$	$\vdash^*$	$\neg(p \wedge \neg q)$	de (5), (8) et (9) par (RAA)
11	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	$\neg(p \wedge \neg q)$	de (4, 6, 7, 8, 10) par ($\vee$**E**)
12	$\neg p, p \vee q, p, p$	$\vdash^*$	p	supposition
13	$\neg p, p \vee q, p, p, \neg q$	$\vdash^*$	$\neg q$	supposition
14	$\neg p, p \vee q, p, p, \neg q$	$\vdash^*$	$p \wedge \neg q$	de (12) et (13) par ($\wedge$**I**)
15	$\neg p, p \vee q, p, p$	$\vdash^*$	$\neg\neg q$	de (13), (14) et (11) par (RAA)
16	$\neg p, p \vee q, p, p$	$\vdash^*$	q	de (15) par (DN)
17	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	$p \rightarrow q$	de (12) et (16) par (PC)
18	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	q	de (3) et (17) par (MP)
19	$\neg p, p \vee q, q$	$\vdash^*$	q	supposition
20	$\neg p, p \vee q$	$\vdash$	q	de (2, 3, 18, 19, 19) par ($\vee$**E**)

PROOF

On remarquera que les preuves par la déduction naturelle ne sont pas forcément simples. Étant donné cet effort, il serait légitime d'espérer pouvoir réutiliser un résultat prouvé, c'est-à-dire avoir à notre disposition la règle dérivée du syllogisme disjonctif en toute généralité. Nous prouverons un métathéorème qui nous donne le droit de procéder ainsi.

Avant cela, il est nécessaire de définir ce qu'est une instance de substitution :

Définition 22 (Instances de substitution)**.** *Si ϕ est une formule bien formée de $\mathcal{L}$, ϕ' est une* instance de

substitution de ϕ *si et seulement si* ϕ' *est le résultat d'un remplacement uniforme d'une ou de plusieurs phrases dans* ϕ *par d'autres phrases. Un séquent «* $\phi' \vdash \psi'$ *» est une* instance de substitution *d'un autre séquent «* $\phi \vdash \psi$ *» si et seulement si* ϕ' *et* ψ' *résultent de* ϕ *et* ψ *par un remplacement uniforme d'une ou de plusieurs phrases dans* ϕ *ou dans* ψ *par d'autres phrases.*

Une substitution uniforme d'une expression dans une autre est le remplacement de l'une par l'autre *à toutes ses occurrences* : si nous nous décidons de remplacer « $\neg p$ » par « q », par exemple, nous devons remplacer l'un par l'autre *à tous les endroits* où le premier se trouve.[11]

Parmi les instances de substitution de « $p \vee \neg p$ », par exemple, on trouve les suivants :

1. « $q \vee \neg q$ »,
2. « $(q \to r) \vee \neg(q \to r)$ »,
3. « $(p \wedge \neg p) \vee \neg(p \wedge \neg p)$ », etc.

Ce que toutes ses expressions ont en commun est qu'elles sont nommées par la formule « $\ulcorner\phi \vee \neg\phi\urcorner$ » – autrement dit, il s'agit de disjonctions.

Les expressions substituées pour d'autres peuvent être de n'importe quelle complexité : « $(r \vee s) \to (p \vee \neg(\neg(r \vee s) \wedge p))$ » est une instance de substitution de « $p \to (q \vee \neg(\neg p \wedge q))$ » (substituant « $(r \vee s)$ » à « p » et « p » à « q ») et « $p \to (q \wedge r \to \neg s), p, \neg\neg s \vdash \neg(q \wedge r)$ » est une instance de substitution de « $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$ » (substituant « $(q \wedge r)$ » à « q » et « $\neg s$ » à « r »), même si « $\neg s \to q \vee \neg(s \wedge q)$ » ne l'est pas (puisque « $\neg s$ » remplace « p » et « s » remplace « $\neg p$ » et la substitution n'est donc pas uniforme).

Voici le méta-théorème qui nous donne droit aux règles d'inférence dérivées :

Théorème 23 (Substituabilité)**.** *Si* ϕ *est un théorème de la déduction naturelle, toute instance de substitution de* ϕ *peut être prouvée. Si* $\ulcorner\phi \vdash \psi\urcorner$ *est un séquent prouvé, toute instance de substitution de* $\ulcorner\phi \vdash \psi\urcorner$ *peut être prouvée.*

Démonstration. Il est évident que les règles d'inférence appliquées ne concernent que cette partie de la structure de ϕ et de ψ qui reste invariables sous la substitution. La preuve originale du théorème ou du séquent peut, par conséquent, être transformée en une preuve de son instance de substitution. □

Grâce à ce théorème, nous pouvons désormais utiliser la règle du syllogisme disjonctif comme règle dérivée : Chaque fois que nous avons

m	$p \vee q, \neg p$	$\vdash r$	

ou une instance de substitution de ce séquent, nous pouvons écrire à une des lignes suivantes :

n	$p \vee q, \neg p$	$\vdash q$	de (m) par (SD)

La même chose vaut pour la conversion : comme suite de

[11] Nous ne pouvons pas passer sous silence ici une difficulté (même au risque de confusion) : ce qui compte comme « occurrence » est relative à la formalisation donnée. Si nous traitons « il pleut et je suis content » comme phrase simple, l'abrégeant par « p », par exemple, un remplacement de « q » = « je suis content » par « q' » = « je suis triste » ne changera rien à l'intérieur de « p ». Une 'occurrence' dans notre sens du mot n'est qu'une expression reconnue comme telle par la formalisation.

PROOF

0	$p \to q$		$\vdash r$

ou d'une instance de substitution de ce séquent, nous pouvons écrire :

p	$p \to q$	$\vdash \neg q \to \neg p$	de (0) par (CP)

puisque « $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$ » peut être prouvé.

Une autre règle dérivée utile est l'application des lois de Morgan, dont nous prouvons un cas particulier comme suit :

1	$\neg(p \wedge q)$	$\vdash$	$\neg(p \wedge q)$	prémisse
2	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	supposition
3	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q), \neg p$	$\vdash^*$	$\neg p$	supposition
4	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q).\neg p$	$\vdash^*$	$\neg p \vee \neg q$	de (3) par ($\vee$**I**)
5	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	$\neg\neg p$	de (3), (2) et (4) par (RAA)
6	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	p	de (5) par (DN)
7	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q), \neg q$	$\vdash^*$	$\neg q$	supposition
8	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q).\neg q$	$\vdash^*$	$\neg p \vee \neg q$	de (7) par ($\vee$**I**)
9	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	$\neg\neg q$	de (7), (2) et (8) par (RAA)
10	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	q	de (9) par (DN)
11	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	$p \wedge q$	de (6) et (10) par ($\wedge$**I**)
12	$\neg(p \wedge q)$	$\vdash$	$\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$	de (2), (1) et (11) par (RAA)
13	$\neg(p \wedge q)$	$\vdash$	$\neg p \vee \neg q$	de (12) par (DN)

Nous avons donc prouvé le séquent « $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$ ». Pour prouver le séquent converse, nous procédons comme suit :

1	$\neg p \vee \neg q$	$\vdash$	$\neg p \vee \neg q$	prémisse
2	$\neg p \vee \neg q, \neg p$	$\vdash$	$\neg p$	supposition
3	$\neg p \vee \neg q, \neg p, p \wedge q$	$\vdash$	$p \wedge q$	supposition
4	$\neg p \vee \neg q, \neg p, p \wedge q$	$\vdash$	p	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\neg p \vee \neg q, \neg p$	$\vdash$	$\neg(p \wedge q)$	de (3), (2) et (4) par (RAA)
6	$\neg p \vee \neg q, \neg q$	$\vdash$	$\neg q$	supposition
7	$\neg p \vee \neg q, \neg q, p \wedge q$	$\vdash$	$p \wedge q$	supposition
8	$\neg p \vee \neg q, \neg q, p \wedge q$	$\vdash$	q	de (7) par ($\wedge$**E**)
9	$\neg p \vee \neg q, \neg q$	$\vdash$	$\neg(p \wedge q)$	de (7), (6) et (8) par (RAA)
10	$\neg p \vee \neg q$	$\vdash$	$\neg(p \wedge q)$	de (1, 2, 5, 6, 9) par ($\vee$**E**)

Nous avons démontré l'interdéductibilité des deux phrases, c'est-à-dire établi que « $\neg(p \wedge q) \dashv\vdash \neg p \vee \neg q$ » ce qui nous donne le droit d'utiliser cette loi de Morgan dans de futures preuves.

Il est à noter que l'application des règles dérivées présuppose la preuve des séquents ou théorèmes correspondants.

PROOF

6.6 Un calcul de séquents

Dans un calcul de séquents, comme celui développé par Gentzen, nous généralisons la notion de séquents à des ensembles de formules et adoptons la notation :[12]

$$\Gamma \supset \Delta \tag{6.3}$$

pour des ensembles finis Γ et Δ de formules bien formées de $\mathcal{L}$. Une valuation d'un séquent est alors definie comme :

Définition 24 (Valuation d'un séquent)**.** *Soit V une valuation propositionnelle. Nous appelons une fonction V' une* valuation d'un séquent $\Gamma \supset \Delta$ *si elle est définie comme suit :*

$$V'(\Gamma \supset \Delta) := V(\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta)$$

où « $\bigwedge \Gamma$ » dénote la conjonction de tous les membres de Γ et « $\bigvee \Delta$ » la disjonction de tous les membres de Δ.

Comme avant, un séquent est appelé « valide » s'il reçoit « vrai » pour toute valuation et est appelé « conséquence » d'une théorie Th s'il est vrai pour toute valuation qui rend vraie Th.

Avec ces séquents, nous pouvons définir un calcul CPL$\mathcal{G}$ comme suivant :[13]

Définition 25 (CPL$\mathcal{G}$)**.** *Le calcul* CPL$\mathcal{G}$ *a comme axiomes toutes les formules de $\mathcal{L}$ qui ont la forme d'un des schémas suivants, où « p » abrège une phrase atomique :*

« $\bot$ » $\quad \bot, \Gamma \supset \Delta$

« $\top$ » $\quad \Gamma \supset \top, \Delta$

« id » $\quad p, \Gamma \supset p, \Delta$

Nous avons les règles d'inférence suivantes :

pour la négation :

$$\frac{\Gamma \supset \phi, \Delta}{\ulcorner\neg\phi\urcorner, \Gamma \supset \Delta}\ \mathbf{g}\neg \qquad \frac{\phi, \Gamma \supset \Delta}{\Gamma \supset \ulcorner\neg\phi\urcorner, \Delta}\ \mathbf{d}\neg$$

pour la conjonction :

$$\frac{\phi, \psi, \Gamma \supset \Delta}{\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner, \Gamma \supset \Delta}\ \mathbf{g}\wedge \qquad \frac{\Gamma \supset \phi, \Delta \qquad \Gamma \supset \psi, \Delta}{\Gamma \supset \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner, \Delta}\ \mathbf{d}\wedge$$

pour la disjonction :

$$\frac{\phi, \Gamma \supset \Delta \qquad \psi, \Gamma \supset \Delta}{\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner, \Gamma \supset \Delta}\ \mathbf{g}\vee \qquad \frac{\Gamma \supset \phi, \psi, \Delta}{\Gamma \supset \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner, \Delta}\ \mathbf{d}\vee$$

pour l'implication :

$$\frac{\Gamma \supset \phi, \Delta \qquad \psi, \Gamma \supset \Delta}{\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner, \Gamma \supset \Delta}\ \mathbf{g}\rightarrow \qquad \frac{\phi, \Gamma \supset \psi, \Delta}{\Gamma \supset \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner, \Delta}\ \mathbf{d}\rightarrow$$

[12] Comme pour le calcul HC, je suis de très près le manuscrit de J. Adler et G. Jäger.

[13] Encore une fois, je suis le manuscrit distribué lors du cours d'introduction à la logique de J. Adler et G. Jäger en 2003.

PROOF

pour l'équivalence :

$$\frac{\Gamma \supset \phi, \psi, \Delta \qquad \phi, \psi, \Gamma \supset \Delta}{\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner, \Gamma \supset \Delta}\ \mathbf{g}\leftrightarrow \qquad \frac{\phi, \Gamma \supset \psi, \Delta \qquad \psi, \Gamma \supset \phi, \Delta}{\Gamma \supset \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner, \Delta}\ \mathbf{d}\leftrightarrow$$

Nous reconnaissons la validité des axiomes en nous souvenant que

- toute inférence avec une contradiction parmi ses prémisses est valide ;
- toute inférence avec une tautologie comme conclusion est valide ;
- l'inférence $\phi \vdash \phi$ est toujours valide.

La plausibilité des règles d'inférence devient apparente une fois nous nous rappelons de l'interprétation conjonctive des antécédents des séquents et de l'interprétation disjonctive de leurs conséquents :

- L'introduction de la négation suit le modèle du MT ; en termes de valuations, une négation (position) dans le conséquent correspond à la position (négation) dans l'antécédent :

  $$V'(\Gamma \supset \phi, \Delta) = V'(\ulcorner \neg \phi \urcorner, \Gamma \supset \Delta) \qquad V'(\phi, \Gamma \supset \Delta) = V'(\Gamma \supset \ulcorner \neg \phi \urcorner, \Delta)$$

  Nous reconnaissons ici la dualité qui motive les lois de Morgan.
- Pour la conjonction, nous avons l'équivalence suivante :

  $$V'(\Gamma \supset \phi, \Delta) = \mathbf{v} \,\&\, V'(\Gamma \supset \psi, \Delta) = \mathbf{v} \quad \Longleftrightarrow \quad V'(\Gamma \supset \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner, \Delta) = \mathbf{v}$$

  Une conjonction est évaluée comme vraie si et seulement si les deux conjoints sont évalués comme vrais.
- Les règles de la disjonction résultent de la dualité avec la conjonction, et les règles d'implication et d'équivalence de la définabilité de ces connecteurs en termes de la conjonction et de la négation.

Nous pouvons donc conclure la correction du calcul CPL$\mathcal{G}$, dont nous prouverons la complétude dans le ch. 7.5.

D'après la sémantique, une autre règle d'inférence est valide, qui n'est cependant pas toujours rajoutée au calcul. Il s'agit de la célèbre règle de « coupure » (« cut » en anglais) :

$$\frac{\Gamma \supset \phi, \Delta \qquad \phi, \Gamma \supset \Delta}{\Gamma \supset \Delta}\ \mathbf{cut}$$

Nous démontrons sa validité en supposant que $V'(\Gamma \supset \phi, \Delta) = \mathbf{v}$ et que $V'(\phi, \Gamma \supset \Delta) = \mathbf{v}$ et en distinguant trois cas, afin de montrer que dans les trois, nous avons $V(\Gamma \supset \Delta) = \mathbf{v}$;

1. Si $V'(\psi) = \mathbf{f}$ pour un membre de Γ, alors $V'(\Gamma \supset \Delta) = \mathbf{v}$.
2. Si $V'(\psi) = \mathbf{v}$ pour tous les membres de Γ et $V'(\phi) = \mathbf{v}$, alors il s'ensuit de $V'(\phi, \Gamma \supset \Delta) = \mathbf{v}$ que $V'(\chi) = \mathbf{v}$ pour au moins un membre χ de Δ. Il s'ensuit que $V'(\Gamma \supset \Delta) = \mathbf{v}$.
3. Si $V'(\psi) = \mathbf{v}$ pour tous les membres de Γ et $V'(\phi) = \mathbf{f}$, alors il s'ensuit de $V'(\Gamma \supset \phi, \Delta) = \mathbf{v}$ que $V'(\chi) = \mathbf{v}$ pour au moins un membre χ de Δ. Il s'ensuit que $V'(\Gamma \supset \Delta) = \mathbf{v}$.

Vu sa validité, pourquoi ne pas simplement rajouter la règle de coupure comme règle d'inférence à notre calcul ? La raison est la suivante : pour beaucoup d'applications théoriques (en méta-mathématiques) et pratiques (surtout en informatique et dans la construction mécanique de preuves), il est important que les règles d'inférence ne réduisent pas la complexité des formules concernées, c'est-à-dire que les conclusions sont au moins aussi complexes que leurs prémisses. Bien

PROOF

que ceci est le cas de nos règles d'inférence officielles, la complexité syntactique n'est pas préservée par la règle de coupure, qui nous permet d'omettre une formule ϕ des prémisses.

La préservation de la complexité est souhaitable parce qu'elle permet d'établir des conditions nécessaires à l'existence d'une preuve d'un séquent :

Théorème 26. *Si* Γ *et* Δ *ne contiennent que des phrases atomiques ou «* $\top$ *» / «* $\bot$ *», alors le séquent «* $\Gamma \supset \Delta$ *» n'est prouvable en* $\mathsf{CPL}\mathcal{G} \cup \mathsf{Th}$ *(pour n'importe quelle théorie* Th*) que si une des conditions suivantes et satisfaite :*

1. Γ *contient «* $\bot$ *» ou* Δ *contient «* $\top$ *»;*
2. *il y a une phrase atomique qui est membre à la fois de* Γ *et de* Δ*;*
3. Δ *contient un membre de* Th*.*

Démonstration. Toute règle d'inférence introduit un connecteur dans le séquent qui en est la conclusion. Si $\Gamma \supset \Delta$ ne contient pas de connecteur, mais est quand même prouvable, alors il doit être un des trois axiomes. □

Le plus grand inconvénient de la règle de coupure est qu'elle rend impossible la recherche systématique de preuve. Comme la formule coupée peut être arbitraire, un séquent de la forme « $\Gamma \supset \Delta$ » peut être la conclusion de l'application de la règle de coupure aux prémisses « $\Gamma \supset \phi, \Delta$ » et « $\phi, \Gamma \supset \Delta$ » *pour n'importe quelle formule* ϕ ! Il sera alors nécessaire de vérifier la prouvabilité de toute cette infinité de prémisses possibles, ce qui est impossible.

Points à retenir

1. La caractéristique de la méthode de la déduction naturelle est l'usage des suppositions. La règle des suppositions nous permet d'introduire n'importe quelle supposition à n'importe quelle étape de la preuve ; les règles PC, RAA et $\vee$**E** nous permettent de nous en décharger.
2. Les règles de la déduction naturelle sont des règles d'introduction et d'élimination des connecteurs propositionnels.
3. La méthode de la déduction naturelle consiste en les règles suivantes :
   - supposition : Je peux supposer ce que je veux (si j'en tiens compte par la suite)
   - MP : Si j'ai déjà « $p \to q$ » et aussi « p », je peux écrire « q ».
   - MT : Si j'ai déjà « $p \to q$ » et aussi « $\neg q$ », je peux écrire « $\neg p$ ».
   - PC : Si j'ai supposé « p » et montré ensuite « q », je peux écrire « $p \to q$ ».
   - DN : Si j'ai déjà « $\neg\neg p$ », je peux écrire « p » ; si j'ai déjà « p », je peux écrire « $\neg\neg p$ ».
   - RAA : Si j'ai supposé « p » et montré qu'il s'ensuit « q » et aussi « $\neg q$ », je peux écrire « $\neg p$ ».
   - $\wedge$**I** : Si j'ai déjà « p » et « q », je peux écrire « $p \wedge q$ ».
   - $\wedge$**E** : Si j'ai déjà « $p \wedge q$ », je peux écrire « p » et aussi écrire « q ».
   - $\vee$**I** : Si j'ai déjà « p », je peux écrire « $p \vee q$ » ; si j'ai déjà « q », je peux écrire « $p \vee q$ ».
   - $\vee$**E** : Si j'ai montré « $p \vee q$ » et que « r » s'ensuit de « p » et que « r » s'ensuit de « q », je peux écrire « r ».
   - $\leftrightarrow$ **I** : Si j'ai déjà « $p \to q$ » et « $q \to p$ », je peux écrire « $p \leftrightarrow q$ ».
   - $\leftrightarrow$ **E** : Si j'ai déjà « $p \leftrightarrow q$ », je peux écrire « $p \to q$ » et aussi écrire « $q \to p$ ».
4. L'application de ces règles nous permet de produire des preuves de théorèmes (« $\vdash \phi$ ») et des preuves de séquents (« $\phi \vdash \psi$ »).

PROOF

5. Un séquent est une affirmation qu'une phrase est déductible d'une autre.
6. Pour avoir prouvé un théorème ou un séquent, il faut avoir déchargé toute supposition.
7. Heuristique : Pour établir une conclusion implicative, il convient d'utiliser PC. Pour établir une conclusion négative ou une conclusion simple, il convient d'utiliser RAA.
8. La méthode de la déduction naturelle nous permet d'utiliser des règles dérivées.
9. La déduction naturelle est une méthode syntaxique qui est correcte et complète : tout séquent déductible correspond à une relation de conséquence logique et toute conséquence logique peut être déduite comme séquent.
10. Nous pouvons axiomatiser un calcul de séquents. Dans un tel calcul, une règle de coupure est valide, mais il convient d'étudier quelles preuves ne l'utilisent pas.

PROOF

7 Propriétés métalogiques de la logique propositionnelle

7.1 Les propriétés métalogiques

Dans la leçon 5 (p. 117), nous avons introduit une sémantique formelle pour le langage de la logique propositionnelle et défini la relation de conséquence logique $\vDash$. L'affirmation « $\phi \vDash \psi$ » est vraie si et seulement si toute valuation qui rende vraie ϕ rend également vraie ψ. Dans les leçons 4, 5 et 6, nous avons introduit trois méthodes syntaxiques permettant de prouver des théorèmes : un calcul axiomatique, la méthode des arbres et la méthode de la déduction naturelle. Ces trois méthodes définissent trois relations syntaxiques de déductibilité $\vdash$. Dans ce chapitre, nous démontrerons qu'il s'agit de la même relation et qu'elle ‹correspond› – dans un sens précis que nous définirons – à la relation de conséquence logique $\vDash$.

La conséquence logique $\vDash$ est une relation sémantique étudiée dans la théorie des modèles. La déductibilité syntaxique $\vdash$, quant à elle, est une relation syntaxique et fait partie du domaine de la théorie de la preuve. La théorie des modèles définit la notion de validité, la théorie de la preuve celle de la déductibilité ou de la démontrabilité. Il existe différentes manières d'établir des relations entre la syntaxe et la sémantique d'un système logique. Un calcul syntaxique peut être appelé :

- « *correct* » si tous ses théorèmes sont des tautologies (cf. 123).
- « *complet* » s'il permet la déduction de toutes les tautologies (cf. 124).
- « *adéquat* » s'il est à la fois correct et complet.
- « *consistant* » s'il ne permet pas la déduction d'une contradiction (cf. p. 124).

La dernière propriété est la moins exigeante : qu'une méthode syntaxique soit consistante revient à dire qu'elle ne permet pas la déduction d'une phrase et de sa négation. Puisqu'une contradiction n'est jamais une tautologie, tout calcul correct est consistant. Dans la logique classique, un calcul inconsistant est dénué d'intérêt : si une seule contradiction est un théorème, toute formule propositionnelle peut en être déduite en conséquence (puisqu'une inférence ayant une prémisse contradictoire est toujours valide)[1] – par conséquent, le calcul ne fera plus de distinction entre théorèmes et non-théorèmes et permettra la déduction de n'importe quelle phrase.

Nous démontrerons par la suite que le calcul axiomatique HC, la méthode des arbres et la méthode de la déduction naturelle sont corrects et complets (et donc adéquats). Ces résultats n'établissent pas seulement que les trois méthodes de preuves sont équivalentes, mais également qu'elles correspondent à la sémantique de la logique propositionnelle que l'on a donnée dans la leçon 5.

Consistance, correction et complétude ne sont que trois des propriétés que l'on recherche dans la construction d'un calcul. Il est également désirable de pouvoir prouver un théorème de déduction sur le calcul : un tel théorème nous assure que $\phi \vdash \psi$ si et seulement si $\vdash \ulcorner \phi \to \psi \urcorner$. C'est ce théorème qui justifie notre application de la règle de preuve conditionnelle PC dans la méthode de déduction naturelle.

[1] Nous avons appelé ce caractéristique « explosion » à la p. 121 : c'est pour cela que la clôture déductive d'un ensemble inconsistant de prémisses contiendra toute phrase et sa négation.

PROOF

D'autres propriétés métalogiques désirables sont sémantiques en ce qu'elles ne caractérisent pas un calcul, mais une relation de conséquence logique ou un ensemble de tautologies :

- Une logique (un ensemble de phrases appelées « tautologies ») est dite « *décidable* » s'il existe une procédure mécanique permettant de déterminer si une phrase est une tautologie.
- Une logique est dite « *compacte* » si toute conséquence logique d'un ensemble infini de prémisses est une conséquence logique d'un ensemble fini de prémisses.

Nous démontrerons que la logique propositionnelle est décidable et compacte.[2]

Mis à part les caractérisations syntaxiques et sémantiques, une logique peut aussi être décrite comme une structure mathématique : la logique propositionnelle, par exemple, correspond à un certain type d'algèbre, à savoir une algèbre Booléenne, d'après George Boole (1815–1864) (cf. p. 93). Après avoir introduit cette notion, nous montrerons de quelle manière les connecteurs propositionnels correspondent à des opérations algébriques.

7.2 Le théorème de déduction

Nous remarquons l'importance cruciale de la règle de la preuve conditionnelle PC dans la déduction des théorèmes avec une forme implicative ou conditionnelle. La validité de la règle de la preuve conditionnelle correspond à une propriété importante de la logique propositionnelle : [3]

Théorème 27 (Théorème de déduction). *ψ peut être déduit de ϕ si et seulement si $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ est un théorème.*

Démonstration. Nous prouvons les deux directions de l'équivalence.

$\Longrightarrow$ Comme le théorème est évident pour la méthode de la déduction naturelle et trivial pour la méthode des arbres,[4] nous le démontrons pour le calcul HC. Supposons donc que nous avons une preuve de

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^n \psi$$

Cette preuve consiste en une suite finie de formules propositionnelles $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ telle que pour $\psi_n = \psi$ et que pour tout nombre $k < n$, ψ_k est soit un axiome ou ϕ, soit ψ_k s'ensuit de deux autres formules ψ_i et ψ_j $(i, j < k)$ par MP. Nous transformons cette preuve de ψ en une preuve de $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ en faisant les modifications suivantes, pour chaque ligne ψ_k :

(a) Si $\psi_k = \phi$, nous remplaçons

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^k \psi_k$$

par

$$\mathsf{HC} \vdash^k \phi \rightarrow \phi$$

ce qui est un axiome ($\mathbf{H_1}$).

[2] La situation est très différente en logique des prédicats : bien qu'elle aussi soit compacte (cf. p. 306), elle n'est pas décidable (cf. p. 285).

[3] La preuve suivante, qui se termine par le signe « □ » pour « quod erat demonstrandum » (« q.e.d. ») ou « ce qu'il fallait démontrer » (« c.q.f.d. ») peut être omise par ceux qui sont peu intéressés par les subtilités des calculs axiomatiques.

[4] Le théorème est vrai de la méthode des arbres parce que la règle pour l'implication niée nous fournira ϕ et également $\ulcorner \neg \psi \urcorner$ sur la seule branche. La déduction de ψ de ϕ nous donnera alors la contradiction voulue. Rendre cette évidence explicite, cependant, nécessiterait la formalisation des arbres comme tableaux analytiques, dont nous parlerons ci-dessous.

PROOF

(b) Si ψ_k est un axiome, nous remplaçons la ligne

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^k \psi_k$$

par les cinq lignes suivantes (cf. exercice (9b) de la quatrième série 16.4 à la p. 380) :[5]

$\mathbf{k_1}$	$\mathsf{HC} \vdash \psi_k$	axiome
$\mathbf{k_2}$	$\mathsf{HC} \vdash ((\psi_k \wedge \phi) \to \psi_k) \to (\psi_k \to (\phi \to \psi_k))$	$\mathbf{H_3}$
$\mathbf{k_3}$	$\mathsf{HC} \vdash (\psi_k \wedge \phi) \to \psi_k$	$\mathbf{H_8}$
$\mathbf{k_4}$	$\mathsf{HC} \vdash \psi_k \to (\phi \to \psi_k)$	(MP) de (k_2) et (k_3)
$\mathbf{k_5}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_k$	(MP) de (k_1) et (k_4)

(c) Si ψ_k a été obtenue à partir de deux formules ψ_i et ψ_j ($= \ulcorner \psi_i \to \psi_k \urcorner$) ($i, j < k$), on applique l'hypothèse d'induction pour obtenir :

$\mathbf{i}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_i$
$\mathbf{j}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to (\psi_i \to \psi_k)$

Nous remplaçons ces deux lignes par les suivantes :

$\mathbf{i}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_i$	
$\mathbf{j_1}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to (\psi_i \to \psi_k)$	
$\mathbf{j_2}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to (\psi_i \to \psi_k)) \to ((\phi \wedge \psi_i) \to \psi_k)$	$\mathbf{H_4}$
$\mathbf{j_3}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \wedge \psi_i) \to \psi_k$	(MP) de (j_1) et (j_2)
$\mathbf{j_4}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \phi$	$\mathbf{H_1}$
$\mathbf{j_5}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to \phi) \to ((\phi \to \psi_i) \to (\phi \to (\phi \wedge \psi_i)))$	$\mathbf{H_{10}}$
$\mathbf{j_6}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to \psi_i) \to (\phi \to (\phi \wedge \psi_i))$	(MP) de (j_4) et (j_5)
$\mathbf{j_7}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to (\phi \wedge \psi_i)$	(MP) de (i) et (j_6)
$\mathbf{j_8}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to (\phi \wedge \psi_i)) \to (((\phi \wedge \psi_i) \to \psi_k) \to (\phi \to \psi_k))$	$\mathbf{H_2}$
$\mathbf{j_9}$	$\mathsf{HC} \vdash ((\phi \wedge \psi_i) \to \psi_k) \to (\phi \to \psi_k)$	(MP) de (j_7) et (j_8)
$\mathbf{j_{10}}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_k$	(MP) de (j_3) et (j_9)

Nous avons ainsi prouvé, pour les trois cas possibles, la direction de gauche à droite du théorème de déduction.

$\Longleftarrow$ Si on a

$$\mathsf{HC} \vdash^k \phi \to \psi$$

on ajoute

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^{k+1} \phi$$

[5] Nous supposons que $k_1, \ldots, k_5 < k$, ce qui est toujours possible après une re-numération des lignes.

PROOF

afin d'obtenir

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^{k+2} \psi$$

avec une application de (MP). □

Par le théorème de déduction, trouver une déduction « $p \vdash q$ » consiste à prouver « $\vdash p \to q$ ». En pratique, cependant, cette réduction ne facilite que rarement le travail du logicien. D'où l'utilité de la méthode de la déduction naturelle, qui ne nécessite pas une telle réduction mais qui permet de traiter « $p \vdash q$ » ‹directement›.

Même si le théorème de déduction peut paraître (et peut-être est) trivial pour la logique propositionnelle, nous verrons cependant à la p. 312 du ch. 14 qu'il marque une différence importante entre la logique propositionnelle et la logique modale propositionnelle : cette dernière contient une règle d'inférence (dite de « nécessitation ») qui fait que si on pouvait prouver un théorème de déduction, toutes les distinctions modales se trivialiseraient.

7.3 Correction et complétude de la méthode des arbres

Nous avons présenté la méthode des arbres à travers son interprétation sémantique, c'est-à-dire en termes de relations entre les valeurs de vérité des phrases traitées.[6] Cependant, les règles que nous avons proposées dans la leçon 5 sont des règles purement syntaxiques : elles ne considèrent que la forme syntaxique des phrases. Nous avons donc déjà présupposé la correction et la complétude (c'est-à-dire la correspondance entre syntaxe et sémantique) de cette méthode syntaxique et c'est ce que nous devons prouver dans la section qui suit. À cette fin, nous suivons la présentation de Smullyan (1968, 25 et seq.).[7]

Pour prouver la correction et la complétude de la méthode des arbres, nous devons introduire quelques nouvelles notions. Nous observons d'abord que nos règles pour les équivalences matérielles ne sont pas basiques, mais peuvent être obtenues par deux applications successives des règles pour l'implication matérielle. Les sept autres règles de construction d'arbres tombent sous deux catégories : certaines nous amènent à développer l'arbre avec une seule nouvelle branche, d'autres, avec deux nouvelles branches. Nous faisons donc une distinction entre les formules que l'on appellera « du type α » ($\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$, $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi \to \psi)\urcorner$) qui ‹continuent sur la même branche›, et les formules que l'on appellera « du type β » ($\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ et $\ulcorner\phi \to \psi\urcorner$) qui nous obligent à créer au moins une nouvelle branche. On adoptera la terminologie suivante pour les formules que ces règles nous obligent à écrire sur les branches consécutives :

α	α_1	α_2
$\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	ϕ	ϕ
$\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\neg(\phi \to \psi)\urcorner$	ϕ	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$

[6] Ils s'agissait de nos neuf « faits sémantiques » à la p. 128.

[7] La méthode des tableaux analytiques remonte à Gerhard Gentzen (1935) et a ensuite été développé par Evert Willem Beth (1950, 1955a, 1959) and Jaakko Hintikka (1955).

PROOF

β	β_1	β_2
$\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	ψ

Nous pouvons maintenant définir ce qu'est un arbre et un tableau :

Définition 28 (Arbres binaires)**.** *Un* arbre binaire *est une structure composée de nœuds (points) et de branches (lignes) telle que chaque nœud, mis à part un seul (qui est appelé « l'origine »), se trouve à la fin d'une branche et telle que tous les nœuds se trouvent au début d'au maximum deux branches.*[8]

Nous appelons « point extrême » un point qui n'a pas de successeurs sur sa branche.

Définition 29 (Tableaux)**.** *Un* tableau *est un arbre binaire dont les nœuds sont des formules propositionnelles construites à partir d'une formule propositionnelle comme suit : si χ est une formule propositionnelle dont le tableau $\mathcal{T}$ a déjà été construit et que ζ en est un point extrême, nous élargissons $\mathcal{T}$ par une des méthodes suivantes :*

A *Si une formule du type α a une occurrence sur le chemin B_ζ (le chemin de χ jusqu'à ζ dans $\mathcal{T}$), nous ajoutons soit α_1, soit α_2 comme successeur unique à ζ.*

B *Si une formule du type β a une occurrence sur le chemin B_ζ, nous ajoutons β_1 comme successeur de gauche et β_2 comme successeur de droite à ζ.*

Nous appelons un tableau $\mathcal{T}$ une « extension directe » d'un autre tableau $\mathcal{T}*$ si nous l'obtenons à partir de $\mathcal{T}*$ par une seule application de (**A**) ou de (**B**). Nous disons d'une branche B_ϕ d'un arbre qu'elle est « fermée » si elle contient des occurrences d'une formule propositionnelle et également de sa négation. Un tableau $\mathcal{T}$ est appelé « fermé » si toutes ses branches sont fermées. Nous appelons une « preuve » d'une formule propositionnelle ϕ un tableau fermé qui a $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ comme formule initiale. Une formule ϕ est appelée « prouvable » s'il existe une preuve pour ϕ.

Pour la preuve de la correction, nous définissons ce qu'est une valuation rendant vrais une branche ou un tableau :

Définition 30 (Valuations d'un tableau)**.** *Une valuation propositionnelle V* rend vraie *une branche B_ϕ d'un tableau sémantique ssi elle rend vraies toutes les formules propositionnelles qui ont des occurrences sur cette branche. V* rend vrai *un tableau ssi elle rend vraie au moins une branche de ce tableau.*

[8] Cette définition utilise la notion vague de « structure ». Une définition plus précise serait la suivante : Un arbre est un triple $\langle \mathbf{P}, \mathbf{l}, R\rangle$ composé de

1. un ensemble $\mathbf{P}$ d'éléments appelés « points » ;
2. une fonction $\mathbf{l}$ qui assigne à tout point un nombre naturel appelé son « niveau » ;
3. une relation R entre des points appelée « x est le prédécesseur de y ».

Ce triple doit satisfaire aux conditions suivantes :

1. Un seul point (appelé « l'origine ») est de niveau 1.
2. Tout autre point que l'origine a un seul prédécesseur.
3. Pour toute paire de points $\langle x, y\rangle$, si x est le prédécesseur de y, alors $\mathbf{l}(y) = \mathbf{l}(x) + 1$.

PROOF

Nous disons d'une branche ou d'un tableau qu'ils sont « satisfaisables » s'il y a une valuation qui les rende vrais. Nous pouvons maintenant prouver le théorème le plus important pour la preuve de la correction :

Théorème 31. *Si $\mathcal{T}_2$ est une extension directe d'un tableau $\mathcal{T}_1$, toute valuation qui rend vrai $\mathcal{T}_1$ rend également vrai $\mathcal{T}_2$.*

Démonstration. Supposons qu'une valuation V rende vrai $\mathcal{T}_1$. Il y a donc une branche B_ϕ dans $\mathcal{T}_1$ rendue vraie par V. $\mathcal{T}_2$ se distingue de $\mathcal{T}_1$ par l'addition d'un ou de deux successeurs à une branche B_ψ de $\mathcal{T}_1$. Si B_ψ est différente de B_ϕ, alors B_ϕ est toujours une branche de $\mathcal{T}_2$ et la conclusion désirée s'ensuit. Si B_ψ a été obtenue de B_ϕ par l'opération (**A**), alors il existe une formule α sur B_ϕ telle que B_ψ est ou bien $B_\phi + \alpha_1$ ou bien $B_\phi + \alpha_2$. Si la formule α est rendue vraie par V, α_1 et α_2 le sont également. Alors $\mathcal{T}_2$ contient au moins une branche rendue vraie par V. Si B_ψ a été obtenue de B_ϕ par l'opération (**B**), alors une formule β a une occurrence sur B_ϕ telle que et $B_\phi + \beta_1$ et $B_\phi + \beta_2$ sont des branches de $\mathcal{T}_2$. Si β est rendu vrai par V, alors soit la première, soit la seconde de ces deux branches est également rendue vraie par V. Donc $\mathcal{T}_2$ est rendu vrai par V. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la correction de la méthode des arbres :

Théorème 32 (Correction de la méthode des arbres)**.** *La méthode des arbres est correcte : toute phrase prouvable est une tautologie.*

Démonstration. Le théorème (31) nous permet de prouver par induction mathématique que, pour tout tableau $\mathcal{T}$, si l'origine est rendue vraie par une valuation V, alors $\mathcal{T}$ est également rendu vrai par cette valuation, assurant le pas d'induction. Supposons alors que $\mathcal{T}$ prouve ϕ. Cela signifie que $\mathcal{T}$ est un tableau qui a $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ comme origine et qui n'est rendu vrai sous aucune valuation. Toute valuation V, par conséquent, rend fausse l'origine $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ (si elle rendait vraie l'origine, elle devrait aussi rendre vrai le tableau qui en est l'extension). L'origine $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ n'est vraie sous aucune valuation : c'est une contradiction. ϕ est donc une tautologie. □

Nous avons donc prouvé la correction de la méthode des arbres : toute formule prouvable par cette méthode est une tautologie ; le calcul ne prouve pas trop.

Par rapport à la complétude de la méthode des arbres, il faut distinguer deux questions :

- Pouvons-nous déduire, du fait qu'un tableau fermé existe pour $\ulcorner\neg\phi\urcorner$, que ϕ est une tautologie ?
- Pouvons-nous être sûrs qu'un tableau fermé existe pour toute tautologie ?

Les deux questions sont indépendantes et seule la seconde correspond à celle de la complétude.[9] La première question est la question de la correction que nous venons de traiter. La question de complétude est la question de savoir si nos règles de construction d'arbres sont suffisamment puissantes pour prouver toutes les tautologies de la logique propositionnelle.

Nous appelons une branche B_ϕ « complète » si ces deux conditions sont remplies :

- pour toute formule α qu'elle contient, elle contient à la fois α_1 et α_2 ;
- pour toute formule β qu'elle contient, elle contient β_1 et/ou β_2.

[9] Pour le comprendre, il suffit d'imaginer que nous renonçons à quelques-unes de nos règles de construction d'arbres. Même si la méthode devenait ainsi incomplète, la réponse à la première question serait toujours affirmative.

PROOF

Nous appelons un tableau « complet » si toute branche de ce tableau est soit fermée, soit complète. Notre but est de démontrer que

Si $\mathcal{T}$ est un tableau complet et ouvert, la formule à l'origine de $\mathcal{T}$ est satisfaisable. (7.1)

(7.1) veut dire que la formule d'origine d'un tableau complet qui reste ouvert est rendu vraie par au moins une valuation – c'est-à-dire que (7.1) nous garantit qu'aucun tableau ne se ferme ‹ trop tôt ›. Si nous réussissons à prouver (7.1), nous obtenons la complétude de la méthode des arbres comme suit :

Théorème 33 (Complétude de la méthode des arbres)**.** *La méthode des arbres est complète : toute tautologie est prouvable.*

Démonstration. Supposons que ϕ soit une tautologie. Si ϕ ne pouvait pas être prouvée par la méthode des arbres, nous pourrions construire un tableau complet pour $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ qui resterait ouvert. Par (7.1), $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ serait satisfaisable et ne serait donc pas une contradiction. Par conséquent, ϕ ne serait pas une tautologie. Puisqu'on a présupposé que ϕ est une tautologie, cette supposition doit être rejetée. ϕ est donc prouvable. □

Pour prouver (7.1), nous démontrons le théorème (34) ci-dessous, duquel (7.1) s'ensuit, puisque la satifaisabilité de toute la branche implique la satisfaisabilité de son origine.

Théorème 34. *Toute branche ouverte et complète d'un tableau est satisfaisable.*

Démonstration. Supposons que B_ϕ soit une branche ouverte et complète d'un tableau $\mathcal{T}$ et que $\mathcal{E}$ soit l'ensemble de toutes les formules qui ont des occurrences sur B_ϕ. Puisque B_ϕ est une branche ouverte et grâce à nos règles de construction d'arbres (**A**) et (**B**), l'ensemble $\mathcal{E}$ satisfait les trois conditions suivantes :
(a) Il n'est pas le cas que $\mathcal{E}$ contienne une phrase simple « p » et sa négation « $\neg p$ ».
(b) Si $\alpha\in\mathcal{E}$, alors $\alpha_1\in\mathcal{E}$ et $\alpha_2\in\mathcal{E}$.
(c) Si $\beta\in\mathcal{E}$, alors soit $\beta_1\in\mathcal{E}$, soit $\beta_2\in\mathcal{E}$.
On appelle un ensemble qui satisfait ces trois conditions un « ensemble de Hintikka ». Nous prouvons maintenant que tout ensemble de Hintikka est satisfaisable :[10] Nous argumentons que tout ensemble de Hintikka peut être élargi à (est un sous-ensemble d') un ensemble saturé. Un ensemble $\mathcal{E}'$ est dit « saturé »s'il satisfait les conditions suivantes :
(a+) Pour toute phrase ϕ, soit $\phi\in\mathcal{E}'$, soit $\ulcorner\neg\phi\urcorner\in\mathcal{E}'$, mais pas les deux.
(b+) Pour toute phrase du type α, $\alpha\in\mathcal{E}'$ si et seulement si $\alpha_1\in\mathcal{E}'$ et $\alpha_2\in\mathcal{E}'$.
(c+) Pour toute phrase du type β, $\beta\in\mathcal{E}'$ si et seulement si $\beta_1\in\mathcal{E}'$ ou $\beta_2\in\mathcal{E}'$.
La différence cruciale entre un ensemble de Hintikka et un ensemble saturé est que ce que sont les conditions seulement nécessaires pour le premier sont également suffisantes pour le deuxième – donc la nécessité d'élargir.

Pour montrer qu'il y a un ensemble saturé $\mathcal{E}'$ tel que tout ensemble de Hintikka $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}'$, nous devons ajouter assez de phrases à $\mathcal{E}$

(i) pour que les implications dans (b) et (c) puissent être transformées en des équivalences dans (b+) et (c+) ;

[10] Pour nos besoins, il suffirait de montrer la consistance de tout ensemble de Hintikka qui est *fini*, mais nous prouverons quand même l'affirmation plus forte.

PROOF

(ii) et pour que (a) soit vraie non seulement pour les phrases simples mais pour toutes les formules.

Supposons que $\mathcal{E}$ est un ensemble de Hintikka. Nous devons trouver une valuation qui rende vraies toutes les formules dans $\mathcal{E}$. Nous la définissons ainsi pour le cas particulier d'une phrase simple :

$$V(\langle\!\langle p \rangle\!\rangle) := \begin{cases} \mathbf{v} & \langle\!\langle p \rangle\!\rangle \in \mathcal{E} \\ \mathbf{f} & \langle\!\langle \neg p \rangle\!\rangle \in \mathcal{E} \\ \text{un de } \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{f} & \langle\!\langle p \rangle\!\rangle \notin \mathcal{E} \ \wedge \ \langle\!\langle \neg p \rangle\!\rangle \notin \mathcal{E} \end{cases}$$

Par la condition (a), il n'arrive jamais que V attribue deux valeurs de vérité différentes à une seule et même phrase atomique. Comment pouvons-nous montrer que V rend vraie toute formule dans $\mathcal{E}$? Par la méthode de l'induction mathématique, que nous avons déjà rencontrée à la p. 107. Nous attribuons à chaque formule un degré selon la définition suivante :

Définition 35 (Degré). *Le* degré *d'une formule ϕ est le nombre naturel déterminé par les règles suivantes :*

(1) Si ϕ est une phrase atomique, alors son degré est 0.

(2) Si ϕ est une formule niée $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et que le degré de ψ est n, alors son degré est $n+1$.

(3) Si ϕ est une conjonction $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, une disjonction $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, une implication $\ulcorner\psi \to \chi\urcorner$ ou une équivalence $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ et si le degré de ψ est n et que le degré de χ est m, alors le degré de ϕ est $n+m+1$.

L'utilité principale de cette définition[11] est qu'elle nous permet de prouver des méta-théorèmes que nous avons déjà établis pour des cas particuliers avec une plus grande généralité, c'est-à-dire pour toutes les formules propositionnelles. Nous le faisons encore une fois par induction mathématique.

Nous démontrons que V rend vraies toutes les phrases dans $\mathcal{E}$:

base de l'induction : Nous avons déjà vu que V rend vraies toutes les phrases simples (de degré 0) dans $\mathcal{E}$.

pas de l'induction : Supposons que V rende vraie toute phrase ϕ dans $\mathcal{E}$ de degré inférieur à n. Si ϕ est d'un degré supérieur à 0, ϕ doit être soit une formule α, soit une formule β :

α : Si ϕ est du type α, alors α_1 et α_2 sont aussi dans $\mathcal{E}$. Mais ces formules sont d'un degré inférieur à n, donc elles sont rendues vraies par V. ϕ doit également être vrai.

β : Si ϕ est du type β, alors soit β_1, soit β_2 est un membre de $\mathcal{E}$. Quelle qu'elle soit, elle doit être rendue vraie par V (puisqu'elle est d'un degré inférieur à n). ϕ est alors également rendu vrai par V.

Nous avons donc défini une interprétation qui rend vraies toutes les phrases dans $\mathcal{E}$ et, plus généralement, toutes les phrases dans un ensemble de Hintikka. Comme les phrases sur une branche ouverte et complète d'un tableau forment un tel ensemble de Hintikka, nous avons démontré le théorème. □

L'utilité principale de cette manière de prouver la complétude de la logique propositionnelle est qu'elle nous fournit en même temps une valuation V qui nous sers comme contre-exemple à l'assertion qu'une formule satisfaisable est une contradiction : pour une telle formule, la définition de V nous montre dans quelle valuation des phrases simples la formule complexe obtient la valeur « V ».[12]

[11] Voici quelques exemples : « $p \wedge (q \vee \neg r)$ » est de degré 3, « $p \wedge (q \vee r)$ » est de degré 2, « $p \wedge (q \wedge (r \vee \neg s))$ » est de degré 4, etc.

[12] Nous verrons, dans le ch. 11.5, que ce résultat ne vaut que pour les tableaux finis (les seuls que nous avons à considérer pour la logique propositionnelle), mais ne vaut pas dans le cadre plus général de la logique des prédicats.

PROOF

7.4 Correction et complétude de la déduction naturelle

Pour montrer la correction et la complétude de la méthode de la déduction naturelle il faut prouver que tout séquent déductible « $\phi \vdash \psi$ » correspond à une relation de conséquence logique « $\phi \vDash \psi$ » (correction) et que toute instance d'une telle relation correspond à un séquent déductible à l'aide de nos douze règles de déduction naturelle (complétude). Nous ignorerons par la suite les règles d'introduction et d'élimination de l'équivalence, traitant $\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$ comme abréviation de $\ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi) \urcorner$. Nous suivons la procédure dans Lemmon (1965a, 75 et seq.).

Théorème 36 (Correction de la déduction naturelle)**.** *La méthode de la déduction naturelle est correcte : tout séquent déductible est une conséquence logique.*

Démonstration. Nous avons remarqué que toute preuve par la méthode de la déduction naturelle (en bref : toute déduction naturelle) doit commencer par une application de la règle de suppositions ou par l'énonciation d'une prémisse (ce qui revient à la même chose). C'est pourquoi nous pouvons prouver la correction par une induction par rapport à la longueur n d'une preuve de $\ulcorner \phi \vdash \psi \urcorner$.

base de l'induction Si la preuve a la longueur 1, il s'agit d'une application de la règle de suppositions. Le séquent en question a donc la forme $\ulcorner \phi \vdash \phi \urcorner$ et nous avons appris à la leçon 2 (cf. p. 87) que la relation de conséquence logique est réflexive, c'est-à-dire que $\phi \vDash \phi$ pour route formule ϕ.

pas de l'induction Supposons que nous avons montré la correction de toutes les étapes d'une preuve jusqu'à la n-ième étape et considérons l'étape numéro $n+1$. Pour montrer la correction de cette étape $n+1$, il suffit de montrer la validité des neuf différentes règles d'inférence que nous aurions pu utiliser pour y arriver.

MP Supposons le contraire de ce que nous voulons prouver : que $\vDash \phi$, $\vDash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$, mais $\nvDash \psi$. Par conséquent, il existerait une valuation C rendant vraie la formule ϕ et $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ et rendant fausse ψ. Par la table de vérité de « $\rightarrow$ », nous savons que cela serait impossible.

MT L'hypothèse d'induction s'ensuit également de la table de vérité de « $\rightarrow$ ».

PC Supposons que $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \vDash \psi$, mais que $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\} \nvDash \ulcorner \phi_{n+1} \rightarrow \psi \urcorner$. Il y aurait donc une valuation V qui rendrait vrais tous les membres de $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$, mais faux $\ulcorner \phi_{n+1} \rightarrow \psi \urcorner$. Il s'agit d'une impossibilité puisque V, par la table de vérité de « $\rightarrow$ », devrait rendre vrai ϕ_{n+1} et rendre faux ψ et servirait donc comme contre-exemple à « $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \vDash \psi$ ».

DN L'hypothèse d'induction s'ensuit de la table de vérité de « $\neg$ ».

RAA Supposons que nous avons $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \vDash \psi$, $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \vDash \ulcorner \neg \psi \urcorner$, mais $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\} \nvDash \ulcorner \neg \phi_{n+1} \urcorner$. Il y aurait donc une valuation V qui rendrait vrais tous les membres de $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$, rendrait faux $\ulcorner \neg \phi_{n+1} \urcorner$ et donc rendrait vrai ϕ_{n+1}. Elle devrait donc rendre vrais à la fois ψ et $\ulcorner \neg \psi \urcorner$, ce qui est impossible.

$\wedge$**I** Si toute valuation rendait vrais ϕ et ψ, alors toute valuation rendrait également vrai $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$.

$\wedge$**E** Si toute valuation rendait vrai $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$, alors toute valuation rendrait également vrais ϕ et ψ.

$\vee$**I** Si toute valuation rendait vrai ϕ, alors toute valuation rendrait également vrai $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$.

PROOF

∨E Supposons le contraire de ce que nous voulons prouver : $\vDash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner, \phi \vDash \chi, \psi \vDash \chi$, mais $\nvDash \chi$. Il y aurait donc une valuation V qui rendrait faux χ, mais vrai $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$. Elle devrait donc rendre vrai l'un des disjoints. Or, puisque nous avons $\phi \vDash \chi$ et $\psi \vDash \chi$, elle devrait rendre vrai χ, ce qui est contraire à notre supposition initiale. □

La complétude de la déduction naturelle nous assure que toute conséquence logique est déductible en tant que séquent. Pour la prouver, il nous faut le théorème suivant :

Théorème 37. *Soit ϕ une formule qui contient les phrases simples « p_1 », ..., « p_n »et V une valuation propositionnelle. Nous définissons des formules $\psi_1, \dots, \psi_n$ ainsi ($1 \leq i \leq n$) :*

$$\psi_i := \begin{cases} \text{« } p_i \text{ »} & V(\text{« } p_i \text{ »}) = \mathbf{v} \\ \text{« } \neg p_i \text{ »} & V(\text{« } p_i \text{ »}) = \mathbf{f} \end{cases}$$

Nous pouvons alors montrer par la méthode de la déduction naturelle :

- *si $V(\phi) = \mathbf{v}$, alors nous pouvons déduire $\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \phi$;*
- *si $V(\phi) = \mathbf{f}$, alors nous pouvons déduire $\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \ulcorner \neg \phi \urcorner$.*

Démonstration. Nous le démontrons par une induction mathématique, utilisant la notion de degré déjà introduite :

base de l'induction Soit ϕ de degré o (et donc une phrase atomique). Si $V(\phi) = \mathbf{v}$, nous avons $\psi = \phi$ et $\psi \vdash \phi$ par la règle de supposition. Si $V(\phi) = \mathbf{f}$, nous avons $\psi = \ulcorner \neg \phi \urcorner$ et également $\psi \vdash \neg \phi$ par la règle de suppositions.

pas de l'induction Soit ϕ de degré n.

1. Si $\phi = \ulcorner \neg \xi \urcorner$, ξ est de degré $< n$ et également
   - $V(\phi) = \mathbf{v}$, alors $V(\xi) = \mathbf{f}$ et donc (par l'hypothèse de l'induction) $\psi_1, \dots \psi_n \vdash \ulcorner \neg \xi \urcorner$.
   - $V(\phi) = \mathbf{f}$, alors $V(\xi) = \mathbf{v}$ et donc (par l'hypothèse de l'induction) $\psi_1, \dots \psi_n \vdash \xi$. Nous obtenons $\psi_1, \dots \psi_n \vdash \ulcorner \neg \neg \xi \urcorner$ par une application de (DN).
2. Si $\phi = \ulcorner \xi \wedge \chi \urcorner$, ξ et χ sont de degré $< n$ et également
   - $V(\phi) = \mathbf{v}$, alors $V(\xi) = V(\chi) = \mathbf{v}$. Nous avons, par l'hypothèse de l'induction :

     $$\begin{array}{ll} \psi_1, \dots, \phi_m & \vdash \xi \\ \psi_{m+1}, \dots, \psi_n & \vdash \chi \end{array}$$

     et nous devons montrer que

     $$\psi_1, \dots, \phi_n \qquad \vdash \ulcorner \xi \wedge \chi \urcorner$$

     – ce qui s'ensuit par une application de ($\wedge$**I**).
   - Si $V(\phi) = \mathbf{f}$, alors $V(\xi) = \mathbf{f}$ ou $V(\chi) = \mathbf{f}$. Voici les trois cas :

1	$\psi_1, \dots, \phi_m$	$\vdash \xi$	prémisse
2	$\psi_1, \dots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner \neg \chi \urcorner$	prémisse
3	$\psi_1, \dots, \psi_n, \ulcorner \xi \wedge \chi \urcorner$	$\vdash^* \ulcorner \xi \wedge \chi \urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \dots, \psi_n, \ulcorner \xi \wedge \chi \urcorner$	$\vdash^* \chi$	de (3) par ($\wedge$**E**)

PROOF

5	$\psi_1, \dots, \phi_n$	$\vdash \ulcorner\neg(\xi \wedge \chi)\urcorner$	de (3), (2) et (4) par (RAA)

Le deuxième est similaire :

1	$\psi_1, \dots, \psi_m$	$\vdash \ulcorner\neg\xi\urcorner$	prémisse
2	$\psi_1, \dots, \phi_n$	$\vdash \chi$	prémisse
3	$\psi_1, \dots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \dots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \psi$	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\psi_1, \dots, \phi_n$	$\vdash \ulcorner\neg(\xi \wedge \chi)\urcorner$	de (3), (1) et (4) par (RAA)

Et voici le troisième :

1	$\psi_1, \dots, \phi_m$	$\vdash \ulcorner\neg\xi\urcorner$	prémisse
2	$\psi_1, \dots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner\neg\chi\urcorner$	prémisse
3	$\psi_1, \dots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \dots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \chi$	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\psi_1, \dots, \phi_n$	$\vdash \ulcorner\neg(\xi \wedge \chi)\urcorner$	de (3), (2) et (4) par (RAA)

3. Si $\phi = \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner$, ξ et χ sont de degré $< n$ et également
   - $V(\phi) = \mathbf{v}$, alors $V(\xi) = \mathbf{v}$ ou $V(\chi) = \mathbf{v}$. Dans les trois cas, nous utilisons ($\vee$**I**).
   - $V(\phi) = \mathbf{f}$, alors $V(\xi) = V(\chi) = \mathbf{f}$. La déduction sera la suivante

1	$\psi_1, \dots, \phi_m$	$\vdash \ulcorner\neg\xi\urcorner$	prémisse
2	$\psi_1, \dots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner\neg\chi\urcorner$	prémisse
3	$\psi_1, \dots, \psi_n, \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \dots, \psi_n, \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner, \xi$	$\vdash^* \xi$	supposition
5	$\psi_1, \dots, \psi_n, \xi$	$\vdash^* \ulcorner\neg(\xi \vee \chi)\urcorner$	de (3), (1) et (4) par (RAA)
6	$\psi_1, \dots, \psi_n, \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner, \chi$	$\vdash^* \chi$	supposition
7	$\psi_1, \dots, \psi_n, \chi$	$\vdash^* \ulcorner\neg(\xi \vee \chi)\urcorner$	de (3), (2) et (6) par (RAA)
8	$\psi_1, \dots, \psi_n, \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\neg(\xi \vee \chi)\urcorner$	de (3, 4, 5, 6, 7) par ($\vee$**E**)
9	$\psi_1, \dots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner\neg(\xi \vee \chi)\urcorner$	de (3), (3) et (8) par (RAA)

4. Si $\phi = \ulcorner\xi \to \chi\urcorner$, ξ et χ sont de degré $< n$ et également
   - si $V(\phi) = \mathbf{v}$, alors $V(\xi) = \mathbf{f}$ ou $V(\chi) = \mathbf{v}$. Si $V(\chi) = \mathbf{v}$, nous supposons ξ et appliquons (PC). Dans l'autre cas $V(\xi) = V(\chi) = \mathbf{f}$, nous supposons χ et ξ, appliquons (PC) et enlevons la supposition que χ par (RAA).
   - si $V(\phi) = \mathbf{f}$, alors $V(\xi) = \mathbf{v}$ et $V(\chi) = \mathbf{f}$. Nous supposons $\ulcorner\xi \to \chi\urcorner$, appliquons (MP) et utilisons (RAA) pour nier la supposition.
5. Si $\phi = \ulcorner\xi \leftrightarrow \chi\urcorner$, ξ et χ sont de degré $< n$ et également
   - $V(\phi) = \mathbf{v}$, alors $V(\xi) = V(\chi) = \mathbf{v}$ ou $V(\xi) = V(\chi) = \mathbf{f}$. Dans ce cas, nous utilisons (PC) et puis ($\leftrightarrow$ **I**).
   - $V(\phi) = \mathbf{f}$, alors $V(\xi) = \mathbf{f}$ et $V(\chi) = \mathbf{v}$ ou $V(\xi) = \mathbf{v}$ et $V(\chi) = \mathbf{f}$. Nous supposons $\ulcorner\xi \leftrightarrow \chi\urcorner$, appliquons ($\leftrightarrow$ **E**), appliquons (MP) et utilisons (RAA) pour nier la supposition.

Nous avons donc prouvé notre théorème auxiliaire, c'est-à-dire démontré que : Si V est une valuation

PROOF

des phrases simples contenues dans une phrase complexe, nous pouvons déduire, par la méthode de la déduction naturelle, que $\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \phi$ si $V(\phi) = \mathbf{v}$ et que $\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$ si $V(\phi) = \mathbf{f}$, pour n'importe quelle phrase ϕ. □

Le théorème (37) nous assure que nous pouvons ‹modeler› chaque ligne d'une table de vérité par les méthodes de la déduction naturelle. Nous sommes maintenant en mesure de prouver la complétude de la déduction naturelle :

Théorème 38 (Complétude de la déduction naturelle)**.** *La méthode de la déduction naturelle est complète : si ψ est une conséquence logique de ϕ, alors « $\phi \vdash \psi$ » est déductible.*

Démonstration. Nous prouvons d'abord la complétude sous une forme plus ‹classique› :

Toute tautologie est déductible par la méthode de la déduction naturelle. (7.3)

Pour démontrer (7.3), nous utilisons le théorème (37). Supposons que ϕ est une tautologie et que ϕ contient les phrases simples « p_1 », ..., « p_n ». Nous pouvons donc déduire tous les 2^n séquents de la forme « $\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \phi$ ». Pour déduire ϕ, nous procédons ainsi :

1. Nous démontrons toutes les n disjonctions $\ulcorner\psi_i \vee \neg\psi_i\urcorner$ (en supposant qu'elles sont fausses et appliquant ($\vee$**I**) et (RAA)).
2. Nous faisons $2n$ suppositions : $\psi_1, \ulcorner\neg\psi_1\urcorner, \psi_2, \ulcorner\neg\psi_2\urcorner, \dots\ \psi_n, \ulcorner\neg\psi_n\urcorner$.
3. Nous répétons les 2^n preuves de ϕ pour toutes les différentes interprétations possibles (ce qui est possible donné le théorème (37)).
4. Nous appliquons $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$ fois ($\vee$**E**) et obtenons une preuve de ϕ sous aucune supposition.

Comme ϕ était une tautologie arbitraire, nous avons prouvé (7.3). Pour passer des théorèmes $\vdash \phi$ à des séquents arbitraires $\phi \vdash \psi$, supposons que ψ est une conséquence logique de $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$. Nous devons donc montrer que nous pouvons prouver le séquent « $\phi_1, \dots\ \phi_n \vdash \psi$ ». Par la définition de la conséquence logique, nous savons que $\ulcorner\phi_1 \to (\phi_2 \to (\dots\ (\phi_n \to \psi))\dots)\urcorner$ est une tautologie. Étant donné (7.3), nous pouvons déduire cette formule également par la méthode de la déduction naturelle. Le théorème de déduction nous dit alors que nous pouvons également prouver le séquent en question. □

Voici un exemple pour illustrer le fonctionnement de la ‹preuve canonique› décrite ci-dessus. Soit ϕ la tautologie « $(p \wedge q) \to p$ » :

1. Première étape : nous prouvons les disjonctions des atomes concernés :

1	$\vdash p \vee \neg p$	déjà prouvé
2	$\vdash q \vee \neg q$	déjà prouvé

2. Deuxième étape : supposons tous les atomes et leurs négations :

3	p	$\vdash^* p$	supposition
4	$\neg p$	$\vdash^* \neg p$	supposition
5	q	$\vdash^* q$	supposition
6	$\neg q$	$\vdash^* \neg q$	supposition

PROOF

3. Troisième étape : comme ϕ est une tautologie, le théorème (37) nous montre comment dériver les quatre lignes suivantes des quatre lignes précédentes :

7	p, q	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	théorème (37)
8	$p, \neg q$	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	théorème (37)
9	$\neg p, q$	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	théorème (37)
10	$\neg p, \neg q$	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	théorème (37)

4. Nous pouvons donc appliquer $\vee$**E** pour terminer la preuve :

11	q	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	de (1,3,7,4,9) par ($\vee$**E**)
12	$\neg q$	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	de (1,3,8,4,10) par ($\vee$**E**)
13		$\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$	de (2,5,11,6,12) par ($\vee$**E**)

Nous repliquons la méthode des tables de vérité, en éliminant successivement les alternatives qui ne se distinguent que par le fait qu'elles sont représentées par deux lignes adjacentes dans la table de vérité correspondante.

7.5 Complétude du calcul HC

Nous démontrons la complétude du calcul HC de manière indirecte, à l'aide du calcul de séquents CPL$\mathcal{G}$ introduit dans le ch. 6.7 :[13]

A pour toute tautologie de $\mathcal{L}$, nous montrons qu'elle est prouvable dans CPL$\mathcal{G}$ (complétude du calcul CPL$\mathcal{G}$) ;

B pour tout théorème de CPL$\mathcal{G}$, nous montrons qu'il est prouvable dans HC (que HC est au moins 'aussi fort' que CPL$\mathcal{G}$, c'est-à-dire ne prouve pas moins).

Pour la première étape **A**, l'idée principale de la preuve est d'esquisser une méthode qui produit un de deux résultats pour un séquent « $\Gamma \supset \Delta$ » donné :

- soit elle nous produit une preuve : CPL$\mathcal{G} \vdash \Gamma \supset \Delta$;
- soit elle nous produit une valuation de séquents qui rend le séquent faux : $V'(\Gamma \supset \Delta) = \mathbf{f}$.

Pour ce faire, nous définissons ce qu'est une « chaîne de déduction » pour le séquent « $\Gamma \supset \Delta$ ». une telle chaîne essaie de construire une preuve de son point de départ, en rajoutant des prémisses dont le membre antérieur est la conclusion :

Définition 39 (Chaînes de déduction)**.** *Une* chaîne de déduction *pour le séquent « $\Gamma \supset \Delta$ » est une séquence de séquents $\langle \Gamma \supset \Delta, \Gamma_1 \supset \Delta_1, \Gamma_2 \supset \Delta_2, \ldots \rangle$, telle que tout séquent $\Gamma_n \supset \Delta_n$ satisfait les quatre conditions suivantes, à appliquer dans l'ordre donné :*

1. *Soit Γ contient $\bot$, soit Δ contient $\top$, soit une formule fait partie de Γ et de Δ ; « $\Gamma_n \supset \Delta_n$ » est alors le dernier séquent de la séquence et cette dernière est de longueur n.*
2. *Γ et Δ ne contiennent que des formules de longueur 1, c'est-à-dire que des phrases atomiques, « $\top$ » ou « $\bot$ » ; « $\Gamma_n \supset \Delta_n$ » est alors le dernier séquent de la séquence et cette dernière est de longueur n.*

[13] Comme dans la présentation des calculs axiomatiques, je me base sur le matériel de J. Adler et G. Jäger ; l'idée principale de la preuve est due à SCHÜTTE.

PROOF

3. *Si le séquent contient une formule ϕ d'une longueur > 1 dans Δ, et alors peut être écrit comme « $\Gamma_n \supset \phi, \Delta'_n$ », alors il a un successeur immédiat $\Gamma_{n+1} \supset \Delta_{n+1}$, déterminé comme suit :*
   a) *Si $\phi = \neg\psi$, alors $\Gamma_{n+1} \supset \Delta_{n+1}$ est le séquent $\psi, \Gamma_n \supset \Delta'_n$.*
   b) *Si $\phi = \psi \wedge \chi$, alors $\Gamma_{n+1} \supset \Delta_{n+1}$ est soit le séquent $\Gamma_n \supset \psi, \Delta'_n$, soit le séquent $\Gamma_n \supset \chi, \Delta'_n$.*
   c) *Si $\phi = \psi \vee \chi$, alors $\Gamma_{n+1} \supset \Delta_{n+1}$ est le séquent $\Gamma_n \supset \psi, \chi, \Delta'_n$.*
   d) *Si $\phi = \psi \rightarrow \chi$, alors $\Gamma_{n+1} \supset \Delta_{n+1}$ est le séquent $\psi, \Gamma_n \supset \chi, \Delta'_n$.*
   e) *Si $\phi = \psi \leftrightarrow \chi$, alors $\Gamma_{n+1} \supset \Delta_{n+1}$ est soit le séquent $\psi, \Gamma_n \supset \chi, \Delta'_n$, soit le séquent $\chi, \Gamma_n \supset \psi, \Delta'_n$.*
4. *Si le séquent contient une formule ϕ d'une longueur > 1 dans Γ, et alors peut être écrit comme « $\phi, \Gamma'_n \supset \Delta_n$ », alors il a un successeur immédiat $\Gamma_{n+1} \supset \Delta_{n+1}$, déterminé comme suit :*
   a) *Si $\phi = \neg\psi$, alors $\Gamma_{n+1} \supset \Delta_{n+1}$ est le séquent $\Gamma'_n \supset \psi, \Delta_n$.*
   b) *Si $\phi = \psi \wedge \chi$, alors $\Gamma_{n+1} \supset \Delta_{n+1}$ est le séquent $\psi, \chi, \Gamma'_n \supset \Delta_n$.*
   c) *Si $\phi = \psi \vee \chi$, alors $\Gamma_{n+1} \supset \Delta_{n+1}$ est soit le séquent $\psi, \Gamma'_n \supset \Delta_n$, soit le séquent $\chi, \Gamma_n \supset \Delta_n$.*
   d) *Si $\phi = \psi \rightarrow \chi$, alors $\Gamma_{n+1} \supset \Delta_{n+1}$ est soit le séquent $\Gamma'_n \supset \psi, \Delta_n$, soit le séquent $\chi, \Gamma'_n \supset \Delta_n$.*
   e) *Si $\phi = \psi \leftrightarrow \chi$, alors $\Gamma_{n+1} \supset \Delta_{n+1}$ est soit le séquent $\Gamma'_n \supset \psi, \chi, \Delta_n$, soit le séquent $\psi, \chi, \Gamma'_n \supset \Delta_n$.*

Le premier cas est le plus important : nous disons qu'une chaîne de déduction *aboutit* si et seulement si son dernier séquent $\Gamma_n \supset \Delta_n$ remplit une des trois conditions suivantes :

- Γ_n contient « $\bot$ »;
- Δ_n contient « $\top$ »;
- il y a une formule ϕ telle que $\phi \in \Gamma_n$ et $\phi \in \Delta_n$.

Dans ces trois cas, le séquent est prouvable : dans le premier cas, parce qu'il est une instance de l'axiome $\bot$, dans le deuxième, parce qu'il est une instance de l'axiome $\top$, dans le troisième à partir de **id** (qui ne s'applique qu'à des phrases atomiques) par induction sur la longueur de la formule.

Faisons un exemple. Le séquent « $p \wedge q \supset p \wedge r, q \wedge p$», par exemple, peut être prouvé dans le calcul des séquents comme-ci, à partir de trois instances de l'axiome **id** :

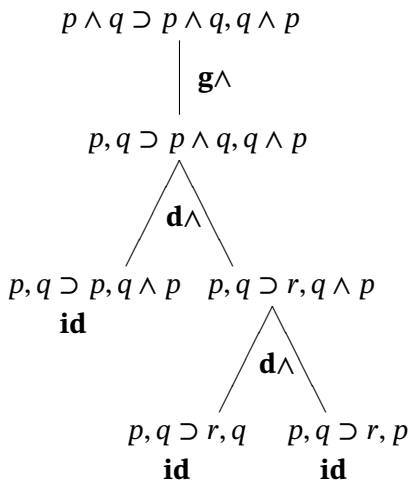
1. de « $p, q \supset r, q$» (**id**) et de « $p, q \supset r, p$» (**id**), nous inférons « $p, q \supset r, q \wedge p$» par (**d**$\wedge$);
2. de « $p, q \supset r, q \wedge p$» et de « $p, q \supset p, q \wedge p$» (**id**), nous inférons « $p, q \supset p \wedge q, q \wedge p$» par (**d**$\wedge$);
3. de « $p, q \supset p \wedge q, q \wedge p$», nous inférons « $p \wedge q \supset p \wedge q, q \wedge p$» par (**g**$\wedge$).

Normalement, une telle preuve est présentée comme suit :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p, q \supset r, q \quad p, q \supset r, p}{p, q \supset r, q \wedge p}\ \mathbf{d}\wedge \qquad p, q \supset p, q \wedge p}{p, q \supset p \wedge q, q \wedge p}\ \mathbf{d}\wedge}{p \wedge q \supset p \wedge q, q \wedge p}\ \mathbf{g}\wedge$$

Nous pouvons représenter cette preuve sous forme d'un arbre, dont les branches terminent en des axiomes :

PROOF



Les trois branches de cette preuve correspondent à trois chaînes de déduction :
$\langle p \wedge q \supset p \wedge q, q \wedge p\,,\ p, q \supset p \wedge q, q \wedge p\,,\ p, q \supset p, q \wedge p\rangle$
$\langle p \wedge q \supset p \wedge q, q \wedge p\,,\ p, q \supset p \wedge q, q \wedge p\,,\ p, q \supset r, q \wedge p\,,\ p, q \supset r, q\rangle$
$\langle p \wedge q \supset p \wedge q, q \wedge p\,,\ p, q \supset p \wedge q, q \wedge p\,,\ p, q \supset r, q \wedge p\,,\ p, q \supset r, p\rangle$
Il n'est pas le cas que l'arbre que l'on obtient à l'aide des chaînes de déduction est toujours une preuve. Par contre, *s'il y a* une preuve du séquent en question, elle correspondra à un arbre constructible par les chaînes de déduction.

Pour prouver la complétude de CPL$\mathcal{G}$, nous établissons les deux résultats mentionnés ci-dessus : le premier, syntaxique, nous montre comment, dans le cas 'positif', construire une preuve à partir des chaînes de déduction ; le deuxième, sémantique, nous montre comment, dans le cas 'négatif', construire une valuation qui rend le séquent faux.

Théorème 40 (Lemme syntaxique)**.** *Si toute chaîne de déduction pour «*$\Gamma \supset \Delta$*» aboutit, alors le séquent est prouvable dans* CPL$\mathcal{G}$*.*

Démonstration. Supposons que toute chaîne de déduction pour «$\Gamma \supset \Delta$» aboutit. Comme il y a un nombre fini de ces chaînes (leur nombre est déterminé par la complexité des formules dans $\Gamma \cup \Delta$), il y en a une de longueur maximale, disons m. Nous prouvons par induction sur $k \leq m$ que si un séquent $\Gamma_{m-k} \supset \Delta_{m-k}$ se trouve dans quelque chaîne de déduction pour «$\Gamma \supset \Delta$», alors CPL$\mathcal{G} \vdash \Gamma_{m-k} \supset \Delta_{m-k}$. Arrivant à $m = k$, nous établissons le résultat voulu.

base de l'induction, $k = 0$ Le dernier séquent de la séquence $\Gamma_{m-k} \supset \Delta_{m-k} = \Gamma_m \supset \Delta_m$ est prouvable, puisque la chaîne aboutit.

pas de l'induction, $k \rightsquigarrow k+1$ Supposons CPL$\mathcal{G} \vdash \Gamma_{m-k} \supset \Delta_{m-k}$ pour toute chaîne de déduction. Tout séquent successif $\Gamma_{m-(k+1)} \supset \Delta_{m-(k+1)}$ a été construit d'après les conditions de la définition 39, c'est-à-dire est la conclusion de l'application d'une règle d'inférence de CPL$\mathcal{G}$ dont les prémisses sont des membres antérieurs de la chaîne respective. Il s'ensuit que CPL$\mathcal{G} \vdash \Gamma_{m-(k+1)} \supset \Delta_{m-(k+1)}$. □

Le cas 'négatif' concerne la sémantique : dans le cas où notre recherche d'une preuve n'aboutit pas, il ne s'agit pas d'une tautologie :

Théorème 41 (Lemme sémantique)**.** *S'il y a une chaîne de déduction pour «*$\Gamma \supset \Delta$*» qui n'aboutit pas, alors il y a une valuation V' telle que* $V'(\Gamma \supset \Delta) = \mathbf{f}$*.*

PROOF

Démonstration. Supposons que $\langle \Gamma \supset \Delta, \Gamma_1 \supset \Delta_1, \dots, \Gamma_k \supset \Delta_k \rangle$ est une chaîne de déduction pour $\Gamma \supset \Delta$ qui n'aboutit pas. Soit Γ^* l'union de tous les Γ_i et Δ^* l'union de tous les Δ_i :

$$\Gamma^* := \bigcup_{i=0}^{k} \Gamma_i \qquad \Delta^* := \bigcup_{i=0}^{k} \Delta_i$$

Nous pouvons (en fait : pourrions, nous n'allons pas le faire...) vérifier 'facilement' que tous les suivants sont vrais :

Q1 Si « $\bot$ » ou une phrase atomique sont membres de Δ_m, alors ils sont également membres de Δ_n pour $m \leq n \leq k$.

Q2 Δ^* ne contient pas « $\top$ ».

Q3 Si « $\top$ » ou une phrase atomique sont membres de Γ_m, alors ils sont également membres de Γ_n pour $m \leq n \leq k$.

Q4 Γ^* ne contient pas « $\bot$ ».

Q5 Il n'y a pas de phrase atomique contenue à la fois dans Γ^* et dans Δ^*.

Q6 Si Δ^* contient $\ulcorner \neg \phi \urcorner$, alors Γ^* contient ϕ.

Q7 Si Γ^* contient $\ulcorner \neg \phi \urcorner$, alors Δ^* contient ϕ.

Q8 Si Δ^* contient $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$, alors Δ^* contient soit ϕ, soit ψ.

Q9 Si Γ^* contient $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$, alors Γ^* contient ϕ et ψ.

Q10 Si Δ^* contient $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$, alors Δ^* contient ϕ et ψ.

Q11 Si Γ^* contient $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$, alors Γ^* contient soit ϕ, soit ψ.

Q12 Si Δ^* contient $\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$, alors Γ^* contient ϕ et Δ^* contient ψ.

Q13 Si Γ^* contient $\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$, alors soit Γ^* contient ψ, soi Δ^* contient ϕ.

Q14 Si Δ^* contient $\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$, alors soit Γ^* contient ϕ et Δ^* contient ψ, soit Γ^* contient ψ et Δ^* contient ϕ.

Q15 Si Γ^* contient $\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$, alors soit Γ^* contient ϕ et ψ, soit Δ^* contient ϕ et ψ.

Nous définissons alors, pour toute phrase atomique « p » une valuation atomique comme suit :

$$V*'(p) := \begin{cases} \mathbf{f} & \text{si } p \in \Delta^* \\ \mathbf{v} & \text{si } p \notin \Delta^* \end{cases}$$

Nous montrons alors par induction sur la longueur n de la formule (et à l'aide des caractéristiques mentionnées ci-dessus) que l'extension V' de cette valuation atomique satisfait les conditions suitvantes :

$$\phi \in \Delta^* \implies V'(\phi) = \mathbf{f}$$
$$\phi \in \Gamma^* \implies V'(\phi) = \mathbf{v}$$

Une valuation qui satisfait ces deux conditions rend faux le séquent et alors nous sert comme contreexemple à l'assertion de sa validité. La preuve par induction se fait ainsi :

$n = 1$ ϕ est alors soit une phrase atomique, soit « $\top$ » ou « $\bot$ ». Dans le premier cas, l'affirmation est vraie par définition, dans le deuxième à cause de (**Q2**), dans le troisième à cause de (**Q4**).

$n \rightsquigarrow n+1$ Nous distinguons les différentes formes logiques de ϕ :

$\phi = \ulcorner \neg \psi \urcorner$ Si $\phi \in \Delta^*$, alors $\psi \in \Gamma^*$ (**Q6**). Il s'ensuit que $V'(\psi) = \mathbf{v}$ de l'hypothèse d'induction et alors $V'(\phi) = \mathbf{f}$ par la définition d'une valuation. Si $\phi \in \Gamma^*$, alors $\psi \in \Delta^*$ (**Q7**) : donc $V'(\psi) = \mathbf{f}$ par l'hypothèse de l'induction et $V'(\phi) = \mathbf{v}$.

PROOF

$\phi = \ulcorner \psi \wedge \chi \urcorner$ Si $\phi \in \Delta^*$, alors soit $\psi \in \Delta^*$ et $V'(\psi) = \mathbf{f}$, soit $\chi \in \Delta^*$ et $V'(\phi) = \mathbf{f}$ (**Q8**). Dans les deux cas, $V'(\phi) = \mathbf{f}$. Si $\phi \in \Gamma^*$, alors $\psi, \chi \in \Gamma^*$ (**Q9**). De $V'(\psi) = V'(\chi) = \mathbf{v}$, il s'ensuit que la valuation rend la conjonction vraie.

$\phi = \ulcorner \psi \vee \chi \urcorner$ Si $\phi \in \Delta^*$, alors $\psi, \chi \in \Delta^*$ (**Q10**). De $V'(\psi) = V'(\chi) = \mathbf{f}$, il s'ensuit que la valuation rend la disjonction fausse. Si $\phi \in \Gamma^*$, alors soit $\psi \in \Gamma^*$ et $V'(\psi) = \mathbf{v}$ soit $\chi \in \Gamma^*$ et $V'(\phi) = \mathbf{v}$ (**Q11** et hypothèse de l'induction). Dans les deux cas, il s'ensuit que la valuation rend la disjonction vraie.

$\phi = \ulcorner \psi \rightarrow \chi \urcorner$ Si $\phi \in \Delta^*$, alors il s'ensuit de (**Q12**) que $\psi \in \Gamma^*$ et que $\chi \in \Delta^*$. L'hypothèse de l'induction nous assure alors que $V'(\psi) = \mathbf{v}$ et que $V'(\chi) = \mathbf{f}$. Il s'ensuit que $V'(\psi \rightarrow \chi) = \mathbf{f}$. Si $\phi \in \Gamma^*$, alors soit $\chi \in \Gamma^*$ et $V'(\chi) = \mathbf{v}$ soit $\psi \in \Delta^*$ et $V'(\psi) = \mathbf{f}$ (**Q13** et hypothèse de l'induction). Dans les deux cas, $V'(\phi) = \mathbf{v}$.

$\phi = \ulcorner \psi \leftrightarrow \chi \urcorner$ Si $\phi \in \Delta^*$, alors soit (i) $\psi \in \Gamma^* \,\&\, \chi \in \Delta^*$, soit (ii) $\chi \in \Gamma^* \,\&\, \psi \in \Delta^*$ (**Q14**). Dans le premier cas (i) : $V'(\psi) = \mathbf{v} \,\&\, V'(\chi) = \mathbf{f}$ et alors $V'(\psi \leftrightarrow \chi) = \mathbf{f}$. Dans le deuxième cas (ii) : $V'(\psi) = \mathbf{f} \,\&\, V'(\chi) = \mathbf{v}$ et alors $V'(\psi \leftrightarrow \chi) = \mathbf{f}$. Si $\phi \in \Gamma^*$, alors soit (i) $\psi, \chi \in \Gamma^*$ et alors $V'(\psi) = V'(\chi) = \mathbf{v}$, soit (ii) $\psi, \chi \in \Delta^*$ et alors $V'(\psi) = V'(\chi) = \mathbf{f}$ (**Q15**). Dans les deux cas, $V'(\phi) = \mathbf{v}$.

Comme tous les éléments de Γ sont membres de Γ^* et tous les éléments de Δ sont membres de Δ^*, il s'ensuit que $V'(\Gamma \supset \Delta) = \mathbf{f}$. □

Combinaisant les deux résultats, nous sommes en mesure de prouver la complétude de CPL$\mathcal{G}$:

Théorème 42 (Complétude de CPL$\mathcal{G}$)**.** *Tout séquent « $\Gamma \supset \Delta$ » valide est prouvable :*

$$\vDash \Gamma \supset \Delta \quad \Longrightarrow \quad \text{CPL}\mathcal{G} \vdash \Gamma \supset \Delta$$

Démonstration. Supposons que $\vDash \Gamma \supset \Delta$. Par la définition de la validité, ceci veut dire que $V'(\Gamma \supset \Delta) = \mathbf{v}$ pour toute valuation V'. De la conversion du lemme sémantique il s'ensuit que toute chaîne de déduction pour « $\Gamma \supset \Delta$ » aboutit. Le lemme syntaxique implique alors que CPL$\mathcal{G} \vdash \Gamma \supset \Delta$. □

Pour une preuve de complétude impliquant des théories potentiellement infinies, un recours au Lemme de König est nécessaire (cf. p. 187 et suivantes).

Nous procédons alors à la deuxième étape **B** et montrons que tout théorème de CPL$\mathcal{G}$ est prouvable dans HC. La complétude de HC s'ensuit alors de la complétude de CPL$\mathcal{G}$: si toute tautologie est prouvable dans CPL$\mathcal{G}$ et tout ce qui est prouvable en CPL$\mathcal{G}$ est également prouvable dans HC, alors toute tautologie est prouvable dans HC.

Nous notons d'abord que tout ce qui est prouvable en CPL$\mathcal{G}$ peut également être prouvé si nous rajoutons la règle (dérivée) de coupure à ce dernier calcul. Nous présupposons ceci par la suite. Nous prouvons le théorème suivant par induction mathématique sur la longueur de la preuve dans CPL$\mathcal{G}$.

Théorème 43. *Soit* Th *une théorie arbitraire et « $\Gamma \supset \Delta$ » n'importe quel séquent :*

$$\text{CPL}\mathcal{G} + \text{Th} \vdash \Gamma \supset \Delta \quad \Longrightarrow \quad HC + \text{Th} \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$$

Démonstration. Nous distinguons quatre cas de figure.

1. Γ contient « $\bot$ » ou Δ contient « $\top$ ». Alors la prouvabilité s'ensuit de la définition de la définition (24) d'une valuation d'un séquent.
2. « $\Gamma \supset \Delta$ » est un axiome de CPL$\mathcal{G}$. Il existe alors une phrase atomique ϕ telle que $\Gamma \supset \Delta = \phi, \Gamma' \supset \phi, \Delta'$. Nous avons alors :

PROOF

(1) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash(\phi\wedge\bigwedge\Gamma')\to\phi$ $\mathbf{H_8}$
(2) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\phi\to(\phi\vee\bigvee\Delta')$ $\mathbf{H_5}$
(3) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash(\phi\wedge\bigwedge\Gamma')\to(\phi\vee\bigvee\Delta')$ de (1) et (2) par (4.2) (cf. p. 113)

3. Γ contient un élément de Th : $\Gamma\supset\Delta=\Gamma\supset\phi,\Delta'$ avec $\phi\in\mathsf{Th}$. Nous prouvons ce séquent comme suit :

(1) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\phi$
(2) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\phi\vee\bigvee\Delta'$ $\mathbf{H_5}$, MP
(3) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash(\phi\vee\bigvee\Delta')\to(\bigwedge\Gamma\to(\phi\vee\bigvee\Delta'))$ de (2) par (9b) de la série 4 (cf. p. 380)
(4) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\bigwedge\Gamma\to(\phi\vee\bigvee\Delta')$ de (2) et (3) par (MP)

4. $\mathsf{CPL}\mathcal{G}\vdash^n\Gamma\supset\Delta$ et «$\Gamma\supset\Delta$» est la conclusion d'une règle d'inférence de $\mathsf{CPL}\mathcal{G}$. Nous distinguons les différentes règles d'inférence :[14]

de $g\neg$ $\Gamma\supset\Delta=\ulcorner\neg\phi\urcorner,\Gamma'\supset\Delta$ et nous devons montrer que $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash(\neg\phi\wedge\bigwedge\Gamma')\to\bigvee\Delta$. Nous avons alors, pour $m<n$, $\mathsf{CPL}\mathcal{G}\vdash^m\Gamma'\supset\phi,\Delta$ et, par l'hypothèse de l'induction, $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\bigwedge\Gamma'\to(\phi\vee\bigvee\Delta)$. Nous procédons comme suit :

(1) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\bigwedge\Gamma'\to(\phi\vee\bigvee\Delta)$
(2) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\bigwedge\Gamma'\to(\neg\phi\to\bigvee\Delta)$ de (1) par (9c) de la série 4 (cf. p. 380)
(3) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash(\neg\phi\wedge\bigwedge\Gamma')\to(\bigvee\Delta)$ de (2) par $\mathbf{H_4}$ et MP

de $d\neg$ $\Gamma\supset\Delta=\Gamma\supset\ulcorner\neg\phi\urcorner,\Delta'$ et nous devons montrer que $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\bigwedge\Gamma\to(\neg\phi\vee\bigvee\Delta')$. Nous avons alors, pour $m<n$, $\mathsf{CPL}\mathcal{G}\vdash^m\phi,\Gamma\supset\Delta'$ et, par l'hypothèse de l'induction, $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash(\phi\wedge\bigwedge\Gamma)\to\bigvee\Delta'$. Nous procédons comme suit :

(1) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash(\phi\wedge\bigwedge\Gamma)\to\bigvee\Delta'$
(2) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\bigwedge\Gamma\to(\phi\to\bigvee\Delta')$ de (1) par (7a) de la série 4, $\mathbf{H_3}$ et MP
(3) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\bigwedge\Gamma\to(\neg\phi\vee\bigvee\Delta')$ par la preuve à la p. 111

de $d\to$ $\Gamma\supset\Delta=\Gamma\supset\ulcorner\phi\to\psi\urcorner,\Delta'$ et nous devons montrer que $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\bigwedge\Gamma\to((\phi\to\psi)\vee\bigvee\Delta')$. Nous avons alors, pour $m<n$, $\mathsf{CPL}\mathcal{G}\vdash^m\phi,\Gamma\supset\psi,\Delta'$ et, par l'hypothèse de l'induction, $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash(\phi\wedge\bigwedge\Gamma)\to(\psi\vee\bigvee\Delta')$. Nous procédons comme suit :

(1) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash(\phi\wedge\bigwedge\Gamma)\to(\psi\bigvee\Delta')$
(2) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\bigwedge\Gamma\to(\phi\to(\psi\bigvee\Delta'))$ $\mathbf{H_3}$
(3) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\bigwedge\Gamma\to(\phi\to(\neg\psi\to\bigvee\Delta'))$ de (2) par (7c) de la série 4
(4) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\bigwedge\Gamma\to((\phi\wedge\neg\psi)\to\bigvee\Delta')$ $\mathbf{H_4}$
(5) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\bigwedge\Gamma\to(\neg(\phi\wedge\neg\psi)\vee\bigvee\Delta')$ par la preuve à la p. 111
(6) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\bigwedge\Gamma\to((\neg\phi\vee\neg\neg\psi)\vee\bigvee\Delta')$ de Morgan
(7) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\bigwedge\Gamma\to((\neg\phi\vee\psi)\vee\bigvee\Delta')$ élimination de $\neg\neg$
(8) $\mathsf{HC}+\mathsf{Th}\vdash\bigwedge\Gamma\to((\phi\to\psi)\vee\bigvee\Delta')$ de (7) par (7c)

[14] Nous ne ferons pas les preuves pour les règles (**g**$\wedge$), (**d**$\wedge$), (**g**$\vee$), (**d**$\vee$), (**g** $\to$), (**g** $\leftrightarrow$) et (**d** $\leftrightarrow$). Ils sont similaires aux preuves données.

PROOF

de $g \rightarrow\ \Gamma \supset \Delta = \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner\Gamma' \supset \Delta$ et nous devons montrer que $\mathsf{HC} + \mathsf{Th} \vdash ((\phi \rightarrow \psi) \wedge \bigwedge \Gamma') \rightarrow \bigvee \Delta$. Nous avons alors, pour $m_1, m_2 < n$, $\mathsf{CPL}\mathcal{G} \vdash^{m_1} \Gamma' \supset \phi, \Delta$ et $\mathsf{CPL}\mathcal{G} \vdash^{m_2} \psi, \Gamma' \supset \Delta$. Voici la preuve :

(1)	$\mathsf{HC} + \mathsf{Th} \vdash \bigwedge \Gamma' \rightarrow (\phi \bigvee \Delta)$	hypothèse de l'induction
(2)	$\mathsf{HC} + \mathsf{Th} \vdash (\psi \wedge \bigwedge \Gamma') \rightarrow \bigvee \Delta$	hypothèse de l'induction
(3)	$\mathsf{HC} + \mathsf{Th} \vdash \bigwedge \Gamma' \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \bigvee \Delta)$	de (1) par (7c)
(4)	$\mathsf{HC} + \mathsf{Th} \vdash \bigwedge \Gamma' \rightarrow (\psi \rightarrow \bigvee \Delta)$	$\mathbf{H_3}$
(5)	$\mathsf{HC} + \mathsf{Th} \vdash \bigwedge \Gamma' \rightarrow ((\neg\phi \vee \psi) \rightarrow \bigvee \Delta)$	de (3), (4), $\mathbf{H_7}$
(6)	$\mathsf{HC} + \mathsf{Th} \vdash \bigwedge \Gamma' \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \bigvee \Delta)$	de (5) par (7c)
(7)	$\mathsf{HC} + \mathsf{Th} \vdash ((\phi \rightarrow \psi) \wedge \bigwedge \Gamma') \rightarrow \bigvee \Delta$	de (6) et $\mathbf{H_4}$

de coupure Nous avons alors, pour $m_1, m_2 < n$, $\mathsf{CPL}\mathcal{G} \vdash^{m_1} \phi, \Gamma \supset \Delta$ et $\mathsf{CPL}\mathcal{G} \vdash^{m_2} \Gamma \supset \phi, \Delta$ et devons montrer que $\mathsf{HC} + \mathsf{Th} \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$:

(1)	$\mathsf{HC} + \mathsf{Th} \vdash (\phi \wedge \bigwedge \Gamma) \rightarrow \bigvee \Delta$	hypothèse de l'induction
(2)	$\mathsf{HC} + \mathsf{Th} \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow (\phi \vee \bigvee \Delta)$	hypothèse de l'induction
(3)	$\mathsf{HC} + \mathsf{Th} \vdash \phi \rightarrow (\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta)$	de (1) et $\mathbf{H_3}$
(4)	$\mathsf{HC} + \mathsf{Th} \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \bigvee \Delta)$	de (2) par (7c)
(5)	$\mathsf{HC} + \mathsf{Th} \vdash \neg\phi \rightarrow (\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta)$	de $\mathbf{H_2}$, (7a), $\mathbf{H_3}$
(6)	$\mathsf{HC} + \mathsf{Th} \vdash (\phi \vee \neg\phi) \rightarrow (\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta)$	de (3), (5) et $\mathbf{H_7}$
(7)	$\mathsf{HC} + \mathsf{Th} \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$	de (6) et $\mathbf{H_{16}}$ □

La complétude du calcul $\mathsf{CPL}\mathcal{G}$ a une autre conséquence positive : elle nous permet d'établir que la règle de coupure, dont l'application rend la recherche systématique de preuves impossible (cf. p. 161), est en principe éliminable :

Théorème 44 (Élimination de coupure)**.** *Tout séquent qui peut être prouvé par* $\mathsf{CPL}\mathcal{G}$ *à l'aide de la règle de coupure peut être prouvé par* $\mathsf{CPL}\mathcal{G}$ *sans application de la règle de coupure.*

Démonstration. Supposons que le séquent $\Gamma \supset \Delta$ a une preuve dans $\mathsf{CPL}\mathcal{G}$ qui utilise la règle de coupure. Par le théorème de correction, il s'ensuit que $\vDash \Gamma \supset \Delta$. Par le théorème de complétude, il s'ensuit que $\mathsf{CPL}\mathcal{G} \vdash \Gamma \supset \Delta$. □

7.6 Algèbre de Boole, décidabilité et formes normales

Le problème de décidabilité est le suivant : comment savoir si une formule donnée ϕ est une tautologie ? Comment savoir si une formule $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ est satisfaisable ? Pour répondre à ces questions, il nous faut une procédure de décision, c'est-à-dire un algorithme déterminant s'il existe ou non une interprétation qui rend vraie la formule donnée.

Les tables de vérité nous fournissent une méthode ‹brute›, permettant de trouver une telle valuation, si elle existe. Pour savoir si une phrase donnée est une tautologie, il suffit de faire sa table de vérité et vérifier si on ne trouve que des « V » dans la colonne de son connecteur principal. Le théorème suivant est donc trivial :

PROOF

Théorème 45 (Décidabilité de la logique propositionnelle)**.** *La logique propositionnelle est décidable : il existe une procédure mécanique permettant de déterminer si une formule propositionnelle est ou non une tautologie.*

Démonstration. Toute formule propositionnelle ne contient qu'un nombre fini de phrases simples. Pour déterminer si ϕ est ou non une tautologie, il suffit de faire la table de vérité des phrases simples qu'il contient et vérifier s'il y a des « F » dans la colonne de son connecteur principal. S'il y en a pas, ϕ est une tautologie. □

L'inconvénient de cette méthode est que les tables de vérité peuvent devenir très grandes. Pour une phrase complexe construite à partir de n atomes différents, il faut considérer 2^n lignes (4 pour 2, 8 pour 3, 16 pour 4, 32 pour 5, 64 pour 6, etc.). Pour une phrase contenant dix phrases simples, il faudrait faire une table de 1024 lignes ![15]

On appelle cela le « problème de l'explosion combinatoire » que l'on rencontre lorsqu'on utilise directement la définition de la validité et qu'on vérifie, pour tout V, si $V(\phi) = \mathbf{v}$. En ne considérant que les n phrases simples apparaissant dans ϕ, le nombre de vérifications est exponentiel en n (la table de vérité pour ϕ aura 2^n lignes). Cependant, les tables de vérité suggèrent une autre méthode. Considérons la phrase complexe : $((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \wedge (\neg r \rightarrow s) \wedge (\neg p \rightarrow (q \vee r)) \wedge (r \rightarrow p)$. Choisissons **A**, **B**, **C**, **D** pour les quatre conjoints, nous obtenons la table de vérité suivante (cf. p. **??**) :

p	q	r	s	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	**A**	$\neg r$	**B**	$\neg p$	$q \vee r$	**C**	**D**	$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$
V	V	V	V	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V	V	F	F	V	V	V	F
V	F	V	V	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F
F	F	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F	F

[15] Une illustration réaliste peut nous fournir un type de formule qui exprime le principe des tiroirs du mathématicien Dirichlet. Considérons trois pigeons et deux tiroirs (ou « pigeonholes » en anglais, cases d'un pigeonnier) et exprimons par « $p_{3,2}$ » la phrase « pigeon 3 se trouve dans tiroir 2 ». L'affirmation est donc que dans le cas de trois pigeons et deux tiroirs, il y a au moins un tiroir qui contient deux pigeons :

$$((p_{1,1} \vee p_{1,2}) \wedge (p_{2,1} \vee p_{2,2}) \wedge (p_{3,1} \vee p_{3,2})) \rightarrow \\ ((p_{1,1} \wedge p_{2,1}) \vee (p_{1,1} \wedge p_{3,1}) \vee (p_{2,1} \wedge p_{3,1}) \vee (p_{1,2} \wedge p_{2,2}) \vee (p_{1,2} \wedge p_{3,2}) \vee (p_{2,2} \wedge p_{3,2}))$$

Cette formule complexe nous dit que si tout pigeon est dans un des tiroirs, alors au moins un tiroir doit en contenir deux. Il est évident que ce principe, dont la preuve est difficile, mais les applications sont nombreuses, est d'une validité générale : si nous avons n pigeons et m tiroirs, au moins un doit en contenir deux, si $n > m$ (d'où il s'ensuit par exemple qu'au moins deux personnes en France ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête). Les tables de vérité, cependant, deviennent très vite très complexes : pour 6 pigeons en 5 tiroirs, nous avons 30 phrases atomiques, ce qui nous donne une table de vérité de $2^{30} = 1073741824$ lignes (ce qui remplit 42950 livres à 500 pages)!

PROOF

| | | |

Théorème 46. *Si ϕ est une formule propositionnelle, il existe une formule ψ de forme normale négative qui est logiquement équivalente à ϕ.*

Démonstration. Par une application des règles données, ne passant à la règle suivante que lorsque la règle antécédente n'est plus applicable. □

Un exemple d'une telle transformation en forme normale négative est la chaîne d'équivalences suivante :

$$
\begin{aligned}
&(p \leftrightarrow q) \to r \\
&\quad\rightsquigarrow\quad ((p \to q) \wedge (q \to p)) \to r && \text{règle 1} \\
&\quad\rightsquigarrow\quad \neg((p \to q) \wedge (q \to p)) \vee r && \text{règle 2} \\
&\quad\rightsquigarrow\quad \neg((\neg p \vee q) \wedge (q \to p)) \vee r && \text{règle 2} \\
&\quad\rightsquigarrow\quad \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee r && \text{règle 2} \\
&\quad\rightsquigarrow\quad \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \vee r && \text{règle 3} \\
&\quad\rightsquigarrow\quad (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg q \vee p) \vee r && \text{règle 4} \\
&\quad\rightsquigarrow\quad (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p) \vee r && \text{règle 4} \\
&\quad\rightsquigarrow\quad (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r && \text{règle 5}
\end{aligned}
$$

Le résultat est en forme normale négative, parce que tous les signes de négation ne s'appliquent qu'à des phrases atomiques.

La forme normale négative nous permet de construire des formes normales conjonctives :

Définition 47. *Une formule est en* forme normale conjonctive *si elle est une conjonction de disjonctions de phrases atomiques et de négations de phrases atomiques.*[16]

L'importance de cette notion vient du fait que toute formule propositionnelle est équivalente à une formule de forme normale conjonctive :

Théorème 48. *Si ϕ est une formule propositionnelle, il existe une formule ψ de forme normale conjonctive logiquement équivalente à ϕ.*

Démonstration. Pour transformer une formule de forme normale conjonctive, on applique successivement les règles suivantes :

[16] Voici la notation formelle :

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i \;:=\; \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \qquad \bigvee_{i=1}^{n} \phi_i \;:=\; \phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$$

pour des ensembles finis de formules $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. On appelle alors un « littéral » une formule qui est soit une phrase atomique (c'est-à-dire de la forme « p »), soit la négation d'une phrase atomique (c'est-à-dire de la forme « $\neg p$ »). Nous avons pour une formule ϕ :

$$\phi \text{ est de forme normale conjonctive} \quad :\Longleftrightarrow \quad \phi \text{ est de la forme } \bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j}\right)$$

pour des nombres naturels m et $n_1, \ldots n_m$ et les littéraux $L_{i,j}$ tels que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n_i$ qui sont contenus dans ϕ.

PROOF

règles 1 – 5	ϕ	$\rightsquigarrow$	forme normale négative de ϕ
règle 6	$(\phi \wedge \psi) \vee \chi$	$\rightsquigarrow$	$(\phi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$
règle 7	$\chi \vee (\phi \wedge \psi)$	$\rightsquigarrow$	$(\chi \vee \phi) \wedge (\chi \vee \psi)$
règle 8	$\phi \vee (\psi \vee \chi)$	$\rightsquigarrow$	$(\phi \vee \psi) \vee \chi$
règle 9	$\phi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$\rightsquigarrow$	$(\phi \wedge \psi) \wedge \chi$

Il est évident que le résultat obtenu par l'application de ces règles est équivalent (logiquement) à la formule initiale, c'est-à-dire qu'il a la même table de vérité. □

Un exemple d'une telle transformation en forme conjonctive est la chaîne d'équivalences suivante :

$((p \vee \neg q) \rightarrow ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u$		
$\rightsquigarrow$	$(\neg(p \vee \neg q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u$	règle 2
$\rightsquigarrow$	$((\neg p \wedge \neg\neg q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u$	règle 4
$\rightsquigarrow$	$((\neg p \wedge q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u$	règle 5
$\rightsquigarrow$	$((\neg p \wedge q) \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 6
$\rightsquigarrow$	$((\neg p \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge (q \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t)))) \wedge \neg u$	règle 6
$\rightsquigarrow$	$((\neg p \vee (r \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge (q \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 7
$\rightsquigarrow$	$((\neg p \vee (r \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 7
$\rightsquigarrow$	$((\neg p \vee r) \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 8
$\rightsquigarrow$	$((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 8
$\rightsquigarrow$	$((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee r) \vee t) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 8
$\rightsquigarrow$	$((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee r) \vee t)) \wedge ((q \vee s) \vee t)) \wedge \neg u$	règle 8
$\rightsquigarrow$	$((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t) \wedge ((q \vee r) \vee t)) \wedge ((q \vee s) \vee t) \wedge \neg u$	règle 9

Nous voyons que les règles 8 et 9 ne servent qu'à grouper les conjonctions ou disjonctions de manière uniforme du côté gauche de telle sorte que l'on puisse, selon notre convention, omettre les parenthèses. Le résultat final de notre transformation est donc la formule :

$$(\neg p \vee r \vee t) \wedge (\neg p \vee s \vee t)) \wedge (q \vee r \vee t) \wedge (q \vee s \vee t) \wedge \neg u$$

L'intérêt des formes normales conjonctives vient du fait qu'il est très facile de tester – mécaniquement – si une formule de forme normale conjonctive est valide : il suffit que tous ses conjoints soient valides ; mais ces conjoints sont des disjonctions – et pour qu'une disjonction soit valide, il faut qu'au moins une phrase atomique soit à la fois affirmée et niée dans la disjonction. La formule considérée n'est donc pas valide, mais cette autre l'est :

$$(\neg p \vee r \vee p) \wedge (\neg t \vee s \vee t)) \wedge (q \vee \neg q \vee t) \wedge (q \vee s \vee \neg s)$$

Il est également possible de définir une forme normale disjonctive : une formule est en *forme normale disjonctive* si elle est une disjonction de conjonctions de phrases atomiques et de leurs négations.[17] La

[17] Utilisant la notation formelle introduite auparavant (cf. n. 16), nous avons, pour une formule ϕ :

$$\phi \text{ est en forme normale disjonctive} \quad :\Longleftrightarrow \quad \phi \text{ est de la forme } \bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j=1}^{n_i} L_{i,j}\right)$$

pour les littéraux contenus dans ϕ.

PROOF

forme normale disjonctive d'une formule revient à énumérer, en les ajoutant les uns aux autres par la disjonction, les cas de vérité de la phrase complexe en question, comme sa table de vérité l'indique. Par exemple, la table de vérité d'une implication matérielle indique que celle-ci est vraie si et seulement si l'on a soit « p » et « q » vrais, soit « p » faux et « q » vrai, soit encore « p » et « q » les deux faux – la forme disjonctive d'une implication « $p \to q$ » sera donc « $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ ».

Les formes normales disjonctives forment la base de la logique combinatoire, qui est beaucoup étudiée en informatique théorique, puisqu'elle forme la base de la construction des ordinateurs (cf. ch. 2.7). Pour pouvoir 'réaliser' des fonctions logiques au sein des circuits électriques ou des ordinateurs, la logique combinatoire les réduit en équations booléennes, qui utilisent la négation, la conjonction, la disjonction et trois autres connecteurs :

« **Nand** » – qui correspond à la barre de Sheffer « | », défini par $\ulcorner \phi | \psi \urcorner :\leftrightarrow \ulcorner \neg(\phi \wedge \psi) \urcorner$.

« **Nor** » – qui correspond à « ni l'un ..., ni l'autre ⋯ », défini par $\ulcorner \phi \downarrow \psi \urcorner :\leftrightarrow \ulcorner \neg(\phi \vee \psi) \urcorner$.

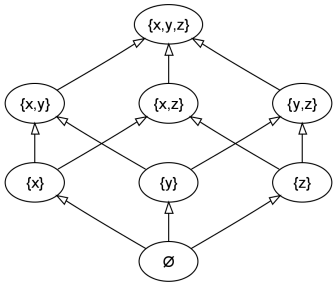
« **Xor** » – qui correspond à la disjonction exclusive, défini par $\ulcorner \phi \oplus \psi \urcorner :\leftrightarrow \ulcorner \neg(\phi \leftrightarrow \psi) \urcorner$.

La simplification des fonctions logiques combinatoires est une étape majeure dans la synthèse des circuits logiques. Leur coût est directement liée aux nombres de portes logiques et de formules propositionnelles et la durée de propagation maximale est liée au nombre de portes traversées par les signaux.

En algèbre Booléenne, les tautologies sont appelées « 1 » et les contradictions sont représentées par « 0 ». Nous utilisons alors une notation binaire (« modulo 2 »), en laquelle $1+1 = 0$ et interprétons

$p \wedge q$	pq	$\min(p, q)$
$p \vee q$	$p + q - pq$	$\max(p, q)$
$\neg p$		$1 - -p$

Nous pouvons représenter ces opérations sous forme graphique, avec $p \vee \neg p = 1$ comme élément maximal et $p \wedge \neg p = 0$ comme élément minimal, sous forme d'un diagramme de Hasse :[18]



La structure abstraite d'une algèbre Booléenne à trois éléments est ici illustrée par la structure des sous-ensembles de l'ensemble $\{x, y, z\}$.[19] Dans cette structure ensembliste, la conjonction correspond

Dans les règles, il faut remplacer les règles 6 et 7 par les suivantes :

$$(\phi \vee \psi) \wedge \chi \quad \rightsquigarrow \quad (\phi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)$$
$$\chi \wedge (\phi \vee \psi) \quad \rightsquigarrow \quad (\chi \wedge \phi) \vee (\chi \wedge \psi)$$

[18] Cf. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hasse_diagram_of_powerset_of_3.svg.

[19] Il s'agit plus que d'une illustration, comme Stone (1936) a prouvé que toute algèbre Booléenne est isomorphe à une structure d'ensembles, un espace de Stone.

PROOF

à l'intersection, la négation à la complémentation et la disjonction à l'union des ensembles.[20]

Nous pouvons même montrer que la totalité des formules bien formées de notre langage $\mathcal{L}$ forme une algèbre Booléenne, identifiant les formules logiquement équivalentes. Cette structure est appelée « algèbre de Lindenbaum » (Tarski, 1935b,c).

7.7 La compacité de la logique propositionnelle

Nous avons défini la conséquence logique et la déductibilité avec des ensembles de prémisses qui sont potentiellement infinis. Nous pouvons donc maintenant nous demander si la consistance d'un ensemble infini de phrases peut être réduite à celle d'un sous-ensemble fini. Le théorème de compacité répond par l'affirmative à cette question :

Théorème 49 (Compacité). *La logique propositionnelle est compacte :* $\Gamma \models \phi$ *si et seulement s'il existe un sous-ensemble fini* $\Delta \subset \Gamma$ *tel que* $\Delta \models \phi$.

Vu la correspondance entre syntaxe et sémantique, la compacité de la logique propositionnelle nous assure que pour toute preuve, il suffit de considérer un nombre fini de prémisses : comme l'adéquation du calcul nous dit nos notions de « théorème » et de « tautologie » sont équivalentes, la compacité nous assure de l'équivalence de « consistance » et de « saisfaisabilité ».[21]

Pour mieux comprendre le théorème, réflechissons à sa conversion : il nous apprend alors que si tous les sous-ensembles finis Δ d'un ensemble Γ sont satisfaisables, alors Γ sera également satisfaisable. Les différentes valuations qui rendent vraies les différents sous-ensembles finis peuvent être combinées en une valuation qui rende vraies toutes les phrases dans l'ensemble infini. Pour la preuve du théorème de compacité par la méthode de tableaux analytiques, nous prouvons – suivant Lemmon (1965a, 30 et seq.) – d'abord un résultat qui s'applique à des arbres quelconques.

Nous disons d'un arbre qu'il est « généré de manière finie » si et seulement si chaque nœud dans l'arbre n'a qu'un nombre fini de successeurs. Tous les arbres binaires, par exemple, sont des arbres générés de manière finie. Une branche est dite « infinie » si et seulement si elle contient un nombre infini de nœuds. Nous démontrons le théorème suivant :[22]

Théorème 50 (Le lemme de König). *Si un arbre qui est généré de manière finie contient un nombre infini de nœuds, alors il contient une branche infinie.*

Démonstration. Appelons un nœud « sympa » si et seulement s'il y a un nombre infini de nœuds comme successeurs et « méchant » dans le cas inverse. Par l'antécédent de l'implication, il y a un nombre infini de nœuds et ils sont tous des successeurs de l'origine. L'origine est donc sympa. Nous observons aussi que si tous les successeurs d'un nœud sont méchants, alors ce nœud doit aussi être

[20] Nous rencontrerons la même équivalence en logique des prédicats, où les prédicats sont interprétés par les ensembles des choses desquels elles sont vraies. Pour parler de toutes les choses qui sont *à la fois* heureux et sages, par exemple, je forme l'intersection de ces deux ensembles.

[21] Un calcul est consistant s'il ne permet pas la *dérivation* d'une formule et de sa négation. Comme toute preuve n'a qu'un nombre fini d'étapes, la consistance a en elle-même un caractère finitiste.

[22] On appelle « lemme » un théorème dont l'utilité est principalement auxiliaire, c'est-à-dire qui sert en premier lieu à prouver d'autres théorèmes, considérés plus intéressants ou utiles. Le théorème (50), cependant, ne porte cette appellation que pour des raisons historiques : son histoire montre qu'il est intéressant *et* utile.

PROOF

méchant (puisque l'arbre est généré de manière finie). Par conséquent, l'origine doit avoir un successeur sympa, qui, à son tour, a un successeur sympa et ainsi de suite. Puisque tout nœud sympa doit avoir un successeur sympa, nous générons ainsi une branche infinie.[23] □

La présupposition que l'arbre est généré de manière finie est évidemment requise : un arbre qui commence par un branchement infini contiendra un nombre infini de nœuds même si, par exemple, chaque branche s'arrête après un seul nœud.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la compacité de la logique propositionnelle :

Démonstration. Soient tous les sous-ensembles finis d'un ensemble Γ satisfaisables. Supposons que Γ nous soit donné comme une suite (et non seulement comme un ensemble) de formules propositionnelles $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots\}$ étant telle que, pour tout n, l'ensemble $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ est satisfaisable. Cela est possible parce qu'il s'agit d'un sous-ensemble de Γ. Construisons le tableau analytique pour ϕ_1. Ce tableau ne peut pas être fermé puisque ϕ_1 est satisfaisable. Nous ajoutons maintenant ϕ_2 à chaque branche ouverte et continuons le tableau. Cette procédure nous donne un tableau qui doit également être ouvert, puisque $\{\phi_1, \phi_2\}$ est satisfaisable. Nous ajoutons ϕ_3, puis ϕ_4 et ainsi de suite. Nous obtenons un arbre généré de manière finie qui contient un nombre infini de nœuds (toutes les phrases dans Γ). Cet arbre doit contenir une branche infinie, par le lemme de König. Cette branche doit être ouverte et elle contient toutes les phrases dans Γ. Par la construction de la branche, les formules sur la branche forment un ensemble de Hintikka ; cet ensemble est alors satisfaisable et alors Γ l'est également. □

Points à retenir

1. Un système d'axiomes ou une théorie sont consistants s'ils ne permettent pas la déduction d'une contradiction.
2. Un calcul ou une méthode de preuve syntaxique sont corrects si tout théorème est une tautologie.
3. Un calcul ou une méthode de preuve syntaxique sont complets si toute tautologie est un théorème.
4. Le calcul axiomatique HC, la méthode des arbres et le système de déduction naturelle sont tous corrects et complets.
5. Nous avons les correspondances :

ϕ s'ensuit de Th	$\iff$	ϕ est déductible de Th
ϕ est satisfaisable	$\iff$	ϕ est consistant
ϕ est une contradiction	$\iff$	ϕ est inconsistant
ϕ est une tautologie	$\iff$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$ est inconsistant
$\ulcorner\phi$, donc $\psi\urcorner$ est un argument valide	$\iff$	$\ulcorner\phi \wedge \neg\psi\urcorner$ est inconsistant

6. Par rapport à nos calculs syntaxiques, nous pouvons prouver un théorème de déduction : ψ peut être déduit de ϕ si et seulement si l'implication $\ulcorner\phi \to \psi\urcorner$ est prouvable. Le théorème de déduction nous assure de la validité de la règle de la preuve conditionnelle.

[23] Pour les arbres non ordonnés (qui sont tels que les successeurs d'un nœud ne forment pas une suite mais seulement un ensemble) nous avons besoin de l'axiome de choix de la théorie des ensembles (cf. la p. 321 pour en savoir plus) : pour construire la branche infinie, nous devons choisir un des successeurs sympa du nœud en question.

PROOF

7. La logique propositionnelle est décidable : il existe une procédure mécanique qui permet de déterminer si une formule propositionnelle est ou non une tautologie.
8. Toute formule de la logique propositionnelle est logiquement équivalente à des formules en forme normale négative, conjonctive et disjonctive. La forme normale disjonctive d'une formule ‹encode› sa table de vérité : chaque disjoint correspond à une ligne où elle reçoit la valeur de vérité « *V* ».
9. La logique propositionnelle est compacte : toute conséquence logique d'un ensemble infini de phrase s'ensuit déjà d'un ensemble fini.
10. La compacité s'ensuit du lemme de König qui dit qu'un arbre qui n'a que des branchements finis ne peut être infini que s'il contient une branche infinie.

PROOF

PROOF

dialectica *series of anthologies*

8 La syllogistique

8.1 Les syllogismes classiques

Nous avons vu (à la p. 34) que la logique propositionnelle ne nous permet pas de reconnaître la validité des inférences comme

$$\frac{\text{Tous les humains sont mortels.}\quad \text{Socrate est un humain.}}{\text{Socrate est mortel.}}$$

Nous rencontrerons dans ce chapitre une logique qui traite (2.4) comme cas spécial d'une inférence générale, à savoir :

$$\frac{\text{Tous les humains sont mortels.}\quad \text{Tous les philosophes sont humains.}}{\text{Tous les philosophes sont mortels.}} \tag{8.1}$$

La première étape vers une formalisation des inférences comme (8.1) a été faite dans la logique traditionnelle, appelée « syllogistique » et dérivée des œuvres d'Aristote, en particulier de son traité *De l'interprétation*. La syllogistique a dominé la logique pendant plus de 2000 ans.[1] Emmanuel Kant pensait que la logique était sortie « close et achevée » du cerveau d'Aristote (« geschlossen und vollendet », *Critique de la raison pure*, 1786 [2001], B VIII) et ce n'était qu'avec Frege que l'on a eu la preuve de son erreur.

Nous remarquons que la validité de (8.1) n'est pas due aux occurrences de « humains », « mortel » et « philosophe », mais est partagée non seulement par l'inférence suivante :

$$\frac{\text{Tous les animaux sont maudits.}\quad \text{Tous les pingouins sont des animaux.}}{\text{Tous les pingouins sont maudits.}} \tag{8.1+}$$

mais aussi des inférences plus compliquées de la même forme :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les kangourous et les admirateurs de la lune adorent chaque vache qui}\\ \text{rit et qui n'est ni bête ni rose.}\\ \text{Tous les amis de mon grand-père qui vit en Australie sont soit des kangourous,}\\ \text{soit des admirateurs de la lune.}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Tous les amis de mon grand-père qui vit en Australie adorent chaque vache qui rit}\\ \text{et qui n'est ni bête ni rose}\end{array}} \tag{8.1*}$$

Nous formalisons alors (8.1) utilisant des abréviations schématiques pour les expressions remplaçables :

$$\frac{\text{Tous les } M \text{ sont } P.\quad \text{Tous les } S \text{ sont } M.}{\text{Tous les } S \text{ sont } P.} \tag{8.2}$$

[1] Il y avait néanmoins d'autres traditions. Par exemple, les Stoïciens, Petrus Hispanus et Duns Scot ont étudié la logique propositionnelle (cf. Łukasiewicz, 1935).

PROOF

La syllogistique étudie le comportement logique des expressions comme « tous les *S* sont *P* » qui représent la squelette logique des inférences comme (8.1).

La syllogistique distingue quatre formes de phrases dites « catégorielles », une phrase catégorielle étant composée d'un sujet, d'une copule et d'un prédicat :[2]

SaP	**SiP**	**SeP**	**SoP**
« tous les *S* sont *P* »	« quelques *S* sont *P* »	« aucun *S* n'est *P* »	« quelques *S* ne sont pas *P* »
« Tous les philosophes sont mortels »	« Quelques chats sont des animaux »	« Aucun homme n* est blanc. »	« Quelques chats ne sont pas jolis. »
jugement affirmatif jugement général	jugement affirmatif jugement particulier	jugement négatif jugement général	jugement négatif jugement particulier

Les quatre types **a**, **i**, **e**, **o** (qu'on peut s'imaginer dérivés de « **affi**rmo » (« je maintiens ») et « n**ego** » (« je conteste »)) se distinguent par les relations qui subsistent entre les (ensembles d')objets tombant sous le concept de sujet « *S* » (son extension) et (l'ensemble de) ceux qui tombent sous le concept de prédicat « *P* » : dans le cas d'un jugement général affirmatif (« **SaP** »), cette relation est celle d'inclusion ; dans le cas d'un jugement particulier affirmatif (« **SiP** ») celle d'intersection ; dans le cas d'un jugement général négatif (« **SeP** »), les extensions sont disjointes ; et dans le cas d'un jugement particulier négatif (« **SoP** ») la relation est celle de non-inclusion.

Nous considérons ces ensembles comme extensions de nos concepts de sujet et de prédicat (cf. p. 37) : ce ne sont que ces groupements qui nous intéressent, et non pas les raisons pourquoi telles et telles choses ont été groupé ensemble. Si deux concepts s'appliquent à exactement les mêmes choses, nous n'aurons pas besoin de les distinguer. C'est en ce sens-là que la syllogistique est également une logique extensionnelle.

Nous ignorerons également la question quels objets tombent dans l'extension de nos concepts, et même la cardinalité de ces ensembles : tout ce que nous intéresse est la question de savoir entre quels ensembles nous constatons des relations d'inclusion ou d'intersection et quels ensembles sont vides. Il importe peu, en conséquence, que nous utilisions ordinairement le pluriel pour exprimer les jugements des types **i** et **o** : pour que « quelques pingouins sont heureux » soit une affirmation vraie, par exemple, il suffit qu'un seul pingouin soit heureux, pour la vérité de « quelques pingouins ne savent pas voler », qu'un seul pingouin n'ait pas cette capacité.

Seules les extensions comptent : d'autres manières d'exprimer une phrase catégorielle du type **SaP** (« tous les *S* sont (des) *P* ») seraient « tout ce qui est *S* est *P* », « chaque *S* est un *P* », « les *S* sont *P* sans exception », « seulement des *P* sont des *S* ». Pour exprimer une relation du type **SiP** (« quelques *S* sont (des) *P* »), on peut dire « quelque chose est et un *S* et un *P* », « il y a des *S* qui sont *P* », « il y a des *P* qui sont des *S* », « il y a des *SP* » (des pingouins heureux, par exemple). Pour un jugement général négatif (**SeP**) (« aucun *S* n'est *P* ») , on peut dire « aucune chose est et un *S* et un *P* », « rien de *S* est *P* », « aucun *P* n'est *S* », « les *SP* n'existent pas » (les pingouins heureux, par exemple) et pour son cousin particulier (**SoP**) nous disons « il y a des *S* non-*P* » (des pingouins malheureux), « quelques *S* manquent de *P* » ou encore « pas tous les *S* sont *P* ».

[2] Je suis Boèce (480 – 524 apr. J.-C.) en interprétant la copule par « être » plutôt que par « appartient » comme chez Aristote.

PROOF

Afin de formaliser le maximum de phrases sous une forme catégorielle, on peut souvent se servir de re-formulations. « Je ne vais nulle part en avion où je peux aller en train », par exemple, peut être reformulée comme ayant la forme **SeP** : « aucun endroit où je vais en avion est tel que j'y puisse aller en train ». La phrase « tout le monde dans la salle parle français » devient « toutes les personnes dans la salle sont des locuteurs du français » (**SaP**), « je veux aller où tu vas » devient « tout endroit où tu vas est un endroit où je veux aller aussi » (**SaP**) et « quand il pleut, la rue est mouillée » devient « tous les instants pendant lesquels il pleut sont des instants pendant lesquels la rue est mouillée » (**SaP**). Parfois cette transformation est loin d'être évidente, comme le montre la transformation de « je l'ai connu avant qu'il ne se soit ruiné » en « quelques instants avant qu'il ne se soit ruiné sont des instants où je l'ai connu ». Il n'y a pas non plus de règle générale, comme le montre le fait que « Un chevalier est présent » est clairement de la forme **SiP**, bien que « Un irlandais est roux » émette probablement un jugement du type **SaP**.

L'explication de la distinction entre les quatre formes de phrases catégorielles que nous venons de donner était en termes de relations mathématiques entre les extensions des concepts qui les composent. D'autres explications, cependant, sont possible. Nous pourrions, comme nous l'avons fait dans la table ci-dessus, parler de quatre types de *jugements* différents. Nous sommes assez familier avec les jugements particuliers et universals, le jugement qu'un irlandais est roux étant universal, en dépit de sa forme grammaticale singulière. Une différence claire réside dans la charge de la preuve. Pour contredire un jugement universel, il suffit sur un seul cas pour lequel il donne une fausse prédiction : un seul cas suffit pour montrer que l'assertion ne peut pas être universellement vraie. Comme un jugement particulier est plus prudent, il est plus difficile de le contredire : c'est maintenant l'adversaire qui doit fournir des raisons de croire qu'il ne peut pas y avoir un tel exemplaire qui tombe sous les deux concepts.

Ces relations sont les mêmes dans le cas négatif : pour exclure l'existence d'un homme blanc (**SeP**), il faut donner les raisons de croire que tous les hommes ont pris un coup de soleil,[3] bien que pour défendre « Il y a un homme qui n'est pas blanc » (**SoP**), un seul exemple suffit.

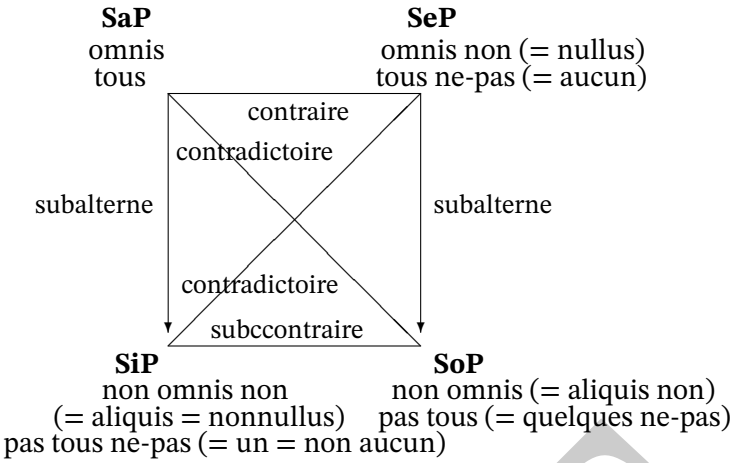
Malgré cette symétrie, beaucoup de philosophes (et même Aristote, au moins selon certaines interprétations) ont considéré les jugements négatifs comme étant moins compromettantes que leurs équivalents positifs.

Les quatre types de jugements catégoriels se trouvent dans un carré d'oppositions :[4]

PROOF

[3] Au moins sous une interprétation de l'exemple célèbre de « Socrate est blanc », un autre étant la présence de cheveux décolorés sur sa tête.

[4] *De Int.*, 17b16-23, 19b24-25. Cf. p. 77 pour le carré d'opposition pour la logique propositionnelle. Sur l'histoire, cf. Bocheński (1951, 38), Kneale and Kneale (1962, 56), Londey and Johanson (1984) et Horn (1989, 23 et seq.).



Comme dans le cas des carrés d'oppositions pour la logique propositionnelle, la relation de contradiction implique que l'une des phrases qu'elle relie est la négation de l'autre. Les phrases contraires, cependant, se distinguent par une négation interne :[5] elles ne peuvent pas toutes les deux être vraies, mais elles peuvent être toutes les deux fausses ; il n'est pas possible que tous les *S* soient *P* et qu'il ne soit pas le cas que tous les *S* soient des *P* (au moins s'il y a des *S*),[6] mais il est possible qu'il y ait des *S* qui soient des *P* (et donc que « tous les *S* ne sont pas des *P* » soit faux) et des *S* qui ne soient pas des *P* (et donc que « tous les *S* sont des *P* » soit également faux). La relation de subalternation est simplement la relation de conséquence : si tous les *S* sont *P* (et s'il y a des *S*), alors il n'est pas vrai qu'il n'est pas le cas qu'aucun *S* n'est *P* ; si aucun *S* n'est *P* (et s'il y a des *S*), alors il n'est pas le cas que tous les *S* soient *P*. La sub-contrariété, finalement, correspond à la vérité logique (= validité) de la disjonction. S'il y a des *S* (ce qui est présupposé tout le long), alors un exemplaire particulier de ces *S* est ou bien *P* ou bien il n'est pas *P*. S'il est *P*, alors il n'est pas vrai qu'aucun *S* ne soit *P* ; s'il n'est pas *P*, alors il n'est pas vrai que tous les *S* soient *P*. Alors au moins une des deux possibilités « non omnis non » ou « non omnis » est le cas.

Étant donné qu'il y ait des *S*, nous avons donc exactement la même situation qu'en logique propositionnelle :

Contrariété Il n'y a pas de situation possible où « **SaP** » et « **SeP** » soient simultanément vrais : les le totalité des *S* ne peut pas posséder les caractéristiques contraires de n'inclure que des *P* et de n'inclure que des non-*P*.

Subcontrariété Il n'y a pas de situation où il n'est ni le cas qu'un *S* est *P* ni le cas qu'un *S* est non-*P* : le *S* en question doit avoir une de ces propriétés.

Subalternation à gauche Une situation où tous les *S* sont *P* est automatiquement une situation où il y a des *SP*.

Subalternation à droite Une situation où aucun *S* est *P* est automatiquement une situation où quelques *S* ne sont pas *P*.

[5] À l'aide des négations internes et externes, nous pouvons définir chaque coin du carré en termes d'un seul : au lieu de « omnis », « omnis non », « non omnis » et « non omnis non » (dans le sens des aiguilles d'une montre), nous aurions pu mettre « nullus non »/ « nullus »/ « non nullus non »/ « non nullus » ou « non aliquis non »/ « non aliquis »/ « aliquis non »/ « aliquis ».

[6] Nous reviendrons à cette présupposition du raisonnement syllogistique à la p. 207. Une autre interprétation, défendue par Parsons (2017), est de dire que les phrases du type **SoP** sont vraies s'il n'y a pas de *S*, privilegeant la lecture « il n'est pas le cas que tous les *S* sont des *P* » plutôt que « il y a des *S* qui ne sont pas des *P* » (cf. aussi Thompson (1953, 257)).

PROOF

Contradiction descendante Une situation où tous les *S* sont *P* est *ipso facto* une situation où il n'y a pas de *S* non-*P*.

Contradiction ascendante Un *SP* servira en même temps comme contre-exemple à l'affirmation qu'il n'y a que des *S* non-*P* ; inversement, s'il n'y a pas de *SP*, alors tous les *S* doivent être non-*P*.

La syllogistique ne distingue les phrases catégorielles que par leur qualité (affirmative ou négative) et par leur quantité (générale ou particulière). Néanmoins, elle est capable de formaliser un bon nombre d'inférences intuitivement valides.

8.2 Les formes valides du raisonnement syllogistique

La syllogistique distingue les inférences directes des inférences indirectes. Les quatre inférences directes n'ont qu'une seule prémisse. Trois d'entre elles sont des conversions, qui changent l'ordre du terme sujet et du terme prédicat. Nous pouvons changer les concepts de sujet et de prédicat tout ‹simplement› pour les propositions du type **i** ou **e**, en changeant **a** en **i** et **e** en **o** et en changeant les termes en leurs négations pour les propositions du type **a** et **o** :[7]

« Conversio simplex »	$\dfrac{\mathbf{AiB}}{\mathbf{BiA}}$	$\dfrac{\mathbf{AeB}}{\mathbf{BeA}}$
« Conversio per accidens »	$\dfrac{\mathbf{AaB}}{\mathbf{BiA}}$	$\dfrac{\mathbf{AeB}}{\mathbf{BoA}}$
« Conversio per contrapositionem »	$\dfrac{\mathbf{AaB}}{(\overline{\mathbf{B}})\mathbf{a}(\overline{\mathbf{A}})}$	$\dfrac{\mathbf{AoB}}{(\overline{\mathbf{B}})\mathbf{o}(\overline{\mathbf{A}})}$

Mis à part ces trois conversion, nous pouvons affaiblir les deux propositions catégorielles universelles aux particulières et nous avons un analogue de la conversion. Pour l' « obversion » nous changeons la qualité en niant le concept prédicatif :

« Réduction de quantité »	$\dfrac{\mathbf{AaB}}{\mathbf{AiB}}$	$\dfrac{\mathbf{AeB}}{\mathbf{AoB}}$

« obversio »	$\dfrac{\mathbf{AaB}}{\mathbf{Ae}(\overline{\mathbf{B}})}$	$\dfrac{\mathbf{AiB}}{\mathbf{Ao}(\overline{\mathbf{B}})}$	$\dfrac{\mathbf{AeB}}{\mathbf{Aa}(\overline{\mathbf{B}})}$	$\dfrac{\mathbf{AoB}}{\mathbf{Ai}(\overline{\mathbf{B}})}$

L'expression « $\overline{A}$ » dénote la 'négation' du terme général « A », c'est-à-dire l'expression qui a comme extension le complément de l'extension de « A » : tout ce qui n'est pas A est $\overline{A}$ et tout ce qui n'est pas $\overline{A}$ est A.[8] « $(\overline{\text{pingouin}})$ », par exemple, a comme extension tous les non-pingouins, c'est-à-dire toutes

[7] Nous pouvons nous rappeler des prémisses qui peuvent être ‹converties› à l'aide d'un ‹poème› de Petrus Hispanus : « Simpliciter f**eci** convertitur, **eva** per acci, **ast o** per contra, sic fit conversio tota. » (Petrus Hispanus (1947, I.21), cité d'après Prior (1955, 109)).

[8] Je mets « négation » entre guillemets simples parce que les noms généraux comme « pingouin » n'admettent pas, à strictement parler, de négation (puisqu'ils ne sont pas prédicatifs).

PROOF

les choses qui ne sont pas des pingouins (le complément de l'ensemble de tous les pingouins). Pour Aristotle, la négation des termes était une manière de tenir compte de la négation intérieure (cf. Horn, 1989, 15 et suiv.).

Les inférences indirectes consistent en deux prémisses – une prémisse majeure (« praemissa maior ») et une prémisse mineure (« praemissa minor ») – et une conclusion qui contiennent au total trois termes généraux : le sujet « *S* » de la conclusion (« terminus minor »), le prédicat « *P* » de la conclusion (« terminus maior ») et le concept appelé « moyen » « *M* ». Elles se distinguent en quatre schémas qui s'appellent « figures » :

	première figure	deuxième figure	troisième figure	quatrième figure
praemissa maior	*M P*	*P M*	*M P*	*P M*
praemissa minor	*S M*	*S M*	*M S*	*M S*
conclusio	*S P*	*S P*	*S P*	*S P*

Puisqu'on a quatre possibilités pour relier « *S* » à « *P* » (et « *M* » à « *S* », etc.) – à savoir **a**, **i**, **o** et **e** –, on obtient pour chaque figure 64 ($= 4 \cdot 4 \cdot 4$) schémas d'inférence, appelés « modes ». De ces 256 modes totaux (64 par figure pour 4 figures en tout), tous ne sont pas valides ; il n'y a que 24 modes qui sont valides, 19 dits « forts » et 5 dits « faibles » (un mode est appelé « faible » si la conclusion est plus faible qu'elle ne devrait l'être par rapport aux prémisses). Pour la première figure, on a 4 modes forts valides :

a-a-a « Barbara »	**e-a-e** « Celarent »
Tous les humains sont mortels. Tous les philosophes sont des humains. Tous les philosophes sont mortels.	Aucune martre n'est un ours. Toutes les outres sont des martres. Aucune outre n'est un ours.

a-i-i « Darii »	**e-i-o** « Ferio »
Tous les ours polaires sont blancs. Quelques ours sont des ours polaires. Quelques ours sont blancs.	Aucun griffon n'est un basset. Quelques chiens sont des griffons. Quelques chiens ne sont pas des bassets.

Les noms comme « Barbara » (pour l'inférence qui correspond au schéma **a-a-a**) ont été inventés au Moyen Âge. Pour la deuxième figure, on a également quatre modes forts qui sont valides :

e-a-e « Cesare »	**a-e-e** « Camestres »
Aucun mammifère n'est un oiseau. Tous les vautours sont des oiseaux. Aucun vautour n'est un mammifère.	Tous les vautours sont des oiseaux. Aucun mammifère n'est un oiseau. Aucun mammifère n'est un vautour.

PROOF

e-i-o « Festino »	**a-o-o** « Baroco »
Aucun vautour n'est un basset. Quelques chiens sont des bassets. Quelques chiens ne sont pas des vautours.	Tous les bassets sont des chiens. Quelques chats ne sont pas des chiens. Quelques chats ne sont pas des bassets.

Il y a six modes forts valides pour la troisième figure :

a-a-i « Darapti »	**e-a-o** « Felapton »
Tous les bassets sont mortels. Tous les bassets sont des chiens. Quelques chiens sont mortels.	Aucune martre n'est un ours. Toutes les martres sont des chiens. Quelques chiens ne sont pas des ours.

i-a-i « Disamis »	**a-i-i** « Datisi »
Quelques ours polaires sont blancs. Tous les ours polaires sont des ours. Quelques ours sont blancs.	Tous les chiens sont mortels. Quelques chiens sont des griffons. Quelques griffons sont mortels.

o-a-o « Bocardo »	**e-i-o** « Ferison »
Quelques chiens ne sont pas des griffons. Tous les chiens sont des animaux. Quelques animaux ne sont pas des griffons.	Aucun chien n'est un oiseau. Quelques chiens sont des griffons. Quelques griffons ne sont pas des oiseaux.

Il y a cinq modes forts valides pour la quatrième figure :

a-a-i « Bamalip »	**a-e-e** « Calemes »
Tous les bassets sont des chiens. Tous les chiens sont des mammifères. Quelques mammifères sont des bassets.	Toutes les martres sont des chiens. Aucun chien est un poisson. Aucun poisson est une martre.

i-a-i « Dimatis »	**e-a-o** « Fesapo »
Quelques chiens sont des bassets. Tous les bassets sont des mammifères. Quelques mammifères sont des chiens.	Aucun basset n'est un vautour. Tous les vautours sont des oiseaux. Quelques oiseaux ne sont pas des bassets.

e-i-o « Fresison »
Aucun chien n'est un oiseau. Quelques oiseaux sont des vautours. Quelques vautours ne sont pas des chiens.

PROOF

Nous voyons maintenant que l'inférence (8.1) était du type **a-a-a** (« Barbara »).

Les noms des modes forts valides étaient combinés en des ‹ poèmes › mnémotechniques (cf. Petrus Hispanus, 1947, IV.17). Ils sont très utiles pour ce rappeler des 19 modes forts valides qui tombent sous les quatre figures :

> Barbara, Celarent primae, Darii Ferioque.
> Cesare, Camestres, Festino, Baroco secundae.
> Tertia grande sonans recitat : Darapti, Felapton,
> Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison. Quartae sunt :
> Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison.

Comme la *réduction de quantité* est une inférence directe valide qui nous mène des jugements généraux aux jugements particuliers correspondants, on a pour chaque mode fort valide qui a une conclusion générale un mode faible correspondant : pour la première figure, ceci nous donne « Barbari » et « Celaront », pour la deuxième « Cesaro » et « Camestros » et pour la quatrième « Calemos ».

8.3 Les diagrammes de Venn

Bien que la syllogistique peut être axiomatisé,[9] nous ne disposons d'aucune méthode générale pour déterminer si une inférence donnée est valide ou non. Tout ce que nous pouvons faire pour déterminer la validité d'un syllogisme donné est d'essayer de le réduire à une des 24 formes valides. Cependant nous avons déjà remarqué (à la p. 192) que les quatre formes de phrases catégorielles correspondent à des relations entre les extensions des termes. Si nous utilisons « $\mathrm{ext}(S)$ » pour désigner l'extension de « S », nous pouvons représenter ces quatre relations ainsi :[10]

SaP	$\iff$	$\mathrm{ext}(S) \subset \mathrm{ext}(P)$	(inclusion : « S est un sous-ensemble de P »)
SiP	$\iff$	$\mathrm{ext}(S) \cap \mathrm{ext}(P) \neq \varnothing$	(intersection : « il y a des SP »)
SeP	$\iff$	$\mathrm{ext}(S) \cap \mathrm{ext}(P) = \varnothing$	(non-intersection : « il n'y a pas de SP »)
SoP	$\iff$	$\mathrm{ext}(S) \not\subset \mathrm{ext}(P)$	(non-inclusion : « il y a des S qui ne sont pas des P »)

John Venn (1880) a développé une méthode pour vérifier la validité d'un syllogisme ‹ directement › en termes des extensions de ses termes. Nous pouvons symboliser les quatre types de phrases catégorielles par des diagrammes appelés « diagrammes de Venn » :

[9] Lukasiewicz (cf. 1934b, 373 et 1957, 46, 88) donne une axiomatisation qui consiste d'une axiomatisation de la logique propositionnelle (cf. p. 108) et des quatre axiomes suivantes :

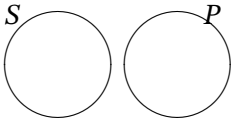
1. Tout A est un A.
2. Quelques A sont des A.
3. Si tout A est un B et tout B est un C, alors tout A est un C. (« Barbara »)
4. Si tout A est un B et quelques A sont des C, alors quelques C sont des B. (« Datisi »)

D'autres axiomatisations sont possibles.

[10] En logique des prédicats, et quantifiant sur les membres d'ensembles, les quatre relations sont définies comme suit :

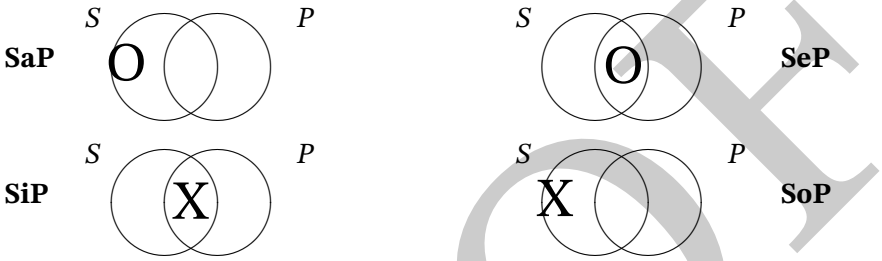
$A \subset B$	$:\iff$	$\forall x(x \in A \to x \in B)$	(inclusion : tout membre de A est membre de B)
$A \cup B = C$	$:\iff$	$\forall x((x \in A \vee x \in B) \leftrightarrow x \in C)$	(union : C contient ceux qui appartiennent à A *ou* à B)
$A \cap B = C$	$:\iff$	$\forall x((x \in A \wedge x \in B) \leftrightarrow x \in C)$	(intersection : C contient ceux qui appartiennent à A *et* à B)

PROOF



Ce diagramme nous montre une répartition de toutes les choses en quatre classes : les choses qui sont *S* et *P* se trouvent dans l'intersection des deux cercles, les choses qui sont *S* mais qui ne sont pas *P* se trouvent dans la partie du cercle de gauche qui a une forme de lune, choses qui sont *P* mais qui ne sont pas *S* se trouvent dans la partie droite du cercle droit et enfin les choses qui ne sont ni *S* ni *P* se trouvent en dehors des deux cercles. Un diagramme de Venn à deux cercles représente ainsi une catégorisation de tout ce qui existe en quatre catégories : les *SP*, les ¬*S* et *P*, les *S* et ¬*P* et les ¬*S*¬*P*.

Dans ce diagramme, les quatre formes catégorielles sont représentées comme suit :

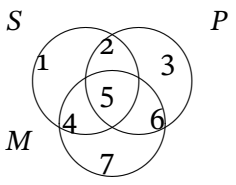


Le grand « O » signifie que la partie dans laquelle il se trouve est vide : il n'y a rien qui n'est *S* mais qui n'est pas *P* dans le cas **SaP** ; il n'y a rien qui n'est *S* et à la fois *P* dans le cas **SeP**. Le grand « X » signifie que la partie dans laquelle il se trouve n'est pas vide : il y a des choses qui sont *S* et *P* dans le cas **SiP** ; il y a des choses qui sont *S* mais pas *P* dans le cas **SoP**.

Que **SaP** et **SoP**, et également **SiP** et **SeP**, forment des paires contradictoires se montre par le fait que le diagramme du premier a un « X » où celui du deuxième a un « O » et vice versa. La contrariété de **SaP** et **SeP** vient du fait que le cercle *S* devient vide si on combine les deux « O » dans un diagramme ; et la sub-contrariété de **SiP** et **SoP** réside dans le fait qu'il n'y a aucun *S* si les deux sont faux. Dans la syllogistique classique, il est toujours présupposé que les extensions des termes généraux considérés ne sont pas vides.

La validité des inférences directes (toujours sous la supposition que le terme sujet et le terme prédicat soient vraies d'au moins une chose et donc que les cercles entiers ne sont jamais entièrement vides) peut également être vérifiée à l'aide de diagrammes de Venn. La *conversio simplex*, par exemple, correspond au fait que les diagrammes pour **SiP** et **SeP** sont symétriques (on peut changer les dénominations « *S* » et « *P* » sans changer ce que nous dit le diagramme), la *réduction de quantité* au fait qu'aucun cercle ne devient jamais vide, etc.

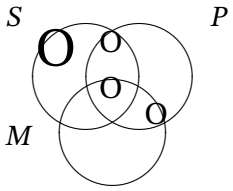
Pour tester la validité des syllogismes indirectes, nous pouvons encore utiliser les diagrammes de Venn, cette fois avec trois cercles :



PROOF

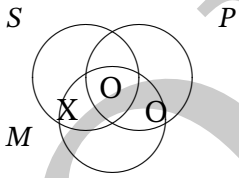
Nous mettons les «*X*» et «*O*» pour les prémisses et examinons le diagramme pour voir s'il rend vraie la conclusion. Pour **e-a-e**, par exemple, nous obtenons par cette méthode :

Aucun *P* n'est *M*.
Tous les *S* sont *M*.
———————
Aucun *S* n'est *P*.



Pour la première prémisse, nous avons mis «*O*» dans les cases 5 et 6, pour la deuxième prémisse «*O*» dans les cases 1 et 2. La conclusion est vraie s'il y a des «*O*» dans les cases 2 et 5, ce qui est le cas dans notre diagramme. La conclusion «Aucun *S* n'est *P*» s'ensuit, puisque l'intersection entre les extensions de «*S*» et de «*P*» est vide. Par la même méthode, nous pouvons vérifier les autres inférences, par exemple **e-i-o** :

Aucun *M* n'est *P*.
Quelques *S* sont *M*.
———————
Quelques *S* ne sont pas *P*.



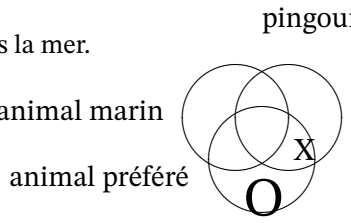
Du fait que nous avons fait un «*X*» en dehors de l'extension de «*P*», mais à l'intérieur de l'extension de «*S*», nous voyons que la conclusion s'ensuit.

8.4 Les limites de la syllogistique

Nous avons déjà remarqué quelques limites de la syllogistique (cf. p. 198) : elle ne nous procure aucune méthode mécanique pour déterminer la validité ou non-validité d'une inférence donnée sinon celle de vérifier si ou non l'inférence correspond à l'un des 24 modes valides[11] et elle nous oblige à trouver des re-formulations alambiquées pour beaucoup de phrases du langage naturel.

Bien que les diagrammes de Venn nous donnent une méthode simple et intuitive pour vérifier la validité des syllogismes, ils nous montrent également d'autres limites à la syllogistique. Considérons l'inférence suivante :

Tous mes animaux préférés sont soit des pingouins, soit vivent dans la mer.
Mes animaux préférés ne vivent pas tous dans la mer.
———————
Quelques pingouins ne vivent pas dans la mer.



[11] C'est en raison de l'absence d'une telle méthode que les logiciens médiévaux se sont servi d'une série de règles générales telles que :

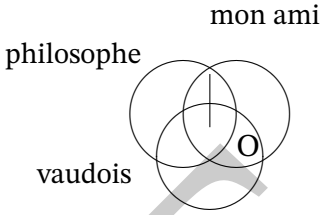
- Tout syllogisme valide a une prémisse universelle.
- Tout syllogisme valide avec une prémisse particulière a une conclusion particulière.
- Tout syllogisme valide avec une prémisse négative a une conclusion négative.

Ces conditions sont nécessaires, mais pas suffisantes : elles sont vraies de tous les arguments valides, mais ne nous permettent pas de déterminer la validité d'un argument. Ils servent à tester un ‹soupçon› que tel ou tel argument est un syllogisme valide, mais ne nous permettent pas d'en trouver.

PROOF

Le diagramme montre que l'inférence est valide, bien qu'il n'y ait pas de syllogisme correspondant. C'est pourquoi la méthode des diagrammes de Venn dépasse les limites de la syllogistique : elle nous permet d'établir la validité des inférences qui sont considérées non valides par la syllogistique. Une petite modification de la méthode des diagrammes (modification apportée par Lewis (1918)) nous permet d'élargir cette classe d'inférences. Nous utiliserons une ligne pour signifier qu'au moins l'une d'un certain nombre de parties d'un diagramme de Venn n'est pas vide – une ligne reliant deux parties correspond donc à un jugement existentiel et disjonctif.

Tous mes amis vaudois sont des philosophes.
Quelques-uns de mes amis sont soit des philosophes, soit des vaudois.
———————————————————
Quelques-uns de mes amis sont des philosophes.



La ligne horizontale reliant les extensions de « philosophe et vaudois et ami » et de « philosophe et non vaudois et ami » veut dire qu'une de ces deux régions n'est pas vide – il y a au moins une chose qui est ou bien ami-philosophe-vaudois ou bien ami-philosophe-non-vaudois. Parce que la ligne se trouve dans l'intersection des extensions de « philosophe » et de « ami », la conclusion s'ensuit.

Un désavantage commun à la syllogistique et aux diagrammes de Venn est que les deux méthodes sont limitées à un nombre très restreint de prédicats : la syllogistique n'en concerne que trois à la fois (abrégés par « S », « M » et « P ») et il est impossible de représenter plus de trois cercles qui se recoupent tous les uns les autres (essayez). La syllogistique, reconnaissant que quatre types de phrases, nous oblige souvent à donner une forme ‹ logique › peu intuitive à des phrases ordinaires : « Nous avons visité le musée, mais il était fermé », par exemple, devient « tous les instants pendant lesquels nous avons visité le musée sont des instants pendant lesquels il était fermé ».

Un autre désavantage est le suivant : il est impossible en syllogistique ou par des diagrammes de Venn de représenter des arguments qui mélangent des quantificateurs et des connecteurs propositionnels comme le fait le suivant :

Si tous mes amis sur Facebook sont en philo, quelques amis ne sont pas sur Facebook.
Soit tous mes amis sont sur Facebook, soit tous mes amis sont en philo. (8.3)
———————————————————
Si tous mes amis philo sont sur Facebook, quelques amis qui ne sont pas en philo y sont aussi.

Cette inférence a la forme suivante (« $F(...)$ » abrège « ... est un ami », « $G(...)$ » abrège « ... est en philosophie » et « $H(...)$ » abrège « ... est sur Facebook ») :

Tous les F qui sont H sont G $\rightarrow$ Quelques F ne sont pas H.
Tous les F sont H $\vee$ Tous les F sont G. (8.3+)
———————————————————
Tous les F qui sont G sont H $\rightarrow$ Quelques F qui ne sont pas G sont H.

Nous pouvons nous convaincre de sa validité : supposons que tous les F qui sont G sont aussi H, mais qu'aucun F qui n'est pas G soit H (fausseté de la conclusion). Nous savons donc que tous les F qui sont H sont aussi G, ce qui établit l'antécédent de la première prémisse. Son conséquent, par contre, doit être faux. Par la deuxième prémisse, nous savons que soit tous les F sont H, soit tous les F sont G. Dans le premier cas, quelques F sont H est le conséquent de la première prémisse est donc faux. Dans le deuxième cas, tous les F sont G, et donc aussi H, par l'antécédent de la conclusion. Dans la logique des prédicats, nous formalisons cette inférence comme suit :

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x((Fx \wedge Hx) \rightarrow Gx) \;\rightarrow\; \exists x(Fx \wedge \neg Hx) \\ \forall x(Fx \rightarrow Hx) \;\vee\; \forall x(Fx \rightarrow Gx)\end{array}}{\forall x((Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx) \;\rightarrow\; \exists x(Fx \wedge \neg Gx \wedge Hx)} \qquad (8.3*)$$

PROOF

En utilisant les équivalences « $\forall x(\phi(x)) \Leftrightarrow \neg\exists x(\neg\phi(x))$ » et « $\ulcorner\neg(\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \Leftrightarrow \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ », nous pouvons transformer les formules en :

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x((Fx \wedge Hx) \rightarrow Gx) \;\rightarrow\; \neg\forall x(Fx \rightarrow Hx) \\ \forall x(Fx \rightarrow Hx) \;\vee\; \forall x(Fx \rightarrow Gx)\end{array}}{\forall x((Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx) \;\rightarrow\; \neg\forall x((Fx \wedge Hx) \rightarrow Gx)} \qquad (8.3{*}{*}{*})$$

À présent, nous n'avons encore aucun moyen de combiner les méthodes de la logique propositionnelle avec notre analyse des phrases quantifiées (contenant des expressions comme « tous », « quelque » ou « aucun »).

Le diagnostic de ces défauts communs à la syllogistique et à la méthode des diagrammes de Venn est le suivant :

1. Elles ne reconnaissent pas la distinction cruciale entre les prédicats et les noms et ne nous permettent pas de formaliser des inférences telles que « Tous les philosophes sont heureux ; Sam est un philosophe ; donc Sam est heureux ».
2. Elles ne s'appliquent qu'à des prédicats appelés « unaires » (qui résultent d'une phrase par le remplacement d'un seul nom par des points) et non pas à des prédicats à plusieurs places, comme nous utilisons dans l'inférence « Marie est mon amie ; donc j'ai une amie ».

L'avantage principal de la logique moderne des prédicats est qu'elle nous permet de surpasser ces deux restrictions artificielles.

8.5 Les phrases ouvertes et leur satisfaction

Pour rendre valides des inférences comme,

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les humains sont mortels.} \\ \underline{\text{Socrate est un humain.}}\end{array}}{\text{Socrate est mortel.}} \qquad (2.4)$$

la syllogistique nous force à reconnaître des concepts sujet et prédicat tel que « chose identique à Socrate » (la prémisse mineure est alors du type **SaP**).[12] Nous pouvons nous demander si de tels concepts correspondent réellement à des propriétés d'objets.[13] Formalisant « Socrate est un homme » comme « toutes les choses socratisantes sont des hommes », nous n'introduisons non seulement le prédicat bizarre « socratiser » (être le maître de Platon, être le héros des dialogues platoniciens, le premier philosophe à boire la ciguë, etc.), mais nous nous engageons également à l'existence d'au moins une chose socratisante. Il semble bien possible, cependant, que Socrate ait pu exister sans avoir les attributs qui lui sont communément attribué. Dans ce cas-ci, « Socrate est un homme » serait toujours vraie, mais « toutes les choses socratisantes sont des hommes » serait faux (puisque la syllogistique présuppose que ses termes sont vrais d'au moins une chose).

[12] Il y a d'autres options : Petrus Hispanus (1947, 12.27) dit que le 'syllogisme' « tout homme est tout homme ; Socrate est un homme ; donc Socrate est tout homme » est un syllogisme du type « Darii ».

[13] Dans son fameux article « On What There Is » (1948, traduction française : 2004), Willard van Orman Quine s'est servi de prédicats similaires pour résoudre le problème posé par l'intelligibilité d'assertions contenant des noms propres vides comme « Pégase ». Ce problème, qu'il appelle « la barbe de Platon » est que quelqu'un qui affirme que Pégase n'existe pas semble se contredire, puisque l'existence d'un référent pour « Pégase » semble être requis pour la vérité de la phrase « Pégase n'existe pas » (comme pour toute autre phrase contenant le nom « Pégase »). La solution de Quine est de remplacer le nom par un prédicat et de paraphraser la phrase comme « L'unique chose qui pégase n'existe pas » ($\forall x(x \text{ pégase} \rightarrow \neg\exists y(x = y))$) ou encore « il n'y a pas de chose qui pégase » ($\neg\exists x(x \text{ pégase})$).

PROOF

Il semble qu'une distinction nette doit être faite entre des expressions comme « Socrate » (que nous appellerons « termes singuliers ») qui ont comme fonction sémantique de *se référer* à exactement une chose au monde, et des expressions comme « ...est un homme » (que nous appellerons « prédicats ») qui sont *vrais de* ou sont *satisfaits par* une ou plusieurs choses.[14] C'était l'élaboration d'un concept général de prédicat qui permettait à Gottlob Frege de surpasser les limites expressives de la logique traditionnelle.[15]

Le concept fondamental qui caractérise la logique moderne a été introduit par Gottlob Frege dans son *Idéographie* : c'est celui d'une *fonction*.[16] Frege était insatisfait avec l'analyse de la grammaire classique pour plusieurs raison, dont par exemple son incapacité de rendre compte de la vacuité de la transformation de « Marc aime Marie » à « Marie est aimée par Marc » – même si ces deux phrases affirment la même chose, elles le font par deux prédications différentes.[17] Frege (1892a) a substitué, aux notions traditionnelles de « prédicat » et de « sujet », des notions plus larges : celles de « fonction » et d'« argument » (traduction française : Frege (1971d)). Considérons les expressions suivantes :

F1 $15 \cdot 1^2 + 1$
F2 $15 \cdot 2^2 + 2$
F3 $15 \cdot 3^2 + 3$
F4 $15 \cdot 4^2 + 4$
F5 $15 \cdot 5^2 + 5$

Dans toutes ces expressions, nous reconnaissons facilement (l'expression de) la même fonction, que nous pouvons représenter comme suit :

F+ $15 \cdot x^2 + x$
F∗ $15 \cdot (...)^2 + (...)$

L'argument (chacun des nombres 1, 2, 3, 4 et 5 dans les exemples (**F1**) à (**F5**) n'appartient pas, à proprement parler, à la représentation de la fonction : il est représenté par trois points entre parenthèses dans (**F∗**) et par « x » dans (**F+**).. Les trois points représentent une « lacune » et marquent l'endroit où la fonction a besoin d'un argument pour former un tout complet. « Former un tout complet », dans le cas de (**F1**) à (**F5**) , veut dire « représenter un nombre » : « $15 \cdot x^2 + x$ » représente la fonction, mais pas de nombre ; « $15 \cdot 3^2 + 3$ », par contre, représente un nombre précis (à savoir 138) – c'est le résultat de l'*application* de la fonction à l'argument 3. Dans d'autres utilisations des fonctions, « former un tout complet » peut vouloir dire autre chose, par exemple « faire une affirmation qui est soit vraie soit fausse » : « $15 = x^2 + x$ » n'est ni vrai ni faux, mais « $15 = 3^2 + 3$ » est faux.

L'idée principale de Frege était de concevoir des prédicats comme un certain type de fonctions, fonctions qui prennent un nom pour en faire une phrase. Un prédicat sera alors représenté par une expression comme « $15 = x^2 + x$ » (« être tel que le résultat de l'addition du carré du nombre avec lui-même donne 15 »), une chose qui n'est ni vraie ni existente, mais plutôt vraie-de certaines choses,

[14] Bien qu'il avait plusieurs tentatives pendant le Moyen Âge de développer une théorie des phrases singulières et en particulier de la référence des termes (*suppositio*, opposé à la *significatio*), John Stuart Mill (1895, i.ii.5) était le premier à faire une distinction nette entre des termes « connotatives » (descriptifs, comme « homme ») et dénotatives (non descriptifs, comme « Socrate »). Nous reviendrons sur la théorie des termes singuliers dans le ch. 9.4.

[15] Il a été remarqué par Peirce (1932, 328, 1933, 459) que les noms communs de la syllogistique deviennent superflus dès que nous disposons de prédicats.

[16] Nous avons introduit la notion mathématique d'une fonction en n. 44 à la p. 51. Nous reviendrons sur ce sujet à la p. 227 et sur les propriétés mathématiques des fonctions en tant qu'ensembles dans le ch. 15.1.

[17] Nous rencontrerons, le long des prochaines leçons, d'autres raisons de ne pas nous laisser guider par la forme grammaticale superficielle des énoncés quand nous essayons de les formaliser dans le langage de la logique des prédicats.

PROOF

ou satisfaite par certaines choses.

Nous avons remarqué que nous obtenons des prédicats en effaçant des noms d'une phrase et que nous pouvons effacer plusieurs noms d'une même phrase. Dans ces cas, il faut tenir compte de la diversité des noms effacés. Si nous obtenons « … aime ⋯ » de « Julie aime Marc » et nous nous demandons si ce prédicat est vrai de Julie et Marc, l'ordre des noms de ces deux personnes est crucial, puisqu'il est tout à fait possible que Julie aime Marc sans que Marc aime Julie. C'est pourquoi il faut distinguer les positions des arguments, par exemple, en ajoutant des indices aux trois points : « $\ldots_1$ aime $\ldots_2$ » (ce qui est différent de « $\ldots_2$ aime $\ldots_1$ »), « $\ldots_1$ est entre $\ldots_2$ et $\ldots_3$ » (ce qui est différent de « $\ldots_1$ est entre $\ldots_3$ et $\ldots_2$ », « $\ldots_2$ est entre $\ldots_1$ et $\ldots_3$ », « $\ldots_2$ est entre $\ldots_3$ et $\ldots_1$ », « $\ldots_3$ est entre $\ldots_1$ et $\ldots_2$ » et encore de « $\ldots_3$ est entre $\ldots_2$ et $\ldots_1$ »). Nous pouvons ainsi distinguer les occurrences de lacunes *coordonnées* de celles qui ne le sont pas : dans « $15 \cdot (\ldots_1)^2 + (\ldots_1)$ » les deux lacunes sont coordonnées (et doivent, par conséquent, être remplies par le même nombre), bien que dans « $15 \cdot (\ldots_1)^2 + (\ldots_2)$ » elles ne le sont pas : dans ce deuxième cas, elles peuvent (mais ne doivent pas) être remplies par de différents nombres. « $15 \cdot 3^2 + 3$ » est donc le résultat des applications des deux fonctions, mais « $15 \cdot 3^2 + 4$ » n'est une application que de la deuxième.

Une manière plus simple et plus efficace d'obtenir le même effet qu'avec des trois points est de remplacer les trois points par ce qu'on appelle des « *variables* », représentées par des lettres « x », « y », « z », « w », etc. Nous adoptons la convention que « x » représente toujours la première insertion possible dans la phrase, « y » la deuxième, etc. Nous pouvons donc dire que le prédicat (il ne s'agit pas d'une phrase !) « x aime y » est vrai de Julie et Marc (dans cet ordre), mais peut être faux de Marc et Julie. En d'autres termes, le prédicat est vrai de la paire ⟨ Julie, Marc ⟩, mais ne l'est peut-être pas de la paire ⟨ Marc, Julie ⟩. Une paire se distingue d'un ensemble de deux membres par le fait qu'elle est ordonnée, c'est-à-dire qu'on peut parler de son premier et de son second membre.[18]

Comme une phrase (en logique en tout cas) peut être d'une longueur arbitraire (bien que finie), il n'y a pas de limites au nombre de noms qu'elle peut contenir.[19] Nous obtenons ainsi des prédicats d'une *arité* (ou valence) arbitraire, l'arité d'un prédicat étant le nombre de noms qu'il lui faut pour former une phrase. C'est pourquoi nous ne pouvons pas nous contenter des paires, mais devons parler des suites arbitraires.[20] La relation que nous exprimons par « … est vrai de… », cependant, n'est pas seulement une relation qui subsiste entre des prédicats et des choses, mais entre des prédicats et des suites de choses.

Au lieu de dire qu'un prédicat résulte d'une phrase en effaçant un ou plusieurs noms, nous aurions aussi pu dire qu'un nom[21] est ce qui peut se combiner avec un prédicat pour former une phrase.

[18] Cela ne veut pas dire que les paires ne sont pas des ensembles. Il existent différentes manières de définir des paires comme des ensembles d'un type particulier. On peut, par exemple, dire avec Kuratowski que la paire $\langle a, b\rangle$ est l'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ ou avec Wiener que c'est l'ensemble $\{\{a, \varnothing\}, \{b\}\}$. La différence importante entre paires et ensembles réside dans les conditions d'identité : deux ensembles sont identiques si et seulement si ils contiennent les mêmes membres ; deux paires (ou plus généralement deux suites) sont identiques si et seulement si elles contiennent les mêmes membres *dans le même ordre*. « $\{a, b\}$ » et « $\{b, a\}$ » désignent le même ensemble, mais $\langle a, b\rangle$ et $\langle b, a\rangle$ sont deux paires différentes ; $\{a, a\}$ est identique à $\{a\}$, mais $\langle a, a\rangle$ est différent de $\langle a\rangle$ (ce qui se vérifie facilement avec les deux définitions données).

[19] « x est un philosophe » et « x aime x » sont des prédicats unaires (d'une arité 1), « x est le frère de y » et « x aime y » des prédicats binaires (d'une arité 2), « x est entre y et z » un prédicat ternaire (d'une arité 3) et ainsi de suite.

[20] La notion de « suite » (ou « séquence ») est une généralisation de celle de « paire ». La différence entre suites et ensembles est que les premières viennent avec un ordre et non pas les secondes. Nous pouvons définir une suite à trois places, par exemple, comme une paire d'un individu et d'une paire : $\langle x, y, z\rangle := \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$.

[21] Plus exactement : un terme singulier. Un terme singulier est une expression qui désigne au plus un objet. Nous reviendrons sur cette notion dans le ch. 9.4.

PROOF

C'est dans cette perspective-là que nous appelons un prédicat (dans le sens logique de ce mot) une « *phrase ouverte* ». « ... est un philosophe », par exemple, est une phrase ouverte dans le sens que cette expression contient une lacune (représentée par les trois points) et que cette lacune doit être remplie pour que l'expression devienne une phrase (qui sera vraie si le nom inséré désigne un philosophe et fausse autrement).[22] Une phrase ouverte, malgré son nom, n'est pas une phrase ; elle est ni vraie ni fausse – elle est vraie ou fausse *de* quelque choses.[23] Quand elle est vraie d'un certain objets ou de certains objets, nous disons que ces objets *satisfont* la phrase. Comme nous allons voir dans le ch. 9.3, cette notion de « *satisfaction* »est la notion clef de la sémantique de la logique des prédicats.

8.6 Les objets et leur existence

Une variable, nous l'avons dit, représente une lacune dans une phrase ouverte. Dans la logique des prédicats, il y a deux manières d'obtenir une phrase complète (ou : une phrase *tout court*) d'une phrase ouverte qui contient une seule variable « x » :

1. par le remplacement de « x » par une expression comme « Socrate » ;
2. par un quantificateur qui lie toutes les occurrences de « x » dans la phrase en question.

Par la première méthode, nous obtenons « Socrate est un philosophe » à partir de la phrase ouverte « x est un philosophe » ; par la deuxième méthode, nous obtenons « quelque chose est un philosophe »[24] et « toute chose est un philosophe » de la même phrase. Représentant « Socrate » par « a » et « x est un philosophe » par « $F(x)$ », nous pouvons formaliser ces trois possibilités comme suit :

- « Fa » (« Socrate est un philosophe ») ;
- « $\exists x(Fx)$ » (« Quelque chose est un philosophe ») ;
- « $\forall x(Fx)$ » (« Toute chose est un philosophe »).

Dans « $\exists x(Fx)$ » et « $\forall x(Fx)$ », la deuxième occurrence de la variable « x » est liée par un quantificateur (existentiel dans la première, universel dans la deuxième phrase). Cela veut dire qu'elle correspond à la variable qui suit le quantificateur et qu'elle se trouve dans la « portée » de ce dernier, qui est indiquée par les parenthèses. La portée d'un opérateur est l'expression qu'il gouverne, la plus grande formule bien formée qui contient des variables qu'ils lient.

Dans le cas où une variable se trouve 'dans' (à l'intérieur de) la portée d'un opérateur, nous parlons d'une « variable sous une assignation de valeurs ». Une variable sous une assignation de valeurs ne représente plus une lacune, mais représente un objet – quoique arbitraire.[25]

[22] Dans le langage ordinaire, il n'est pas le cas en général que la phrase est fausse si le nom inséré désigne quelque chose d'autre qu'un philosophe : il est au moins contestable que « le nombre 2 est un philosophe », « Pégase est un philosophe » soient faux (et qu, en conséquence et par la principe de bivalence, que leurs négations soient vraies). La possibilité que la phrase devienne du non-sens existe également. Suivant Frege, nous supposerons par la suite que ce n'est pas le cas pour notre langage formel, c'est-à-dire que tout prédicat est *entièrement défini* – que pour tout objet dont nous voulons parler, il est ou bien vrai de cet objet ou bien faux de cet objet. Nous traiterons, en d'autres termes, le non-sens comme fausseté. Nous reviendrons sur ce phénomène à la p. 230.

[23] Comme une phrase ouverte n'est pas une phrase et la propriété d'être vrai-de quelque chose en particulier n'est pas une manière d'être vraie, il s'agit d'un choix terminologique au moins partiellement malheureux. Je le fais pour souligner que ce sont les prédicats qui 'portent les pantalons' dans la 'production' de ce qui peut être vrai ou faux (une phrase) et pour tenir compte du point souligné par Frege que les prédicats sont essentiellement 'lacunaires'.

[24] Nous utilisons ici « chose » dans un sens 'philosophique', pour parler de n'importe quel existant de notre univers de discours. Les choses, dans ce sens, incluent les personnes, les évènements, les prédicats et les égos cartésiens.

[25] Nous reviendrons sur cette notion problématique d'« individu arbitraire » au ch. 12.3.

PROOF

Notons qu'une phrase ouverte qui ne contient qu'une seule variable peut la contenir 'plusieurs fois' : les expressions « x est un philosophe », « x aime x », « x est un philosophe et x aime x »et « ou bien x aime x ou bien x fêtera jamais l'anniversaire de x » sont toutes des prédicats unaires, vraies ou fausses d'une seule chose (qui est philosophe, a de l'amour propre, est un philosophe qui s'aime ou ne fête pas sans anniversaire en l'absence d'amour propre).

Même si une variable sous une assignation de valeurs peut être considérée comme terme singulier (expression désignant au plus une chose), il faut quand même distinguer les quantificateurs des noms propres et des descriptions définies. L'absence de distinction entre noms et quantificateurs donne facilement lieu à des raisonnements fallacieux :

Tom est venu. Donc quelqu'un est venu. (8.4)

Personne n'est venu. Donc quelqu'un est venu. (8.5)

Le premier argument est valide, le second non, même si, d'un point de vue syllogistique, ils ont la même forme logique.[26]

Le problème avec (8.5) est lié à un autre défaut de la syllogistique : elle est forcée de traiter « ... existe » comme un prédicat ordinaire, une thèse qui soutient souvent des arguments dits ontologiques pour l'existence de Dieu et qui a été critiquée par Kant (1787, 598, 626, 627).[27] Le problème avec les arguments ontologiques pour l'existence de Dieu est qu'ils ne sont valides que si beaucoup d'autres arguments le sont aussi, par exemple l'argument en faveur de l'existence d'une chose qui a toutes les propriétés exprimées par un prédicat en français qui commence avec « e ». Il ne s'ensuit pas d'une telle stipulation qu'il ait réellement des choses qui sont à la fois erratiques et éloquentes – pour déterminer s'il existe une telle chose, il faut aller voir dans le monde.

Une autre raison pour ne pas traiter « ... existe » comme un prédicat ordinaire est la validité du schéma d'inférence suivant :

$$\frac{Fa}{\exists x(Fx)} \tag{8.6}$$

[26] Si vous n'êtes pas convaincus par cet exemple, en raison de la négation « n' » qui suit « personne » dans la deuxième phrase, considérez l'exemple suivant :

Quelqu'un est venu, et quelqu'un s'est excusé de ne pas venir. Donc quelqu'un est venu et s'est excusé de ne pas venir. (8.5+)

Déjà les scolastiques ont remarqué que nous ne pouvons pas inférer de « Platon et Socrate disent quelque chose de vrai » qu'il y ait quelque chose de vrai dit par Platon et par Socrate (Petrus Hispanus (cf. 1947, 12.35–36), cité d'après Prior (1955, 152)).

[27] Cf. aussi la discussion chez Kneale (1936). Un argument ontologique pour l'existence de Dieu est par exemple le suivant :
P1 Dieu a toutes les perfections.
P2 L'existence est une perfection.
C Donc, Dieu existe.
Voici une formalisation utilisant la logique de deuxième ordre qui quantifie sur les prédicats et dont on discutera dans la section 12.5 (à la p. 298) :
P1 $\forall F$ (F est une perfection $\rightarrow$ Dieu est F)
P2 $\exists F$ (F est une perfection $\wedge \forall x$ ($Fx \leftrightarrow x$ existe))
C′ $\exists F$ (Dieu est F $\wedge \forall x(Fx \leftrightarrow x$ existe))
C Dieu existe.

PROOF

Si a est F, alors il y a au moins une chose qui est F. Nous appelons une telle inférence « généralisation existentielle » (GE).[28] Si nous substituons « ... n'existe pas » à « F ... », nous arrivons à des instances bizarres de ce schéma d'inférence telle que la suivante :

$$\frac{\text{Pégase n'existe pas}}{\exists x(x \text{ n'existe pas})} \tag{8.7}$$

Mais comment lire la conclusion ? « Il y a au moins une chose qui n'existe pas » semble être une contradiction, bien que la prémisse semble vraie. Il semble préférable de ne pas être obligé d'affirmer de telles phrases d'une cohérence douteuse. Cette inférence ne semble donc pas valide : nous ne pouvons pas, du fait que Pégase n'existe pas, inférer qu'il y a des choses qui n'existent pas.[29]

Nous retrouvons le même phénomène chez des phrases du type « tous les F sont G », que nous formalisons en logique des prédicats par « $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ ». Comment formaliser par exemple « Les licornes n'existent pas » ? Essayons

$$\text{Les licornes n'existent pas} \quad \rightsquigarrow \quad \forall x(x \text{ est un licorne} \rightarrow x \text{ n'existe pas})$$

Nous avons déjà remarqué, à la p. 194, qu'une phrase affirmative universelle en syllogistique présuppose que le terme sujet ne soit pas vide – c'est-à-dire qu'une phrase du type **SaP** implique une du type **SiP**. Ceci veut dire que si toutes les licornes (S) ont la propriété de non-existence (P), alors quelques licornes ont cette propriété – encore une autre manière de dire qu'il y a des choses qui n'existent pas.

Nous sommes donc amenés à dire : « l'existence n'est pas un prédicat », phrase souvent attribuée à Kant. Dans notre contexte, elle signifie que les affirmations « Pégase est un cheval mythique » et « Pégase n'existe pas » sont de types logiques différents et que dans la deuxième phrase rien n'est prédiqué de Pégase. La syllogistique, cependant, ne nous offre pas cette possibilité, comme elle ne reconnaît aucune forme logique autre que ses quatre propositions catégoriques.

Ce n'est pas le seul problème soulevé par les présuppositions existentielles de la syllogistique. Vu la présupposition de la syllogistique que les termes utilisées ne sont pas vides, nous n'aurions pas seulement

$$\frac{\text{Les licornes n'existent pas.}}{\forall x(x \text{ est un licorne} \rightarrow x \text{ n'existe pas})} \tag{8.8}$$

mais également

$$\frac{\text{Les licornes n'existent pas.}}{\forall x(x \text{ est un licorne} \rightarrow x \text{ existe})} \tag{8.9}$$

De ces deux phrases nous pouvons conclure que tous les licornes à la fois existent et n'existent pas – d'où nous pouvons encore conclure qu'il ne peut pas y avoir de licornes, contrairement à la présupposition de la syllogistique.[30] La présupposition de la syllogistique que toutes les termes utilisés

[28] Nous reviendrons sur ces règles dans le calcul de déduction naturelle pour la logique des prédicats (cf. 289 dans le ch. 12).

[29] Cf. également la n. 13 à la p. 202. Cette observation a motivée le développement des logiques dites « libres » qui n'acceptent pas la validité de (GE) et plus généralement ne présupposent pas que les noms utilisés dans leur langages ne soient pas vides (aient un référent). Nous reviendrons à la logique libre à la p. 285.

[30] L'argument ici est le même que celui que nous avons utilité, dans la sct. 4.4, pour conclure qu'il ne peut y avoir de coiffeur dans un village qui coupe les cheveux à tous et seulement à ceux qui ne se coupent pas le cheveux eux-mêmes.

PROOF

ne sont pas vides n'est pas seulement une restriction considérable de son utilité pour formaliser des inférences,[31], mais nous amène dans des contradictions.[32]

La solution à ces problèmes adoptée par la logique des prédicats est double :[33]

- ne pas traiter « ... existe » comme prédicat ordinaire ;
- ne pas présupposer que les prédicats utilisées sont vraies d'au moins une chose.

Contrairement à la syllogistique, toutes les formules de la même forme que « $\forall x(Fx \to Gx)$ » sont alors valides s'il n'y a pas de F, peu importe le « G » en question. Elles sont valides parce qu'il n'est pas possible qu'elles soient fausses : s'il n'y a pas de F, il est impossible d'en trouver un qui ne soit pas G.

Si « ... existe » n'est pas un prédicat ordinaire, alors comment comprendre des phrases qui disent qu'une certaine chose existe ou n'existe pas ? Frege concevait « ... existe » comme prédicat de deuxième ordre,[34] et cette solution est communément acceptée aujourd'hui.[35] Dire que a existe ou que des F existent revient donc à dire que certaines phrases ouvertes sont vraies d'au moins une chose :

$$\begin{aligned} a \text{ existe} &\rightsquigarrow \exists x(x = a) \\ \text{des } F \text{ existent} &\rightsquigarrow \exists x(Fx) \end{aligned}$$

La phrase ouverte qui est quantifiée dans le premier cas est « ... est identique à a »,[36] celle du deuxième exemple est « ... est F » – la première formalisation est lue « il y a un x tel qu'il est (identique à) a » ou « a existe », la deuxième comme « il y a des F » ou encore « ils existent des F » – dont le nom quantificateur « *existentiel* ».

Pour dire que Pégase n'existe pas ou qu'il n'y a pas de licornes, nous pouvons dire le suivant :

$$\begin{aligned} a \text{ n'existe pas} &\rightsquigarrow \neg\exists x(x = a) \\ \text{les } F \text{ n'existent pas} &\rightsquigarrow \neg\exists x(Fx) \\ \text{il n'y a pas de } F &\rightsquigarrow \neg\exists x(Fx) \end{aligned}$$

[31] Cf. par ex. : « In order to justify Aristotle's doctrine as a whole it is necessary [...] to suppose that he assumed application for *all* the general terms with which he dealt. To a modern logician this seems a rather curious restriction of the scope of logic. » (Kneale and Kneale (1962, 60) ; cf. également Bocheński (1956, 257ff.))

[32] Une autre conséquence de cette présupposition est que la syllogistique rend valides des inférences qui ne le sont pas : sous la présupposition que « licorne » ne soit pas vide, nous pouvons par exemple déduire de « tous les chasseurs chassent une licorne » et de « il y a plus de chasseurs que de licornes » qu'il y a au moins une licorne qui est chassée par (au moins) deux chasseurs. Mais clairement cette conclusion ne s'ensuit pas – elle reste fausse même si les prémisses sont vraies.

[33] Une ré-interprétation des phrases catégorielles sans implications d'existence a été donnée par Franz Brentano (1874) qui ré-interprète « **SaP** » comme « rien n'est à la fois un A et n'est pas un B » (« $\neg\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$ »), « **SeP** » comme « rien n'est à la fois un A et un B » (« $\neg\exists x(Ax \wedge Bx)$ »), « **SiP** » comme « quelque chose est à la fois un A et un B » (« $\exists x(Ax \wedge Bx)$ ») et « **SoP** » comme « quelque chose est à la fois un A et n'est pas un B » (« $\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$ ») (Prior, 1955, 166). C'est un premier pas dans la bonne direction, même si nous perdons la validité de beaucoup de syllogismes classiques.

[34] Un prédicat de deuxième ordre est un prédicat qui s'applique à des prédicats, comme par ex. « x est un prédicat ». Cf. le ch. 9.6 pour le traitement des quantificateurs dans la grammaire catégorique et le ch. 12.5 pour savoir plus sur les prédicats de deuxième ordre.

[35] Nous reviendrons sur les conséquences logiques et philosophiques de ce choix de formalisation aux p. 285 et 265 respectivement.

[36] Nous utilisons « $=$ » comme relation d'identité dans le langage-objet de la logique de prédicats, et « $=$ » pour la relation d'identité dans le métalangage que nous utilisons pour donner sa sémantique (cf. p. 251).

PROOF

La première phrase dit qu'il n'y a aucune chose dont la phrase ouverte « $x \neq a$ » est vraie : il n'y a rien qui est identique à a ; la deuxième phrase dit qu'il n'y a aucune chose qui ne satisfait « Fx ». Le fait que « les F n'existent pas » et « il n'y a pas de F » reçoivent la même formalisation montre encore une fois que la logique de prédicats ne fait pas les présuppositions existentielles souvent implicites dans le langage naturel : en disant que les F n'existent pas, je ne parle pas *des* F (ce que je ferais avec une autre phrase comme « les F sont des animaux »).

C'est la quantification qui nous sert à faire des affirmations d'existence et de non-existence dans la logique des prédicats : une quantification existentielle est vraie ssi (si et seulement si) la phrase ouverte quantifiée est satisfaite par au moins un objet dans le domaine de quantification ; une quantification universelle est vraie ssi elle est satisfaite par toutes ces objets. Le domaine de quantification peut être varié, ce qui nous permet de surpasser un autre désavantage de la syllogistique. Celle-ci ne nous permet pas de traiter explicitement d'un phénomène très commun du langage ordinaire : dans la plus grande partie des assertions générales, la généralité est implicitement restreinte. Formulé en termes de quantification, on parle d'une restriction implicite du domaine de quantification.[37] Quand je dis, par exemple, que tous parlent anglais, je ne veux pas parler d'une table ; je n'accepte pas le fait que la table ne parle pas anglais comme objection à mon assertion. Quand je dis qu'il ne reste plus de bière froide, je ne parle que des bières de mon appartement, et non pas de toutes les bières du monde. Cette restriction du domaine de quantification est facilement formalisée dans le langage des quantificateurs, mais ne peut pas être capturée formellement par le langage de la syllogistique.[38]

8.7 Les relations et leur quantification

Une phrase ouverte, nous l'avons dit, est une fonction qui prend des objets et des suites d'objets comme arguments et rend comme valeur une des deux valeurs de vérité. En tant que fonction, elle est essentiellement ‹ incomplète ›, dans le sens qu'elle a besoin d'arguments pour donner une phrase complète qui peut être évaluée comme vraie ou fausse. Nous avons introduit des variables, « x » et « y », pour distinguer les différentes lacunes dans une phrase ouverte, et nous avons dit que les phrases ouvertes ne sont ni vraies ni fausses, mais vraies ou fausses *de* quelques objets ou de suites d'objets. Soit $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ une telle suite, et « $\ldots x_1 \ldots x_2 \ldots x_n \ldots$ » une phrase ouverte contenant des occurrences libres de n variables différentes. Dans le cas où nous recevons une phrase vraie en substituant « a_1 » pour « x_1 », « a_2 » pour « x_2 » et ainsi de suite, nous disons que la suite *satisfait* la phrase ouverte – la fonction nous donne la valeur **v** pour cette suite d'objets.[39]

L'utilité des variables vient du fait qu'elles peuvent être liées par des quantificateurs. Le quantificateur existentiel, par exemple, lie la variable « x » dans la phrase suivante :

$$\exists x \text{ (j'adore } x) \tag{8.10}$$

(8.10) est une phrase complète (« fermée ») qui est vraie si et seulement si j'adore quelque chose. Elle dit, de la phrase ouverte « j'adore x » qu'elle est satisfaite par au moins un objet, c'est-à-dire qu'au moins un objet est tel que je l'adore.

[37] Nous reviendrons sur ce concept central au chapitre 9.7.

[38] En logique des prédicats, nous la formalisons à l'aide de l'implication matérielle : « $\forall x$(x est une bière dans mon frigo $\rightarrow$ x est froide) ».

[39] C'est cette notion de satisfaction que nous utiliserons, à la p. 259 (cf. déf. 61) pour définir « ...est vrai sous une assignation de valeurs » dans la sémantique formelle de la logique des prédicats (cf. aussi p. 206).

PROOF

Un quantificateur ne peut lier que les variables qui se trouvent dans sa portée, c'est-à-dire à l'intérieur de la phrase ouverte qu'il précède. Pour dire que j'adore un philosophe, il faut dire

$$\exists x \text{ (j'adore } x \ \wedge \ x \text{ est un philosophe)} \tag{8.11}$$

parce que l'expression suivante :

$$\exists x \text{ (j'adore } x) \ \wedge \ x \text{ est un philosophe} \tag{8.12}$$

est une phrase ouverte qui est vraie d'un objet si et seulement si deux conditions sont satisfaites : que cet objet soit un philosophe et que j'adore quelque chose (autre qu'un philosophe, peut-être). (8.11) et (8.12) diffèrent en termes de la portée du quantificateur existentiel : ce quantificateur gouverne toute la phrase ouverte conjonctive qui le suit en (8.11), mais seulement le premier conjoint en (8.12). La troisième occurrence de « x » en (8.12) n'est pas gouvernée par un quantificateur et reste ouverte : (8.12), par conséquence, n'est pas une phrase vraie ou fausse, mais un prédicat, une phrase ouverte.

Dans le cas où plusieurs occurrences de la même variable se trouvent à l'ntérieur de la portée d'un quantificateur, celui-ci coordonne leur valeurs : quelle que soit l'assignation qui rend vraie la phrase ouverte, c'est une assignation qui assigne le même individu à toutes les occurrences de la même variable. Pour donner un exemple, si le quantificateur existentiel précédant une phrase ouverte me donne le droit de choisir un objet dont la phrase ouverte est vraie, ce choix doit être fixé comme constant pour cette phrase ouverte toute entière : je dois garder mon choix pour *toute* la phrase ouverte en question.

(8.11), par exemple, dit qu'il y a au moins un objet qui est, en même temps, philosophe et adoré par moi. Pour pouvoir rendre ces deux prédicats indépendants (pour avoir deux 'choix' à ma disposition), il faut que j'attribue un quantificateur à chacun :

$$\exists x \text{ (j'adore } x) \ \wedge \ \exists x \text{ (} x \text{ est un philosophe)} \tag{8.13}$$

(8.13) fait une assertion beaucoup plus faible que (8.11) – à savoir que j'adore quelqu'un et qu'il y a au moins un philosophe. Les deux occurrences de la variable « x » dans (8.13) sont indépendantes – nous aurions aussi pu écrire :

$$\exists x \text{ (j'adore } x) \ \wedge \ \exists y \text{ (} y \text{ est un philosophe)} \tag{8.14}$$

D'un point de vue logique, il n'y a aucune différence entre (8.13) et (8.14). Dans (8.11), à l'inverse, les deux occurrences des variables sont liées – si on voulait substituer « x » par « y », on obtiendrait

$$\exists y \text{ (j'adore } y \ \wedge \ y \text{ est un philosophe)} \tag{8.15}$$

Comme (8.14) et (8.13), les phrases (8.15) et (8.11) sont équivalentes du point de vue logique. Les variables ne servent qu'à indiquer les lacunes dans les phrases ouvertes et de lier ces lacunes par des quantificateurs – elles n'ont aucune valeur sémantique indépendante. Seules les propriétés relationnelles des différentes variables distinguent ces dernières (entre elles) : la phrase ouverte « x aime x », par exemple, est vraie de toutes les choses qui s'aiment elles-mêmes – la phrase « x aime y » est aussi vraie de ces choses (puisque nous pouvons assigner « x » et « y » au même individu), mais elle est également vraie de toutes les paires dont le premier membre aime le second.[40]

[40] Comme nous l'avons remarqué à plusieurs reprises, l'ordre des variables peut devenir crucial. Si « Rxy » représente « x est un parent de y » (et que l'univers du discours compte tous les êtres humains), « $\forall x \exists y(Rxy)$ » est la phrase vraie « tout le monde a un parent ». « $\forall y \exists x(Rxy)$ », par contre, veut dire que tout le monde est un parent, ce qui est faux.

PROOF

C'est parce que plusieurs occurrences libres de la même variable prennent leurs valeurs de manière coordonnée que nous pouvons traiter, par les moyens de la logique des prédicats, d'autres cas d'ambiguïté qui ne peuvent pas être à l'aide des ressources de la syllogistique. Considérons la phrase suivante :

> Marc a travaillé pour un homme qui a tué le deuxième mari de la soeur jumelle de Marc. (8.16)

Analysé à l'aide de la syllogistique, le terme général qui est, dans (8.16), prédiqué de Marc est « ...ancien employé de l'assassin du deuxième mari de sa propre soeur jumelle ». Cependant, le problème avec ce terme est qu'il donne facilement lieu à des raisonnements fallacieux : le fait, par exemple, qu'il s'applique également à deux individus, Marc et Marie, n'entraîne pas que Marc et Marie aient travaillé chez la même personne, ni qu'ils soient eux-mêmes jumeaux. La cause en est la réflexivité de « propre » dans « sa propre soeur jumelle ». Nous trouvons la même ambiguïté dans la clause relative qu'exprime également ce qui, dans (8.16), est prédiqué de Marc :

> qui a travaillé pour un homme qui a tué le deuxième mari de sa soeur jumelle (8.17)

L'ambiguïté dans (8.17) réside dans le fait que le pronom possessif « sa » peut référer aux deux occurrences du pronom relatif « qui », avec une préférence pour le deuxième qui lui est plus proche. L'usage des variables à la place des pronoms résout ces problèmes :

> ...est un x tel que x a travaillé pour un homme qui a tué le deuxième mari de la soeur jumelle de x (8.18)

Nous avons donc trouvé, dans le langage ordinaire, des analogues aux occurrences libres de variables : les pronoms dont l'antécédent n'a été ni exprimé ni même implicitement présupposé.

Voilà quelques autres exemples de l'usage du langage de la logique des prédicats :

$$
\begin{aligned}
\text{« Anna est une vache »} &\rightsquigarrow Fa \\
\text{« Anna rit »} &\rightsquigarrow Ga \\
\text{« Anna est une vache qui rit »} &\rightsquigarrow Fa \wedge Ga \\
\text{« Il y a une vache »} &\rightsquigarrow \exists x Fx \\
\text{« Il y a une vache qui rit »} &\rightsquigarrow \exists x(Fx \wedge Gx) \\
\text{« Il y a une vache et il y a quelque chose qui rit »} &\rightsquigarrow \exists x Fx \wedge \exists y Gy \\
\text{« Toute chose est une vache »} &\rightsquigarrow \forall x Fx \\
\text{« Toute vache rit »} &\rightsquigarrow \forall x(Fx \rightarrow Gx)
\end{aligned}
$$

Un quantificateur quantifie une phrase ouverte, qui peut être logiquement complexe, et qui est appelée *« la portée »* du quantificateur en question. La portée du quantificateur existentiel dans « $\exists x Fx$ », par exemple, est la phrase ouverte « Fx », et la portée du quantificateur universel dans « $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ » est « $Fx \rightarrow Gx$ ». Ce sont les différentes portées des quantificateurs existentiels qui distinguent nos formalisations de « Il y a une vache qui rit » (ce qui est faux) et de « Il y a une vache et il y a quelque chose qui rit » (ce qui est vrai) respectivement.

C'est cette construction qui permet à la logique des prédicats de surmonter la difficulté principale que rencontre la syllogistique : la généralité multiple. C'est également dû à cette notion importante

PROOF

que la logique des prédicats (c'est-à-dire de *tous* les prédicats) surpasse celle des prédicats unaires et possède un pouvoir expressif beaucoup plus grand que cette dernière.[41]

Aux variables dans notre langage formel correspondent, dans le langage naturel, une variété d'expressions, notamment les pronoms anaphoriques. Dans beaucoup de cas, l'usage des anaphores donne naissance à des ambiguïtés et des tournures peu idiomatiques (comme, par exemple, « ce que le premier a dit au deuxième était tel que le troisième a pensé que le deuxième avait raison d'être fâché du premier »). Le fait que le langage naturel ne représente pas toujours correctement la « forme logique » d'une phrase n'est pas un simple désavantage, mais peut mener à des conséquences désastreuses, comme le montre l'exemple suivant.[42] Considérons les phrases suivantes :

Tous les garçons aiment une fille. (8.19)

Ce monsieur a écrit un livre sur tout. (8.20)

Ces deux exemples sont des cas d'ambiguïtés structurelles : aucun constituant n'est ambigu lexicalement et pourtant la phrase complète est ambiguë. Ce n'est que dans une de ses interprétations que la première phrase a la même structure syntactique que « Tous les garçons aiment le sport » et la deuxième à « Ce monsieur a écrit un livre sur la science universelle ». La syllogistique n'a pas les ressources qui permettent d'enlever l'ambiguïté puisqu'elle nous force à classifier chaque phrase comme étant ou bien particulière ou bien universelle.

Dans la logique des prédicats, cependant, nous pouvons réitérer des quantificateurs. « … aime ⋯ », par exemple, est un prédicat doublement incomplet et donc nécessite deux quantifications différentes. Afin de le compléter partiellement, nous pouvons, par exemple, quantifier sur la deuxième position argumentale. Nous obtenons « $\exists y$(… aime y) » – une expression qui est toujours incomplète : un objet satisfait ce prédicat juste au cas où il aime quelque chose ; si et seulement s'il y a quelque chose qui est aimé par cet objet. Le prédicat « $\exists y$(… aime y) » est donc équivalent à « … aime quelque chose »(« … est un·e amant·e »). Nous pouvons maintenant le compléter : « $\forall x(\exists y(x$ aime $y))$ » – une phrase qui dit que tout objet est tel que cet objet aime quelque chose – une interprétation qui laisse ouverte la possibilité que différents objets aiment différentes choses.

Nous pouvons, cependant, inverser l'ordre de ces deux étapes et obtenir un résultat différent : au lieu de d'abord quantifier existentiellement sur la deuxième position argumentale, nous pouvons d'abord lier la première position par un quantificateur universel. Ainsi nous obtenons « $\forall x(x$ aime …) », une phrase ouverte qui est vraie d'un objet si et seulement si cet objet est aimé par tout le monde. Si nous quantifions existentiellement la position de la variable libre, nous arrivons à « $\exists y(\forall x(x$ aime $y))$ » – une phrase qui dit qu'il y a quelque chose qui est aimé par tout le monde ; que tout le monde aime la même chose. Nous sommes donc arrivés à une représentation logique de la phrase structurellement ambiguë : nous avons distingué deux formes logiques différentes que l'on peut donner à (8.19).

Imaginons que (8.19) est dit d'un groupe comprenant deux garçons et deux filles. L'ambiguïté de (8.19) réside dans le fait que deux scénarios différents peuvent rendre la phrase vraie : dans un scénario, tous les garçons aiment une fille – Paul aime Marie et Marcel aime Pauline. Dans un deuxième

[41] Pour la logique des prédicats unaires, cf. le ch. 10.5. Le prix à payer pour ce gain d'expressivité, cependant, sera l'indécidabilité de la logique des prédicats (que nous prouverons dans la leçon 11, cf. p. 285), phénomène que nous ne retrouvons pas dans la logique des prédicats unaires.

[42] Frege notamment considérait le langage ordinaire comme essentiellement imparfait, une source inévitable de tromperies.

PROOF

scénario, non seulement tous les garçons sont amoureux mais ils sont en plus tous amoureux de la même fille : Paul et Marcel aiment Pauline et personne d'entre eux n'aime Marie. Il y a donc une seule fille qui est aimée par tous les garçons. Ce dernier scénario correspond à la deuxième des deux interprétations suivantes de (8.19) :

$$\forall x\ (x \text{ est un garçon } \rightarrow\ \exists y(y \text{ est une fille } \wedge\ x \text{ aime } y)) \tag{8.19+}$$

$$\exists y\ (y \text{ est une fille } \wedge \forall x(x \text{ est un garçon } \rightarrow\ x \text{ aime } y)) \tag{8.19∗}$$

La différence logique entre ces deux phrases est que dans la première, (8.19+), le quantificateur existentiel se trouve dans la portée du quantificateur universel bien que dans la deuxième, (8.19∗), le quantificateur universel se trouve dans la portée du quantificateur existentiel. Dans (8.19+), nous nous trouvons dans la portée du quantificateur universel lorsque nous choisissons un y qui rend vraie la phrase ouverte : nous pouvons faire dépendre notre choix du x de la valeur de « y » en question. Dans (8.19∗), cependant, nous n'avons pas cette liberté : le y doit être choisi tout au début et il est dit de ce y que tous les x l'aiment.

Nous donnerons le même diagnostic de la phrase suivante :

Toute personne est amoureuse de quelqu'un. (8.21)

Avant même de se demander si la phrase (8.20) est vraie, il faut la comprendre. Mais qu'est-ce qu'elle dit ? Il y a deux possibilités :

$$\forall x\ \exists y\ (x \text{ aime } y) \tag{8.21+}$$

(8.21+) veut dire que, pour toute personne, on trouve une autre personne (qui, cependant, peut être la même)[43] telle que la première aime la deuxième. Comparez ceci à la phrase suivante :

$$\exists y\ \forall x\ (x \text{ aime } y) \tag{8.21∗}$$

(8.21∗) dit qu'il y a une personne qui est telle que tout le monde l'aime, un/une bien-aimé(e) universel(le). On peut très bien s'imaginer des situations (contre-factuelles) où (8.21+) est vrai mais (8.21∗) est faux. L'ambiguïté de (8.21) entre (8.21+) et (8.21∗) montre que le langage ordinaire n'arrive pas très bien à distinguer des anaphores et des références implicites, un travail qui, dans des langues formelles, est fait par les variables et les quantificateurs. Nous pouvons ainsi distinguer la situation où nous arrivons à trouver, pour toute personne (∀) une personne (∃) aimée par elle, de la situation (beaucoup plus rare) où une seule personne (∃) est aimée par tout le monde (∀). La différence entre (8.21+) et (8.21∗) est alors une différence de priorité de choix : dans (8.21+), nous pouvons faire notre choix d'aimé en fonction de l'amant en question, bien que pour (8.21∗), nous devons choisir une seule personne qui sera aimée par tous.[44]

[43] Il ne faut pas oublier cette possibilité : le fait que nous formalisons une phrase avec des variables *ne nous oblige pas* de leurs assigner différentes valeurs. Le prédicat « x aime x », par exemple, peut être vrai de ⟨ Marc, Marc ⟩, (8.21) peut être vrai si tout le monde s'aime, mais n'aime personne d'autre que soi-même.

[44] La distinction cruciale entre « ∀∃ » et « ∃∀ » n'est pas seulement importante pour l'analyse du langage ordinaire, mais peut aussi jouer un rôle important en mathématiques. Ce n'était qu'au 19ème siècle que les mathématiciens ont réussi à distinguer nettement la continuité « simple » de la continuité dite « uniforme » qui impose des restrictions plus sévères. Pour être continue, une fonction doit être « régulière » localement ($\forall\epsilon\ \exists\delta\ (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$) :

PROOF

Le même type d'ambiguïté se trouve dans le cas de (8.20) : ou bien le monsieur en question a écrit un livre qui traite de toutes les choses (8.20∗), ou bien, sur n'importe quel sujet, ce monsieur a écrit au moins un livre (8.20+) :

$$\forall x\,(\exists y(y \text{ est un livre de ce monsieur } \wedge\, y \text{ est sur } x)) \tag{8.20+}$$

$$\exists y\,(\forall x(y \text{ est un livre de ce monsieur } \wedge\, y \text{ est sur } x)) \tag{8.20∗}$$

La première phrase dit que le monsieur, le long de sa carrière, a publié sur tous les sujets ; la deuxième qu'il a publié un livre qui traite de tout.

On remarque une conséquence sémantique : (8.19∗) implique (8.19+) et (8.20∗)implique **(ii+)** – si tous les garçons aiment la même fille, tous les garçons aiment au moins une fille ; quelqu'un qui a publié un livre qui traite de tout a publié sur tous les sujets. La conséquence logique converse, cependant, n'obtient pas : il est très bien possible que tous les garçons sont amoureux, mais ne sont pas amoureux de la même fille, et que le monsieur a publié sur tout, mais a traité de différents sujets dans différents livres. Utilisant la sémantique formelle que nous allons développer au ch. 10.2, nous avons donc le suivant, pour toute structure $\mathcal{A}$ et toute assignation de valeurs h :

$$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \exists x_1 \forall x_2\,(\phi) \urcorner \implies \mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \forall x_2 \exists x_1\,(\phi) \urcorner$$

La converse, par contre, n'est pas vraie : du fait que nous trouvons un y pour tout x nous ne pouvons pas conclure que le même y va faire l'affaire pour tous les x.

Points à retenir

1. Nous obtenons des prédicats (ou phrases ouvertes) des phrases en effaçant un ou plusieurs termes singuliers.
2. La syllogistique classique distingue quatre types de phrases : **SaP**, **SiP**, **SeP**, **SoP**.
3. Ces quatre types de phrases correspondent à des relations entre les extensions des termes « S » et « P ».
4. Ces relations peuvent être symbolisées à l'aide de diagrammes de Venn ; on peut ainsi vérifier, par exemple, le carré des oppositions.
5. Les inférences valides de la syllogistiques sont des inférences directes ou indirectes ; des dernières il y en a 19 principales que l'on peut mémoriser à l'aide des noms comme « Barbara », « Ferio », « Cesare » et « Felapton ».
6. Les diagrammes de Venn dépassent déjà les limites de la syllogistique.
7. Les défauts principaux de la syllogistique et des diagrammes de Venn sont :
   a) ils ne peuvent pas être combinées avec la logique propositionnelle ;
   b) ils ne font pas de distinction entre termes singuliers et prédicats ; par conséquent, elles ne traitent de phrases existentielles que si on introduit des prédicats qui ne sont vrais d'un seul individu ;

chaque différence entre ses valeurs peut être ‹ capturée › par une différence entre les arguments ; pour être continue uniformément, elle doit être régulière globalement ($\exists\delta\,\forall\epsilon\,(|x-y|<\delta \rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon)$) : quoique la différence entre les valeurs, une seule mesure de différence la capture. Le premier s'ensuit du deuxième mais l'inverse n'est pas vrai : il y a des fonctions qui sont continues sans être continue uniformément. Par contre, toute fonction continue uniformément est automatiquement continue.

PROOF

   c) ils ne laissent pas de place pour une ‹ logique des relations ›, ne s'appliquant qu'à des prédicats unaires.
8. Les prédicats ne sont ni vrais ni faux, mais vrais ou faux *de* certains choses ; les choses les satisfont de la même manière comme les arguments satisfont les fonctions.
9. Les variables indiquent des lacunes dans les phrases ouvertes ; les quantificateurs servent à en former des phrases complètes.
10. La formalisation à l'aide de variables permet de traiter la généralité multiple et d'expliquer la distinction entre « Tout le monde aime quelqu'un » et « Quelqu'un est aime par tout le monde ».

PROOF

PROOF

dialectica *series of anthologies*

9 La logique des prédicats

9.1 Quelques inférences valides de la logique des prédicats

Dans le chapitre précédent (8), nous avons vu que la syllogistique traite différemment des phrases que la logique propositionnelle. La syllogistique s'intéresse aux composants des phrases, notamment les quantificateurs « tous », « aucun » et « quelques », alors que la logique propositionnelle abrège toute phrase – indépendamment de ses composants – par des lettres comme « p », « q », « r », etc. Ainsi, la logique propositionnelle n'est pas capable d'expliquer la validité d'inférences comme celles-ci :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les humains sont mortels.}\\ \text{Tous les philosophes sont des humains.}\end{array}}{\text{Tous les philosophes sont mortels.}} \tag{9.1}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Aucun philosophe n'est méchant.}\\ \text{Quelques logiciens sont des philosophes.}\end{array}}{\text{Quelques logiciens ne sont pas méchants.}} \tag{9.2}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Aucun homme n'est parfait.}\\ \text{Tous les philosophes sont des hommes.}\end{array}}{\text{Aucun philosophe n'est parfait.}} \tag{9.3}$$

Dans les trois cas, nous retrouvons toutes les caractéristiques des inférences logiques :[1] la validité de ces inférences ne semble dépendre que de quelques mots qu'on peut appeler « logiques », comme « tous », « aucun » et « quelques » ; toutes les inférences ayant la même forme que (9.1), (9.2) et (9.3) sont également valides ; et leur validité ne dépend pas du fait qu'il y ait ou non des êtres humains immortels ou parfaits ou des philosophes méchants.

La logique propositionnelle ne nous permet pas d'expliquer la validité de ces inférences, car elle ne prend pas en compte la structure interne des phrases simples qu'elle traite : elle traite les « p » et les « q » comme atomes et n'en analyse pas la structure interne. L'inférence (9.1), par exemple, serait formalisée comme « p ; q ; donc, r » – ce qui ne correspond pas à un schéma d'inférence valide de la logique propositionnelle.

Pour formaliser les trois inférences et expliquer leur validité, il faut utiliser la notion de prédicat. Soit « M » une abréviation pour « ... est humain », « P » pour « ... est mortel » et « S » pour « ... est un philosophe » (où les lacunes indiquent les places où il faudrait insérer un nom pour obtenir une phrase). Étant donné ces abréviations, nous sommes en mesure de représenter (9.1) comme suit :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les } M \text{ sont } P.\\ \text{Tous les } S \text{ sont } M.\end{array}}{\text{Tous les } S \text{ sont } P.} \tag{9.1+}$$

Si nous abrégeons « tous les ... sont $\cdots$ » par « $\forall x(\ldots x \ldots \rightarrow \cdots x \cdots)$ », nous obtenons :

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(Mx \rightarrow Px)\\ \forall x(Sx \rightarrow Mx)\end{array}}{\forall x(Sx \rightarrow Px)} \tag{9.1*}$$

[1] En effet, il s'agit de syllogismes valides, des types Barbara (9.1), Ferio (9.2) et Celarent (9.3) respectivement.

PROOF

Peu importe ce que nous substituons pour « H », « P » et « M », nous obtenons des inférences valides, comme, par exemple, la suivante :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les pingouins sont des animaux.}\\ \text{Tous les animaux sont maudits.}\end{array}}{\text{Tous les pingouins sont maudits.}} \qquad (9.1{**})$$

Nous avons utilisé « H », « P » et « M » pour remplacer des prédicats, de la même manière que nous les avons introduits pour des concepts dans le cas de la syllogistique. Où réside alors la différence ?

Premièrement, dans la généralité. Qu'est-ce qu'un prédicat ? Observons d'abord qu'il n'y a pas de différence, d'un point de vue logique, entre « Aucun humain n'est parfait », « Il n'y a pas d'humain parfait » et « Aucun humain n'est une chose parfaite ». Nous n'utilisons donc pas la notion grammaticale de « prédicat ». On remarque aussi que les prédicats substitués à la place de « H », « P » et « M » peuvent être de complexité quelconque.[2]

Il est important de ne pas confondre un prédicat (dans le sens que la logique donne à ce terme) avec le terme général qu'il peut contenir. « Pingouin », par exemple, est un terme général, mais le prédicat correspondant est « … est un pingouin » – le prédicat est ce qui, avec un nom, forme une phrase.[3] Nous pouvons obtenir un prédicat à partir de n'importe quelle phrase, en remplaçant au moins un nom dans cette dernière par trois points.[4] De la phrase

Robert est l'animal préféré de Sam. (9.4)

nous obtenons les prédicats « … est l'animal préféré de Sam », « Robert est l'animal préféré de … » (ce qui, pour des raisons de lisibilité, est parfois transformé en « … est tel que Robert est son animal préféré ») et finalement aussi les prédicats binaires « … est l'animal préféré de ⋯ » et « Robert est le … de ⋯ ». Nous reviendrons plus tard sur les particularités de ces deux dernières.

La caractéristique logique la plus importante des prédicats est qu'ils peuvent être dits *vrais de* certaines choses. Le prédicat « … est un pingouin », par exemple, est vrai de tous les pingouins et n'est vrai de rien d'autre. Nous appellerons l'ensemble de toutes les choses dont un prédicat est vrai *l'extension* de ce prédicat. L'extension du prédicat « … est un pingouin », par exemple, est l'ensemble de tous les pingouins, l'extension du prédicat « … est un pingouin heureux » est l'ensemble de tous les pingouins heureux (qui est un sous-ensemble de l'ensemble de tous les pingouins) et ainsi de suite. L'extension d'un prédicat peut contenir un seul ou même aucun membre. L'extension de « … est un satellite de la Terre » ne contient que la lune, et l'extension de « … est une licorne » est l'ensemble vide $\varnothing$.

L'extension joue le même rôle pour les prédicats que la valeur de vérité pour les phrases : dans une logique extensionnelle, on ne s'intéresse qu'aux extensions des prédicats, aux dénotations des termes singuliers et à la valeur de vérité des phrases. En logique des prédicats, une phrase singulière simple sera vraie si et seulement si la dénotation (le référent) du terme singulier appartient à l'ensemble qui est l'extension du prédicat. « Sam est un pingouin heureux », par exemple, est vrai si et seulement

[2] En particulier, les prédicats peuvent être logiquement complexes, c'est-à-dire conjonctives, disjonctives, négatives et implicatives. C'est pour cela que nous devons souvent choisir l'expression inélégante « …est un x tel que …x ⋯ » pour les lire.

[3] C'est pour cette raison que nous avons parlé de « phrases ouvertes » et appelons les prédicats « prédicatifs » ou, suivant Frege, « insaturés ».

[4] Utilisant la distinction que nous introduirons à la p. 232 entre types et tokens, nous pourrons dire qu'il s'agit ici d'un nom dans le sens de nom-token.

PROOF

si Sam (le référent de « Sam ») est un membre de l'ensemble de tous les pingouins heureux (qui est l'extension du prédicat « x est un pingouin heureux »). C'est exactement dans ces cas où nous disons que Sam (la personne, pas le nom) *satisfait* le prédicat en question. C'est grâce à cette notion de satisfaction que nous pouvons largement élargir le champ d'application de la logique, en la soumettant au même traitement que nous avons appliqué à la notion de vérité en logique propositionnelle. Cependant, la relation de satisfaction entre des prédicats et des choses doit être nettement distinguée de la propriété des phrases d'être vraies ou fausses. Le premier à clairement faire cette distinction était le philosophe-mathématicien-logicien Gottlob Frege.

Troisièmement, dans l'utilisation des connecteurs propositionnels. Si nous appliquons notre inférence à un cas particulier, disons à Socrate, nous obtenons

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Si Socrate est humain, alors Socrate est mortel.}\\ \text{Si Socrate est un philosophe, alors Socrate est humain.}\end{array}}{\text{Si Socrate est un philosophe, alors Socrate est mortel.}} \tag{9.5}$$

Dans cette instance de l'inférence (9.1), le connecteur propositionnel « si … alors ⋯ » relie des phrases entières :

$$\frac{\begin{array}{c}Ma \to Pa\\ Sa \to Ma\end{array}}{Sa \to Pa} \tag{9.5+}$$

Nous voyons que la validité de cette inférence correspond à la transitivité de la conséquence sémantique.

Une autre différence concerne la négation. Nous avons vu (à la p. 39) qu'il faut distinguer la négation externe (propositionnelle, qui obéit au principe du tiers exclu) de la négation interne (qui ne produit que des contraires, pas des contradictoires) et nous avons brièvement mentionné la vacillation d'Aristote par rapport à cette deuxième catégorie (cf. p. 42).

Nous avons également vu (à la p. 196) que la syllogistique connaît des termes négatives comme « $\overline{A}$ », un terme qui dénote la 'négation' du terme général « A », c'est-à-dire l'expression qui a comme extension le complément de l'extension de « A ». La syllogistique, par contre, n'admet pas la négation propositionnelle, sauf dans le cas spécial des quantificateurs. La logique des prédicats, par contre, distingue clairement entre la phrase fermée « ¬(Sam est un pingouin) », vraie si et seulement si il n'est pas le cas que Sam est un pingouin, et la phrase ouverte « ¬(… est un pingouin) », vraie de toute chose qui n'est pas un pingouin, sans pour autant admettre des ‹ non-pingouins ›. En conséquence, elle nous permet une formulation succincte des deux lois gouvernant la négation selon Aristotle :

non-contradiction $\neg\exists x(Fx \wedge \neg Fx)$
tiers exclu $\forall x(Fx \vee \neg Fx)$

Ces deux principes disent, pour n'importe quel prédicat F, qu'il n'a rien qui satisfait à la fois « Fx » et « $\neg Fx$ » (un tel objet serait contradictoire) et que toute chose satisfait un des deux (comme une troisième possibilité est exclue). Si nous acceptons une négation ‹ interne › aux prédicats et interprétons « $\overline{F}$ » comme « non rouge », par exemple (ayant une couleur autre que rouge), le principe du tiers exclu qui dit que toute chose soit est soit n'est pas rouge est compatible avec des choses (comme les nombres) qui ne sont ni rouges ni non rouges.

PROOF

9.2 Frege et la philosophie du langage

Bien que l'idée (ou plutôt l'utopie) d'une idéographie ait été répandue au 19ème siècle (pour son histoire, cf. Barnes (2002)), Frege était le premier à l'élaborer rigoureusement et à l'aide d'un symbolisme logique. Sa « Begriffsschrift » ou « idéographie » (traduit en français par Corine Besson : 1999) fut le premier système de la logique de prédicats.[5] Bien que Frege utilisait un formalisme bi-dimensionnel que beaucoup disent anachronique, sa théorie est restée valable et essentiellement correcte jusqu'à nos jours.

Sa motivation en l'arrière-plan de l'idéographie était premièrement une recherche des fondements des vérités arithmétiques et deuxièmement une question du type épistémologique : comment pouvons-nous expliquer notre connaissance des vérités arithmétiques, quel est le fondement de notre accès à l'univers des mathématiques, comment pouvons-nous justifier les affirmations que nous faisons en mathématiques ? D'après son programme logiciste, les deux questions sont liées : c'est par le développement de la logique, afin de proposer un fondement et une forme à l'arithmétique, que nous montrons que l'arithmétique est digne de notre croyance.[6] Pour ce faire, Frege devait :

(i) établir un système de logique (l'idéographie), trouver des axiomes plausibles et des règles d'inférences (Frege, 1879) ;
(ii) réduire les nombres et le prédicat « ...est un nombre » à la logique (Frege, 1884) ;
(iii) montrer que les axiomes de Peano qui formalisent l'arithmétique[7] sont des cas spéciaux des règles logiques (Frege, 1893, 1903).

Frege en était à la dernière étape de son programme lorsqu'il échouait avec la découverte du paradoxe de Russell (cf. la sct. 93). Ce paradoxe remettait en question ce qu'il pensait avoir achevé à l'étape (ii) et rendait impossible son programme initial de logicisme. Il existe, cependant, d'importants développements en logique contemporaine qui essayent de sauver l'essentiel du programme Fregeen, en modifiant les détails de sa réduction des mathématiques à la logique.[8] En ce qui concerne (iii), la preuve de l'incomplétude de l'arithmétique par Gödel (cf. sct. 15.5) en a largement montré l'impossibilité, au moins si par « règles logiques » nous entendons des règles d'un calcul adéquat.

Presque aussi important que son programme logiciste étaient les théories en philosophie du langage qu'il développait sur le chemin.[9]

C'était en connexion avec (i) que Frege formulait la première théorie sémantique moderne en 1892 (Frege, 1892b). Cette théorie sémantique apportait une réponse à la question de la signification des expressions bien formées d'une langue.[10]

Par « nom propre » (« Eigenname »), Frege entend une expression qui désigne (au plus) un objet (« nom propre » chez Frege correspond donc à ce que nous appelons aujourd'hui « terme sin-

[5] Nous avons donné quelques exemples de preuves dans cette notation à la p. 94.
[6] Nous avons parlé des motivations épistémologiques de Frege, qui l'opposaient à Kant, à la p. 95.
[7] Nous reviendrons à ces axiomes à la p. 321 et suivantes.
[8] Nous parlerons de ce programme néo-logiciste ou néo-Fregeen à la sct. 15.4.
[9] Dans ma présentation des théories de Frege et de Russell, je suis mes notes du séminaire de philosophie du langage donné par François Récanati et Diego Marconi à l'université de Genève, ainsi que Marconi (1999).
[10] Frege était également le premier à noter l'importance cruciale de la distinction entre l'usage et la mention de mots (cf. ch. 1.7). Selon Frege, beaucoup d'erreurs et confusions en arithmétique naissent d'une confusion entre des nombres et leurs noms (appelés « numéraux ») : « 5 », « V », « le nombre qui suit 4 », « la racine carrée positive de 25 » sont tous des expressions qui désignent un seul nombre, c'est-à-dire le nombre 5.

PROOF

gulier »).[11] Pour Frege, il y a trois catégories fondamentales syntaxiques : (i) les énoncés (phrases déclaratives, « Sätze ») qui désignent une valeur de vérité (soit **v**, soit **f**), (ii) les noms propres qui désignent un objet individuel (« Eigennamen »), (iii) les prédicats (« Begriffswörter ») comme « ...sait bien conduire », « ...est un cheval », « ...court dans la rue », « ...est plus grand que moi », etc. qui désignent des concepts (« Begriffe »).[12]

Dans « Sens et dénotation », Frege (1892b) fait la distinction entre le sens (« Sinn », « sense ») et la référence (ou dénotation, « Bedeutung », « reference ») d'un terme singulier (cf. Frege (1971c) pour une traduction française). Selon lui, un terme singulier comme « le président des États-Unis » a comme référent un individu spécifique, c'est-à-dire Donald Trump dans notre cas, et comme sens une condition que cet individu doit remplir pour être le référent du terme. Comme il traite les énoncés (phrases déclaratives) comme noms propres de valeurs de vérité (des 'objets logiques' qui sont le Vrai **v** et le Faux **f**), la distinction s'applique également au niveau des phrases : le référent d'une phrase est soit le Vrai, soit le Faux, et son sens est ce que Frege appelle une « pensée » (« Gedanke »). La pensée exprimée par une phrase simple est composée des sens des expressions (noms et prédicats) qu'elle contient.[13]

Les termes singuliers, pour Frege (1892b), ont deux propriétés sémantiques : un sens et une dénotation. La dénotation est la chose même (Elisabeth II pour « la reine d'Angleterre », le mathématicien de Jena pour « Gottlob Frege », la ville même pour « Paris », etc.). Le sens, selon Frege, est « le mode par lequel l'objet est donné par le nom ». Dans quel sens peut-on dire que « 5 » et « V » nous « donnent » le nombre 5 dans un certain mode ? La différence de modes est plus visible, p. ex. dans le cas de « la reine d'Angleterre » et « la mère du Prince Charles », expressions qui nous donnent Elisabeth II de différentes manières (cf. p. 33 pour l'exemple de l'étoile du matin et l'étoile du soir). Mais pourquoi ne pourrait-on pas expliquer cette différence comme différence *entre les signes* ? Parce que, selon Frege, une expression n'a une dénotation qu'en tant qu'elle est titulaire d'un ‹ parcours › qui nous porte à sa dénotation (et ce ‹ parcours › peut être appelé « sens » de l'expression en question). Considérons la différence entre les deux phrases suivantes :

$$\text{la reine d'Angleterre} \quad = \quad \text{Elisabeth II} \tag{9.6}$$

Cet énoncé d'identité ne nous donne l'information selon laquelle la reine d'Angleterre est Elizabeth II que si nous comprenons les deux noms utilisés. Comparons (9.6) à la phrase suivante, et feignons une ignorance de la philosophie médiévale :

$$\text{le Docteur subtil} \quad = \quad \text{Duns Scot} \tag{9.7}$$

L'information qui nous est apportée par (9.7) est que la personne qui l'énonce a l'intention d'utiliser ces deux expressions comme noms propres et qu'elle les utilise pour désigner la même chose : (9.6)

[11] Dans la terminologie contemporaine, on réutilise « nom propre » pour une sous-espèce de termes singuliers, i.e. pour des expressions comme « Gottlob Frege » et « Genève ». Ils se distinguent d'autres termes singuliers, appelés « descriptions définies », comme « l'homme le plus riche de Paris », « le nombre qui suit 4 ». Cf. le ch. 9.4 à la p. 233 ci-dessous.

[12] Les noms communs comme « cheval », contrairement à la tradition, ne sont considérés que comme des parties des prédicats. Il faut prendre en compte qu'il y a aussi des noms propres vides comme « le plus grand nombre » et « la volonté générale ».

[13] Nous avons déjà brièvement parlé de la philosophie du langage de Frege à la p. 33 et nous avons introduit le principe de compositionnalité à la p. 14.

PROOF

nous informe sur le monde, bien que (9.7) nous informe sur la langue ; (9.6) nous apprend un fait, (9.7) un nouveau nom. Selon Frege, la bonne explication de ce phénomène est que, dans un certain sens, ce n'est pas l'expression qui a une dénotation, mais l'expression ne donne une dénotation qu'à quelqu'un qui la saisit, c'est-à-dire qui comprend son sens. En somme, une expression n'est attachée à sa dénotation que par l'intermédiaire de son sens.

Or, deux expressions différentes peuvent avoir le même sens : « Pferd », « horse », « caballo », « cheval » ont le même sens (c'est-à-dire qu'elles sont synonymes) ; il va de même pour les mots « cheval » et « destrier », ainsi que pour « et » et « mais ». Les différences entre « et » et « mais » sont des différences de tonalité qui relèvent de la pragmatique, c'est-à-dire des différences qui peuvent se perdre même dans une bonne traduction.[14] La troisième chose, mis à part le sens et la dénotation, est ce que Frege appelle « la représentation » (« Vorstellung ») qui peut être rattachée à une expression (ou plutôt à un usage particulier d'une expression) – qui, cependant, n'est pas une propriété sémantique. Son rôle n'est pas sémantique, mais plutôt d'ordre pragmatique. Selon Frege, une représentation est « une image interne qui s'est constituée sur la base des souvenirs des impressions sensibles que j'ai éprouvé et d'activités, internes et externes, que j'ai effectué ».

En considérant la représentation comme propriété non sémantique, Frege voulait rendre la sémantique purement objective, et également accessible à tout le monde. La représentation, contrairement au sens, est subjective, c'est-à-dire qu'elle varie – en principe au moins – parmi les individus et selon les différentes expériences que ces individus avaient avec la chose dénotée. Le langage, cependant, doit être capable d'exprimer un contenu objectif pour que la communication soit possible (autrement, selon Frege, on devrait dire « mon théorème de Pythagore », « ton théorème de Pythagore », etc.). Mais de fait, la communication et la transmission de notions sont possibles (le contenu du théorème de Pythagore est transmis d'une génération à l'autre). Par conséquent la signification doit être objective et ne peut pas concerner les représentations.[15]

Il semble cependant possible que différentes personnes attachent des sens différents à un mot : pour moi, le sens d' « Aristote » est donné par « le maître d'Alexandre le Grand », pour quelqu'un d'autre, par « l'auteur de la *Métaphysique* ». Dans une note de fin de page (n. 2) qui se trouve parmi les plus énigmatiques dans l'histoire de la philosophie, Frege (1892b) dit que dans certaines bornes de telles variations de sens sont « tolérables ». Même si on admet ceci, il reste vrai qu'il est *possible* que différentes personnes attachent le même sens aux mêmes expressions, tandis qu'il est impossible en principe que différentes personnes associent la même image à une expression. La métaphore utilisée par Frege pour expliquer les relations entre dénotation, sens et représentation dans Frege (1892b) est celle de la lunette. Si j'observe la lune par une lunette, on a affaire à (i) la lune, (ii) une image de la lune dans la lunette, et (iii) une image de la lune sur ma rétine, dans mon œil. (iii), qui correspond à la représentation, dépend de la constitution de mon œil et est donc subjective ou idiosyncratique. (ii), qui correspond au sens, *peut* être le même pour différents observateurs, même si elle est relatif dans le sens où elle dépend de la perspective choisie pour la lunette et même s'il y a d'autres façons possibles de voir la lune. (i), finalement, qui correspond à la dénotation, est entièrement objective et ne dépend d'aucune manière de ses observateurs. À part les choses spatiotemporelles et causales (« wirklich ») et

[14] Il faut se rappeler ici des qualifications que nous avons apporté à cette thèse à la p. 43.

[15] Il s'agit ici d'un type d'argument très controversé, appelé « argument transcendental » et souvent lié au nom de Kant (bien qu'il soit également controversé si Kant a utilisé de tels arguments), un argument qui infère d'une constatation d'un fait empirique (nous arrivons à communiquer des résultats mathématiques) qu'une condition nécessaire pour la possibilité même de ce fait est remplie (ce que nous communiquons est objectif et ne concerne pas notre psychologie).

PROOF

les choses subjectives et psychologiques, Frege conclut qu'il faut reconnaître un ‹troisième royaume› («drittes Reich») de choses objectives, mais abstraites : les sens des expressions, les pensées qu'ils constituent, les concepts, fonctions et nombres.

Comme nous l'avons vu (à la p. 33), Frege commence «Sens et dénotation» (1892b / 1971d) avec un exemple d'un énoncé d'identité qui a une 'valeur cognitive', c'est-à-dire qui nous apprend quelque chose sur le monde. Changeant l'exemple,[16] nous sommes amenés à contraster (9.6) avec l'énoncé :

$$\text{Elisabeth II} \quad = \quad \text{Elisabeth II} \tag{9.8}$$

Contrairement à (9.8), (9.6) nous informe sur le monde, dans le sens qu'elle répond à une question empirique concernant l'identité du monarche britannique. (9.8), par contre, est reconnaissable comme vrai par tout le monde, au moins par toute personne qui sait que «Elisabeth I» est le nom d'une personne réellement existante et qui accepte que l'identité est réflexive, c'est-à-dire que toute chose est identique à elle-même.

(9.6) nous donne une information, nous informe d'un fait empirique que nous aurions pu ignorer. (9.6) est appelé «a posteriori», parce qu'il ne peut être su que sur la base de l'expérience (ex. : «Le chocolat est sucré», «Paris est une plus grande ville que Marseille», «Eau = H_2O»). (9.8), d'autre part, nous informe soit d'une banalité soit de rien du tout. Il est vrai pour tout nom propre «a» que $a = a$.[17] Nous le savons «a priori», puisque nous n'avons pas besoin d'expérience pour le savoir, et parce que nous pouvons nous convaincre de sa vérité par la raison pure (ex. : «2+2=4», «tout célibataire est non marié», «si Sam est plus grand que Maria et Maria est plus grande que Christine, alors Sam est plus grand que Christine»). Il faut entreprendre un long voyage pour trouver que «la solution de l'énigme de la vie = 42», mais on sait dès le départ que «42 = 42» et que «la solution de l'énigme de la vie = la solution de l'énigme de la vie». Une connaissance est dite «a priori» si sa justification (ou au moins une de ses justifications possible) ‹ ne dépend pas de nos sens ›, c'est-à-dire ne fait pas recours à des connaissances que nous avons acquises à travers un de nos cinq sens. Une connaissance qui est justifiable par des considérations non empiriques («dans la chaise-longue») est dite «a posteriori».

Mais comment une affirmation d'identité peut-elle être vraie et a posteriori (informative) en même temps ? La différence entre les deux affirmations d'identité (9.6) et (9.8), si les deux sont vraies, ne peut pas concerner les référents des deux expressions utilisées. Un autre aspect de la signification des nombres propres doit alors être responsable pour la différence en ‹ valeur cognitive› entre (9.6) et (9.8).[18] C'est cet autre aspect que Frege appelle le «sens» d'un nom propre et qu'il identifie à la fois avec sa ‹valeur cognitive› («*Erkenntniswert*») et avec la ‹manière dont le référent est donné› («*Gegebenheitsweise der Bedeutung*»). Cette double identification est importante vu les buts epistémologiques de Frege : c'est parce que les preuves et calculations sont des manières dont leurs

[16] Nous changeons l'exemple pour deux raisons principales. Premièrement, «étoile de soir» («Abendstern») pourrait être pris pour une description définie, comme synonyme à «l'étoile qui brille le plus fort dans le ciel du soir [chez nous, faisant abstraction des satellites, etc.]»). Non seulement est-il controversé si les descriptions définies sont des termes référentiels du tout (elles ne le sont pas d'après la théorie contextualiste de Russell dont on parlera à la p. 234 et suivantes), mais en plus il s'agissait d'une description définie qui est *fausse* de son référent visé, comme Vénus est un planète et non une étoile, ainsi soulevant les questions subtiles de la distinction entre référence sémantique et référence du locuteur (cf. Donnellan, 1978).

[17] En fait, dans notre système de la logique des prédicats, «$a = a$» (pour tout terme «a») est un théorème (cf. le ch. 10.7).

[18] Cette inférence reste sur quelques présuppositions tacites que nous examinerons à la p. 318 et suivantes.

PROOF

conclusions et résultats nous sont donnés, la valeur cognitive de la logique et des mathématiques réside dans le fait qu'elle nous informe sur des vérités objectives, mais abstraites.

C'est grâce à son objectivité que la manière dont l'objet nous est donné (la *Gegebenheitsweise* de l'objet, le sens de son nom) détermine le référent.

En prenant le mode de donation de l'objet comme partie de la signification du nom de cet objet même, Frege alignait la distinction epistémologique entre les connaissances a priori et les connaissances a posteriori avec une autre distinction, sémantique, entre les vérités analytiques et les vérités synthétiques.

Frege distinguait donc des phrases – analytiques – comme (**??**) des phrases – synthétiques – comme (9.7). Une phrase est analytique si et seulement si elle est vraie ou fausse en vertu de sa signification (et donc de la signification des mots qu'elle contient) (ex. « tout célibataire est non marié », « un mari est un homme », « un chat noir est un chat »). Une phrase est synthétique, par contre, si on ne peut ignorer sa vérité même si on comprend sa signification (ex. « Il fait beau », « Je m'appelle « Philipp » »).

Frege identifiait la référence (la dénotation ou l'extension) d'une phrase à sa valeur de vérité et le sens à ce qu'il appelle « une pensée » (« ein Gedanke »). C'est pour cette raison qu'une logique est dite « extensionelle » si elle ne concerne que les valeurs de vérité des phrases qu'elle traite et non pas leurs significations.

La dénotation d'un énoncé est une valeur de vérité, c'est-à-dire soit le Vrai, soit le Faux. Pour Frege, le Vrai et le Faux sont des objets (non physiques, bien sûr) et ils sont les seules valeurs de vérité. Frege donne des arguments pour la thèse selon laquelle *il est possible* de prendre la valeur de vérité comme dénotation d'une phrase. Ses arguments sont basés sur le principe de compositionnalité : la dénotation d'une expression complexe comme l'est un énoncé est une fonction des dénotations de ses parties : si on remplace une partie de l'énoncé par une autre ayant la même dénotation, la dénotation de l'énoncé ne devrait pas changer. Ainsi, ce qui ne change pas si on remplace dans un énoncé une partie avec une expression qui a la même dénotation est la valeur de vérité : les expressions ayant les mêmes dénotations peuvent être substituées les unes pour les autres *salva veritate* (en préservant la valeur de vérité de la phrase en question). La pensée exprimée, cependant, peut changer comme on le voit dans l'exemple suivant :

L'étoile du matin est un corps illuminé par le Soleil. (9.11)

Si on remplace « l'étoile du matin » avec l'expression « l'étoile du soir » qui a la même dénotation (la planète Venus), on obtient :

L'étoile du soir est un corps illuminé par le Soleil. (9.12)

(9.11) et (9.12) ont la même dénotation, mais ils expriment des pensées différentes. Alors la pensée ne peut pas être la dénotation d'un énoncé. Ce qui ne change pas entre (9.11) et (9.12), cependant, est la valeur de vérité. Si (9.11) est vrai, (9.12) l'est également, si (9.11) est faux, le même vaut pour (9.12) ((9.11) et (9.12) sont matériellement équivalents). Frege ne prouve pas que rien d'autre n'est constant entre (9.11) et (9.12) et, plus généralement, dans tous les remplacements qui préservent la dénotation. Il ne démontre donc pas que la dénotation d'un énoncé est une valeur de vérité. Il montre seulement que ce ne peut être la pensée exprimée et que la valeur de vérité satisfait le critère le plus important

PROOF

pour qualifier comme dénotation d'un énoncé (de rester invariant malgré des remplacements de parties par d'autres expressions qui ont la même dénotation). Le deuxième argument de Frege réside dans l'observation selon laquelle nous nous intéressons aux dénotations des termes quand nous voulons connaître la valeur de vérité d'un énoncé ; nous retrouvons ici la distinction principale entre les énoncés assertoriques et ceux de la fiction :

Ulysse débarque à Ithaque. (9.13)

En lisant l'Odyssée, on ne se demande pas si « Ulysse » a bien une dénotation, c'est-à-dire si Ulysse a existé. Si on se demande, cependant, quelle est la valeur de vérité de (9.13) (en lisant l'Odyssée comme texte historique), il devient important de savoir si « Ulysse » a une dénotation.

L'identification de la dénotation des phrases avec leurs valeurs de vérité a comme conséquence que toutes les phrases vraies ont la même dénotation, c'est-à-dire le Vrai, et toutes les phrases fausses dénotent le Faux. Frege l'assume, en disant que ce qui nous intéresse dans l'énoncé, ce n'est pas juste sa dénotation, mais le rapport entre son sens et cette dernière, la manière dont le Vrai (ou le Faux) nous est donné par une phrase. La valeur de vérité n'est que le but, la fin du parcours qui nous intéresse et qui est le sens de l'énoncé.

Le sens d'un énoncé est la pensée exprimée par l'énoncé.[19] Frege (1918a) affirme encore une fois qu'aussi dans le cas des énoncés, les sens (c'est-à-dire les pensées) sont objectifs, même s'ils ne sont pas physiques. Ils existent dans ce que Frege appelle « un troisième règne », un ciel platonicien d'objets abstraits qui sont objectifs, mais non physiques. Les pensées peuvent être saisies et exprimées, mais elles n'appartiennent à personne. Comme les entités mentales, les concepts et les pensées ne sont pas perceptibles, mais ils diffèrent d'elles en étant publiques, objectifs et non pas subjectifs. Une pensée est vraie ou fausse indépendamment du fait qu'on le sache ou qu'elle ait été saisie ou exprimée.[20] Les lois de Kepler étaient vraies avant la naissance de Kepler et, si elles étaient vraies, elles le resteront pour toujours (malheureusement elles sont fausses, comme a fini par le démontrer Einstein).

Bien qu'elle soit assez intuitive, la thèse de Frege que la signification des noms propres a une composante descriptive (le sens) soulève de graves problèmes. Discutons-en de quelques uns.

Un premier problème est intimement lié à la question de savoir comment il faut concevoir le sens fregéen. Appelons une phrase « analytique » s'il est suffisant de la comprendre pour reconnaître sa vérité ou fausseté. Il semble alors que si nous saisissons le sens des expressions d'une phrase que nous comprenons, beaucoup de phrases deviennent analytiques qui intuitivement ne le sont pas. Supposons que le sens du nom propre « Aristote » est donné par « l'élève le plus célèbre de Platon ». Que dire alors de la phrase suivante :

Aristote est l'élève le plus célèbre de Platon. (9.14)

Est-ce que (9.14) est analytique ? a priori ? Il n'est pas clair comment Frege aurait pu le nier. Cependant, nous n'arrivons ni par reflexion sur le sens des mots ni par raisonnement a priori à établir

[19] Et c'est dans ce sens-là qu'on peut dire que pour Frege une pensée est un ‹ mode de donation › d'une valeur de vérité.

[20] Frege fait une distinction traditionnelle (qui se retrouve chez les Stoïciens et Descartes) entre saisir une pensée et juger. Un jugement est l'assertion d'une pensée, mais on peut saisir une pensée sans l'affirmer, p. ex. en posant une question. Le sens de « Marseille est en France. » et « Est-ce que Marseille est en France ? » est le même, mais la force des deux phrases est différentes. Une assertion a une force assertorique, et une question a une force interrogative. Comme nous avons vu à la p. 139, la force assertorique distingue également les assertions des suppositions.

PROOF

si vraiment Aristote était l'élève le plus célèbre de Platon. Une manière de rendre cette critique plus perspicace est de considérer l'énoncé suivant :

Aristote aurait pu ne pas être l'élève le plus célèbre de Platon. (9.15)

(9.15), comme nous le dit Kripke (1972), est vrai – mais comment le peut-il être d'après la théorie de Frege ?[21]

La théorie de Frege soulève un autre problème. Elle doit traiter de contre-exemples apparents contre le principe de compositionnalité tel le suivant :

Copernic croyait que [les orbites des planètes étaient des cercles]. (9.16)

La phrase entière (9.16) est vraie, même si le sous-énoncé « les orbites des planètes sont des cercles » est faux (ce sont des ellipses). Mais si on remplace le sous-énoncé par un autre qui a la même dénotation (le Faux) on obtient un énoncé faux :

Copernic croyait que [la Lune était une poêle]. (9.17)

Le principe de compositionnalité est donc violé dans le cas des expressions comme « Copernic croyait que ... », qu'on appelle, suivant Russell, « attitudes propositionnelles » (puisqu'elles expriment, selon une certaine théorie, des attitudes envers des propositions, conçues comme objets abstraits comme les pensées fregéennes). La réaction de Frege est de conserver le principe de compositionnalité en réinterprétant ces contextes : dans ces contextes-ci (qu'il appelle « contextes indirects ») la dénotation des mots est leur sens ordinaire.[22] Ils ont donc leur sens comme « dénotation indirecte » (dénotation dans des contextes indirectes). La preuve, de l'avis de Frege, est que dans les remplacements par des expressions qui ont le même sens, la valeur de vérité du tout ne change pas.

Copernic croyait que [les parcours des planètes étaient circulaires]. (9.18)

(9.18), où on a remplacé le sous-énoncé par un autre qui a le même sens, a la même valeur de vérité que (9.16) (le Vrai dans ce cas).[23]

[21] Nous reviendrons à la critique référentialiste de Frege et en particulier à cet argument appelé « modal » de Kripke, dans le ch. 12.4.

[22] Frege ne dit presque rien sur le sens indirect, sauf le suivant : «[...] Dans ce cas, la proposition subordonnée a pour dénotation une pensée et non une valeur de vérité ; son sens n'est pas une pensée, c'est le sens des mots « la pensée que... », et ce sens représente une partie seulement du sens de la proposition complexe tout entière. » (Frege, 1971c, 112-113) La question était abordée par Church dans son article « A Formulation of the Logic of Sense and Denotation » Church (1951, 1973, 1974) ; Salmon (1993).

[23] Plus précisément, la structure de l'argument de Frege pour la thèse selon laquelle la dénotation indirecte est le sens direct est la suivante :

1. le principe de compositionnalité (appliqué à la dénotation et aux énoncés) : la dénotation d'un énoncé est une fonction des dénotations de ses parties.
2. (9.16) et (9.17) ont différentes dénotations (le Vrai et le Faux).
3. Donc, ils doivent contenir des parties a et b telles que la dénotation de a est différente de celle de b.
4. Les seules parties a et b desquels cela pourrait être vrai sont les sous-énoncés qui spécifient le contenu de la croyance de Kepler.
5. Donc, la dénotation de a doit être différente de la dénotation de b.
6. Les dénotations « ordinaires » de a et b sont leurs valeurs de vérité qui sont identiques.
7. Donc, a et b ne peuvent pas avoir leurs valeurs de vérité comme dénotations.
8. La seule autre chose qui distingue a et b est leur sens, la pensée qu'ils expriment.
9. Donc, la dénotation de a (b) est la pensée exprimée par a (b).

PROOF

Deux problèmes principaux surviennent alors avec cette théorie de dénotation indirecte : (i) L'idée que les mots n'ont pas la même dénotation dans tous les contextes est contre-intuitive. (ii) Frege ne dit pas clairement ce que c'est pour deux expressions d'avoir le même sens (il ne donne pas de critères de synonymie) et il est alors difficile de savoir quand deux expressions ont la même dénotation indirecte.

Selon la théorie fregéenne des prédicats, la dénotation d'un prédicat comme « ...est une femme », « ...est un animal », « ...aime ... », « ...est le frère de ... » est un concept. Un concept est une fonction dont la valeur est une valeur de vérité. Le concept dénoté par « ...est un homme », par exemple, est une fonction qui prend comme arguments des choses et qui donne comme valeur le Vrai si la chose qu'elle a pris comme argument était un homme, et elle donne comme valeur le Faux dans tous les autres cas (c'est-à-dire dans tous les cas où son argument n'était pas un homme). Comparons la fonction mathématique :[24]

$$f(x) \equiv x^2 \qquad\qquad f(3) = 9$$

à la fonction suivante :

$f(x) \equiv x$ est un homme

(... est un homme) (Socrate) = le Vrai
(... est un homme) (la ville de Paris) = le Faux
(... est un homme) (Xanthippe) = le Faux

Les fonctions, dont les concepts constituent une sous-espèce, sont des entités incomplètes dites « non saturées » qui ont besoin d'un ou de plusieurs objets (d'un ou de plusieurs arguments) pour être complètes. Ce qui caractérise les concepts tient au fait que ce sont des fonctions qui nous donnent des valeurs de vérité (c'est-à-dire soit le Vrai, soit le Faux) comme étant leurs valeurs de vérité.

Cette notion de « fonction » est importante surtout en mathématiques mais également dans la logique des prédicats (cf. p. 51). Une fonction peut être conçue de deux manières :

- Considérée de manière *extensionnelle*, une fonction d'un ensemble de choses A à un ensemble de choses B (qui peut, mais ne doit pas être le même que A) est un ensemble de paires $\langle a_i, b_i \rangle$ tels que les premiers membres (les a_i) appartiennent à A, les deuxièmes (les b_i) à B, et tels qu'un seul a_i ne se trouve en paire qu'avec un seul b_i.[25]
- Considérée de manière *intensionnelle*, une fonction est une règle qui pour chaque argument détermine une valeur. Elle est alors une certaine procédure qui nous prend quelque chose comme ‹ input › et l'utilise pour déterminer le ‹ output ›.

Vu de manière extensionnelle, une fonction est une certaine relation entre des membres de A et les membres de B. Mais il n'est pas le cas que toute relation est une fonction. Pour être fonctionnelle, une relation doit être telle que le premier relatum *détermine* le deuxième. « x aime y », par exemple, est une relation qui a comme extension l'ensemble de paires $\langle a, b \rangle$ tels que a aime b. Pour que cette relation soit également une fonction, il devrait être le cas que tout le monde n'aime qu'une seule personne – que l'aimé soit déterminé par l'amant. Ce n'est que dans ce cas que « la personne aimée par x » dénote, pour toute valeur de x, une personne unique.

[24] Nous utilisons ici « ≡ » pour exprimer une identité entre des fonctions : deux fonctions sont identiques ssi elles correspondent au même ensemble, c'est-à-dire si elles associent aux mêmes arguments les mêmes valeurs.

[25] c'est-à-dire que le a_i *détermine* le b_i dans le sens suivant : qu'il n'arrive jamais que nous avons $\langle a_i, b_j \rangle$ et $\langle a_i, b_k \rangle$ avec deux b_j et b_k différents.

PROOF

Une fonction $f : A \to B$ est alors une relation (un ensemble de paires dont le premier membre appartient à A et le deuxième à B ($\{\langle a, b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$), qui est telle que le choix de a détermine celui de b : il n'est pas le cas qu'on a $\langle a, b'\rangle$ et $\langle a, b''\rangle$ pour deux $b', b'' \in B$ différents :

$$(f(a) = b' \ \wedge \ f(a) = b'') \quad \to \quad b' = b''$$

Toute fonction est une relation et donc un sous-ensemble du produit cartésien de son domaine et de son codomaine. Une relation binaire qui relie des éléments d'un ensemble A et d'un ensemble B est un sous-ensemble de $A \times B$, c'est-à-dire un ensemble de paires $\{\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, \dots\}$ telles que tous les a_i sont des membres de A et tous les b_i sont des membres de B. Une telle relation est une *fonction* si et seulement si le membre de A détermine uniquement le membre de B de son paire, c'est-à-dire ssi $a_1 = a_2 \to b_1 = b_2$ et ainsi de suite pour les autres paires. Comme le membre de B est détérminé sans univoque par son correspondant dans A, on écrit « $f(a_i)$ » pour b_i. Une fonction $f : A \to B$ avec domaine A et codomaine B est une relation, c'est-à-dire un sous-ensemble de $A \times B$ qui satisfait cette condition supplémentaire.

Nous n'avons pas seulement des fonctions à un argument, mais des fonctions de toute arité quelconque : « l'aimé commun de x et y », par exemple, détermine une personne en fonction des préférences sentimentales de *deux* personnes. Dans ce cas-ci, le fonction sera un sous-ensemble du produit cartésien de *trois* ensembles.

Frege n'avait pas encore à sa disposition cette conception ‹ensembliste› de la notion de « fonction », mais la considérait comme une généralisation du concept « concept ». Pour Frege, un concept (« Begriff ») n'est pas une entité linguistique, mais quelque chose qui appartient au monde – non pas au monde spatio-temporel, ni au monde intérieur de nos psychologies, mais à un troisième royaume (« drittes Reich »), peuplé des choses abstraites comme les nombres et les formes géométriques. L'application d'un concept à quelque chose qui le sature (un objet) est donc un processus ontologique, qui nous donne une entité, un objet, qui est soit le Vrai, soit le Faux.

Un concept ne doit pas être confondu avec son extension, qui est appelé son « parcours de ses valeurs » (*Wertverlauf*). Le parcours des valeurs du concept HOMME qui est dénoté par le prédicat « ...est un homme » peut être décrit comme suit (où « **v** » dénote le Vrai, et « **f** » dénote le Faux, ici pris comme chez Frege pour des ‹objets logiques›, cf. la p. 38) :

$$\langle \text{Socrate}, \mathbf{v}\rangle, \langle \text{la ville de Paris}, \mathbf{f}\rangle, \langle \text{Xanthippe}, \mathbf{f}\rangle, \langle \text{Platon}, \mathbf{v}\rangle, \langle \text{le numéro 2}, \mathbf{f}\rangle, \langle \text{la couleur vert} \mathbf{f}\rangle, \langle \text{Trump}, \mathbf{v}\rangle, \langle \text{l'homme le plus riche au monde}, \mathbf{v}\rangle, \dots \quad \text{(WV)}$$

De manière équivalente, on peut écrire :

$$\{\text{Socrate, Platon, Trump, l'homme le plus riche au monde, ...}\} \quad \text{(WV*)}$$

(WV*) est ce qu'on avait, avant Frege, traditionnellement considéré comme l'*extension* du concept HOMME. C'est cette extension que Frege identifiait avec le parcours des valeurs et ce qui, à partir de Carnap (1947), était normalement considérée comme la dénotation d'un prédicat (cf. la p. 37). Après Frege, « ...est un homme » était donc conçu comme le prédicat qui a l'ensemble spécifié par (WV*) comme dénotation.

Ce n'était pas l'avis de Frege. Pour Frege, concevoir la dénotation d'un prédicat comme un concept était la seule manière de rendre compte de l'unité de la proposition, c'est-à-dire du fait que la signification d'un énoncé est un tout intégral qui résulte de la composition de ses constituants. Frege s'est

PROOF

demandé comment quelque chose de saturé comme l'est un parcours de valeurs pourrait se relier à quelque chose d'autre de complet (un objet)? Comment les deux pourraient tenir ensemble ? Frege n'a vu aucune possibilité et en a donc conclu qu'il fallait quelque chose de non saturé (non seulement au niveau des expressions mais) également au niveau ontologique, le niveau de la dénotation.

Le tout dénoté par une phrase est une valeur de vérité, et elle est dénoté par le biais de ce qu'exprime la phrase, chose que Frege appelait « une pensée » (« Gedanke »). Comme la valeur de vérité spécifique d'une phrase résulte de la combinaison d'un concept et d'un objet (ce que Frege appellait la « saturation » du concept par l'objet), une pensée résulte de la combinaison du sens d'un nom et du sens d'un prédicat.

Le sens d'un prédicat est une manière de concevoir la fonction qui est le concept dénoté par ce prédicat. Prenons comme exemples :

$$2 \cdot x \cdot x + 2 \qquad\qquad 2(x^2 + 1)$$

Selon Frege, ces deux expressions dénotent le même concept, mais elles ont des sens différents. Elles nous donnent le même concept (la même fonction) mais de deux manières différentes.

Pour la logique traditionnelle, les expressions n'ayant pas la structure nom–prédicat comme « tout homme est mortel » posaient problème. Frege les a résolues d'un coup de génie, en donnant une forme conditionnelle à ces énoncés :

« Tout homme est mortel. » $\rightsquigarrow$ « Si une chose est un homme, alors cette chose est mortelle. »

Dans l'analyse de Frege, le sujet grammatical (« tout homme ») ne coïncide plus avec le sujet logique (toutes les choses). La phrase, contrairement aux apparences, ne prédique que conditionnellement de toute chose[26] que si elle est un homme, alors elle est mortelle. La forme logique ne coïncide donc pas avec la forme superficielle de l'énoncé en question. La forme logique d'un énoncé exhibe ses conditions de vérité : elle ne concerne que ce qui, pour Frege, est crucial à l'interprétation de n'importe quel énoncé, c'est-à-dire la manière dont cet énoncé dénote sa dénotation (une valeur de vérité), c'est-à-dire au sens de l'énoncé (la pensée qu'il exprime).

Plusieurs questions se posent :

- Comment peut-on être sûr d'arriver à un niveau où le langage ne nous trompe pas mais où il nous sert comme indice de sa vraie forme logique ?
- Comment savoir si telle ou telle formule est la vraie forme logique d'un énoncé ? Comment reconnaître cette vraie forme logique ?

Frege était convaincu qu'un langage idéal, où il n'y a pas de différence entre forme grammaticale et forme logique, était possible, et il croyait que son idéographie était une bonne approximation d'une telle langue.

La sémantique contemporaine est une sémantique référentialiste (qui s'occupe principalement d'assigner des référents à des expressions). Dans sa version la plus naïve, une telle sémantique se limite à cette tâche principale. Frege critiquait cette théorie en ajoutant un autre niveau, celui du sens. Ses arguments principaux étaient les suivants :

[26] Les quantificateurs, c'est-à-dire $\forall x$ (« pour n'importe quel x ») et $\exists y$ (« il y a au moins un y tel que »), sont eux-mêmes des concepts, notamment des concepts de deuxième ordre, c'est-à-dire des concepts qui s'appliquent à et sont saturés par des concepts (cf. n. 34 à la p. 208).

PROOF

1. Le problème des énoncés d'identité vrais comme « Superman = Clark Kent » (« Superman c'est Clark Kent »). Une sémantique naïve n'a que deux choix pour analyser un tel énoncé vrai : soit on parle d'une seule et même chose Superman / Clark Kent (et dit d'elle qu'elle est identique à elle-même), soit on parle des expressions (et dit que les deux expressions dénotent la même chose). Mais, intuitivement, une information spécifique est exprimée par cet énoncé (ce qui exclut la première option) qui n'est pas seulement une information sur notre langage (ce qui exclut la deuxième option).
2. Le problème des énoncés fictionnels et des noms propres vides : « Superman c'est Clark Kent » nous donne une information même si nous savons très bien que cette personne n'existe pas. L'absence de référent n'empêche pas qu'il y ait quelque chose que l'on saisit lorsqu'on comprend une phrase qui contient un tel nom propre vide. La même chose vaut pour des noms fictionnels comme « Ulysse ».
3. Le problème de l'attribution des croyances : On ne veut pas attribuer à des personnes manifestement rationnelles des croyances irrationnelles. Lois Lane admire Superman, mais elle n'aime pas trop Clark Kent. Elle a donc toutes sortes d'attitudes qui seraient, selon la sémantique naïve, des attitudes contradictoires, en particulier des croyances : elle croit que Superman peut voler, et que Clark Kent ne le peut pas. La théorie du sens, en associant différents contenus conceptuels avec les deux mots, nous permet de dire que Lois Lane a des croyances à propos de la même chose (Clark Kent, c'est-à-dire Superman), mais sous deux modes différents.
4. Le problème des énoncés existentiels : Si le référent était le seul contenu d'un nom propre, les énoncés d'existence comme « Superman existe » ou « Superman n'existe pas » n'auraient un contenu que si Superman existait. Il semble, cependant, que ces énoncés aient un contenu qui dépasse le niveau du référent seul.

Nous reviendrons sur la critique de cette théorie dans le ch. 12.4. Avant de nous pencher sur les objections philosophiques, cependant, nous examinerons l'utilité de cette théorie pour la sémantique formelle de la logique des prédicats.

9.3 Être vrai et être vrai de

Pour dire qu'une phrase ouverte est satisfaite par (ou vraie d') un certain individu, nous formons ce que nous appellerons une « *phrase singulière* ». Une phrase singulière est une phrase qui contient un nom d'au moins un individu particulier et prédique un prédicat de cet individu (ou une relation de plusieurs individus).[27] Pour dire que Sam est triste, par exemple, nous disons que Sam satisfait la phrase ouverte « ... est triste » ou que cette phrase ouverte est vraie de Sam. Pour désigner Sam nous utilisons dans la logique des prédicats ce qu'on appelle une « *constante individuelle* », par exemple « a ». Pour dire que a satisfait la phrase ouverte « Fx », nous appliquons la fonction représentée par « Fx » à un argument, représenté par une constante individuelle :

$$Fa \tag{1}$$

[27] Nous appelons « individu » n'importe quelle chose dénotée par une constante individuelle. Même si normalement nos individus sont des « substances premières » dans le sens aristotélicien du terme (Sam, sa maison, ses dents et le bout de viande qui se trouve entre elles), rien ne nous empêche de traiter comme individus des évènements (son mariage), des tropes (la blancheur non répétable de son visage), des espèces (homo sapiens sapiens) ou substances secondes (l'humanité).

PROOF

(1) est la forme générale d'une phrase simple dans la logique des prédicats et consiste de trois éléments : un constante individuelle (un terme singulier, « a »), un prédicat (une phrase ouverte, « Fx »), et l'application de la fonction dénotée par « Fx » à l'argument a (représentée par la juxtaposition de « F » et « a »).

Selon son interprétation fregéenne, la phrase singulière (1) désigne la valeur de la fonction Fx pour l'argument a – comme les prédicats sont des fonctions d'individus à des valeurs de vérité, cette valeur est **v**, le Vrai, si Sam est triste, et elle est **f**, le Faux, s'il n'est pas le cas que Sam est triste.

Il y a cependant d'autres phrases que les phrases singulières. Quand je dis que tous les pingouins sont heureux, par exemple, ou qu'il y a un philosophe irlandais, je ne parle d'aucun pingouin et d'aucun philosophe en particulier. Il n'y a pas d'individu spécifique dont je prédique être un pingouin heureux ou un philosophe irlandais. Nous appellerons de telles phrases qui ne sont pas singulières des *« phrases générales »*.

C'est pour le traitement des phrases générales que nous utilisons des quantificateurs et des variables. Pour dire que le prédicat « x est un philosophe irlandais » est vrai d'au moins une chose, je quantifie existentiellement sur l'occurrence de la variable « x » dans cette phrase ouverte, obtenant « $\exists x$(x est un philosophe irlandais) ». Pour dire que le prédicat « x est heureux » est vrai de tous les pingouins, je coordonne l'occurrence de « x » dans « x est heureux » avec l'occurrence de « x » dans « x est un pingouin » en quantifiant les *deux* occurrences par le *même* quantificateur : « $\forall x$(x est un pingouin $\rightarrow$ x est heureux) ».

C'est dans le fait qu'elle rende possible une telle coordination que réside l'utilité de la quantification. Dans le langage naturelle, nous obtenons le même effet avec les pronoms. Examinons l'exemple suivant :

> Sam adore Maria. Malheureusement, il n'est venu qu'une fois qu'elle était déjà partie. (9.19)

Grâce à l'accord du genre, nous comprenons que c'est Sam qui est venu quand Maria était déjà partie. Mais ceci n'est pas possible dans l'exemple suivant :

> Maria voulait voir sa soeur. Malheureusement, elle n'est venue qu'une fois qu'elle était déjà partie. (9.20)

Par (9.20), nous ne savons pas si Maria ou sa soeur est partie. Pour désambiguer de telles phrases, nous sommes souvent forcés à utiliser des locutions peu élégantes :

> Maria voulait voir sa soeur. Malheureusement, elle n'est venue qu'une fois que cette dernière était déjà partie. (9.20+)

Les variables nous permettent une désambiguation plus élégante :

> Maria (x) voulait voir sa soeur (y). Malheureusement, x n'est venue qu'une fois que y était déjà partie. (9.20∗)

Les variables nous donnent ainsi un moyen efficace de rendre compte des liens anaphoriques entre termes singuliers : elles nous disent quels termes ‹ héritent › leurs référents de quels autres.

Les variables nous permettent également de construire des prédicats complexes.

Utilisant les mêmes signes que pour les connecteurs propositionnelles, nous pouvons former des prédicats complexes à partir des prédicats simples, remplaçant les conditions de vérité (pour des phrases) par des conditions de satisfaction (pour des prédicats) :[28]

[28] Nous ferons ceci avec beaucoup plus de rigueur dans le ch. 10.2, utilisant la notion clef d' « interprétation ».

PROOF

C¬ : Un objet *a* satisfait « $\neg Fx$ » si et seulement si *a* ne satisfait pas « Fx ».
C∧ : Un objet *a* satisfait « $Fx \wedge Gx$ » si et seulement si *a* satisfait « Fx » et *a* satisfait « Gx ».
C∨ : Un objet *a* satisfait « $Fx \vee Gx$ » si et seulement si *a* satisfait « Fx » ou *a* satisfait « Gx ».
C → : Un objet *a* satisfait « $Fx \rightarrow Gx$ » si et seulement si soit *a* ne satisfait pas « Fx », soit *a* satisfait « Gx ».
C ↔ : Un objet *a* satisfait « $Fx \leftrightarrow Gx$ » si et seulement si soit *a* satisfait « Fx » et « Gx », soit ne satisfait ni « Fx » ni « Gx ».

Au niveau de leurs extensions, ces conditions de satisfaction correspondent à des opérations entre des ensembles : la négation d'un prédicat aura comme extension le *complément* de l'extension du prédicat nié, la conjonction l'intersection des extensions des deux disjoints et la disjonction leur union.

Comme les phrases ouvertes ne sont ni vraies ni fausses, mais seulement vraies ou fausses *de* certains objets, la sémantique des connecteurs qui les relient ne peut pas être donnée par des tables de vérité. C'est pourquoi nous utilisons un autre concept fondamental de la sémantique, celui de satisfaction, pour expliquer leurs significations : la condition **C∧**, par exemple, donne la signification (c'est-à-dire les conditions de satisfaction) du prédicat complexe « $Fx \vee Gx$ » en termes de la signification (les conditions de satisfactions) des deux prédicats simples « Fx » et « Gx » :[29] le principe de compositionnalité ne s'applique alors pas aux phrases entières, mais à des phrases ouvertes.

La condition **C¬** a une importance particulière. C'est elle qui garantit que nos prédicats sont entièrement définis (ce que nous avons déjà observé à la p. 205) : que pour tout objet dont nous voulons parler, le prédicat en question est ou bien vrai de cet objet ou bien faux de cet objet. Ceci nous oblige, par exemple, de compter comme fausses des phrases comme « César est impair », et comme vraies des phrases comme « Il n'est pas le cas que César est impair » et « Soit César est impair soit il ne l'est pas ».

Combinant les prédicats plus simples en des prédicats plus complexes, il est d'une importance crucial de tenir compte de l'identité ou de la diversité des variables. Il existe une grande différence entre le prédicat à deux places « *x* aime *y* » et le prédicat à une place « *x* aime *x* ». Le premier est satisfait par des paires d'objets qui sont telles que leur premier membre aime leur deuxième membre. Le deuxième est satisfait par des objets qui s'aiment eux-mêmes. Cette différence doit être maintenue même dans le cas où la paire qui satisfait le premier prédicat contient la même chose deux fois : si Sam aime Marie, et Marie s'aime lui-même, les deux paires ⟨ Sam, Marie ⟩ et ⟨ Marie, Marie ⟩ ont en commun qu'elles sont liées par une relation d'amour. Nous pouvons alors conclure qu'il y a deux personnes qui aiment Maria, ou que Sam aime une personne qui s'aime elle-même. Comment pouvons nous expliquer cette différence entre « *x* aime *y* » et « *x* aime *x* » si les variables n'ont pas de propriétés sémantiques intrinsèques et s'il n'y a pas, par conséquent, de distinction entre les deux phrases ouvertes « *x* chante » et « *y* chante » ?

Nous devons faire une distinction entre ce que nous appelerons les « mot-tokens » et les « mot-types ». « Mot », en effet, est ambigu, et les deux sens correspondent aux deux réponses possible à la question de savoir combien de mots se trouvent dans le carré suivant :

Robinson

[29] Comme dans le cas des phrases, nous voulons, à strictement parler, donner les conditions de satisfaction pour *n'importe quel* prédicat conjonctif, quoi que soit sa complexité logique. C'est pourquoi nous utiliserons des lettres grecques (« $\phi(x)$ », « $\psi(x, y)$ », etc.) dans notre traitement rigoureux dans la prochaine leçon.

PROOF

Dans un premier sens de « mot », la réponse à la question est « 2 », dans un autre elle est « 1 » : j'ai écrit le *même* mot *deux* fois. Il s'agit d'un seul *type* (« mot-type »), mais de deux *token* (« mot-token »).[30] Le compteur de 'mots' de mon logiciel de texte compte les mot-tokens, bien que l'annonce sur mon dictionnaire qu'il contient 20000 'mots' compte les mot-types.

La distinction entre types et tokens est d'une importance particulière pour l'interprétation des variables. Un quantificateur relie et quantifie sur toutes les tokens de la variable-type qui le suit qui se trouvent dans sa portée. Dans « $\exists x(Fx \wedge Gx \wedge Hy)$ », par exemple, les variable-tokens qui suivent « F » et « G » sont liées par le quantificateur existentiel, bien que la variable-token qui suit « H » ne l'est pas, puisqu'elle appartient à un autre type. C'est en comptant les variable-types que nous disons que les phrases ouvertes « x aime y » et « x trouve y chez z » ne contiennent que des occurrences libres de variables, et « x aime y » et « x change » qu'une seule.

9.4 Les termes singuliers

Une lacune dans une phrase ouverte indique la place où un terme singulier doit être placé, et les quantificateurs nous servent à quantifier sur ces lacunes, en disant que toutes les choses satisfont ou au moins une chose satisfait la phrase ouverte en question. Mais que sont ces termes singuliers ?

Nous avons dit (à la p. 33) qu'un terme singulier est une expression qui, en vertu de sa forme logique, ne désigne qu'au plus un objet, chose qui est appelée son « référent » ou, plus généralement, sa « désignation ». Selon la classification traditionnelle d'Aristote, c'est ce dont quelque chose (un prédicat) est prédiqué ou dit et ce qui ne peut pas être dit d'autre chose (de la manière d'un prédicat). Le propre d'un terme singulier est sa relation de désignation ou de référence à un et un seul objet précis. Les variables, sous une assignation de valeurs, reçoivent aussi une désignation et peuvent ainsi également être comptées sous la catégorie des termes singuliers. À part les variables, nous reconnaissons au moins trois autres types de termes singuliers : les noms propres, les indexicaux et les descriptions définies.

Les noms propres, comme « Maria », « Paris » et « Frege » désignent au plus un individu. Dans beaucoup de cas, ils sont introduits par un acte de baptême qui établit une relation avec leur référent. Ils ne nous servent qu'à parler de leur référent et ne nous fournissent aucune autre information sur ce dernier. Dans le cas où un nom propre n'a pas de référent, le nom ne remplit pas sa fonction : il est dénué d'intérêt et appelé *vide*.

Les descriptions définies, par contre, désignent leur référent par l'intermédiaire de leur contenu descriptif : même si nous ne savons peut-être pas qui est la personne la plus riche au monde, nous savons au moins que le référent de « la personne la plus riche au monde » est la personne la plus riche au monde, qu'elle est plus riche que moi, qu'elle est une personne, etc. Nous déduirons cette information du contenu descriptif de cette description définie.

[30] Des ambiguïtes de ce type se trouvent dans beaucoup de contextes. Si on me demande, par exemple, combien de plantes j'ai dans mon jardin, combien de séries télévisées j'ai vu dans ma vie et combien de livres j'ai sur ma bibliothèque, mes réponses varieront en fonction de si je compte les types ou les tokens.

PROOF

Parmi les termes singuliers, la philosophie du langage distingue au moins trois sous-espèces d'expressions : un nom propre, comme « Sam » ou « Paris », est une expression qui se réfère « directement » à un objet ;[31] une expression indexicale, comme « ceci », « je » ou « maintenant », désigne son référent par l'intermédiaire d'un contexte d'énonciation ;[32] et une description définie comme « le roi actuel de France » et « l'homme dans le coin » désigne au moyen de son contenu descriptif (le prédicat à l'aide duquel il est formé, « ... est le roi actuel de France », « ... est l'homme dans le coin »). En logique des prédicats, nous ne formalisons par des constantes individuelles que des noms propres.

Nous pouvons distinguer ces différentes catégories de termes singuliers par rapport à la question si leurs référents peuvent varier avec le contexte d'énonciation et le contexte de l'évaluation. Le contexte de l'énonciation est celui du locuteur : il détermine par exemple le référent de « je ». Comme nous l'avons déjà vu à la p. 16, les langues naturelles contiennent souvent des expressions dites « indexicales ». Le contexte de l'évaluation est la situation par rapport à laquelle l'énonciation est évaluée :[33] « l'homme le plus grand dans la salle » désigne différentes personnes par rapport à différentes salles. Nous distinguons ainsi

1. noms propres (« Sam ») : leurs référents ne varient ni avec le contexte d'énonciation ni avec celui de l'évaluation ;[34]
2. descriptions définis (« la lune de la terre », « le maître de Platon ») : leurs référents varient avec le contexte de l'évaluation, mais pas avec le contexte de l'énonciation ;[35]
3. les indexicaux (« je », « tu », « maintenant », « ici ») : les référents varient avec le contexte d'énonciation, mais pas avec celui de l'évaluation ;[36]
4. les démonstratives (« celui-ci », « cet homme-là ») : les référents varient avec le contexte de l'énonciation (référence à l'objet salient), mais pas avec le contexte de l'évaluation.

Russell (1905) appelle « descriptions indéfinies » des expressions comme « un homme », « un chat » et « descriptions définies » des expressions comme « la reine d'Angleterre », « mon oncle », etc. (que nous rangeons parmi les termes singuliers). Selon Russell le traitement fregéen des descriptions définies les traite de la même manière que ce que nous appelons « noms propres », c'est-à-dire des expressions comme « Scott » et « Russell »), entraîne des violations du principe de compositionnalité :

P1 Georges IV voulait savoir si Scott était l'auteur de *Waverley*.
P2 L'auteur de *Waverley* = Scott.
C Donc, Georges IV voulait savoir si Scott était Scott.

[31] Ceci a été contestée par beaucoup de philosophes de langage, en particulier par Frege (1892b) (traduction française : Frege (1971c)). Je suis ici la thèse célèbre de Saul Kripke (1972) que les noms sont des « désignateurs rigides » (traduction française : Kripke (1982)). On reviendra au ch. 14.7 sur cette thèse controversée.

[32] Ceci, au moins, d'après l'analyse classique et communément accepté qu'en a donné David Kaplan (1989).

[33] Nous reviendrons à ces notions en rapport avec la sémantique dite « bi-dimensionnelle » au ch. 14.7.

[34] D'après Kripke. Mais quoi dire des « noms propres descriptifs » comme « Rolling Stones » ou « la vierge Marie » ? Cf. Corazza (2002) pour une sorte de réponse.

[35] Avec l'exception des descriptions définis « rigidifiées » comme « la lune actuelle de la terre », et peut-être aussi des descriptions définis utilisées « référentiellement » : « l'homme avec le martini », dans une situation où il n'y a qu'une personne mâle buvant un liquide transparent qui est salient dans le contexte de l'énonciation(cf. Donnellan, 1966).

[36] Mais quoi dire de « je suis ici maintenant », « demain n'est pas aujourd'hui » ? Cf. Kaplan (1989) sur les tautologies de la logique des indexicaux.

PROOF

Le problème est que (**P1**) est tout à fait possible (*Waverley* est paru sous forme anonyme), et que (**P2**) est vrai, mais que (**C**) est très probablement faux. La réponse de Frege à ce problème, comme nous l'avons vu à la p. 223, c'est que les expressions « Scott » et « l'auteur de *Waverley* », bien qu'ils aient la même dénotation, n'ont pas la même dénotation indirecte (le même sens) et que donc (**P2**) ne suffit pas pour légitimer la transition de (**P1**) à (**C**).

Russell, rejétant la notion de sens, ne pouvait pas adapter cette solution au problème posé par l'inférence invalide. Il lui fallait donc une autre solution. Son idée était que penser les descriptions comme ayant des valeurs sémantiques précises était en général une erreur – il proposait donc de traiter « un homme » et « la reine d'Angleterre » de la même façon que Frege avait traité l'expression « tout homme ».

Rappelons l'analyse fregéenne des descriptions indéfinies :

Il y a un homme chauve.		
Il y a des hommes qui sont chauves.	$\rightsquigarrow$	$\exists x(x$ est un homme $\wedge x$ est chauve
Certains hommes sont chauves.		

Les trois expressions de la colonne de gauche ont la même forme logique. Dans cette forme logique, il n'y a aucune expression qui ne corresponde à l'expression « un homme » en tant que telle.[37] Russell appliquait le même traitement – *contre* Frege – également à des descriptions définies. Il analysait donc les trois phrases suivantes de la même façon :

J'ai rencontré un homme.	$\rightsquigarrow$	$\exists x(x$ est un homme $\wedge$ j'ai rencontré $x)$
L'actuelle reine d'Angleterre est riche.	$\rightsquigarrow$	$\exists x(x$ est reine d'Angleterre
		$\wedge$ toute reine d'Angleterre $= x \wedge x$ est riche.)
L'actuelle reine de France est riche.	$\rightsquigarrow$	$\exists x(x$ est reine de la France
		$\wedge$ toute reine de la France $= x \wedge x$ est riche.)

L'analyse d'une utilisation d'une description définie donnée par Russell lui donne donc trois parties :

Il y a une reine d'Angleterre	$\exists x(x$ est reine d'Angleterre	condition d'existence
Il n'y en a qu'une seule.	toute reine d'Angleterre $= x$	condition d'unicité[38]
Elle est riche.	x est riche	prédication

Il n'y a aucun constituant dans la forme logique de « la reine d'Angleterre est riche » qui ne corresponde à « la reine d'Angleterre ». Le sujet logique (l'objet sur lequel porte la prédication) de cette phrase n'est donc pas la reine d'Angleterre. La phrase ne parle pas de Elisabeth II, l'actuelle reine d'Angleterre. La spécificité de cette analyse se montre surtout dans l'application à des descriptions définies n'ayant pas de dénotation. S'il n'y a pas de reine de France, alors « L'actuelle reine de France est riche. » est faux – et toute autre proposition à propos de la reine de France l'est aussi. Si au contraire on traitait « l'actuelle reine de France » comme un nom, comme le proposait Frege, on serait obligé de dire que« L'actuelle reine de France est riche. » n'est ni vrai, ni faux : on ne saurait trouver la reine de France ni parmi les objets qui sont riches, ni parmi ceux qui ne sont pas riches. Donc, dit Russell,

[37] On a « ...est un homme », mais cette expression est un prédicat et n'est pas une description indéfinie.

[38] Plus formellement, nous pouvons spécifier cette deuxième condition comme suivant : $\forall y(y$ est reine de l'Angleterre $\rightarrow y = x)$ (pour tout y, si y est reine d'Angleterre, alors $y = x$; toutes les reines d'Angleterre sont identiques à x).

PROOF

le principe du tiers exclu serait violé.

Quelle valeur de vérité faut-il attribuer à une phrase comme :

Le roi de France est chauve. (9.21)

Russell (1905) répondait à cette question en donnant la forme logique suivante à (9.21) :

$$\exists x(RFx \wedge Cx \wedge \forall y(RFy \rightarrow x = y)) \quad (9.21+)$$

Traduit littéralement, (9.21+) dit qu'il y a un individu qui est le roi de France (RF) et qui est chauve (C), et que tout individu y qui est le roi de France est identique à x. (9.21)est donc interprétée comme disant qu'il y a au moins un roi de France et qu'il est chauve et est donc faux si, comme c'est le cas, la France est une république.

La solution que Russell rejette est exactement celle que Frege choisit. Selon Frege, on *présuppose* normalement que les termes singuliers utilisés ont une dénotation ;[39] dans une langue idéale et parfaite, il serait assuré que toute expression a une dénotation. Si la présupposition que tous les termes singuliers utilisés ont une dénotation n'est pas satisfaite, les phrases en question (« la reine de la France est chauve », « la reine de la France n'est pas chauve ») ne sont ni vraies ni fausses. Si on acceptait l'analyse de Russell, nier l'énoncé « l'actuelle reine de France est riche » serait affirmer « soit l'actuelle reine de France n'est pas riche, soit « l'actuelle reine de France » n'a pas de dénotation ». Mais ceci paraît peu plausible. Nous ne pouvons pas à la fois nier que certains termes ont des dénotations et contester les affirmations qui utilisent ces termes.

Il y a donc deux solutions : une solution « superficialiste », celle de Frege, qui traite « l'actuelle reine de la France » comme un constituant véritable de « L'actuelle reine de France est chauve », et une solution « profondiste », celle de Russell, où l'expression « la reine de la France » n'apparaît pas comme constituante (logique, au moins) de la phrase en question.

Contre la solution superficielle, on peut remarquer qu'il serait assez bizarre que le langage, qui a évolué sous des pressions et influences très diverses, montre sa forme logique à la surface. Contre la solution profondiste, on peut remarquer que sa tentative de rendre le langage raisonnable en corrigeant ses 'fautes' et le rendre conforme à une ontologie plausible et acceptable présuppose que le langage soit, au fond, 'raisonnable'. Mais il serait tout à fait surprenant que le langage, qui s'est formé il y a des milliers d'années sous la pression de toutes sortes de circonstances, soit raisonnable, c'est-à-dire conforme à nos critères actuels de rationalité.

Les descriptions définies présentent un autre problème. Considérons :

Je croyais votre yacht plus grand qu'il ne l'est. (9.22)

Il est possible qu'il y ait plus d'hommes qu'il y en a. (9.23)

Il me semble que le nombre des planètes est plus grand que 9. (9.24)

À première vue, ces trois affirmations sont sensées et pourraient être vraies. Mais toutes permettent une interprétation selon laquelle elles sont fausses :

Je croyais que la taille de votre yacht ≠ la taille de votre yacht. (9.22+)

[39] C'est Strawson qui a défendu cette analyse fregéenne des présuppositions existentielles contre Russell (cf. Strawson, 1950, 1961).

PROOF

Il est possible que le nombre des hommes > le nombre des hommes. (9.23+)

Il me semble que 8>9. (9.24+)

Heureusement, elles permettent, cependant, aussi une autre interprétation :

La taille de votre yacht = n et je croyais que la taille de votre yacht ≠ n. (9.22∗)

Le nombre des hommes = n et il est possible que le nombre des hommes > n. (9.23∗)

Il me semble que le nombre des planètes >9. (9.24∗)

On dit que (9.22+), (9.23+) et (9.24+) donnent une interprétation « étroite » (« narrow scope ») aux occurrences « la taille de votre yacht », « le nombre des hommes », « le nombre des planètes » dans (9.12), (9.23) et (9.24) respectivement (l'interprètent comme des occurrences *primaires* dans la terminologie de Russell), tandis que(9.22∗), (9.23∗) et (9.24∗) en donnent une interprétation « large » (« wide scope ») et l'interprètent comme des occurrences *secondaires*.

Selon Russell, une telle ambiguïté se montre aussi avec les descriptions définies qui manquent de dénotation. Considérons encore une fois la phrase (9.21) :

Le roi de France est chauve. (9.21)

Nous avons vu que Russell (1905) a donné la forme logique (9.21+) à (9.21) :

$$\exists x(RFx \wedge Cx \wedge \forall y(RFy \rightarrow x = y)) \tag{9.21+}$$

Qu'arrive-t-il maintenant si nous formons la négation de (9.21) :

Le roi de France n'est pas chauve. (9.25)

Pour formaliser (9.25), nous avons le choix entre deux options :

$\neg\exists x(RFx \wedge Cx \wedge \forall y(RFy \rightarrow x = y))$
(« Il n'est pas le cas qu'il y a un unique roi de France et qu'il est chauve. ») (9.25+)

La phrase serait donc vraie et l'occurrence de « le roi de France » serait secondaire (« wide scope »). Mais on pourrait formaliser (9.25) aussi ainsi :

$\exists x(RFx \wedge \neg Cx \wedge \forall y(RFy \rightarrow x = y))$
(« Il y a un unique roi de France qui n'est pas chauve. ») (9.25∗)

Cette phrase, où « le roi de France » a une occurrence primaire (« narrow scope »), est fausse. Le roi de France n'est ni chauve ni non chauve puisqu'il n'existe pas :

> By the law of excluded middle, either « A is B » or « A is not B » must be true. Hence either « the present King of France is bald » or « the present King of France is not bald » must be true. Yet if we enumerated the things that are bald, and then the things that are not bald, we should not find the present King of France in either list. Hegelians, who love a synthesis, will probably conclude that he wears a wig. (Russell, 1905, 485)

[39] Traduction française : « Par la loi du tiers exclu, soit « A est B », soit « A est non B » doit être vrai. Dès lors, soit « l'actuel Roi de France est chauve », soit « l'actuel Roi de France n'est pas chauve » doit être vrai. Cependant, si nous énumérions toutes les choses qui sont chauves, et toutes les choses qui ne sont pas chauves, nous ne devrions pas trouver l'actuel Roi de France dans aucune de nos deux listes. Les Hégéliens, qui adorent les synthèses, concluraient probablement qu'il porte une perruque. ».

PROOF

Russell en tirait la conclusion que toutes les propositions à propos du roi de France peuvent être traitées comme fausses :

> Thus all propositions in which « the King of France » has a primary occurrence are false ; the denials of such propositions are true, but in them « the King of France » has a secondary occurrence. Thus we escape the conclusion that the King of France has a wig. (Russell, 1905, 490)

9.5 La formalisation dans la logique des prédicats

La combinaison avec un nom n'est pas la seule manière dont une phrase ouverte peut devenir une phrase et être vraie ou fausse. Considérons les phrases suivantes :

A1 Tous les philosophes sont mortels.
B1 Il n'y a rien d'entièrement noir qui est entièrement rouge.
3.1 Quelques pingouins sont heureux.
D1 Quelques animaux ne sont pas des pingouins.

Les phrases **A1** à **D1** sont complètes mais ne contiennent pas de nom : elles expriment des phrases générales (qui correspondent aux quatre types de phrases catégorielles étudiés en syllogistique). Nous discernons des connecteurs, par exemple une négation dans **D1**. Ces connecteurs, cependant, ne relient pas des phrases entières mais des prédicats, des phrases ouvertes. Quels sont les connecteurs dans **A1** et **B1** ? Les réformulations suivantes nous montrent qu'il s'agit des implications (**A1** et **B1**) et des conjonctions (**3.1** et **D1**) :

A2 Si quelqu'un est un philosophe, alors il est mortel.
B2 Si une chose est entièrement noir, alors elle n'est pas entièrement rouge.
3.2 Il y a au moins un pingouin et il est heureux.
D2 Il y a au moins un animal et il n'est pas un pingouin.

A2 à **D2** nous montrent également que les phrases ouvertes liées par des connecteurs ne peuvent pas être évaluées de manière indépendante des autres, puisqu'elles contiennent des pronoms (« il » dans **A2**, **3.2** et dans **D2**, « elle » dans **B2**) qui dépendent, pour leurs valeurs sémantiques, de leurs antécédents dans le reste de la phrase. Ces pronoms, comme nous le verrons plus tard, correspondent à des variables dont les valeurs sont coordonnées par le quantificateur qui les gouverne.

Si nous interprétons nos phrases modèles à l'aide de la notion de satisfaction, nous obtenons les phrases métalinguistiques suivantes :

A3 Toutes les choses qui satisfont « ... est un philosophe » satisfont également « ... est mortel ».
B3 Toutes les choses qui satisfont « ... est entièrement noir » ne satisfont pas « ... est entièrement rouge ».
3.3 Il y a des choses qui satisfont « ... est un pingouin » et « ... est heureux ».
D3 Il y a des choses qui satisfont « ... est un animal », mais qui ne satisfont pas « ... est un pingouin ».

Toutes ces phrases commencent par une tournure que nous appellerons « quantificateur » : pour exprimer des quantificateurs, nous préférons normalement les tournures suivantes, qui réduisent le

[39] Traduction française : « Ainsi, toute proposition dans laquelle « Le Roi de France » a une occurrence primaire est fausse ; le déni de telles propositions est vrai, mais dans celles-ci, « le Roi de France » a une occurrence secondaire. Ainsi, l'on échappe à la conclusion selon laquelle le Roi de France a une perruque. ».

PROOF

nombre de tournures ‹ logiques › de quatre (« tous », « quelques », « aucun », « quelques ne … pas ») à deux (« tous » et « il y a ») :

A4 Tout ce qui est un philosophe est mortel.

B4 Tout ce qui est entièrement noir n'est pas entièrement rouge.

3.4 Il y a des pingouins heureux.

D4 Il y a des animaux qui ne sont pas des pingouins.

Suivant le modèle de **A2** à **D2**, nous pouvons introduire des variables pour remplacer les pronoms et rendre perspicace la manière dont les phrases ouvertes sont liées par des connecteurs :

A5 Pour tout x, si x est un philosophe, alors x est mortel.

B5 Pour tout x, si x est entièrement noir, alors x n'est pas entièrement rouge.

3.5 Il y a des x tels que x est un pingouin et x est heureux.

D5 Il y a des x tels que x est un animal et x n'est pas un pingouin.

Nous retrouvons des connecteurs propositionnels (« $\rightarrow$ » dans (**A5**) et (**B5**), « $\wedge$ » dans (**3.5**) et (**D5**), « $\neg$ » dans (**B5**) et (**D5**)) qui ne relient pas des phrases, mais des phrases ouvertes. Le résultat de leur application à des phrases ouvertes est une autre phrase ouverte, logiquement complexe – les connecteurs propositionnels forment des prédicats complexes à partir de prédicats plus simples.

Bien qu'elles ne contiennent pas de noms, les phrases (**A1**) à (**D1**) (et (**A2**) à (**D2**), etc.) sont néanmoins complètes : elles peuvent être vraies ou fausses et n'ont pas besoin d'être complétées par des noms. Le mécanisme qui en est responsable est appelé « *quantification* » et représenté par les deux tournures « pour tout » (abrégée par « $\forall$ » et appelée « quantificateur universel ») et « il existe au moins un » (abrégée par « $\exists$ » et appelée « quantificateur existentiel »).[40] Ces quantificateurs prennent une phrase ouverte et forment une phrase complète, exprimant que tous ou certains objets satisfont les phrases ouvertes en question. La traduction de nos exemples serait la suivante :

A6 $\forall x$ (si x est un philosophe, alors x est mortel)

B6 $\forall x$ (si x est entièrement noir, alors x n'est pas entièrement rouge)

3.6 $\exists x$ (x est un pingouin et x est heureux).

D6 $\exists x$ (x est un animal et x n'est pas un pingouin)

En introduisant les connecteurs et en abrégeant les prédicats, nous obtenons les phrases suivantes comme résultat final de notre essai de formalisation :[41]

A7 $\forall x\,(\mathbf{Ph}(x) \rightarrow \mathbf{M}(x))$

B7 $\forall x\,(\mathbf{noir}(x) \rightarrow \neg\mathbf{rouge}(x))$

3.7 $\exists x\,(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{H}(x))$

D7 $\exists x\,(\mathbf{A}(x) \wedge \neg\mathbf{P}(x))$

Nous observons que nous pouvons appliquer les transformations habituelles aux connecteurs reliant les phrases ouvertes. Les lois de Morgan, la définition de « $\rightarrow$ » en termes de « $\vee$ » et de « $\neg$ » et l'élimination de la double négation nous assurent, par exemple, que les phrases suivantes sont logiquement équivalentes aux phrases **A7**, **B7**, **3.7** et **D7** respectivement :

A8 $\forall x\,\neg(\mathbf{Ph}(x) \wedge \neg\mathbf{M}(x))$

[40] Il existe d'autres manières d'abréger les quantificateurs. Pour le quantificateur universel, on utilise parfois « $(x)(\ldots x \ldots)$ », « $\bigvee x(\ldots x \ldots)$ » et, en la notation dite « polonaise », « $\Pi x(\ldots x \ldots)$ » au lieu de « $\forall x(\ldots x \ldots)$ ». Pour le quantificateur existentiel, on trouve « $E(x)(\ldots x \ldots)$ », « $\bigwedge x(\ldots x \ldots)$ » et « $\Sigma x(\ldots x \ldots)$ » à la place de « $\exists x(\ldots x \ldots)$ ».

[41] Nous utilisons « $\mathbf{Ph}(x)$ » pour « … est un philosophe », « $\mathbf{M}(x)$ » pour « … est mortel », « $\mathbf{rouge}(x)$ » pour « … est entièrement rouge », « $\mathbf{noir}(x)$ » pour « … est entièrement noir », « $\mathbf{A}(x)$ » pour « … est un animal », « $\mathbf{P}(x)$ » pour « … est un pingouin » et « $\mathbf{H}(x)$ » pour « … est heureux ».

PROOF

B8 $\forall x\, \neg(\mathbf{noir}(x) \wedge \mathbf{rouge}(x))$
3.8 $\exists x\, \neg(\neg\mathbf{P}(x) \vee \neg\mathbf{H}(x))$
D8 $\exists x\, \neg(\neg\mathbf{A}(x) \vee \mathbf{P}(x))$

Il est important de distinguer les négations internes, qui portent sur les phrases ouvertes, des négations externes, qui portent sur des phrases complètes. Qu'est-ce qui arrive si nous ajoutons des négations externes à ces phrases ? La négation de **A8**, par exemple, dirait qu'il n'est pas le cas que tous les x sont tels qu'ils sont ni philosophes ni immortels – qu'il y a, par conséquent, au moins un x qui n'est ni philosophe ni immortel. La négation de **3.8** dirait qu'il n'y a pas de x qui ne satisfait pas la phrase ouverte « x n'est pas un pingouin ou x n'est pas heureux » – et donc que tous les x la satisfont, que tous les x sont soit autre que des pingouins, soit ne sont pas heureux.

Dans le langage de la logique de prédicats, nous distinguons les variables telles que « x », « y », « z », ... des constantes individuelles telles que « a », « b », « Maria », « Sam ». La différence est que « a » et « Maria » dénotent un individu particulier, tandis que « x » et « y » dénotent des individus « arbitraires ».[42] Dans le langage ordinaire, les pronoms, les expressions anaphoriques et des expressions comme « tel que » correspondent aux variables. La formalisation d'une phrase du langage ordinaire dans la logique des prédicats se fait donc en deux étapes :

1. Nous construisons d'abord une phrase synonyme qui représente plus clairement la forme logique de la phrase initiale :

« Tout existe. » $\rightsquigarrow$ « Toute chose est telle qu'elle existe. »
« Tout homme est mortel. » $\rightsquigarrow$ « Tout est tel que si c'est un homme, il est mortel. »
« Sam entre et rit. » $\rightsquigarrow$ « Il y a quelque chose tel que cette chose est Sam et cette chose entre et rit. »

2. Nous introduisons ensuite des variables pour rendre ces dépendances encore plus explicites :

« Toute chose est telle qu'elle existe. » $\rightsquigarrow$ $\forall x(x \text{ existe})$
« Tout est tel que si c'est un homme, il est mortel. » $\rightsquigarrow$ $\forall x(x \text{ est un homme} \rightarrow x \text{ est mortel})$
« Il y a qqch. tel qui est Sam, entre et rit. » $\rightsquigarrow$ $\exists x(x = \text{Sam} \wedge x \text{ entre} \wedge x \text{ rit})$

Nous remarquons une équivalence logique propre aux quantificateurs : dire que tous les pingouins sont heureux revient à dire qu'il n'y a pas de pingouins qui ne sont pas heureux; dire qu'il y a des pingouin romantiques revient à dire qu'il n'est pas le cas qu'aucun pingouin n'est romantique. Tous les F sont G si et seulement s'il n'y a pas de F qui n'est pas G. Il y a un F si seulement s'il n'est pas le cas que toutes les choses soient $\neg F$. Une phrase de la même forme que « $\forall x(\ldots\, x\, \ldots)$ » est donc équivalente logiquement à une phrase de la même forme que « $\neg\exists x\neg(\ldots\, x\, \ldots)$ », et le même raisonnement vaut pour les phrases de la même forme que « $\exists x(\ldots\, x\, \ldots)$ » et de « $\neg\forall x\neg(\ldots\, x\, \ldots)$ ». Il n'était donc pas nécessaire d'introduire les deux quantificateurs dans le lenage : l'introduction d'un seul aurait déjà nous donnée les ressources pour définir l'autre.[43]

Cette *dualité* des quantificateurs s'explique par leurs relations à des conjonctions et disjonctions. L'affirmation universelle, de tous les pingouins, qu'ils sont heureux revient à dire que a (le plus petit pingouin) est heureux *et* que b est heureux, ...*et* que a_{100023} (le plus grand pingouin) est également heureux. De la même manière, une affirmation existentielle correspond à une disjonction : dire

[42] Nous reviendrons sur cette notion problématique d' « individu arbitraire » au ch. 12.3.
[43] Nous avons remarqué un phénomène similaire dans la logique propositionnelle dans le ch. 3.4.

PROOF

qu'il y ait un pingouin heureux revient à dire que soit le premier, soit le deuxième, soit le *n*-ième est heureux.[44] La dualité des quantificateur peut donc être vu comme ‹ extension › de la dualité entre conjonction et disjonction, capturée par les lois de Morgan : comme nous pouvons ‹ faire entrer › une négation à une conjonction si nous nions les conjoints et en font la disjonction, nous pouvons ‹ faire entrer › une négation à une quantification universelle si nous nions la phrase quantifiée et la quantifions existentiellement : comme $\wedge$ correspond à $\neg \vee \neg$, $\forall$ correspond à $\neg\exists\neg$. Schématiquement, en utilisant $\ulcorner\phi(x)\urcorner$ comme nom de n'importe quelle phrase qui contient une occurrence de la variable « x », nous obtenons ceci :

$$\ulcorner\forall x\,(\phi(x))\urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner\neg\exists x\,\neg(\phi(x))\urcorner$$
$$\ulcorner\exists x\,(\phi(x))\urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner\neg\forall x\,\neg(\phi(x))\urcorner$$

En nous servant des négations dites « externes », qui portent sur des phrases complètes, nous pouvons donc formaliser les quatre phrases considérées à l'aide d'un seul quantificateur :

A9	$\forall x(\mathbf{Ph}(x) \rightarrow \mathbf{M}(x))$	**A10**	$\neg\exists x(\mathbf{Ph}(x) \wedge \neg\mathbf{M}(x))$
B9	$\forall x(\mathbf{noir}(x) \rightarrow \neg\mathbf{rouge}(x))$	**B10**	$\neg\exists x(\mathbf{noir}(x) \wedge \mathbf{rouge}(x))$
3.8	$\neg\forall x(\mathbf{P}(x) \rightarrow \neg\mathbf{H}(x))$	**3.10**	$\exists x(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{H}(x))$
D9	$\neg\forall x(\mathbf{A}(x) \rightarrow \mathbf{P}(x))$	**D10**	$\exists x(\mathbf{A}(x) \wedge \neg\mathbf{P}(x))$

L'équivalence logique entre « $\forall x(\ldots\ x\ \ldots)$ » et « $\neg\exists x\neg(\ldots\ x\ \ldots)$ » a une autre conséquence : elle implique que le quantificateur universel n'a pas d'engagement existentiel – que nous ne pouvons pas conclure du fait que tous les F sont G qu'il y a des F.[45] Cela s'explique par l'équivalence mentionnée : s'il n'y a pas de F, il n'y a pas de F qui sont G et il n'y a pas non plus de F qui sont $\neg G$. Par conséquent

[44] Cette « correspondance » est compliquée par deux facteurs : elle n'est valide que pour les domaines de quantification finis, premièrement, et présuppose une condition de clôture deuxièmement. S'il y avait une infinité de pingouins, en effet, la 'conjonction' ou 'disjonction' devenait infinie, ce qui est exclut par notre définition de « formule bien formé » pour le langage de la logique des prédicats (cf. déf. 54 à la p. 253). La nécessité d'une condition de clotûre devient évidente quand on considère que les inférences

$$\frac{Ga \wedge Gb \wedge \ldots \wedge Gz}{\forall x(Fx \rightarrow Gx)} \tag{2}$$

et

$$\frac{\exists x(Fx \wedge Gx)}{Ga \vee Gb \vee \ldots \vee Gz} \tag{3}$$

ne sont pas valides, même si nous réuississons en effet d'enumérer tous les F par « a », « b », ..., « z ». La raison pour ceci est simplement qu'il est toujours possible qu'il y ait plus de F que ceux qui existent en réalité, et que nous requérons pour la validité la transmission *nécessaire* de la vérité des prémisses à la conclusion. Nous sommes donc obligés de rajouter une prémisse supplémentaire aux deux inférences, stipulant que notre énumeration est en effet exhaustive :

$$\frac{\begin{array}{c}Ga \wedge Gb \wedge \ldots \wedge Gz \\ \forall x(Fx \rightarrow (x = a \vee x = b \vee \ldots \vee x = z))\end{array}}{\forall x(Fx \rightarrow Gx)} \tag{4}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x(Fx \wedge Gx) \\ \forall x(Fx \rightarrow (x = a \vee x = b \vee \ldots \vee x = z))\end{array}}{Ga \vee Gb \vee \ldots \vee Gz} \tag{5}$$

[45] Nous avons vu à la p. 194 que ce charactéristique distingue la logique des prédicats de la syllogistique.

PROOF

« $\neg\exists x(Fx \wedge Gx)$ » et « $\neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$ » sont des phrases vraies. Ces phrases, cependant, sont équivalentes à « $\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ » et à « $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ » respectivement. Étant donné qu'il n'y a pas de licornes, « toutes les licornes sont bleues » et « toutes les licornes ne sont pas bleues » sont deux phrases également vraies.

Il est donc significatif que nous formalisions « tous les F sont G » par « $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ », utilisant l'implication pour restreindre le choix des x en question. Il est également significatif que nous formalisons « il y a des F qui sont des G » ou « quelques F sont des G » par « $\exists x(Fx \wedge Gx)$ », utilisant la conjonction plutôt que, par exemple, l'implication. Étant donné l'interdéfinissabilité des connecteurs, « $\exists x(Fx \rightarrow Gx)$ » est équivalente à « $\exists x(\neg Fx \vee Gx)$ », une phrase qui n'affirme pas qu'il y a des F.

Vu le gain en expressivité, la formalisation en logique des prédicats est plus difficile que celle en logique propositionnelle. Considérons par exemple le phénomène de généralité multiple (ch. 8.7). La formalisation des phrases du langage ordinaire exhibant une généralité multiple en termes d'une langue de la logique de prédicats est souvent compliquée par le fait que le langage ordinaire contient beaucoup d'occurrences d'une généralité implicite, comme dans l'exemple suivant :

(**i**) Toutes les filles bien-élevées aiment un prince.

Comparée à d'autres phrases comme « toutes les filles bien-élevées aiment leur père » vs « toutes les filles bien-élevées aiment leurs pères », (**i**) n'est pas ambigüe entre « $\forall\exists$ » et « $\exists\forall$ », mais plutôt entre les deux phrases suivantes :

(**i′**) $\forall x((Fx \wedge Bx) \rightarrow \exists y(Py \wedge Axy))$ toutes les filles bien-élevées aiment quelque prince
(**i″**) $\forall x((Fx \wedge Bx) \rightarrow \forall y(Py \rightarrow Axy))$ toutes les filles bien-élevées aiment n'importe quel prince

Pour illustrer d'autres difficultés, considérons les raisonnements fallacieux suivants :

F1 Bleu est la couleur du ciel. La couleur du ciel change. Donc bleu change.

F2 Les apôtres sont douze. Jean est un apôtre. Donc Jean est douze.

F3 Les hommes sont disséminés un peu partout sur la Terre. Jacques est un homme. Donc Jacques est disséminé un peu partout sur la Terre.

A propos de la première inférence (**F1**), il faut faire la distinction entre descriptions définies et noms propres, puisque c'étaient précisément des exemples comme celui-ci qui avaient motivés Bertrand Russell (1905) pour sa théorie des descriptions définis (traduction française : Russell (1989)).

L'inférence (**F1**) est valide dans la logique des prédicats standard si nous la formalisons comme suit :[46]

$$\frac{\begin{array}{c}\text{bleu} = \text{la couleur de ciel} \\ \text{change(la couleur du ciel)}\end{array}}{\text{change(bleu)}} \qquad (6)$$

(6) est valide parce qu'une et la même chose ne peut pas satisfaire et en même temps ne pas satisfaire la même phrase ouverte « … change ».

La théorie des descriptions définies de Russell nous conseille, cependant, de ne pas formaliser la première prémisse comme l'affirmation d'une identité, « bleu = la couleur de ciel », mais comme une prédication « la couleur de ciel(bleu) » – disant de la couleur bleu (une propriété), qu'elle satisfait la phrase ouverte « … est la couleur de ciel ». Comme nous l'avons vu, Russell nous conseille de

[46] Il faut remarquer, cependant, que la logique des prédicats standard ne considère que des prédicats de premier ordre. La formalisation donnée est donc incorrecte pour plus d'une raison.

PROOF

formaliser une description définie comme « le roi de France » comme suit

$$\text{« Le roi de France est chauve. »} \quad \rightsquigarrow \quad \exists!x(x \text{ est roi de France} \wedge x \text{ est chauve})^{47}$$

Cette formalisation a l'avantage considérable de nous permettre une distinction entre deux interprétations de « Le roi de France n'est pas chauve », une qui implique qu'il est chevelu (et donc existe), une autre qui dit seulement que la phrase « le roi de France est chauve » est fausse :

$$\begin{aligned} \text{« Le roi de France, il n'est pas chauve. »} &\quad \rightsquigarrow \quad \exists!x(x \text{ est roi de France} \wedge \neg(x \text{ est chauve})) \\ \text{« Il n'est pas le cas que : le rdF est chauve. »} &\quad \rightsquigarrow \quad \neg\exists!x(x \text{ est roi de France} \wedge x \text{ est chauve}) \end{aligned}$$

Dans la deuxième inférence (**F2**), nous avons affaire à un prédicat numérique « ... sont douze », qui pose les mêmes problèmes que le prédicat « ... existe » (cf. p. 207 et le ch. 11.7). Nous ne pouvons donc pas les formaliser comme prédicats ordinaires, puisque autrement l'inférence suivante serait valide :

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(x \text{ est un apôtre} \rightarrow x \text{ est douze}) \\ (\text{...est un apôtre})\ \text{Jean}\end{array}}{(\text{...est douze})\ \text{Jean}} \tag{7}$$

Comme « ...existe », les prédicats numériques doivent être formalisés à l'aide du quantificateur existentiel :

$$\begin{array}{lll}
\text{il y a au moins un } F & \rightsquigarrow & \exists x(Fx) \\
\text{il y a au maximum un } F & \rightsquigarrow & \forall x\forall y\,((Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y) \\
\text{il y a exactement un } F & \rightsquigarrow & \exists x\,(Fx\ \wedge \forall y\,(Fy \rightarrow y = x))^{48} \\
\text{il y a au moins deux } F & \rightsquigarrow & \exists x\exists y\,(Fx \wedge Fy\ \wedge\ x \neq y) \\
\text{il y a au maximum deux } F & \rightsquigarrow & \forall x\forall y\forall z((Fx \wedge Fy \wedge Fz) \rightarrow (x = y \vee y = z \vee x = z)) \\
\text{il y a exactement deux } F & \rightsquigarrow & \exists x\exists y\,(Fx \wedge Fy\ \wedge\ x \neq y\ \wedge\ \forall z\,(Fz \rightarrow (x = z \vee y = z))) \\
\text{il y a au moins trois } F & \rightsquigarrow & \exists x\exists y\exists z\,(Fx \wedge Fy \wedge Fz\ \wedge\ x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \\
\text{il y a exactement trois } F & \rightsquigarrow & \exists x\exists y\exists z\,(Fx \wedge Fy \wedge Fz\ \wedge\ x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \\
 & & \qquad \forall w(Fw \rightarrow (w = x \vee w = y \vee w = z)))
\end{array}$$

La troisième inférence (**F3**), finalement, est la plus difficile à exclure : le diagnostic est que « ... être disséminé » est un prédicat dit « collectif » qui s'applique à une pluralité et ne peut pas être défini en termes de prédicats qui s'appliquent aux membres de cette pluralité.[49] Considérons les exemples suivants :

$$\begin{array}{lcl}
\text{Russell et Whitehead sont des hommes.} & \Leftrightarrow & \text{Russell est un homme} \wedge \\
 & & \text{Whitehead est un homme}
\end{array}$$

[47] Nous utilisons ici « $\exists!x(\phi(x))$ » pour dire qu'il existe *exactement* une chose qui ϕ. Dans le langage naturel, « il y a un qui ...*x*... » est souvent ambigüe entre « $\exists x(\phi(x))$ » et « $\exists!x(\phi(x))$ ». Dans le cas de « il y a un philosophe irlandais », la bonne formulation utilise « $\exists$ », dans « il a un enfant » elle utilise « $\exists!$ », mais « il a fait une faute » (sans intonation particulière) peut être ambigüe entre les deux.

[48] C'était ce quantificateur numérique que nous avons abrégé par « $\exists!x(\phi(x))$.

[49] Á la suite de Boolos (1984), différents auteurs ont développé une « logique plurielle », qui introduit des constantes individuelles pour des pluralités (cf. par. ex. McKay, 2006). Nous reviendrons sur cette « quantification plurielle » au ch. 12.6.

PROOF

Russell et Whitehead ont écrit les *Principia*. ⇎ Russell a écrit les *Principia* ∧ Whitehead a écrit les *Principia*

Le fait que la deuxième équivalence ne fonctionne pas montre que « ... a écrit les *Principia* », contrairement a « ... est un homme », est un prédicat collectif : être co-auteur ne veut pas dire être auteur, mais être membre d'un collectif d'hommes veut dire être un homme. C'est parce qu'il s'agit d'un prédicat collectif que nous ne pouvons pas formaliser la première prémisse de (**F3**) comme :

$$\forall x\ (x \text{ est un homme } \rightarrow\ x \text{ est disséminé un peu partout sur la Terre})$$

9.6 Une classification des expressions

La logique propositionnelle, nous l'avons dit, traite des phrases et des connecteurs, la logique des prédicats traite des prédicats, des quantificateurs et des constantes individuelles. Nous avons également dit qu'une phrase est ce qui est exprimé par une phrase complète qui peut être vraie ou fausse et qu'un prédicat est tiré d'une phrase après l'effacement d'un ou de plusieurs noms. Nous devons maintenant être un peu plus précis.

La notion « proposition », qui est une notion philosophique, ne coïncide pas avec la notion « phrase », qui est une notion grammaticale. Une phrase peut être complète du point de vue grammatical sans pour autant exprimer une proposition : « J'ai faim », pour être vrai ou faux, a besoin d'être complétée par le contexte de l'énonciation pour attribuer une référence indexicale à « je » ; dans certains contextes, cette phrase exprime la phrase qu'un certain individu, *a*, a faim, dans d'autres qu'un autre individu, *b*, a faim. Une phrase peut aussi être complexe et ainsi exprimer une phrase complexe qui contient plusieurs phrases simples. Le critère d'identification des phrases est leur capacité à être vraies ou fausses. Parallèlement à ce critère sémantique, il existe un critère purement syntaxique : une phrase (au sens logique) est une entité linguistique qui peut être combinée avec une négation externe (« il n'est pas le cas que ... »).

Les différences entre les points de vue grammatical et logique se multiplient quand on prend en compte la structure interne des phrases, comme nous le faisons dans la logique des prédicats. La grammaire classique distingue des noms propres, des noms communs, des verbes, des particules, des prépositions, des adverbes et des adjectifs. La logique des prédicats ne reconnaît, cependant, que des connecteurs propositionnels, des quantificateurs, des prédicats et des termes singuliers. Les connecteurs sont les concepts formels qui nous servent à former des phrases complexes à partir de phrases simples. Un prédicat est une expression qui nous sert à attribuer une propriété. Cette propriété peut être une propriété d'une ou de plusieurs choses ; un prédicat unaire (qui résulte d'une phrase en effaçant (plusieurs occurrences d') un seul nom) attribue une propriété monadique, un prédicat binaire (tertiaire, ...) une propriété relationnelle. Syntaxiquement, un prédicat est une expression qui peut être combinée avec une négation interne, « ... n'est pas tel que ... », qui prend un prédicat (dans sa deuxième position) et en fait un autre.

Une représentation claire et exhaustive de représenter ces différences grammaticales nous est fournie par la grammaire dite « catégorielle » (cf. Gardies, 1975) qui représente les phrases par « *S* » et les termes singuliers par « *N* ». Nous pouvons dire qu'un connecteur propositionnel binaire est une expression de la catégorie **S**/**SS**, parce qu'il prend deux phrases pour en faire une, plus complexe :[50]

[50] Un avantage de la notation de la grammaire catégorielle est qu'elle nous permet de calculer le type syntaxique de la

PROOF

Il pleut	et	Je suis triste
S	**S/SS**	**S**
Il pleut et je suis triste		
S		

Les autres connecteurs propositionnels binaires, « ou », « si-alors », « si et seulement si », s'appliquent également à deux phrases et en forment une phrase complexe. La négation externe s'applique cependant qu'à une seule phrase et est donc du type **S**/**S**.

Un prédicat unaire, d'après notre définition, est une expression qui forme, avec un terme singulier, une phrase complète, ce qui correspond au type **S**/**N** :

Sam	... est triste
N	**S/N**
Sam est triste.	
S	

Les prédicats binaires seront du type **S**/**NN**, les prédicats ternaires du type **S**/**NNN** et ainsi de suite. Cette notation nous montre comment un prédicat binaire, combiné avec un seul terme singulier, devient un prédicat unaire (dit « relationnel », parce qu'il est obtenu d'une relation) :

Sam	... aime ⋯	Maria
	S/NN	**N**
	... aime Maria	
N	**S/N**	
Sam aime Maria		
S		

L'expression « ... aime ⋯ » du type **S**/**NN** a été partiellement complétée par le nom « Maria » (du type **N**), ce qui produit une expression du type **S**/**N**. La relation exprimée par « ... aime ⋯ » est une propriété de la paire ⟨ Sam, Maria ⟩, mais la propriété monadique exprimée par « ... aime Maria » est une propriété de Sam.

La grammaire catégorielle nous permet aussi de symboliser l'autre usage que nous avons fait des connecteurs qui était de relier non pas des phrases ou phrases complètes, mais des phrases ouvertes :

Sam	... est triste	et	... marié
	S/N	**(S/N)/(S/N)(S/N)**	**S/N**
		... est triste et marié	
N		**S/N**	
Sam est triste et marié			
S			

Le connecteur « ∧ » dans cette phrase est du type (**S**/**N**)/(**S**/**N**)(**S**/**N**) – il prend deux phrases ouvertes et en forme une phrase ouverte. Nous voyons donc qu'à strictement parler, les connecteurs du langage

juxtaposition de deux expressions arbitraires : la combinaison d'une expression du type **S**/**SS** avec deux expressions du type **S** serait du type **S**. La combinaison d'une telle expression avec une expression du type **N** sera mal-formée.

PROOF

de la logique des prédicats *ne sont pas les mêmes* que les connecteurs du langage de la logique propositionnelle. La conjonction qui appartient à ce dernier langage, par exemple, est du type **S**/**SS**, bien que la conjonction dans la logique des prédicats peut être des deux types **S**/**SS** et (**S**/**N**)/(**S**/**N**)(**S**/**N**).

La grammaire catégorielle nous permet de représenter facilement des prédicats de deuxième et troisième ordre. Un prédicat est dit « de premier ordre » s'il s'applique à des noms d'objets, c'est-à-dire à des expressions qui représentent des choses qui ne sont ni des propriétés ni des relations, mais des individus. C'est de ces prédicats que l'on a parlé jusqu'à maintenant. Un prédicat de deuxième ordre est un prédicat qui s'applique à des propriétés et à des relations et qui se combine avec des prédicats – les expressions, par exemple, « ... est un prédicat » et « ... s'applique à un nom d'un objet pour former une phrase » sont des prédicats de deuxième ordre.[51] Comme un prédicat (unaire) de premier ordre est du type **S**/**N**, un prédicat de deuxième ordre sera du type **S**/(**S**/**N**). Il y a également des prédicats de troisième ordre (**S**/(**S**/(**S**/**N**))), de quatrième ordre, etc.

L'interprétation sémantique des prédicats de deuxième et de troisième ordre se fait plus intuitivement en termes d'ensembles. Supposons que la totalité des choses pour lesquelles nous disposons des noms ou dont nous voulons parler forme un ensemble D, notre *univers de discours* et notre *domaine de quantification*. Un prédicat, nous l'avons vu, est vrai de certaines de ces choses – son extension sera alors un sous-ensemble de D. Si nous identifions des prédicats ayant la même extension, nous pouvons dire que n'importe quel sous-ensemble de D (n'importe quel membre de $\mathcal{P}(D)$, c'est-à-dire de l'ensemble de tous les sous-ensembles de D) définit (ou correspond à) un prédicat – le prédicat qui est vrai de tous les objets et seulement des objets qui se trouvent dans le sous-ensemble de D en question.[52]

Si les prédicats de premier ordre sont des membres de $\mathcal{P}(D)$ (les sous-ensembles de D), les prédicats de deuxième ordre sont des membres de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(D))$ – ils sont vrais de certains prédicats (de certains sous-ensembles de D) et faux d'autres ; ils ont donc comme extensions des ensembles de sous-ensembles. Nous voyons par cette analogie que la similarité entre les différents ordres de prédicats et les différents types dans la théorie des ensembles n'est pas que superficielle, mais qu'elle est basés sur une vraie correspondence dans la grammaire catégorielle.

Cependant, les prédicats ‹ ordinaires › de deuxième ordre ne sont pas les seuls à tomber sous la catégorie **S**/(**S**/**N**) : comme nous l'avons vu à la p. 208, les autres expressions qui tombent sous ce type sont les quantificateurs de premier ordre. Les quantificateurs prennent des phrases ouvertes pour en faire des phrases complètes. Les phrases ouvertes peuvent être de différents ordres, selon qu'elles sont vraies (ou fausses) d'objets ou vraies (ou fausses) de prédicats ou vraies (ou fausses) de prédicats de prédicats, etc. Les deux quantificateurs de la logique des prédicats, le quantificateur universel « $\forall x(\ldots x \ldots)$ » et le quantificateur existentiel « $\exists x(\ldots x \ldots)$ », ne prennent que des prédicats ou phrases ouvertes de premier ordre – ils quantifient sur des objets et sont, pour cette raison, appelés « objectuels » :

Il y a quelqu'un	... est triste
S/(**S**/**N**)	**S**/**N**

Il y a quelqu'un qui est triste.

[51] Nous parlerons dans le ch. 12.5 de la logique des prédicats de deuxième ordre.

[52] Dans le cas où ce sous-ensemble est fini, nous pouvons facilement formuler un tel prédicat comme une disjonction d'identités : au sous-ensemble $\{a, b, c\}$, par exemple, correspondra le prédicat « $(x = a \vee x = b \vee x = c) \wedge \forall y((y \neq a \wedge y \neq b \wedge y \neq c) \rightarrow y \neq x)$ ».

PROOF

S

Les quantificateurs de premier ordre sont de la même catégorie que les prédicats de deuxième ordre. Une logique ne contenant dans son langage que des quantificateurs qui s'appliquent à des phrases ouvertes de premier ordre (et qui sont, en conséquence, eux-mêmes de deuxième ordre) est appelée elle-même « de premier ordre ». La logique classique des prédicats est la logique des prédicats de premier ordre et c'est elle que nous allons étudier.

9.7 Les quantificateurs

Nous avons vu comment nous pouvons nous servir du mécanisme de la quantification pour exprimer des phrases générales. Cette introduction de quantificateurs rend notre langage plus expressif. Supposons que nous voulons dire que tous les hommes sont mortels et l'exprimer dans notre langage. Vu qu'il n'y a qu'un nombre fini d'êtres humains (présents ou passés, au moins), nous pourrions énoncer la longue conjonction suivante :

Sylvie est mortelle $\wedge$ Sam est mortel $\wedge$ Marie est mortelle $\wedge$ Rosemarie est mortelle $\wedge$ Jean-Claude est mortel $\wedge$ Kevin est mortel $\wedge$ Roberta est mortelle $\wedge$ John est mortel $\wedge$ Claudia est mortelle $\wedge$ Robert est mortel $\wedge$ Philipp est mortel $\wedge$ ...

– une phrase certainement très longue, mais finie et bien formée selon la logique propositionnelle. Si nous arrivons à énumérer tous les hommes, nous obtenons une phrase qui est vraie si et seulement si tous les hommes sont mortels. Si je dis qu'il y a, parmi ce nombre finis d'êtres humains, un que j'aime, je pourrais énoncer une disjonction :

j'aime Sylvie $\vee$ j'aime Sam $\vee$ j'aime Marie $\vee$ j'aime Rosemarie $\vee$ j'aime Jean-Claude $\vee$ j'aime Kevin $\vee$ j'aime Roberta $\vee$ j'aime John $\vee$ j'aime Claudia $\vee$ j'aime Robert $\vee$ j'aime Philipp $\vee$ ...

Néanmoins, une telle procédure, en plus de son caractère rébarbatif, aurait au moins trois autres désavantages majeurs :

1. La longue conjonction est équivalente logiquement à « tous les hommes sont mortels » seulement s'il n'y a qu'un nombre fini d'hommes.
2. La longue conjonction est équivalente logiquement à « tous les hommes sont mortels » seulement si tous les hommes ont des noms.
3. Lorsque nous parlons de tous les hommes, notre énonciation a un aspect général : nous ne voulons pas dire qu'il n'y a qu'un nombre fini d'hommes ou que nous connaissons un nom pour chaque homme qui existe ou existait, mais nous voulons parler de la totalité des hommes, indépendamment des membres particuliers qu'elle contient.

L'usage du quantificateur universel « $\forall$ » ne tombe sous aucune de ces restrictions. Pour dire que tous les hommes sont mortels, nous disons simplement :[53]

$$\forall x \, (x \text{ est un homme} \rightarrow x \text{ est mortel}) \tag{8}$$

[53] Il y a plusieurs façons de lire la phrase (8) :
1. Les hommes sont mortels.

PROOF

Dans la phrase (8), nous ne parlons d'aucun homme en particulier : le quantificateur universel prend ses valeurs dans tout l'univers du discours. Nous notons deux conséquences de cette généralité : premièrement, (8) est 'confirmée' par tous les pingouins – parce que tout pingouin satisfait la phrase ouverte « ¬ (x est un homme) ∨ (x est mortel) ».[54] Deuxièmement, (8) est vraie s'il n'y a pas d'hommes ; dû à la signification de « → », la phrase ouverte complexe est vraie de tout objet dont l'antécédent est faux.

La quantification est intimément liée au concept de « univers de discours » ou « domaine de quantification ». « $\forall x(Fx)$ » signifie que tous les éléments du domaine de quantification ont la propriété exprimée par le prédicat « Fx » ; « $\exists x(Fx)$ » signifie qu'il existe au moins un élément du domaine de quantification qui a la propriété exprimée par le prédicat « Fx ». Le domaine de quantification est l'ensemble des choses dont nous parlons[55] – les choses qui peuvent fournir des contre-exemples à nos assertions.

Le domaine de quantification nous fournit une interprétation d'une variable sous une assignation. Assigner une valeur à une variable revient à choisir un élément du domaine de quantification comme valeur pour la variable.

Comme nous avons vu à la p. 209, la quantification dans les langues naturelles est souvent restreinte. Quand je dis, par exemple, qu'il ne reste plus de bière, je ne parle pas de toutes les bières dans l'univers, mais je dis plutôt qu'il n'y a plus de bières *dans mon appartement* : je dis de toutes les choses dans mon appartement qu'elles ne sont pas de bières. Dans la logique de prédicats, ceci correspond à une conditionalisation de mon assertion : « $\forall x($$x$ est dans mon appartement → ¬(x est une bière)$x)$ ». Il est à remarquer que la quantification dans cette assertion *n'est pas* restreinte : l'affirmation ne parle pas seulement des choses dans mon appartement, mais de toutes les choses (et elle est, en plus, vraie de toutes les choses qui ne sont pas dans mon appartement, même des bières qui se trouvent ailleurs). De manière analogue, la restriction de la quantification existentielle se fait par une conjonction : la formalisation de «

Pour éviter cette conséquence, nous pouvons explicitement restreindre la quantification, comme nous faisons souvent en mathématique : quand je dis qu'il y ait un nombre entre 4 et 6, j'écrirait « $\exists x \in \mathbb{N}(4 < x < 6)$ », où le prédicat « $x \in N$ » n'est vraie que des nombres naturels.[56]

Même si notre langage est devenu plus expressif en incluant des variables et des quantificateurs, qu'est-ce qui s'ensuit sur la logique ? Est-ce que nous serons toujours capable de formaliser comme valides les inférences syllogistiques ? Revenons donc sur les inférences (9.1), (9.2) et (9.3). En formalisant les prémisses et les conclusions dans la logique des prédicats, nous obtenons les inférences :

2. Un humain est mortel.
3. Chaque homme est mortel.
4. Quiconque est un homme est mortel.

Nous utiliserons parfois la locution « tous les x sont tels que, si x est un homme, alors x est mortel » qui rend plus visible la forme logique.

[54] Je mets « 'confirmée' » en 'scare quotes' puisqu'il s'agit plutôt d'un problème que d'une conséquence désirable pour la théorie de la confirmation.

[55] Je dis « ensemble » même si cette notion relève des problématiques. Comme nous prouverons à la p. 321, il ne peut pas y avoir un ensemble universel – un ensemble qui contient tout ce qu'il y a (donc également soi-même). D'après beaucoup (cf. par ex. Williamson, 2003), il est cependant parfaitement cohérent de quantifier sur tout ce qu'il y a. Dans une telle théorie, en conséquence, le domaine de quantification ne peut pas être un ensemble.

[56] Même dans ce cas, cependant, la différence entre « $\exists x \in \mathbb{N}(4 < x < 6)$ » et « $\exists x(x \in \mathbb{N} \wedge 4 < x < 6)$ » reste notationnelle.

PROOF

Tous les hommes sont mortels.		$\forall x$ (x est un homme $\rightarrow$ x est mortel)
Tous les philosophes sont des hommes.		$\forall x$ (x est un philosophe $\rightarrow$ x est un homme)
Tous les philosophes sont mortels.	$\rightsquigarrow$	$\forall x$ (x est un philosophe $\rightarrow$ x est mortel)
Aucun philosophe n'est méchant.		$\neg\exists x$ (x est un philosophe $\wedge$ x est méchant)
Quelques logiciens sont des philosophes.		$\exists x$ (x est un logicien $\wedge$ x est un philosophe)
Quelques logiciens ne sont pas méchants.	$\rightsquigarrow$	$\exists x$ (x est un logicien $\wedge$ $\neg$(x est méchant))

Aucun philosophe n'est parfait.		$\neg\exists x$ (x est un philosophe $\wedge$ x est parfait)
Tous les philosophes sont des hommes.		$\forall x$ (x est un philosophe $\rightarrow$ x est un homme)
Aucun homme est parfait.	$\rightsquigarrow$	$\neg\exists x$ (x est un homme $\wedge$ x est parfait)

Nous pouvons facilement justifier la validité de ces trois inférences :

(9.1) : Si nous choisissons, pour vérifier la conclusion, n'importe quel individu a qui est un philosophe, la deuxième prémisse nous dit que cet individu est un homme et la première prémisse nous dit qu'en conséquence il est mortel.

(9.2) : La deuxième prémisse nous dit qu'il y a un objet, appelons-le « a », qui est logicien et philosophe. Si, contrairement à ce que dit la conclusion, ce a n'était pas seulement un logicien, mais aussi méchant, alors il y aurait, contrairement à ce que dit la première prémisse, un philosophe méchant.

(9.3) : S'il y avait un philosophe parfait, alors ce philosophe, par la deuxième prémisse, serait un homme et alors, par la première prémisse, il ne serait pas parfait. Donc il n'y a pas de philosophe parfait.

Le but de la prochaine leçon (10) est de formuler une sémantique qui justifie la validité de ces schémas d'inférences.

Points à retenir

1. La logique des prédicats formalise des inférences qui caractérisent le comportement logique des quantificateurs.
2. Une inférence de la logique de prédicats nous apprend qu'un prédicat est *vrai d** une ou plusieurs choses s'il est vrai de certaines choses.
3. La forme générale d'une phrase simple dans la logique de prédicats est « Fa » – F est considéré comme une fonction qui prend une chose (a, dans notre exemple) et donne une valeur de vérité.
4. Nous pouvons donner des clauses récursives pour expliquer la signification (les conditions de satisfaction) d'un prédicat complexe en termes des significations (conditions de satisfaction) de ses parties.
5. Les prédicats dans la logique des prédicats sont unaires, binaires ou plus généralement n-adiques.
6. Un terme singulier est soit un nom, un indexical, un démonstratif ou une description définie.
7. La grammaire catégorielle caractérise un prédicat par le type **S**/**N**, les connecteurs de phrases par le type **S**/**S**, les connecteurs qui forment des prédicats complexes par le type (**S**/**N**)/(**S**/**N**) et les quantificateurs de premier ordre par le type **S**/(**S**/**N**). Les quantificateurs sont alors des prédicats de deuxième ordre, puisqu'ils, comme les termes singuliers, s'appliquent à des prédicats pour en faire des phrases.

PROOF

8. Le quantificateur universel ‘abrège’ des conjonctions infinies ; le quantificateur existentiel ‘abrège’ des disjonctions infinies ; ils sont duales de la même manière que le sont la conjonction et la disjonction.
9. Un quantificateur a un domaine de quantification associé qui limite le choix d’objets pour l’interprétation de la variable qu’il quantifie.
10. Les quantificateurs de la logique des prédicats sont de la même catégorie syntaxique que les prédicats de deuxième ordre. C’est pour cela que l’ordre des quantificateur est important : « $\exists y \forall x\,(Rxy)$ » implique formellement « $\forall x \exists y\,(Rxy)$ », mais la converse est fausse.

PROOF

10 Syntaxe et sémantique de la logique des prédicats

10.1 Le langage $\mathcal{L}^+$

Afin de pouvoir formaliser les inférences qui nous intéressent, nous devons d'abord élargir la syntaxe de notre langue et définir le langage formel de la logique des prédicats. Dans la cinquième leçon (p. 90 et suivantes), nous avons défini le langage $\mathcal{L}$ qui consiste en des formules propositionnelles composées de phrases atomiques et de connecteurs propositionnels. Nous élargissons maintenant notre alphabet et adoptons une nouvelle définition, plus large, de ce qu'est une formule bien formée :

Définition 51. *L'*alphabet *du langage $\mathcal{L}^+$ de la logique des prédicats consiste en les signes suivants :*[1]

1. *des signes logiques :*
   a) *les connecteurs « $\neg$ ... » (« ne-pas »), « ... $\wedge$ $\cdots$ » (« et »), « ... $\vee$ $\cdots$ »(« ou »), « ... $\rightarrow$ $\cdots$ » (« si-alors) et « ... $\leftrightarrow$ $\cdots$ » (« ssi »);*
   b) *les quantificateurs « $\forall x(\ldots x \cdots)$ » (« pour tout x ») et « $\exists x(\ldots x \cdots)$ »(« il y a au moins un x »);*
   c) *le signe d'identité : « ... $\equiv$ $\cdots$ » (« est identique à »);*
   d) *des variables pour des individus : « x_i » pour tout $i \in \mathbb{N}$;*
2. *des signes non logiques :*
   a) *des signes pour les relations : « R_i » pour tout $i \in \mathbf{I}$;*
   b) *des signes pour les fonctions : « f_i » pour tout $i \in \mathbf{J}$;*
   c) *des constantes pour des individus : « c_i » pour tout $i \in \mathbf{K}$;*
3. *des signes auxiliaires : parenthèses.*

Nous appelons les signes « $\forall$ » et « $\exists$ » des « *quantificateurs* », les expressions de la même forme que « $\forall x$ » et « $\exists x$ » des « *quantifications des variables* » et les phrases de la forme « $\forall x(\ldots x \cdots)$ » et « $\exists x(\ldots x \cdots)$ » des« *phrases quantifiées* ». Nous écrivons « $\equiv$ » pour le signe de la relation d'identité dans la langage-objet pour le distinguer de « $=$ » qui représente la relation d'identité dans le métalangage. Nous abrégeons « $\neg(\ldots \equiv \ldots)$ » par « $\ldots \not\equiv \ldots$ » et adoptons les mêmes conventions d'économie de parenthèses que pour la logique propositionnelle.

Les fonctions, comme nous l'avons vu à la p. 227, déterminent un objet sur la base de leurs arguments. La référence des expressions comme « le père de Jean » est alors établie de manière univoque (supposant que Jean ait un seul père) : elle sera la valeur pour la fonction « le père de x » appliquée à Jean. Les fonctions dont nous parlons en $\mathcal{L}^+$ sont des fonctions d'individus, c'est-à-dire des relations entre des éléments de notre domaine de quantification. Dans les langues naturelles, de telles fonctions sont exprimées par des expressions comme « le père de ... », « le livre préféré de ... », « l'intérêt commun de ... et $\cdots$ » et « le centre du cercle inscrit dans le triangle déterminé par les points ... »,

[1] Nous dénotons par « $\mathbb{N}$ » l'ensemble des nombres naturels, $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. **I**, **J** et **K** sont des sous-ensembles de nombres naturels, qui nous servent comme indices pour les signes de relations, fonctions et pour les constantes individuelles respectivement.

PROOF

⋯ et ...». Il s'agit de ‹règles de construction› pour les termes singuliers complexes. Contrairement à beaucoup de fonctions exprimées dans les langues naturelles, nous supposons que nos fonctions d'individu soient ce que l'on appelle «*entièrement définies*», c'est-à-dire qu'elles ont une valeur pour *tout* argument.

Notons que $\mathcal{L}^+$ contient $\mathcal{L}$, du moins si nous nous imaginons toutes les phrases atomiques de $\mathcal{L}$ composées d'un prédicat (relation unaire) et d'une constante individuelle «Fa» : ceci veut dire qu'une formule bien formée de $\mathcal{L}$ sera aussi une formule bien formée de $\mathcal{L}^+$.[2]

Les signes non logiques de notre alphabet jouent le rôle des phrases primitives de la logique propositionnelle : comme «p», «q», etc. (ou «p_1», «p_2», «p_3», etc.) sont des abréviations arbitraires pour les phrases de notre langage-objet que nous considérons comme logiquement simple, les signes «R», «f» et «c» (ou «R_1», «R_2», «R_3» ..., «f_1», «f_2», «f_3», ..., «c_1», «c_2», «c_3» ...) nous servent pour abréger n'importe quel signe de relation, de fonction et n'importe quelle constante. Comme dans le cas de la logique propositionnelle, on peut toujours s'imaginer ces signes remplacés par des expressions du français (du type syntaxique correspondant). Pour les prédicats unaires, nous utilisons souvent «F», «G», «H», etc.

Les ensembles $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ sont des ensembles d'indices qui nous servent à distinguer les différents symboles pour les relations, les fonctions et les individus. Nous pourrions par exemple énumérer les signes de relations par les nombres 1, 4, 7, 10, 14, etc., les signes de fonctions par 2, 5, 8, 11, 15, etc. et les constantes individuelles par 3, 6, 9, 12, 16, etc. Au lieu de «x_1», «x_2», «x_3», nous écrivons parfois «x», «y», «z» pour les variables. Nous abrégeons l'ensemble de toutes les variables de la langue $\mathcal{L}^+$ par «$\mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+)$».

Les relations et les fonctions peuvent être unaires, binaires, tertiaires et ainsi de suite. Elles peuvent prendre un, deux, trois ou plusieurs argument pour former une phrase, c'est-à-dire avoir une arité de 1, 2, 3, etc. C'est pourquoi nous appelons une «*langue*» $\mathcal{L}^+$ un alphabet – incluant un choix précis de signes non logiques – avec un ensemble $\mathbf{K}$ d'indices pour les constantes et deux fonctions $\lambda : \mathbf{I} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mu : \mathbf{J} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ qui déterminent l'arité de nos signes de relations et de fonctions, et des règles de formation, comme elle seront détaillées dans notre définition d'une formule bien formée ci-dessous.[3] Si F est un prédicat (une relation unaire), par exemple, $\lambda(F) = 1$; si R est une relation binaire, $\lambda(R) = 2$; si $+$ est une fonction binaire, alors $\mu(+) = 2$, etc. Une langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ pour la logique des prédicats est donc composée de connecteurs, de quantificateurs, du signe d'identité, d'une infinité de variables individuelles, d'un certain nombre de relations et de fonctions ayant des arités spécifiques (déterminées par λ et μ) et d'un certain nombre $\mathbf{K}$ de constantes individuelles.

Nous pouvons maintenant définir ce qu'est un *terme* (singulier) de notre langue $\mathcal{L}^+$:

Définition 52 (Termes). *Les* termes *d'une langue* $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ *sont définis par les clauses récursives :*

1. *Toute variable «*x_i*» (*$i \in \mathbb{N}$*) est un terme.*
2. *Toute constante «*c_i*» (*$i \in \mathbb{N}$*) est un terme.*

[2] Une autre provision est nécessaire : les connecteurs propositionnels, définis dans le langage de la logique propositionnelle comme reliant des phrases, relient dans la logique des prédicats des phrases qui peuvent être complètes *ou* ouvertes. Ceci veut dire que les connecteurs dans $\mathcal{L}$ sont toujours du type **S**/**SS** (cf. p. 246 dans le ch. 9.6), bien que ceux de $\mathcal{L}^+$ soient ambiguës entre **S**/**SS** et (**S**/**N**)/(**S**/**N**)(**S**/**N**). La conjonction dans «$Fa \wedge \exists x(Gx)$», par exemple, lie deux phrases, celle dans «$\forall x(Fx \wedge Gx)$» deux phrases ouvertes (cf. p. 232).

[3] Par «$\mathbb{N} \setminus \{0\}$», nous désignons l'ensemble des nombres naturels sans le 0 (= {1, 2, 3, ... }). Nous excluons alors une arité de 0. Alternativement, nous aurions pu définir les constantes individuelles comme des fonctions d'arité 0.

PROOF

3. *Si « t_1 », « t_2 », ... , « $t_{\mu(j)}$ » sont des termes ($j \in \mathbf{J}$), alors « $f_j(t_1, t_2, \ldots, t_{\mu(j)})$ » est un terme.*
4. *Rien d'autre n'est un terme.*

Par la troisième clause, nous excluons des ‹ fonctions ouvertes › : toute fonction, pour déterminer une valeur unique, a besoin de tous les arguments qu'exige son arité. Pour les distinguer des variables, nous appelons les constantes et les valeurs de fonctions de constantes des « termes singuliers ».

Puisqu'elle utilise le prédicat à définir (« ... est un terme »), cette définition est récursive, comme le sont aussi les définitions de formule atomique et de formule que nous donnerons par la suite.[4] Les termes sont les expressions de notre langage qui nous servent pour désigner les objets du domaine de discours.

Nous définissons également les formules atomiques, qui jouent le rôle des phrases simples de la logique propositionnelle :

Définition 53 (Formules atomiques). *ϕ est une* formule atomique *de la langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ si et seulement si :*

1. *ϕ est de la forme « $t_1 = t_2$ » pour deux termes « t_1 » et « t_2 » ; ou*
2. *ϕ est de la forme « $R_i(t_1, t_2, \ldots, t_{\lambda(i)})$ » pour des termes « t_1 », « t_2 », ... , « $t_{\lambda(i)}$ » et $i \in \mathbf{I}$.*

Ayant à notre disposition l'équivalent de phrases simples, nous pouvons construire les formules complexes, en imitant la procédure pour les connecteurs de la logique propositionnelle :

Définition 54 (Formules). *ϕ est une* formule *de la langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ si et seulement si :*

1. *ϕ est une formule atomique ; ou*
2. *ϕ est de la forme $\ulcorner(\neg\psi)\urcorner$ pour une formule ψ ; ou*
3. *ϕ est de la forme $\ulcorner(\psi \wedge \chi)\urcorner$, $\ulcorner(\psi \vee \chi)\urcorner$, $\ulcorner(\psi \rightarrow \chi)\urcorner$ ou $\ulcorner(\psi \leftrightarrow \chi)\urcorner$, pour des formules ψ et χ ; ou*
4. *ϕ est de la forme $\ulcorner\forall x_i(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_i(\psi)\urcorner$ pour une formule ψ et une variable « x_i », $i \in \mathbb{N}$.*

Nous avons ainsi complètement défini la langue $\mathcal{L}^+$: elle comprend toutes les formules bien formées, c'est-à-dire des quantifications, négation, conjonctions, disjonctions, implications et équivalences de phrases ouvertes et fermées, des prédications (avec ou sans variables) et des énoncés d'identité (y inclus ceux qui sont des phrases ouvertes).

Nous économisons des parenthèses par les mêmes conventions que dans le cas de la logique propositionnelle. En plus, nous écrivons « $\forall x, y, z(\ldots)$ » au lieu de « $\forall x\ (\ldots\ \forall y\ (\cdots\ \forall z(\ldots)\cdots)\ldots)$ » et « $\exists x, y, z(\ldots)$ » au lieu de « $\exists x\ (\ldots\ \exists y\ (\cdots\ \exists z(\ldots)\cdots)\ldots)$ ». Il est à remarquer que nous considérons comme bien formées des quantifications vides – des phrases contenant des quantificateurs qui portent sur des phrases entières comme « $\forall x(Fa)$ » et « $\exists y \exists x(Fx)$ ».

[4] Ceci signifie que notre définition a la forme suivante :

(i) Toute variable est un terme.
(ii) Toute constante est un terme.
(iii) Tout nom pour la valeur d'une fonction pour un référent d'une ou de plusieurs expressions des catégories 1 et 2 est un terme.
(iv) Tout nom pour la valeur d'une fonction pour un référent d'une ou de plusieurs expressions des catégories 1, 2 et 3 est un terme.
(v) Tout nom pour la valeur d'une fonction pour un référent d'une ou de plusieurs expressions des catégories 1, 2, 3 et 4 est un terme.
(vi) ...

La récursion dans la clause (3) de la définition donnée nous permet d'abréger les conditions (ii), (iv), (v), etc. de cette définition itérative (c'est-à-dire non récursive), qui a le défaut (considérable !) d'être d'une longueur infinie.

PROOF

Comme nous l'avons vu dans le ch. 9.3, il est crucial pour la sémantique de la logique des prédicats de distinguer entre les phrases complètes qui sont vraies ou fausses et des phrases ouvertes qui sont vraies ou fausses *de* certains objets, mais qui ne sont pas vraies tout court, ni fausses tout court. Cette distinction nous oblige à dire quand une variable a une occurrence « libre » dans une formule. Une phrase ouverte se distingue d'une phrase fermée par le fait qu'elle contient au moins une occurrence libre d'une variable. Nous adoptons donc la définition suivante, qui nous fournit une manière plus rigoureuse de parler de ce que nous avons appelé (à la p. 204), de manière métaphorique, un 'trou' dans une phrase ouverte :

Définition 55 (Occurrence libre). *Si ϕ est une formule et « x_i » une variable, nous disons que « x_i »* a une occurrence libre dans *ϕ si et seulement si une des conditions suivantes est remplie :*

1. *ϕ est une formule atomique et contient « x_i » ;*
2. *ϕ a la forme $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et « x_i » a une occurrence libre dans ψ ;*
3. *ϕ a la forme $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ ou $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ et « x_i » a une occurrence libre soit dans ψ, soit dans χ ;*
4. *ϕ a la forme $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner$, $i \neq j$ et « x_i » a une occurrence libre dans ψ.*

Par la dernière clause, les quantificateurs réduisent le nombre d'occurrences libres des variables qu'ils quantifient dans leur portée. Une variable qui reste intouchée par toute quantification additionnelle est une variable qui n'est pas libre, mais déjà liée par un quantificateur. Une variable a une occurrence libre dans une formule si elle n'y est pas partout gouvernée par un quantificateur correspondant. Nous disons que les occurrences de variables qui ne sont pas libres sont « liées » – liées par un des quantificateurs dans la portée – son ‹sphère d'influence› – duquel elles se trouvent.[5] Considérons par exemple la formule suivante dans le langage de l'arithmétique :

$$\forall x(x \leq 0 \rightarrow x \leq y) \wedge \exists z(0 \leq z \wedge z \leq x \wedge x \neq 0 \wedge z \neq x)$$

Dans cette formule, la variable « x » a à la fois des occurrences libres et des occurrences liées, la variable « y » n'a que des occurrences libres et « z » n'a que des occurrences liées.

Une expression est une phrase ouverte si et seulement si elle contient au moins une occurrence libre d'une variable. Par conséquent, nous pouvons définir :

Définition 56 (Phrases). *Une* phrase *est une formule qui ne contient aucune occurrence libre d'une variable.*

Nous abrégeons par « ϕ », « ψ », etc. des noms pour des phrases arbitraires et par « $\ulcorner\phi(x)\urcorner$ », « $\ulcorner\psi(x,y)\urcorner$ » des noms pour des phrases ouvertes contenant des occurrences libres des variables « x » et des variables « x » et « y » respectivement.[6] Les résultats de la substitution des constantes individuelles « a » et « b » pour les variables sont désignés par « $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ » et « $\ulcorner\psi(a,b)\urcorner$ » respectivement.

[5] Voici quelques exemples. La variable « x » a une occurrence libre dans toutes les expressions suivantes : « x », « Fx », « $Fx \wedge Fy$ », « $\exists y(Rxy)$ », « $f(x)$ » et « $\forall y \exists z(Fx \rightarrow Ryz)$ ». Elle a également une occurrence libre dans « $\exists x(Fx) \wedge Gx$ » (la deuxième) et dans « $\forall y(Rxy) \rightarrow \exists x(Fx)$ » (la première).

[6] Nous avons besoin des demi-crochets de Quine puisque les expressions « « ... est triste » (x) », « « ... aime $\cdots$ » (x,y) » ne sont pas des formules bien formées. Les expressions « x est triste », « x aime y » (ou, à titre équivalent, « ... est triste » et « ... aime $\cdots$ »), par contre, que l'on obtient en substituant « ... est triste » pour $\phi(\ldots)$ et « ... aime $\cdots$ » pour $\psi(\ldots,\cdots)$, sont des phrases ouvertes bien formées.

PROOF

Comme les connecteurs, les quantificateurs ont aussi une *portée* – la phrase ouverte qui est gouvernée par le quantificateur. La distinction entre

Personne n'est heureux et personne n'est honnête. (10.1)

Personne n'est heureux et honnête. (10.2)

est que le premier quantificateur universel dans la première phrase ne gouverne que la phrase ouverte simple « x est heureux » bien que celui dans la deuxième phrase le phrase ouverte complexe « x est heureux et x est honnête » :

$\neg\exists x$ (x est heureux) $\wedge$ $\neg\exists x$ (x est honnête) (10.1+)

$\neg\exists x$ (x est heureux $\wedge$ x honnête) (10.2+)

Par la première phrase, je fais deux assertions : que personne n'est heureux et que personne n'est honnête. Par ceci, je prends un double risque : s'il y a quelque chose qui est heureux *et* s'il y a quelque chose qui est honnête, j'ai tort. Par la deuxième phrase, cependant, je fais une assertion beaucoup plus faible : je dis que personne n'est heureux et honnête *en même temps* – que tous ce qui sont heureux ne sont pas honnêtes et que tous ce qui sont honnêtes ne sont pas heureux. La différence réside en la portée des quantificateurs existentiels : « x est heureux $\wedge x$ est sage » dans le deuxième cas, seulement les deux conjoints séparément dans le premier.

Nous définissons la portée d'un quantificateur :

Définition 57 (Portée)**.** *Si ϕ est une formule qui contient une quantification d'une variable « x » (ou bien « $\forall x$ » ou bien « $\exists x$ »), nous appelons* « portée de la variable « x » dans ϕ » *la plus petite formule bien formée qui suit la quantification de « x ».*

Dans les trois formules suivantes, nous avons deux occurrences d'un quantificateur universel :

$$\forall x(Px) \to (\forall x(Qxy) \vee Rx) \tag{10.3}$$

$$\forall x(Px \to (\forall x(Qxy) \vee Rx)) \tag{10.4}$$

$$\forall x(Px \to \forall x(Qxy \vee Rx)) \tag{10.5}$$

Dans l'implication (10.3), la portée de premier quantificateur universel qui lie la variable « x » est « Px », dans la quantification universelle (10.4), c'est « $Px \to (\forall x(Qxy) \vee Rx)$ » et dans (10.5) c'est « $Px \to \forall x(Qxy \vee Rx)$ ». La portée de la deuxième quantification de « x », dans (10.3) et dans (10.4), est « Qxy » et « $Qxy \vee Rx$ » dans (10.5). La variable « x » a une seule occurrence libre dans (10.3) (la troisième) et n'a pas d'occurrence libre dans (10.4) ou (10.5). La variable « y », cependant, a des occurrences libres dans chacune des trois phrases considérées.

10.2 La sémantique de la logique des prédicats

Après avoir défini, de manière rigoureuse, ce qu'est une langue pour la logique des prédicats, nous allons maintenant montrer comment il faut *interpréter* une telle langue, en donnant une sémantique pour $\mathcal{L}^+$, la langue de la logique des prédicats. Une interprétation d'une formule du langage de la

PROOF

logique propositionnelle consiste en l'attribution de valeurs de vérité à toutes les phrases simples que cette formule contient ; une telle attribution correspond à une ligne de la table de vérité pour le connecteur principal de la formule en question. Malheureusement, la sémantique de la logique des prédicats est compliquée par deux facteurs, absents au cas de la logique propositionnelle :

1. la présence des signes non logiques sub-sententiels dans notre alphabet de base ;[7]
2. la présence des variables et, en conséquence, des phrases ouvertes.

La première difficulté signifie que nous ne pouvons pas simplement attribuer des valeurs de vérité à des phrases complètes, mais que nous sommes obligés d'interpréter les constantes, les signes de relations et les signes de fonctions. C'est pourquoi nous introduisons la notion d'une « structure ». La deuxième difficulté entraîne que même une interprétation du vocabulaire non logique ne suffira pas comme interprétation de notre langue, puisque nous devons interpréter également les phrases ouvertes : nous avons besoin de la notion d'une « assignation de valeurs » aux variables contenues dans une formule.

Comme pour la logique propositionnelle, il s'agit d'une attribution de valeurs *sémantiques* : en attribuant une valeur à une expression syntactique, nous spécifions une signification particulière pour cette expression. Dans le cas des phrases simples de la logique propositionnelle, cette 'signification' est particulièrement réduite : il s'agit simplement d'une des deux valeurs de vérité, de **v** ou de **f**. Dans le cas de la logique des prédicats, il s'agit d'objets (pour les expressions référentiels de notre langage, c'est-à-dire les termes) et d'ensembles d'objets (pour les prédicats et les relations). Nous parlons alors d'une « interprétation », pour la distinguer de l'assignation de valeurs beaucoup moins 'substantielle' en logique propositionnelle que nous avons appelée « valuation ». Une interprétation sera alors une fonction qui détermine une signification pour chacune des formules bien formées. Dans le cas le plus simple, une fonction qui détermine la valeur de vérité de la phrase « Fa » en associant le terme « a » à un objet précis, disons Sam, et le prédicat « F » (ou : « $F(\dots)$ », « Fx ») à un ensemble, par exemple l'ensemble de tous les chats. La phrase entière sera alors vraie si et seulement si Sam est un chat, c'est-à-dire si et seulement si Sam est un membre de l'ensemble des chats.

La définition suivante détermine quelles seront les valeurs des termes et des prédicats de notre langage. Pour les constantes et les variables, nous devons fixer un ensemble d'objet comme univers de discours – cet ensemble contient tous les individus dont nous voulons parler à l'aide du langage en question.[8] Aux signes de relations correspondront des relations à l'intérieur de cet ensemble et aux signes de fonctions des fonctions de cet ensemble dans cet ensemble.[9]

[7] Une expression bien formée est appelée « sub-sententielle » si elle ne contient pas de phrase entière.

[8] Nous avons introduit cette notion de domaine de quantification au ch. 8.6. Nous reviendrons à la question des univers de discours vides plus tard (cf. le ch. 11.7 à la p. 285).

[9] Voici quelques exemples de structures :

1. l'ensemble de tous les êtres humains, avec la relation d'amour, la fonction exprimée par « la mère de ... » et deux constantes individuelles, « Sam » pour Sam et « Marie » pour Marie ; dans une telle structure, nous évaluons la vérité de phrases comme « Maria aime Sam », « la mère de Maria aime Sam », « la mère de Maria aime la mère de la mère de Sam », « Maria aime la mère de quelqu'un », etc.
2. l'ensemble de tous les animaux, avec les relations exprimées par « x est un kangourou » et « x adore y », aucune fonction et des constantes individuelles « c_1 », « c_2 », ..., « c_n » pour tous les kangourous ; des phrases évaluables dans une telle structure seront, par ex., « tous les kangourous adorent quelqu'un », « il y a au moins quatre kangourous adorés à la fois par c_1 et par c_2 », etc.
3. l'ensemble de tous les nombres naturels, avec la relation exprimée par « $x \leq y$ », les fonctions de soustraction, addition et multiplication et deux constantes individuelles pour les nombres 0 et 1 ; dans une telle structure, nous pouvons interpréter toutes les affirmations de l'arithmétique, telles que « Il n'existe pas de nombres entiers

PROOF

Définition 58 (Structures). *Soit $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ une langue de la logique des prédicats. Une* structure $\mathcal{A}$ *pour $\mathcal{L}^+$ consiste en :*

1. *un ensemble non vide $|\mathcal{A}|$, appelé l'*« univers de discours » *ou le* « domaine de quantification » *de $\mathcal{A}$;*
2. *une* interprétation *de tous les signes de relations : une fonction qui attribue à tout $i \in \mathbf{I}$ une relation $R_i^{\mathcal{A}}$ sur $|\mathcal{A}|$ avec $\lambda(i)$ places argumentales, c'est-à-dire un sous-ensemble $R_i^{\mathcal{A}} \subset |\mathcal{A}|^{\lambda(i)}$.*[10]
3. *une* interprétation *de tous les signes de fonctions : une fonction qui attribue à tout $j \in \mathbf{J}$ une fonction $f_j^{\mathcal{A}}$ sur $|\mathcal{A}|$ avec $\mu(j)$ places argumentales, c'est-à-dire une fonction $f_j^{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}|^{\mu(j)} \to |\mathcal{A}|$.*
4. *une* interprétation *de toutes les constantes, qui attribue à tout $k \in \mathbf{K}$ un élément fixe $c_k^{\mathcal{A}}$ de $|\mathcal{A}|$.*

Nous utilisons des superscripts pour rendre clair que « $R^{\mathcal{A}}$ », « $f^{\mathcal{A}}$ » et « $c^{\mathcal{A}}$ » désignent, respectivement, une relation, une fonction et un élément de l'univers de discours qui nous sert d'interpréter le signe de relation « R », le signe de fonction « f » et la constante « c » dans la structure $\mathcal{A}$.[11] Nous appelons une fonction qui attribue aux expressions non logiques de notre langue (les constantes, les signes de relations, les signes de fonctions) les éléments et ensembles d'éléments du domaine de quantification une « *interprétation* » de notre langue et nous disons que nous « interprétons » les formules de cette langue dans la structure en question.

Prenons une phrase de notre langage-objet, par exemple « $R(a, b)$ ». Nous savons, étant données nos conventions typographiques, que « R » représente une relation et que « a » et « b » sont des constantes individuelles, désignant des objets de notre domaine. Une interprétation de ces signes consistera en une assignation d'une relation précise et des référents particuliers à « R », « a » et « b ». Nous pouvons, par exemple, interpréter cette phrase dans l'ensemble de toutes les personnes, assigner la relation d'amour à « R », Marie à « a » et Jean à « b ». La phrase sera donc vraie si et seulement s'il est le cas que Marie aime Jean.

Notons que la définition d'une structure ne nous dit rien sur l'interprétation des phrases ouvertes. Si nous prenons « $R(a, x)$ » comme exemple, nous savons seulement qu'un objet satisfait cette phrase ouverte si et seulement si cet objet est aimé par Marie. Mais comment pouvons-nous rendre cette relation exprimée par « ... est vrai de ⋯ » plus précise ? Dans le contexte d'une structure donnée, nous pouvons assigner des valeurs aux occurrences libres de nos variables :

Définition 59 (Assignations de valeurs). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats et $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$. Une* assignation de valeurs *pour $\mathcal{L}^+$ est une fonction h qui assigne à toute variable x_i ($i \in \mathbb{N}$) exactement un élément de l'univers de discours :* $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$.

strictement positifs x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$, dès que n est un nombre entier strictement supérieur à 2. », le fameux théorème de Fermat, démontré seulement en 1995 par Andrew Wiles.

Il est à noter que, à strictement parler, une structure est toujours un objet mathématique, comme elle est définie comme *ensemble* d'un certain type.

[10] « $|\mathcal{A}|^{\lambda(i)}$ » désigne un produit cartésien, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les suites, à $\lambda(i)$ membres, d'éléments de $|\mathcal{A}|$:

$$|\mathcal{A}|^{\lambda(i)} := \underbrace{|\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}| \times \ldots \times |\mathcal{A}|}_{\lambda(i) \text{ fois}}$$

$|\mathcal{A}|^3$, par exemple, est le produit $|\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}|$, consistant de tous les triples $\langle x, y, z \rangle$ de membres de $|\mathcal{A}|$ ($x, y, z \in |\mathcal{A}|$).

[11] Alternativement, nous aurions pu dire qu'une structure $\mathcal{A}$ est une suite de quatre éléments, $\mathcal{A} = \langle |\mathcal{A}|, h_{\mathbf{I}}, h_{\mathbf{J}}, h_{\mathbf{K}} \rangle$, consistant d'un ensemble $|\mathcal{A}|$, d'une fonction qui assigne à tout signe de relation son interprétation $h_{\mathbf{I}} : R_i \mapsto R_i^{\mathcal{A}}$, une autre fonction qui assigne à tout signe de fonction son interprétation $h_{\mathbf{J}} : f_J \mapsto f_j^{\mathcal{A}}$ et une fonction qui assigne à toute constante un élément de l'univers de discours : $h_{\mathbf{K}} : c_k \mapsto c_k^{\mathcal{A}} \in |\mathcal{A}|$.

PROOF

Une assignation de valeurs, en d'autres termes, est une interprétation ‹conditionnelle› des variables, «‹conditionnelle›» parce qu'elle ne les interprète pas au niveau d'une structure (d'une possibilité logique), mais à l'intérieur d'une structure. Cette différence correspond au fait que les variables, contrairement aux constantes, ‹varient› dans leur désignation même à l'intérieur d'une structure.[12] Provisoirement, une assignation de valeurs traite les variables comme s'il s'agissait de termes singuliers : elle nous permet d'établir la valeur de vérité qu'une phrase ouverte aurait si la variable dont elle contient une occurrence libre était un nom pour tel ou tel objet.

C'est de cette manière-ci qu'une assignation de valeurs nous permet, dans certaines conditions, de traiter les phrases ouvertes comme des phrases complètes.[13] La signification d'une phrase ouverte, telle que « x aime Marie », dépendra de l'assignation de valeurs dans le sens qu'une assignation de Sam à « x » nous donnera une phrase vraie, mais une assignation de Frédérique à « x » une phrase fausse. Pour éviter l'ambiguïté, il est également important qu'une assignation de valeurs soit une fonction : toute occurrence d'une variable doit être assignée à un seul objet et les occurrences de la même variable doivent être assignées au même objet.

Une structure et une assignation de valeurs, prises ensemble, déterminent de quels objets nous parlons à l'aide de nos expressions du langage-objet : la structure en question nous fournit les référents des constantes et les valeurs de nos fonctions individuelles, et l'assignation de valeurs nous livre une interprétation des variables. Nous pouvons donc déterminer sans univoque la référence (ou : la désignation) de tous nos termes :

Définition 60 (Désignation de termes)**.** *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$ et $h : \mathrm{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs. La* désignation $\overline{h}(t)$ *d'un terme « t » de $\mathcal{L}^+$ sous cette assignation de valeurs est définie comme suit :*

1. *si « t » est une variable, $\overline{h}(t)$ est $h(t)$;*
2. *si « t » est une constante « c_k », $\overline{h}(t)$ est $c_k^{\mathcal{A}}$;*
3. *si « t » est un terme de la forme « $f_j(t_1, \ldots t_{\mu(j)})$ » pour des termes « t_1 », ...« $t_{\mu(j)}$ », alors $\overline{h}(t)$ est $f_j^{\mathcal{A}}(\overline{h}(t_1), \ldots, \overline{h}(t_{\mu(j)}))$.*

La désignation est une fonction qui associe à tout élément référentiel de notre langue un et un seul objet ; elle étend l'assignation de valeurs, qui fait ceci pour les variables, à une fonction couvrant tous les termes. Une interprétation détermine à quels objets se réfèrent nos termes singuliers et quels objets sont désignés par nos variables : c'est ainsi qu'une assignation de valeurs h et une structure $\mathcal{A}$ déterminent la fonction $\overline{h}$ qui associe à tous nos termes singuliers et nos variables leurs désignations (dans une structure et, dans le deuxième cas, sous une assignation de valeurs).

Au lieu de dire que les phrases ouvertes ne sont ni vraies ni fausses mais vraies ou fausses *de* certains objets, nous pouvons maintenant dire qu'elles sont vraies ou fausses *sous une assignation de valeurs* aux variables dont elles contiennent des occurrences libres.

Comme nous avons vu à la p. 231 de la sct. 9.3, nous pouvons donner des conditions de satisfaction pour des prédicats logiquement complexes, ainsi expliquant leurs significations par la signification de leurs parties selon le principe de la compositionnalité. C'est en étendant les assignations de valeurs

[12] Nous discuterons d'une interprétation philosophique particulière de cette variation plus tard sous la rubrique de ‹individus arbitraires› (cf. p. 296).

[13] Ceci n'est pas tout à fait exact : il serait plus adéquat de dire qu'une assignation de valeurs nous permet de définir une notion générale, celle de la satisfaction, qui s'applique également aux phrases ouvertes et complètes et qui nous permet de définir la vérité d'une phrase complète comme cas limite.

PROOF

à des prédicats complexes que nous pouvons déterminer la signification des connecteurs qui relient des phrases ouvertes. Cette notion de vérité-sous-une-assignation-de- valeurs est la notion clef de la sémantique de la logique des prédicats :

Définition 61 (Vérité sous un assignation de valeurs)**.** *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$ et h : $\mathrm{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}^+$ est* vraie sous l'assignation de valeurs *h ou que l'assignation de valeurs h* satisfait *la formule ϕ (abrégé : « $\mathcal{A} \vDash_h \phi$ ») si et seulement si une des conditions suivantes est remplie :*

S1 *Si ϕ a la même forme que « $t_1 = t_2$ », alors $\overline{h}(t_1) = \overline{h}(t_2)$.*

S2 *Si ϕ a la même forme que « $R_i(t_1, \dots, t_{\lambda(i)})$ », alors $R_i^{\mathcal{A}}(\overline{h}(t_1), \dots, \overline{h}(t_{\lambda(i)}))$.*

S3 *Si ϕ est de la forme $\ulcorner\neg\psi\urcorner$, alors $\mathcal{A} \nvDash_h \psi$.*

S4 *Si ϕ est de la forme $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, alors $\mathcal{A} \vDash_h \psi$ et $\mathcal{A} \vDash_h \chi$.*

S5 *Si ϕ est de la forme $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, alors soit $\mathcal{A} \vDash_h \psi$, soit $\mathcal{A} \vDash_h \chi$.*

S6 *Si ϕ est de la forme $\ulcorner\psi \to \chi\urcorner$, alors soit $\mathcal{A} \nvDash_h \psi$, soit $\mathcal{A} \vDash_h \chi$.*

S7 *Si ϕ est de la forme $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$, alors $\mathcal{A} \vDash_h \psi$ si et seulement si $\mathcal{A} \vDash_h \chi$.*

S8 *Si ϕ est de la forme $\ulcorner\forall x_i(\psi)\urcorner$, alors $\mathcal{A} \vDash_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ pour tous les $a \in |\mathcal{A}|$.*

S9 *Si ϕ est de la forme $\ulcorner\exists x_i(\psi)\urcorner$, alors $\mathcal{A} \vDash_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ pour au moins un $a \in |\mathcal{A}|$.*

Ces conditions de vérité sont disquotationnelles dans le sens suivant : pour qu'un énoncé d'identité soit vraie (**S1**), il est requis que les deux termes aient la même signification ; pour qu'une prédication d'un signe de relation « $R(\dots,\dots)$ » de deux termes « a » et « b » (dans cet ordre) soit vraie (**S2**), il est requis que les désignations respectives de ces termes – les objets a et b – se trouvent dans la relation R (dans cet ordre). Il est vrai de dire d'une chose a qu'elle n'est pas F (**S3**), s'il n'est pas vrai de dire que a est F ; il est vrai de dire d'une chose a qu'elle est F et G (**S4**) si et seulement s'il est vrai de dire d'elle qu'elle est F et vrai de dire qu'elle est G, etc.

Nous ajoutons le signe de l'assignation de valeurs au signe de conséquence logique et écrivons « $\vDash_h$ » pour indiquer qu'il ne s'agit pas, comme dans le cas de la logique propositionnelle, d'une relation entre un ensemble de phrases et une phrase, mais d'une relation ternaire entre une structure, une assignation de valeurs et une phrase. La référence à l'assignation de valeurs est nécessaire puisqu'il n'y a pas seulement des phrases, mais également des phrases ouvertes qui sont vraies dans une structure sous une assignation de valeurs.

Ces conditions de vérité-sous-une-assignation sont disquotationnelles : ce qui est affirmé dans le langage-objet est simplement ‹ re-traduit › dans le métalangage. Les conditions de vérité disquotationnelles les plus fameuses sont ceux qui ont la forme du schéma **T** de Tarski :[14]

« La neige est blanche » est vrai. $\iff$ La neige est blanche. (10.6)

[14] La condition qu'un prédicat de vérité doit rendre vrais toutes les instances du schéma **T** joue, chez Tarski (1933), le rôle d'un critère d'adéquation pour une définition de vérité. Selon lui, tout prédicat « Fx » qui ne satisfait pas la condition suivante ne mérite pas le nom d'un prédicat de vérité (cf. p. 61) :

« La neige est blanche » est F $\iff$ La neige est blanche.

La présence des phrases auto-référentielles, cependant, nous interdit de prendre simplement la totalité de toutes ces équivalences comme définition de la vérité (ce qui ne signifie pas qu'exactement une telle ‹ définition › de la vérité à été proposée, cf. Horwich (1990, 1998b)) ; en substituant « cette phrase est fausse » dans le schéma **T**, nous obtenons une contradiction. C'est pour exclure cette forme d'auto-référentialité que le ‹ détour ‹ à travers la syntaxe est nécessaire.

PROOF

C'est justement la trivialité de cette condition de vérité pour « La neige est blanche » qui nous assure de sa correction. Si nous abrégeons « la neige » par « a » et « ...est blanc » par « Fx », la clause **S2** de la définition de la satisfaction nous donne :

$$\text{« } Fa \text{ » est vrai dans } \mathcal{A} \quad \Longleftrightarrow \quad a^{\mathcal{A}} \in F^{\mathcal{A}} \tag{10.6+}$$

Nous disons qu'une phrase ouverte est *satisfaisable dans une structure* s'il y a une assignation de valeurs qui la satisfait. Elle est *satisfaisable* s'il y a une structure dans laquelle elle est satisfaisable. Un ensemble de phrases Σ est satisfaisable si tous ses membres $\phi \in \Sigma$ le sont. Comme avant, dire que Σ est satisfaisable revient à dire qu'il est logiquement possible que toutes les phrases dans Σ soient vraies ensembles, qu'elles décrivent ensemble une possibilité logique : une possibilité logique, dans la logique des prédicats, correspondra donc à une structure et une assignation de valeurs.

S1 et **S2** disent que les phrases qui affirment une identité ou que certaines choses se trouvent dans une certaine relation sont vraies sous une assignation de valeurs, si et seulement si les choses dites identiques sont réellement traitées comme étant identiques par cette assignation de valeurs et les choses dont on dit qu'elles se trouvent dans une certaine relation R_i se trouvent réellement dans cette relation d'après l'assignation de valeurs en question. En bref, elles disent que les phrases atomiques sont vraies si elles représentent les choses comment elles sont d'après l'assignation en question.

Les conditions **S3** à **S7** répètent les clauses que nous avons données pour la sémantique des connecteurs propositionnels, sauf qu'elles sont maintenant appliquées également à des connecteurs qui relient des phrases ouvertes.[15]

Les deux clauses concernant les quantificateurs sont plus difficiles à comprendre. Elles utilisent une notion que nous n'avons pas encore introduite, celle d'une « assignation variée à la place « x » ». Ce que nous voulons dire, en stipulant la condition **S9**, c'est qu'une formule quantifiée existentiellement est vraie dans $\mathcal{A}$ sous h si et seulement s'il y a un objet dans l'univers du discours dont est vraie la phrase ouverte précédée par le quantificateur existentiel. Nous ne savons pas, cependant, si l'assignation h en question assigne cet objet à l'occurrence libre de la variable dans la phrase ouverte. Nous avons donc besoin de changer l'assignation en question, pour rendre sûr qu'elle assigne le bon objet.

Définition 62 (Assignations variées). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$, $h : \mathrm{Vbl}(\mathcal{L}+) \to |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs et « x_i » une variable de $\mathcal{L}^+$. Nous définissons* l'assignation variée à la place « x_i » *– appelée « $h\binom{x_i}{a}$ » – comme suit :*

$$h\tbinom{x_i}{a}(x_j) \quad := \quad \begin{cases} h(x_j) & i \neq j \\ a & i = j \end{cases}$$

$h\binom{x_i}{a}$ est une fonction qui assigne à toutes les variables sauf « x_i » le même individu que leur assigne h et assigne a à « x_i » – c'est une modification locale de l'assignation h à la place « x_i » qui la force

[15] Comme nous avons définis les connecteurs propositionnels, les connecteurs reliant des phrases ouvertes ne sont pas des connecteurs propositionnels. Strictement parlant, il n'est donc pas vrai que les formules bien formées de la logique propositionnelle sont aussi des formules bien formées du calcul des prédicats (cf. p. 246). Nous aurions pu, cependant, définir les connecteurs dès le début et pour des phrases complètes et pour des phrases ouvertes – dans la logique propositionnelle, nous n'aurions donc traité que d'un de ces cas.

PROOF

d'assigner a à « x_i », mais qui garde le reste de h inchangé. **S9** veut dire qu'une quantification existentielle est vraie s'il y a un élément du domaine de discours, a, qui permet de changer l'assignation en question de sorte que la phrase en question dit quelque chose de vraie de cette chose a.

S8 dit, en conséquence, qu'une formule universellement quantifiée est vraie sous une assignation de valeurs si et seulement si la phrase ouverte est vraie sous toute modification de cette assignation et donc sous toute assignation d'un élément du domaine à la variable en question. Une quantification universelle est vraie uniquement au cas où la phrase ouverte, gouvernée par le quantificateur universel, est satisfaite en tenant compte de toutes les valeurs possibles de ses variables (à l'intérieur de la structure, bien sûr, concernant tous les éléments du domaine de discours respectif). **S9**, de l'autre côté, dit qu'une phrase existentielle est vraie sous une assignation de valeurs s'il y a et seulement s'il y a, dans l'univers de discours en question, au moins un individu qui peut être assigné comme valeur à la variable ayant une occurrence libre dans la phrase ouverte en question.

Nous avons vu que la définition de la notion de vérité sous un assignation de valeurs consiste en trois parties :

1. une première partie qui affirme la vérité des formules atomiques de la forme « $t_1 = t_2$ » et « $R_i(t_1, \dots, t_{\lambda(i)})$ » si l'assignation en question attribue au termes les mêmes désignations (premier cas) et au signe de relation une relation entretenue entre les désignations des termes (deuxième cas) ;
2. une deuxième partie qui donne des définitions récursives pour les formules contenant des connecteurs propositionnels ;
3. une troisième partie qui traite des quantificateurs et utilise la notion d'assignation de valeurs variée à une place : une phrase universellement quantifiée est vraie sous une assignation si et seulement si elle est vraie sous toute assignation variée à la place de la variable universellement quantifiée ; une phrase existentiellement quantifiée est vraie sous une assignation si et seulement si elle est vraie sous au moins une telle assignation variée.

Une formule est vraie sous une assignation de valeurs si et seulement si l'assignation des valeurs à ses variables correspond à la manière dont ces variables sont reliées dans la proposition. En examinant les clauses **S1** à **S9**, nous remarquons que leurs résultats pour certaines formules ne dépendent pas de l'assignation h en question. Il s'agit alors des phrases, c'est-à-dire des formules qui ne contiennent pas d'occurrence de variable libre. Si nous choisissons, par exemple, la phrase « $\forall x(0 \leq x)$ » et nous l'évaluons dans la structure des nombres naturels (et avec l'interprétation de « $\leq$ » par la relation de n'être pas plus grand que), selon **S8** le résultat est qu'elle est vraie sous toutes les assignations. La raison pour cela est simple : il n'y a rien à assigner à cette proposition, puisqu'elle ne contient pas d'occurrence libre d'une variable (la seule variable qu'elle contient, « x », a une seule occurrence et celle-là est gouvernée par le quantificateur universel).

Cette observation se généralise : il est vrai de toutes les *phrases* que leurs valeurs de vérité ne dépendent pas d'une assignation de valeurs particulière. Une phrase ne contient pas d'occurrence libre d'une variable, donc il n'y a rien à assigner – si elle est vraie, elle est vraie sous toutes les assignations, si elle est fausse, elle n'est vraie sous aucune. Nous obtenons ainsi la notion de vérité (ne s'appliquant qu'à des phrases complètes) comme cas limite de la notion de vérité-sous-une-assignation (qui s'applique également à des phrases ouvertes) :

Définition 63 (Vérité dans une structure)**.** *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats et $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}^+$ est* vraie dans la structure *$\mathcal{A}$ si et seulement si*

PROOF

ϕ est vraie sous toutes les assignations de valeurs pour $\mathcal{L}^+$ dans $|\mathcal{A}|$:

$$\mathcal{A} \vDash \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{pour tout } h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}| \ : \quad \mathcal{A} \vDash_h \phi$$

Si ϕ est vrai dans une structure $\mathcal{A}$, nous appelons $\mathcal{A}$ un « modèle *» de ϕ.*

Cette définition de vérité-dans-une-structure comme vérité-sous-toutes-les-assignations est essentiellement celle de Tarski (1933) (cf. sct. 13.6). Être vrai dans une structure particulière correspond, en logique propositionnelle, au fait de recevoir « V » à une ligne particulière d'une table de vérité. Une telle formule est alors, comme en logique propositionnelle, appelée « satisfaisable » : la structure satisfait la formule, est un modèle pour elle, nous montre comment elle peut être vraie.

La notion de vérité-dans-une-structure est une généralisation de la notion ordinaire de vérité, qui traite le monde actuel comme seule structure digne d'intérêt. En logique, nous ne nous intéressons pas à ce qui est vrai ou faux dans une structure particulière : nous nous intéressons à ce qui est vrai dans toutes les structures (aux tautologies) et aux relations qu'il y a entre les vérités dans différentes structures, aux relations de conséquence logique, c'est-à-dire à la connection, ou non, entre la vérité des prémisses et la vérité ou fausseté de leur conclusion.

Pour arriver à une notion de vérité logique, nous devons généraliser sur toutes les structures :

Définition 64 (Validité). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}^+$ est* valide *ou qu'elle est une* vérité logique *(de la logique des prédicats) si et seulement si ϕ est vraie dans toutes les structures pour $\mathcal{L}^+$:*

$$\vDash \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{pour tout } \mathcal{A} \ : \quad \mathcal{A} \vDash \phi$$

Une structure pour $\mathcal{L}^+$ est une manière d'interpréter les formules bien formées de $\mathcal{L}^+$: c'est soit une manière de varier la signification du vocabulaire non logique, soit une manière d'imaginer que le monde soit différent de ce qu'il est (cf. la sct. 3.7). En conséquence, nous pouvons appeler les formules dont la vérité ne dépend pas du choix de structure soit « structurellement », soit « universellement » vraies.

De cette notion de validité, nous obtenons une notion de conséquence logique :

Définition 65 (Conséquence logique). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats. Une formule ϕ est une* conséquence logique *d'un ensemble de formules Σ si et seulement si ϕ est vraie dans toutes les structures où toutes les formules de Σ sont vraies :*

$$\Sigma \vDash \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{pour tout } \mathcal{A} \ : \ \textit{si } \mathcal{A} \vDash \psi \textit{ pour toutes les formules } \psi \in \Sigma, \textit{ alors } \mathcal{A} \vDash \phi$$

Notre définition de validité nous permet de compter comme valides ou logiquement vraies des phrases qui ne sont pas des tautologies de la logique propositionnelle. Prenons par exemple la phrase ouverte suivante :

$$(x = y) \to (Rxb \to Ryb) \tag{10.7}$$

Interprétée dans une certaine structure, (10.7) dit, par exemple, que si la valeur de la variable « x » est la même que la valeur de la variable « y », alors si x aime Marie, alors y aime Marie. La vérité de (10.7) ne dépend pas de la valeur des variable « x » et donc de l'assignation de valeurs en question – quelle

PROOF

que soit l'assignation particulière, si elle assigne le même individu à ces deux variables, alors l'amour de Marie ne distinguera pas leurs référents.[16] Nous voyons également que la vérité de (10.7) ne dépend pas non plus de l'interprétation particulière de « R », ni de celle de « b » – si nous l'interprétons comme « si les valeurs de « x » et de « y » sont les mêmes, alors si un des deux dépend de Dieu, alors l'autre en dépend également », elle est également vraie. La phrase (10.7) est donc vraie dans toutes les structures, et sous toutes les assignations, donc logiquement vraie ou valide.

Qu'est-ce qui change si nous préfixons (10.7) de deux quantificateurs universels qui lient les variables « x » et « y » qui ont des occurrences libres dans (10.7)?

$$\forall x \forall y \left((x = y) \rightarrow (Rxb \rightarrow Ryb)\right) \tag{10.7+}$$

Nous avons déjà vu que la validité d'une phrase ne dépend jamais d'une assignation de valeurs. Nous appelons « *clôture universelle* »d'une formule ϕ la formule obtenue en adjoignant à ϕ des quantificateurs universels correspondant à chaque variable dont ϕ contient une occurrence libre.[17] Comme elle est indépendante de l'assignation de valeurs choisie, la validité ne distingue pas entre une formule et sa clôture universelle :

Théorème 66. *Une formule est valide si et seulement si sa clôture universelle est valide.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ une structure arbitraire. ϕ est valide si et seulement si ϕ est vraie dans $\mathcal{A}$ sous toutes les assignations de valeurs possibles. Étant donné **S8**, cette condition est nécessaire et suffisante pour la vérité, dans $\mathcal{A}$, de la clôture universelle de ϕ. □

Nous voyons donc que (10.7) sera valide si et seulement si sa clôture universelle (10.7+) est également valide. Ce théorème nous apprend que nous pouvons nous limiter à la considération de phrases pour décider des questions de validité.

Comme conséquence du théorème (66), nous avons comme exemple d'une équivalence logique (conséquence logique réciproque) le suivant : Soit ϕ une formule contenant n occurrences libres de variables différentes « x_1 », ... « x_n » :

$$\mathcal{A} \vDash \phi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \ulcorner \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (\phi) \urcorner \tag{10.8}$$

Il est à remarquer que cette équivalence est vraie seulement au niveau de la validité : si ϕ est valide, c'est-à-dire vraie dans toutes les structures et sous toutes les assignations de valeurs, alors sa clôture universelle l'est aussi, et vice versa.[18] Au niveau d'une structure et d'une assignation particulière, une formule et sa clôture universelle peuvent très bien différer. Soit $\mathcal{A}$, par exemple, une structure dont l'univers de discours sont tous les animaux et « Px » est interprété par l'ensemble de tous les pingouins. Sous une assignation particulière – une assignation qui assigne un pingouin à « x »–, « Px » sera vrai. Mais ceci ne veut pas dire que tous les animaux sont des pingouins, ni que, sous cette assignation, « $\forall x(Px)$ » sera également vrai.

[16] C'est une manière de dire que « Marie aime ... » est un contexte extensionnel, c'est-à-dire une matrice linguistique qui permet l'intersubstituabilité des termes coréférentiels *salva veritate*. Comme nous l'avons vu à la p. 233, certains ont nié cette vérité évidente (et importante).

[17] Il s'agit d'une notion différente de celle définie à la p. 124 : la clôture déductive d'une formule propositionnelle est un ensemble de formules (de toutes ses conséquences logiques), bien que la clôture d'une formule de la logique des prédicats est le résultat du remplissage de tous ces trous.

[18] Il s'agit, en d'autres mots, d'une conséquence globale qui n'est pas une conséquence locale.

PROOF

10.3 Les substitutions

La notion d'assignation de valeurs variée à la place « x_i » (cf. p. 260) nous permet de dire quand une assignation de valeurs satisfait une phrase universellement ou existentiellement quantifiée. Imitant la procédure de substitution pour la logique propositionnelle (cf. p. 154), nous pouvons définir des notions analogues en syntaxe : la substitution d'un terme par un autre terme dans un terme ou une formule.

Définition 67 (Substitutions dans des termes). *Si « s » et « t » sont des termes et « x_i » une variable, nous définissons un nouveau terme, que nous appelons «* la substitution de « x_i » par « t » dans « s »*» ou « $s(x_i/t)$ », de manière récursive, comme suit :*

1. *Si « s » est la même variable que « x_i », alors « $s(x_i/t)$ » est « t ».*
2. *Si « s » est une variable autre que « x_i », alors « $s(x_i/t)$ » est « s ».*
3. *Si « s » est une constante, alors « $s(x_i/t)$ » est « s ».*
4. *Si « s » est un terme pour une valeur de fonction « $f_j(t_1, \dots, t_{\mu(j)})$ » pour des termes « t_1 », ..., « $t_{\mu(j)}$ », alors « $s(x_i/t)$ » est « $f_j(t_1(x_i/t), \dots, t_{\mu(j)}(x_i/t))$ ».*

En bref, toute occurrence *libre* de « x_i » dans « s » est remplacée par « t ». Nous pouvons maintenant définir ce qu'est la substitution d'un terme par un autre dans une formule :

Définition 68 (Substitutions dans des formules). *Si ϕ est une formule, « t » un terme et « x_i » une variable, nous définissons une nouvelle formule, que nous appelons «* le résultat de la substitution de « x_i » pour « t » dans ϕ *» ou $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$, de manière récursive comme suit :*

1. *Si ϕ est « $t_1 = t_2$ » pour deux termes « t_1 » et « t_2 », alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est « $t_1(x_i/t) = t_2(x_i/t)$ ».*
2. *Si ϕ est « $R_i(t_1, \dots t_{\lambda(i)})$ » pour un signe de relation « R_i » et des termes « t_1 », ...« $t_{\lambda(i)}$ », alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est « $R_i(t_1(x_i/t), \dots t_{\lambda(i)}(x_i/t))$ ».*
3. *Si ϕ est $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ pour une formule ψ, alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est $\ulcorner\neg\psi(x_i/t)\urcorner$.*
4. *Si ϕ est $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \to \chi\urcorner$ ou $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ pour des formules ψ et χ, alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est $\ulcorner\psi(x_i/t) \wedge \chi(x_i/t)\urcorner$, $\ulcorner\psi(x_i/t) \vee \chi(x_i/t)\urcorner$, $\ulcorner\psi(x_i/t) \to \chi(x_i/t)\urcorner$ ou $\ulcorner\psi(x_i/t) \leftrightarrow \chi(x_i/t)\urcorner$ respectivement.*
5. *Si ϕ est $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner$ pour une formule ψ et une variable « x_j », alors*

$$\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner := \begin{cases} \ulcorner\forall x_j\psi(x_i/t)\urcorner & i \neq j \\ \phi & i = j \end{cases} \qquad \ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner := \begin{cases} \ulcorner\exists x_j\psi(x_i/t)\urcorner & i \neq j \\ \phi & i = j \end{cases}$$

En bref, nous remplaçons toute occurrence libre de la variable « x_i » par le terme « t ». Si « x_i » n'a aucune occurrence libre dans ϕ, $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est la même formule que ϕ. Si nous pouvons être assurés grâce au contexte que ϕ contient au moins une occurrence libre de « x », nous écrivons $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ pour $\ulcorner\phi(x/a)\urcorner$: $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ est l'*application* du prédicat $\ulcorner\phi(x)\urcorner$ à a.

En substituant des termes pour des variables à leurs occurrences libres, nous devons faire attention à ne pas lier une variable qui ne l'était pas initialement. Soit ϕ la formule « $\exists x(x \neq y)$ ». Si une structure a un domaine contenant plus qu'un seul individu, il y aura toujours une assignation de valeurs à « y » qui satisfait cette phrase ouverte. Si nous substituons une autre variable « z » pour « y » dans ϕ, nous obtenons « $\exists x(x \neq z)$ », formule qui est également satisfaisable dans toutes les structures à plus d'un individu – le résultat de la substitution $\ulcorner\phi(y/z)\urcorner$ sera vrai si et seulement si ϕ l'est également.

PROOF

En substituant « y » par « x », par contre, nous obtenons un autre résultat : la formule « $\exists x(x \neq x)$ » est une phrase complète qui n'est vraie dans aucune structure (elle dit qu'il existe un individu dans le domaine de discours qui n'est pas identique à soi-même). Le diagnostic de ce changement est que l'occurrence de la variable « y », libre dans ϕ, a été liée dans $\ulcorner \phi(y/x) \urcorner$ – un simple changement 'terminologique' a réduit le nombre total d'occurrences libres de variables. Nous devons exclure ce cas pour les substitutions admissibles.

Nous disons alors que la variable « x » dans ϕ n'était pas *libre pour* « y » dans « $\exists x(x \neq y)$ » :

Définition 69 (Substitutions admissibles)**.** *Soit ϕ une formule, « t » un terme et « x_i » une variable. Nous disons que* « t » est libre pour « x_i » dans ϕ *si l'une des possibilités suivantes est le cas :*

1. *ϕ est une formule atomique ;*
2. *ϕ est $\ulcorner \neg \psi \urcorner$ et « t » est libre pour « x_i » dans ψ ;*
3. *ϕ est $\ulcorner \psi \wedge \chi \urcorner$, $\ulcorner \psi \vee \chi \urcorner$, $\ulcorner \psi \rightarrow \chi \urcorner$ ou $\ulcorner \psi \leftrightarrow \chi \urcorner$ pour des formules ψ et χ et « t » est libre pour « x_i » dans ψ et dans χ ;*
4. *ϕ est $\ulcorner \forall x_j(\psi) \urcorner$ ou $\ulcorner \exists x_j(\psi) \urcorner$ et « x_i » n'a pas d'occurrence libre dans ψ.*
5. *ϕ est $\ulcorner \forall x_j(\psi) \urcorner$ ou $\ulcorner \exists x_j(\psi) \urcorner$, « x_j » n'a pas d'occurrence dans « t » et « t » est libre pour « x_i » dans ψ.*

Cette définition nous apprend qu'un terme « t » est libre pour une variable « x_i » dans une formule ϕ s'il n'y a pas de variable « x_j » dans « t » et aucun quantificateur « $\forall x_j$ » dans ϕ tel qu'une occurrence libre de « x_i » est dans la portée de « $\forall x_j$ ».

Reprenons le cas de deux variables, où la substitution de « y » par « x » n'était pas admissible. « x » n'est pas libre pour « y » dans « $\exists x(x \neq y)$ » parce que ni la quatrième ni la cinquième possibilité est réalisée : « y » a une occurrence libre dans « $x \neq y$ » (ce qui exclut la quatrième) et « x » (= « x_j ») a une occurrence dans « x » (= « t »).

Intuitivement, un terme n'est pas libre pour une variable dans une formule si une éventuelle substitution du terme pour la variable réduisait le nombre total d'occurrences libres de variables dans la formule. Notre définition formalise cette intuition en définissant les formules dans lesquelles un terme est libre pour une variable : toute formule atomique a cette propriété (condition (1)), cette propriété est préservée sous les connecteurs propositionnels (conditions (2) et (3)) et n'est perdue par une quantification que si cette dernière lie une variable déjà contenu dans le terme. Nous verrons plus tard (à la p. 291) que les règles d'inférence de spécialisation universelle (SE) et de généralisation existentielle (GE) ne sont applicables qu'à des termes libres pour les variables que nous substituons par eux.

10.4 La logique des prédicats unaires

À part des équivalences logiques du type de (10.8) nous avons également affaire à un autre type d'équivalences – plus fortes, parce qu'il ne s'agit non seulement des équivalences entre la vérité des formules dans une structure, mais d'équivalences reliant la *satisfaction* de quelques formules dans des structures par des assignations de valeurs. Un exemple d'une telle équivalence est l'interdéfinissabilité des quantificateurs que nous avons déjà rencontrée dans la leçon 9 (cf. p. 241) :

Théorème 70 (Dualité)**.** *Soit ϕ une formule, $\mathcal{A}$ n'importe quelle structure pour la logique des prédicats et h n'importe quelle assignation de valeurs aux variables de $\mathcal{L}^+$:*

PROOF

$$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \forall x\, (\phi(x)) \urcorner \iff \mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \neg \exists x\, \neg(\phi(x)) \urcorner \tag{10.9}$$

$$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \exists x\, (\phi(x)) \urcorner \iff \mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \neg \forall x\, \neg(\phi(x)) \urcorner \tag{10.10}$$

Ce théorème, abrégé « $\neg\forall \equiv \exists\neg$ », nous montre la *dualité* de nos deux quantificateurs, analogue (et, dans le cas fini, équivalent) à la dualité entre conjonction et disjonction.

D'autres équivalences définitionnelles de ce dernier type, appelées « règles de passage » par Quine (1950, 142–148), nous disent sous quelles conditions nous pouvons « entrer » et « sortir » des quantificateurs :

Théorème 71 (Règles de passage)**.** *Soit ϕ une formule et ψ une formule dans laquelle la variable « x » n'a pas d'occurrence libre. Si $\mathcal{A}$ est n'importe quelle structure pour la logique des prédicats et h n'importe quelle assignation de valeurs aux variables de $\mathcal{L}^+$, nous avons les équivalences suivantes :*

P1	$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \forall x(\phi \vee \psi) \urcorner$	$\iff$	$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \forall x(\phi) \vee \psi \urcorner$
P2	$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \exists x(\phi \vee \psi) \urcorner$	$\iff$	$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \exists x(\phi) \vee \psi \urcorner$
P3	$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \forall x(\phi \wedge \psi) \urcorner$	$\iff$	$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \forall x(\phi) \wedge \psi \urcorner$
P4	$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \exists x(\phi \wedge \psi) \urcorner$	$\iff$	$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \exists x(\phi) \wedge \psi \urcorner$
P5	$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \forall x(\psi \to \phi) \urcorner$	$\iff$	$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \psi \to \forall x(\phi) \urcorner$
P6	$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \exists x(\psi \to \phi) \urcorner$	$\iff$	$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \psi \to \exists x(\phi) \urcorner$
P7	$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \forall x(\phi \to \psi) \urcorner$	$\iff$	$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \exists x(\phi) \to \psi \urcorner$
P8	$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \exists x(\phi \to \psi) \urcorner$	$\iff$	$\mathcal{A} \vDash_h \ulcorner \forall x(\phi) \to \psi \urcorner$

Démonstration. Des quatre premières équivalences, nous ne prouvons que la première : on en obtient la deuxième par l'interdéfinissabilité de $\ulcorner \forall x(\phi) \urcorner$ et $\ulcorner \neg\exists x\neg(\phi) \urcorner$ et la troisième et la quatrième par l'interdéfinissabilité des connecteurs.

Pour la preuve de **P1**, soit $\mathcal{A}$ une structure arbitraire et h une assignation de valeurs. Si $\ulcorner \forall x(\phi \vee \psi) \urcorner$ est vrai dans cette structure et sous cette assignation, $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$ est vrai sous toute assignation variée à la place « x ». Si c'est le premier disjoint ϕ qui est vrai, rien ne se change dans $\ulcorner \forall x(\phi) \vee \psi \urcorner$. Si c'est le deuxième disjoint ψ, une assignation variée à la place « x » sera juste une assignation ordinaire, puisque la variable « x » n'a pas d'occurrence libre dans ψ. En conséquence, $\ulcorner \forall x(\phi) \vee \psi \urcorner$ sera également vrai sous cette assignation. La converse est prouvée de manière similaire.

P5 et **P6** sont obtenus de **P1** et de **P2** par l'équivalence entre $\ulcorner \psi \to \phi \urcorner$ et $\ulcorner \phi \vee \neg\psi \urcorner$.

Pour (**P7**), notons que $\ulcorner \forall x(\phi \to \psi) \urcorner$ est équivalent à $\ulcorner \forall x(\neg\phi \vee \psi) \urcorner$ et donc, par la première équivalence, à $\ulcorner \forall x(\neg\phi) \vee \psi \urcorner$. Par l'interdéfinissabilité des quantificateurs, les formules de cette dernière forme sont équivalentes à $\ulcorner \neg\exists x(\phi) \vee \psi \urcorner$, dont nous obtenons $\ulcorner \exists x(\phi) \to \psi \urcorner$.

Pour **P8**, nous transformons $\ulcorner \exists x(\phi \to \psi) \urcorner$ en $\ulcorner \exists x(\neg\phi \vee \psi) \urcorner$, en $\ulcorner \exists x(\neg\phi) \vee \psi \urcorner$, en $\ulcorner \neg\forall x(\phi) \vee \psi \urcorner$ et puis en $\ulcorner \forall x(\phi) \to \psi \urcorner$. □

Les quatre premières équivalences nous permettent de faire 'entrer' et de faire 'sortir' des conjoints et des disjoints de la portée d'un quantificateur s'ils ne contiennent pas de variable qui est liée par celui-ci. La cinquième et sixième équivalence nous permettent de faire la même chose avec les antécédents des implications. La septième et la huitième, au contraire, nous montrent que les antécédents des implications sont implicitement niées et qu'il faut par conséquent changer le quantificateur en

PROOF

question en son quantificateur dual si on veut distribuer un quantificateur à travers une implication dont il quantifie l'antécédent.

Prises ensembles, ces dix équivalences nous permettent de réduire toute formule ne contenant que des prédicats unaires à une forme *purifiée* (où la portée de chaque quantificateur est minimale) et d'appliquer une procédure mécanique pour établir si oui ou non la formule en question est valide (cf. Quine, 1950, 121–128). Nous pouvons ainsi prouver la décidabilité de la logique des prédicats unaires, qui a été prouvée la première fois par le mathématicien allemand Leopold Löwenheim en 1915.

Les équivalences prouvées nous montrent comment nous pouvons faire entrer et sortir des quantificateurs à travers des connecteurs *si une des formules ne contient pas d'occurrence libre de la variable qui est quantifiée par le quantificateur correspondant*.[19] La qualification est importante : si nous avons affaire à un prédicat binaire dont les deux places argumentales sont gouvernées par différents quantificateurs, nous ne pouvons pas recourir à ces équivalences. Il n'aura, par exemple, aucune manière de transformer « $\forall x(Fx \to \exists y(Rxy))$ » en « $\exists x(Fx) \to \exists y(Rxy)$ ». La raison générale pour ce phénomène est que l'ordre des quantificateurs peut correspondre à un ordre de choix : comme nous l'avons vu (à la p. 211, par ex.), une différence importante entre « $\exists x \forall y(Rxy)$ » et « $\forall y \exists x(Rxy)$ » est que le premier nous oblige de choisir un x 'fixe', qui se trouve en relation R avec tous les y, bien que la deuxième phrase nous permet de choisir le x en question *en fonction* du y, ainsi faisant une séquence de choix différents plutôt qu'un seul choix.

Ceci nous oblige à accepter, pour des relations binaires, des quantifications 'mixtes' (contenant une alternation de quantificateurs universels et existentiels) que nous ne pourrons pas distribuer sur les parties de la phrase ouverte complexe qu'elles gouvernent. Il est important à noter, cependant, que ce cas n'arrivera pas avec des prédicats unaires : dans la logique des prédicats unaires, toute formule peut être transformée (préservant la satisfaction par une assignation) *en forme prénex*, où toutes les quantificateurs se trouvent au début de la formule, et toutes les quantifications peuvent également être transformées en une forme *purifiée*, où la portée de chaque quantificateur ne comprend que des formules atomiques dans lesquelles la variable quantifiée a une occurrence libre.

Nous pouvons alors nous demander ce qu'on obtiendrait en nous limitant à des prédicats unaires : pour ce faire nous considérons une restriction $\mathcal{L}^-$ de la langue de la logique des prédicats $\mathcal{L}^+$ et appelons la logique qui en résulte « logique des prédicats unaires ».[20] Le changement serait dramatique : la logique des prédicats, incluant des signes de relations (binaire), est indécidable (ce que nous verrons à la p. 285 et suivantes de la leçon 11); la logique des prédicats unaires, par contre, est décidable et permet un test de validité simple et efficace.[21]

Théorème 72 (Löwenheim (1915))**.** *La logique des prédicats unaires est décidable.*

Démonstration. Nous notons d'abord que, grâce à l'équivalence logique de toute formule avec sa clôture universelle, le problème de trouver une procédure de décision peut se limiter aux phrases, formules qui ne contiennent pas d'occurrences libres de variables. Nous pouvons maintenant appliquer,

[19] **P2** et **P3** sont valides peut importe si oui non ψ contient des occurrences libres de la variable « x ». Les formules « $\forall x(Fx \vee Gx) \to (\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx))$ » et « $(\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)) \to \exists x(Fx \wedge Gx)$ », par contre, ne sont pas valides.

[20] Concrètement, cette restriction se fait par une dans le co-domaine de la fonction λ d'arité des signes de relation à l'ensemble $\{1\}$ dans la définition 53 de formule atomique. Ainsi avoir changé la syntaxe de notre langue de base, nous pouvons recopier les autres définitions en tenant compte de cette restriction.

[21] Dans la présentation de la procédure de décision pour la logique des prédicats unaires, je suis Quine (1950, 121–128).

PROOF

à n'importe quelle phrase ϕ de $\mathcal{L}^-$ ne contenant que des prédicats unaires, les règles suivantes pour déterminer si elle est valide.

L1 Si ϕ ne contient pas de quantificateurs (et est alors appelée « booléen »), alors ϕ est valide si et seulement si la configuration de ces prédicats correspond à une tautologie propositionnelle (remplaçant « Fx » par « p », « Gx » par « q », etc.).[22]

L2 Si ϕ est $\ulcorner\exists x(\psi)\urcorner$ pour une phrase booléenne ψ, alors ϕ est valide si et seulement si ψ est valide d'après **L1**.

L3 Si ϕ est $\ulcorner\neg\exists x(\psi)\urcorner$ pour une phrase booléenne ψ, alors ϕ est valide si et seulement si ψ est inconsistant d'après **L1**.

L4 Si ϕ est une disjonction de phrases de la forme $\ulcorner\neg\exists x(\psi_i)\urcorner$ pour des phrases booléennes ψ_i, alors ϕ est valide si au moins un de ces disjoints est valide d'après **L3**.

L5 Si ϕ est l'implication d'une phrase du type **L2** par une ou plusieurs phrases du type **L2**, alors ϕ est valide si et seulement si une des phrases de son antécédent implique, dans le sens de **L1**, la phrase qui est son conséquent.

L6 Si ϕ est une conjonction de phrases du type **L2** à **L5**, alors ϕ est valide si et seulement si chacun de ces conjoints est valide d'après **L2** à **L5**.

La condition **L1**, en effet, réduit le problème de la détermination de la validité d'une phrase contenant des occurrences libres d'une seule variable et ne contenant aucun quantificateur au problème correspondant de la logique propositionnelle.

Il nous reste à montrer que toutes les phrases de la logique des prédicats unaires tombent sous une des catégories mentionnées. Utilisant le fait que toute phrase de la logique des prédicats unaires est équivalente à une phrase en forme prénex, nous montrons comme suit que notre test détermine la validité de n'importe quelle phrase.

Soit ϕ une phrase arbitraire ne contenant que des prédicats unaires :

1. Si ϕ contient des quantificateurs universels ou des négations de quantificateurs universels, nous appliquons les lois d'interdéfinissabilité des quantificateurs pour les changer en des quantificateurs existentiels.
2. Nous transformons le résultat de **L1** dans une forme normale conjonctive, à savoir une conjonction de disjonctions. D'après **L6**, le test de validité sera appliqué aux conjoints individuellement.
3. Toute disjonction qui apparaît dans la formule sera une disjonctions de phrases du type **L2** ou **L3**. Puisque le quantificateur existentiel distribue sur les disjonctions,[23] toute disjonction sera une disjonction d'au plus une phrase du type **L2** et de quelques (peut-être plusieurs) disjonctions du type **L3**. Il ne reste que quatre cas possible :
   (i) Si ϕ n'est qu'une seule phrase du type **L3**, elle tombe sous **L3**.
   (ii) Si ϕ est une disjonction de plusieurs phrases du type **L3**, elle tombe sous **L4**.
   (iii) Si ϕ ne contient qu'une seule phrase du type **L2**, elle tombe sous **L2**.
   (iv) Si ϕ contient plusieurs phrases du type **L3** et une seule phrase du type **L2**, elle tombe sous **L5**, puisque « $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n \vee q$ » est équivalent à « $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ ».

[22] « $\exists x(Fx) \vee \neg\exists x(Fx)$ » et « $(\forall x(Fx) \wedge \neg\forall x(Fx)) \rightarrow Ga$ », par exemple, sont valides pour cette raison. S'il y a une valuation propositionnelle qui rend vraie la formule propositionnelle correspondante, alors il y aura, dans toute structure (qui, d'après nos définitions, contiendra au moins un objet) une assignation de valeurs qui rend vraie la phrase ouverte. S'il n'y a, par contre, pas de valuation propositionnelle, il y aura une interprétation qui rend la phrase ouverte faux de cet objet.

[23] Par cette tournure, nous voulons dire que $\ulcorner\exists x(\phi \vee \psi) \vDash \exists x\phi \vee \exists x\psi$.

PROOF

Nous voyons donc que notre test de validité s'applique à toutes les phrases de la logique des prédicats unaires et pouvons énoncer le théorème. Nous venons d'esquisser une procédure de décision, applicable à n'importe quelle formule de $\mathcal{L}^-$. □

Les conséquences de ce théorème de Löwenheim sont dramatiques.

10.5 Un calcul axiomatique pour la logique des prédicats

Même si la syntaxe de leurs deux langues $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^+$ est différente, la logique propositionnelle est dans un certain sens contenue dans la logique des prédicats. Cela veut dire que nous pouvons, de manière absolument analogue à ce que nous avons fait dans la leçon 5 (cf. p. 107 et suivantes), définir des valuations (maintenant appelées « interprétations propositionnelles ») pour des formules de la logique des prédicats. Nous pouvons alors appeler « *tautologie propositionnelle* » toute formule de $\mathcal{L}^+$ que l'on obtient en substituant aux phrases simples d'une tautologie de la logique propositionnelle des formules de la logique des prédicats. Une définition plus rigoureuse est la suivante :

Définition 73. *Soit ϕ une tautologie d'une langue $\mathcal{L}$ pour la logique propositionnelle et « p_1 », « p_2 », ... « p_n » toutes les phrases simples contenues dans ϕ. Une* tautologie propositionnelle *d'une langue $\mathcal{L}^+$ de la logique des prédicats est une formule $\ulcorner\phi(\alpha_1/p_1, \alpha_2/p_2, \ldots, \alpha_n/p_n)\urcorner$ que l'on obtient en substituant à « p_1 », « p_2 »,... « p_n » n'importe quelles formules « α_1 », « α_2 », ..., « α_n » bien formées de $\mathcal{L}^+$.*

Il est facile de montrer qu'une tautologie propositionnelle d'une langue $\mathcal{L}^+$ est valide dans la logique des prédicats.[24]

Le calcul axiomatique que nous allons donner pour axiomatiser les formules valides de la logique des prédicats consiste en des axiomes de trois types. Pour que nos axiomes soient valides (et donc que le calcul soit correct), il est nécessaire que leurs instanciations soient vrais dans toutes les structures. Par conséquent, leur vérité ne peut pas dépendre d'une interprétation particulière des symboles non logiques. Le premier type d'axiomes regroupe les formules dont la vérité ne dépend que des connecteurs ; le deuxième, celles qui sont vrais en vertu de la relation d'identité « $\mathrel{=}$ », et le troisième les formules qui sont vraies grâce aux quantificateurs qu'elles contiennent.

Définition 74 (HC^+). *Les axiomes du calcul HC^+ consistent en toutes les formules de $\mathcal{L}^+$ des types suivantes :*

TP *toutes les tautologies propositionnelles ;*

ID *les formules ayant la forme de l'un des axiomes d'identité suivants (pour des variables « x », « y », « z », « w », « x_1 », « x_2 », ..., « $x_{\lambda(i)}$ », « y_1 », « y_2 », ..., « $y_{\lambda(i)}$ », « z_1 », « z_2 », ..., « $z_{\mu(j)}$ », « w_1 », « w_2 », ..., « $w_{\mu(j)}$ » et tous les $i \in \mathbf{I}$, $j \in \mathbf{J}$) :*

- **ID$_1$** $\ulcorner x \mathrel{=} x\urcorner$ *(réflexivité)*
- **ID$_2$** $\ulcorner y \mathrel{=} z \to (y \mathrel{=} w \to z \mathrel{=} w)\urcorner$ *(confluence)*
- **ID$_3$** $\ulcorner(x_1 \mathrel{=} y_1 \wedge \ldots \wedge x_{\lambda(i)} \mathrel{=} y_{\lambda(i)}) \to (R_i(x_1, \ldots, x_{\lambda(i)}) \to R_i(y_1, \ldots, y_{\lambda(i)}))\urcorner$ *(indiscernabilité)*
- **ID$_4$** $\ulcorner(z_1 \mathrel{=} w_1 \wedge \ldots \wedge z_{\mu(j)} \mathrel{=} w_{\mu(j)}) \to f_j(z_1, \ldots, z_{\lambda(i)}) \mathrel{=} f_j(w_1, \ldots, w_{\mu(j)})\urcorner$ *(fonctionnalité)*

QU *les formules ϕ qui ont la forme des phrases suivantes, où ψ est une formule et « t » un terme libre pour « x » dans ψ, et ϕ est une formule qui ne contient pas d'occurrence libre de la variable « x » :*

[24] Nous obtenons une telle tautologie, par ex. « $Fa \vee \neg Fa$ » ou « $\exists x(Fx \to Gx) \vee \neg\exists x(Fx \to Gx)$ », en substituant des formules bien formées de $\mathcal{L}^+$ à la phrase schématique dans « $p \vee \neg p$ ».

PROOF

Qu$_1$ $\ulcorner \forall x(\psi) \to \psi(x/t) \urcorner$ *(instanciation)*
Qu$_2$ $\ulcorner \forall x(\phi \to \psi) \to (\phi \to \forall x(\psi)) \urcorner$ *(simplification)*
HC^+ *a deux règles d'inférence :*
MP *la première règle d'inférences de* HC^+ *est la règle du modus ponens* MP *:*

$$\frac{\phi, \ulcorner \phi \to \psi \urcorner}{\psi}$$

$\forall$ *la deuxième règle d'inférences de* HC^+ *est appelée «généralisation» ou «*$\forall$*» :*

$$\frac{\ulcorner \phi \to \psi \urcorner}{\ulcorner \phi \to \forall x(\psi) \urcorner} \quad \textit{si «}x\textit{» n'a pas d'occurrence libre dans } \phi$$

Les deux premiers axiomes d'identité, **ID$_1$** et **ID$_2$**, impliquent que la relation désignée par «$\equiv$» (dans toutes les structures) est une relation d'équivalence, c'est-à-dire une relation réflexive, transitive et symétrique.[25] Le principe d'indiscernabilité des identiques est parfois appelé «loi de Leibniz».[26] Le principe de fonctionnalité nous assure que nos signes de fonctions désignent réellement des fonctions, c'est-à-dire que leurs valeurs sont uniquement déterminées par leurs arguments.[27] **ID$_3$** et **ID$_4$** ensemble nous permettent de substituer des variables qui sont assignées au même objet dans des formules atomiques.

Puisque les variables et les signes de relations et de fonctions dans **ID$_1$** à **ID$_4$** ne sont pas spécifiées, il s'agit de schémas d'axiomes, schémas qui déterminent chacun une infinité d'axiomes : **ID$_1$**, par exemple, nous donne un axiome pour chaque variable dans notre langue et **ID$_3$** pour chaque variable dans notre langue et pour chaque signe de relation.

Qu$_1$ nous dit que nous pouvons toujours instancier une variable universellement quantifiée par un terme. Pour voir pourquoi la restriction aux termes libres pour la variable est nécessaire, considérons la formule «$\exists y(y \neq x)$» – dans cette formule, «y» n'est pas libre pour «x». Nous ne pouvons donc pas dériver de **Qu** que la phrase suivante est un axiome :

$$\forall x \exists y(y \neq x) \to \exists y(y \neq y) \tag{10.11}$$

Il est avantageux que (10.11) ne soit pas un axiome, car (10.11) n'est pas valide : il existe des structures contenant plus de deux éléments (où l'antécédent est donc vrai), mais qui ne contiennent pas d'individus qui manquent d'être identique à eux-mêmes (aucune structure ne contient de tels élément, sinon le premier axiome d'identité ne serait pas valide).

La validité de **Qu$_1$** dépend du fait qu'une formule de la logique des prédicats est valide si et seulement si sa clôture universelle l'est aussi. **Qu$_1$** nous donne trois autres règles d'inférence dérivées, qui peuvent aussi être démontrées comme valides. Prises ensemble, il s'agit des règles d'inférence pour l'introduction et l'élimination des quantificateurs que nous utiliserons pour la déduction naturelle :

[25] La symétrie s'ensuit de la confluence et en échangeant «y» pour «z»; la réflexivité nous assure de l'antécédent. La transitivité s'ensuit de la confluence et de la symétrie, en remplaçant «y» par «z» et «z» par «y» – la symétrie nous permet alors de changer «z» et «y» dans l'antécédent.

[26] Sa converse, beaucoup plus controversée en métaphysique, est le principe de l'identité des indiscernables nous permettant d'identifier tout ce qui ne peut pas être distingué.

[27] Comme on l'a vu dans la n. 44 à la p. 51, cela veut dire que les arguments d'une fonction *identifient* sa valeur. Mathématiquement, une fonction qui relie deux ensembles, $f : A \to B$, est une relation (un ensemble de paires dont le premier membre appartient à A et le deuxième à B ($\{\langle a, b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$), qui est telle que le choix de a détermine celui de b : il n'est pas le cas qu'on a $\langle a, b'\rangle$ et $\langle a, b''\rangle$ pour deux $b', b'' \in B$ différents : $(f(a) = b' \wedge f(a) = b'') \to b' = b$*.

PROOF

GU généralisation universelle :

$$\frac{\phi}{\ulcorner \forall x(\phi) \urcorner} \qquad \text{si « } x \text{ » n'a pas d'occurrence libre dans } \phi \text{ avant l'application de cette règle}$$

SU spécialisation universelle (= $\mathbf{Qu_1}$) :

$$\frac{\ulcorner \forall x(\phi) \urcorner}{\ulcorner \phi(x/t) \urcorner} \qquad \text{si « } t \text{ » est libre pour « } x \text{ » dans } \phi$$

GE généralisation existentielle :

$$\frac{\ulcorner \phi(x/t) \urcorner}{\ulcorner \exists x(\phi) \urcorner} \qquad \text{si « } t \text{ » est libre pour « } x \text{ » dans } \phi$$

SE spécialisation existentielle :

$$\frac{\ulcorner \exists x(\phi) \urcorner}{\ulcorner \phi(x/t) \urcorner} \qquad \text{si « } x \text{ » n'a pas d'occurrence libre dans } \phi \text{ avant l'application de cette règle}$$

Nous reviendrons sur ces règles d'inférence en relation avec la méthode de la déduction naturelle pour la logique des prédicats.

Points à retenir

1. L'alphabet d'une langue pour la logique des prédicats contient des connecteurs, le signe d'identité, des variables, des quantificateurs, des signes de relations, des signes de fonctions et des constantes individuelles. Les trois dernières catégories composent les signes non logiques du langage.
2. Une variable a une occurrence libre dans une formule si elle ne se trouve pas partout dans la portée d'un quantificateur correspondant. La substitution d'un terme pour une variable dans une formule substitue ce terme à toute occurrence de la variable dans la formule. Pour qu'une telle substitution compte comme instanciation, il faut que le terme soit libre pour la variable dans la formule, c'est-à-dire qu'il ne contient pas de variable qui devient liée par la substitution.
3. Une structure pour un langage de la logique des prédicats consiste d'un univers de discours et d'une interprétation de ses signes non logiques. Une interprétation d'une constante lui assigne un élément de l'univers de discours ; l'interprétation d'un signe de relation lui assigne une relation dans cet univers ; et l'interprétation d'un signe de fonction lui assigne une fonction qui prend ses arguments et ses valeurs dans cet univers de discours.
4. Une assignation de valeurs dans une structure assigne à toute variable de la langue un élément de l'univers de discours. La notion clef de la sémantique de la logique des prédicats est celle de la satisfaction d'une phrase ouverte par une assignation de valeurs dans une structure. La phrase ouverte est alors appelée « vraie sous cette assignation » (dans cette structure).
5. Une formule est vraie dans une structure si et seulement si elle est vraie sous toutes les assignations de valeurs dans cette structure. Une telle structure est appelée un « modèle » de la formule. Une formule est valide si et seulement si elle est vraie dans toutes les structures.

PROOF

6. La substitution est un opération syntaxique qui remplace un terme par un autre dans une formule. Si nous insérons une variable, le terme remplacé doit être libre pour cette variable : la formule doit être telle que la nouvelle occurrence de variable ne devient pas nouvellement liée par un quantificateur.
7. D'après le critère d'engagement ontologique de Quine, la quantification objectuelle de première ordre nous oblige à reconnaître l'existence des choses dans notre domaine de discours. Un autre type d'engagement ontologique de la logique concerne les porteurs de vérité et de fausseté.
8. La logique des prédicats unaires est décidable, puisqu'elle permet une réduction considérable de la complexité des formules par les règles de passage.
9. La logique des prédicats peut être axiomatisée par un calcul axiomatique qui a trois types d'axiomes (les tautologies propositionnelles, les axiomes de l'identité et deux axiomes pour ∀) et deux règles d'inférence (MP et la généralisation).
10. L'identité ≡ est une relation d'équivalence : elle est réflexive, symétrique et transitive. En plus, elle satisfait la loi de Leibniz (« indiscernabilité des identiques ») : si x est y sont une et la même chose, tout ce qui est vrai de x est vrai de y et vice versa. La question de savoir si, en plus, elle satisfait le principe de l'identité des indiscernables (si tout ce qui est vrai de x est vrai de y et vice versa, alors x et y sont une et la même chose) est une question de la métaphysique, non de la logique.

PROOF

11 La méthode des arbres pour la logique des prédicats

11.1 Les phrases quantifiées

Après avoir donné les définitions du langage $\mathcal{L}^+$ et des notions clefs de la sémantique des prédicats, nous avons étudié, dans la dernière leçon, un premier calcul syntaxique pour prouver des théorèmes de la logique des prédicats : un calcul axiomatique, qui consiste en quelques axiomes et deux règles d'inférence à l'aide desquelles on en déduit des théorèmes. Nous rencontrerons une deuxième méthode syntaxique dans cette leçon, qui est une extension de la méthode des arbres pour la logique propositionnelle, avec quatre règles supplémentaires pour les phrases quantifiées et leurs négations.

Nous avons remarqué que, étant donné un univers de discours, une quantification universelle est vraie si (et seulement si) la phrase ouverte gouvernée par le quantificateur universel est vraie de tous les objets dans cet univers de discours. Nous avons également dit qu'une phrase ouverte conjonctive est vraie d'un objet si et seulement si cet objet satisfait les deux phrases ouvertes qui forment la conjonction. Une phrase qui est gouvernée par un quantificateur existentiel, par contre, dit qu'au moins un objet dans l'univers de discours satisfait la phrase ouverte. Une disjonction de phrases ouvertes est également satisfaite si un objet de l'univers de discours satisfait au moins un de ses disjoints. Nous sommes ainsi amenés à l'observation suivante :[1]

Théorème 75. *Soit $\mathcal{A}$ une structure dont l'univers de discours $|\mathcal{A}| = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ est fini et $\ulcorner\phi(x)\urcorner$ une formule qui contient une occurrence libre de la variable « x ». Nous avons les équivalences sémantiques suivantes :*

$$\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner\phi(a_1) \wedge \phi(a_2) \wedge \dots \wedge \phi(a_n)\urcorner \tag{11.1}$$

$$\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner\phi(a_1) \vee \phi(a_2) \vee \dots \vee \phi(a_n)\urcorner \tag{11.2.}$$

où « a_1 », « a_2 », ..., « a_n » sont des constantes individuelles désignant tous les membres de $|\mathcal{A}|$.

Démonstration. Le théorème s'ensuit de nos conditions **S3** et **S8** pour qu'une formule soit vraie dans une structure. □

Une quantification universelle sur un domaine fini est équivalente à une conjonction, une quantification existentielle sur un tel domaine est équivalente à une disjonction. La restriction aux univers de discours finis est importante parce que notre langage ne considère pas des conjonctions ou disjonctions 'infinies' comme bien formées.

[1] Il s'agit d'équivalences sémantiques : dans toute structure où « a_1 », « a_2 », ..., « a_n » nomment tous les individus, les phrases à gauche du signe d'équivalence méta-linguistique sont vraies si et seulement si les phrases à sa droite le sont. Il ne s'agit pas de théorèmes, puisque nous aurions besoin, pour prouver ces équivalences, d'une *prémisse* qui dit que l'univers de cette structure est fini. Même si, par exemple, il n'y a que deux chiens et ils sont les deux méchants, nous ne pouvons pas inférer de « Fido est méchant » et de « Fodi est méchant » que tous les chiens sont méchants. Pour pouvoir faire cela, nous avons besoin d'une prémisse qui dit que Fido et Fodi sont les seuls chiens qu'il y a.

PROOF

Ne considérant que des structures avec des domaines finis, la définissabilité est mutuelle : une conjonction est vraie si et seulement si *tous* ses conjoints sont vrais ; une disjonction est vraie si et seulement si *au moins un* de ses disjoints est vrai. Appelons une « *instanciation* » d'une phrase (universellement ou existentiellement) quantifiée toute formule qui résulte de la phrase ouverte en remplaçant la variable gouvernée par le quantificateur par une constante individuelle.[2] Une instanciation est un cas spécial d'une substitution.

Nous pouvons alors constater :

F10 Si une quantification universelle $\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner$ est vraie, alors toutes ses instanciations $\ulcorner \phi(a) \urcorner$, pour une constante individuelle « a », sont vraies.

F11 Si une quantification universelle $\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner$ est fausse, alors au moins une instanciation $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ est fausse.

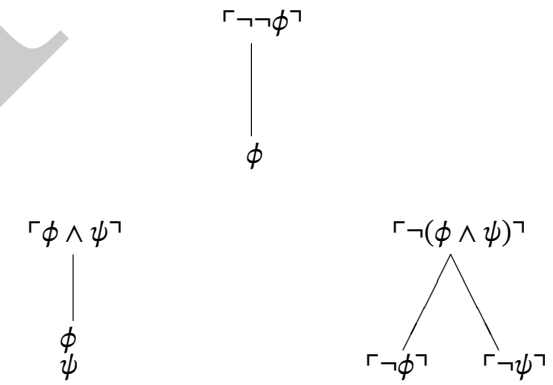
F12 Si une quantification existentielle $\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$ est vraie, alors au moins une instanciation $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ est vraie.

F13 Si une quantification existentielle $\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$ est fausse, alors toutes ses instanciations $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ sont fausses.

Comme nous l'avons fait pour la logique propositionnelle, nous utiliserons ces faits pour construire des arbres testant la consistance d'une certaine phrase ou d'un certain ensemble de phrases appartenant au langage de la logique des prédicats.

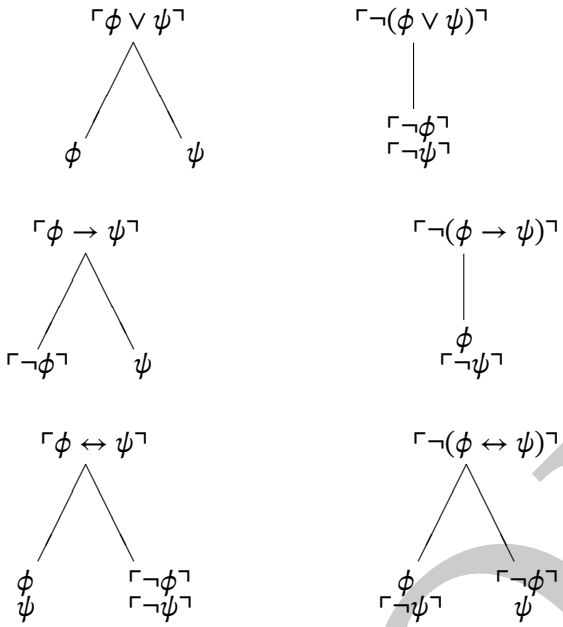
11.2 La méthode des arbres pour la logique des prédicats

Dans la leçon 5 (cf. p. 128 et suivantes), nous avons rencontré une méthode graphique et intuitive pour tester la consistance d'un ensemble de phrases. Les règles de construction d'arbres nous ont permis, pour n'importe quelle formule propositionnelle, de construire un arbre qui soit nous montre qu'il n'y a aucune valuation qui rend vraie toutes les phrases initiales, soit nous donne un modèle, c'est-à-dire une valuation sous laquelle elles sont toutes vraies. Rappelons ces règles de construction d'arbres :

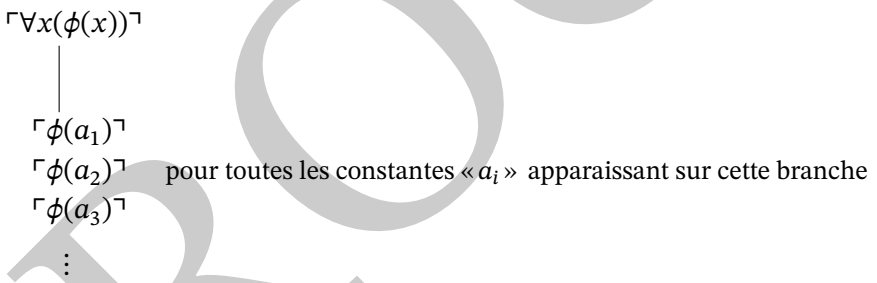


[2] Dans la terminologie de la grammaire catégorielle, l'instanciation d'un prédicat unaire par une constante individuelle est une opération du type **S**/(**S**/**N**) qui, comme les quantificateurs, forme une phrase d'un prédicat en remplissant son (seul) 'trou'.

PROOF



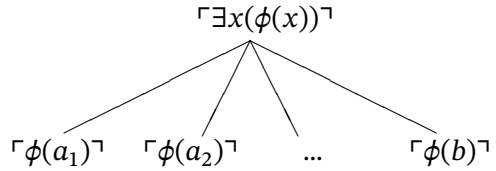
En analogie avec les règles de construction d'arbres pour la conjonction et la disjonction, nous adoptons, motivés par **F10**, la règle suivante pour les phrases universellement quantifiées :



La vérité d'une quantification universelle nous commet à la vérité de toutes ses instanciations. Il est important que le quantificateur universel soit instancié pour *toutes* les constantes qui apparaissent sur la branche, y inclus les constantes qui n'apparaissent seulement plus tard. La raison pour ceci est qu'une branche qui ne se ferme pas est censée représenter un modèle pour la formule en question (c'est pourquoi la méthode des arbres est une méthode pour tester la consistance d'une formule ou d'un ensemble de formules) – ce modèle comprend un univers de discours plus ou moins grand et nous devons être assurés que les phrases universellement quantifiées sont vrais de tous les éléments de cet univers. Or, nous n'avons pas de garantie d'avoir décrit un modèle pour la formule universellement quantifiée en question avant que nous l'avons instanciée pour toutes les constantes que nous utilisons pour décrire le modèle en question. Si nous introduisons une nouvelle constante après avoir appliqué la règle du quantificateur universel, par exemple par une application de la règle pour le quantificateur existentiel que l'on discutera après, nous devons revenir en arrière et faire l'instanciation correspondante.

PROOF

Comme le montre **F12**, une quantification existentielle nous donne le droit de choisir l'élément de l'univers de discours qui instancie la phrase ouverte existentiellement quantifiée. Nous pouvons donc adopter comme règle de construction d'arbres la suivante :



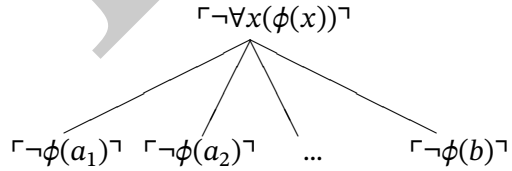
pour toutes les constantes « a_i » de la branche et une nouvelle constante « b »

Si notre branche contient deux constantes individuelles, par exemple, cet règle nous dit d'ouvrir trois nouvelles branches.

Nous instancions la quantification existentielle avec toutes les constantes apparaissant sur la branche : si nous omettions une, nous ne pourrions pas conclure l'insatisfaisabilité de la phrase ouverte existentiellement quantifiée du fait que toutes les branches se ferment – au moins une possibilité n'aurait pas été considérée. Nous avons également besoin d'une nouvelle constante (« nouvelle » dans le sens qu'elle n'apparaît nulle part sur la branche avant l'application de la règle) pour ne pas devoir conclure que les trois phrases « Pa », « Pb » et « Pc » soient inconsistantes avec « $\exists x \neg Px$ » – le fait que tous les éléments considérés de l'univers de discours étaient P ne veut pas dire qu'il n'y ait aucun qui n'est pas P !

C'est une bonne question de la philosophie de logique, dont nous discuterions dans la sct. 12.3 du prochain chapitre, comment nous devons interpréter cette nouvelle variable « b ». Est-ce qu'elle désigne un individu arbitraire, ou nous sert-elle de parler de n'importe quel individu de notre domaine de quantification, sans nous obliger de décider lequel ? À première vue, les deux interprétations semblent défendables. Pour rendre plausible la deuxième, supposons que nous avons parlé de Sam, de Marie, et nous avons dit qu'ils s'aiment. Nous devons maintenant évaluer l'affirmation qu'il existe au moins un chien. Il y a trois possibilités : soit Sam est un chien, soit Marie est un chien, soit une troisième chose dont nous n'avons pas encore parlée est un chien. En appelons ce chien « Fido », nous n'excluons aucune de ces trois possibilités, parce que nous ne nions pas que Fido est identique avec Sam, ni que Fido est identique avec Marie. Nous ne pouvons pas, cependant, analyser tous les cas de cette manière, ce qui supporte la première hypothèse. Imaginons par exemple que la phrase à évaluer n'affirme pas l'existence d'un chien, mais l'existence d'une chose qui ne porte pas de nom. Il ne semble guère satisfaisant de paraphraser l'introduction de la nouvelle constante comme « appelons cette chose de tel-et-tel nom ... ». Nous reviendrons à ces sujets.

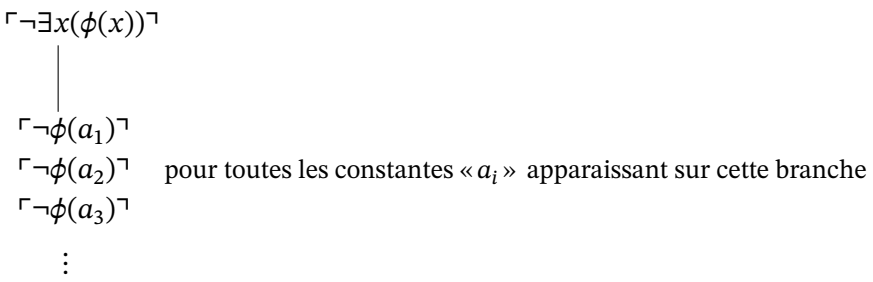
Étant donné la dualité des quantificateurs et l'interdéfinissabilité des connecteurs, **F11** et **F13**, les règles de construction d'arbres pour les négations de phrases quantifiées s'ensuivent de celles pour les quantificateurs opposés. Pour la négation d'un quantificateur universel, nous avons :



pour toutes les constantes « a_i » de la branche et une nouvelle constante « b »

Pour la négation d'une phrase existentiellement quantifiée, nous avons une variante de la règle pour le quantificateur universel :

PROOF



Comme ces règles pour les quantificateurs nous obligent à prendre en compte toutes les constantes individuelles apparaissant sur une branche, l'ordre de leur application devient important. Il ne s'agit pas d'une importance théorique, mais plutôt d'un conseil pratique, qui peut réduire considérablement la complexité d'un arbre. Nous ne sommes pas obligés d'appliquer les règles dans un certain ordre pour prouver ou déprouver une phrase. Mais il est souvent profitable d'appliquer les règles pour le quantificateur universel et la négation du quantificateur existentiel en dernier, puisque cela nous épargne l'obligation de revenir en arrière.

Pour faire l'arbre d'une phrase ou d'un ensemble de phrases, nous appliquons d'abord toutes les neuf règles pour les connecteurs. Ensuite, nous appliquons les règles pour le quantificateur existentiel et la négation du quantificateur universel, c'est-à-dire les règles qui multiplient le nombre de branches. À ces nouvelles branches, nous appliquons les règles pour le quantificateur universel et la négation du quantificateur existentiel, c'est-à-dire les règles qui nécessitent la considération de toutes les constantes apparaissant sur la branche. Si nous pouvons alors fermer toutes les branches de l'arbre résultant, nous pouvons conclure que l'ensemble de phrases initial est inconsistant. Autrement, nous cherchons des connecteurs que nous n'avons pas encore traités et répétons la procédure. Représentée schématiquement, la procédure est donc la suivante :

1. Est-ce qu'il y a des connecteurs reliant des phrases complètes ? Appliquons les règles pour les connecteurs.
2. Est-ce qu'il y a des formules qui commencent par « ∃ » ou par « ¬∀ » ? Appliquons les règles correspondantes pour ouvrir de nouvelles branches pour toutes les constantes et une nouvelle.
3. Est-ce qu'il y a des formules qui commencent par « ∀ » ou par « ¬∃ » ? Appliquons les règles correspondantes pour faire des instanciations pour toutes les constantes.
4. Est-ce qu'il y a des connecteurs reliant des phrases complètes ? Retournons à l'étape 1).
5. Est-ce qu'il y a des formules qui commencent par « ∃ » ou par « ¬∀ » ? Retournons à l'étape 2).
6. Est-ce qu'il y a des formules qui commencent par « ∀ » ou par « ¬∃ » ? Retournons à l'étape 3).

L'arbre n'est entièrement développé qui si les trois conditions suivantes sont toutes remplies :

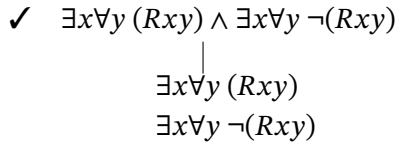
1. aucune règle pour des connecteurs n'est applicable ;
2. nous avons crées de nouvelles branches pour toutes les formules commençant par « ∃ » ou par « ¬∀ » pour toutes les constantes sur les branches correspondantes ;
3. nous avons ajouté toutes les instanciations des formules commençant par « ∀ » ou par « ¬∃ » pour toutes les constantes sur les branches correspondantes.

Un arbre entièrement développé se ferme si nous trouvons des formules et leurs négations sur toutes les branches ; si cela n'est pas le cas, il reste ouvert.

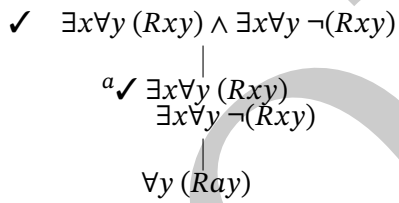
PROOF

11.3 Les preuves par la méthode des arbres

Considérons, par exemple, la formule « $\exists x \forall y\,(Rxy) \wedge \exists x \forall y\,\neg(Rxy)$ ». Nous commençons à construire son arbre en appliquant la règle pour la conjonction :

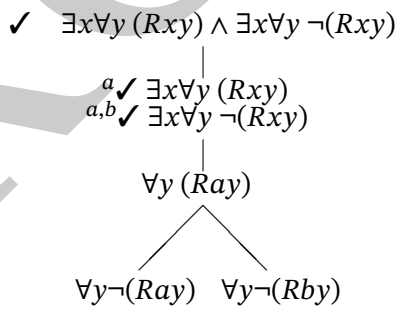


À ce stade, nous appliquons la règle pour le quantificateur existentiel à la première de nos deux formules existentiellement quantifiées, c'est-à-dire à « $\exists x \forall y\,(Rxy)$ ». Comme notre seule branche ne contient aucune constante individuelle, nous n'avons qu'à introduire une seule nouvelle constante, que nous abrégeons par « a » :



Pour nous souvenir que nous avons instancié la quantification existentielle avec la constante « a », nous l'écrivons au dessus du crochet qui marque la formule comme traitée.

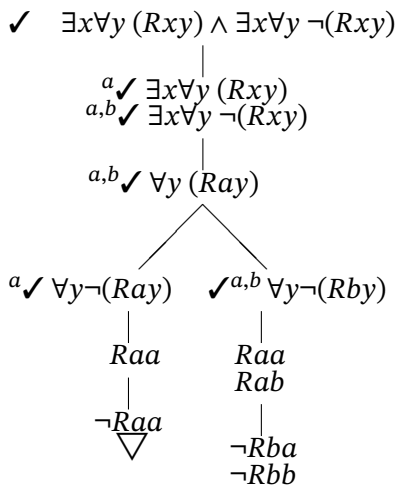
D'après nos règles pragmatiques de procédure, nous devons traiter le deuxième quantificateur existentiel « $\exists x \forall y\,\neg(Rxy)$ » avant d'appliquer la règle pour le quantificateur universel. Nous introduisons alors une nouvelle constante, « b » et instancions la deuxième quantification existentielle également avec notre ancienne constante « a », obtenant deux branches :



Après avoir traité les quantifications existentielles, nous pouvons maintenant instancier les quantifications universelles. Ceci nous oblige de considérer toutes les constantes qui apparaissent sur les deux branches respectives.

Sur la branche gauche, nous n'avons qu'une seule constante, « a » : les deux instanciations des quantifications universelles « $\forall y\,(Ray)$ » et « $\forall y \neg(Ray)$ » nous donnent donc « Raa » et « $\neg Raa$ » – la branche se ferme. À droite, nous avons deux constantes et obtenons « Raa » et « Rab » de la première quantification universelle « $\forall y\,(Ray)$ » et « $\neg Rba$ » et « $\neg Rbb$ » de la deuxième, « $\forall y \neg(Rby)$ » – la branche ne se ferme pas. Nous sommes arrivés à l'arbre suivant :

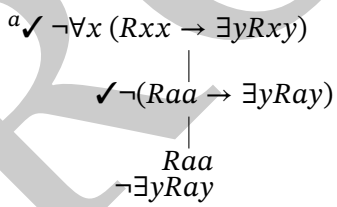
PROOF



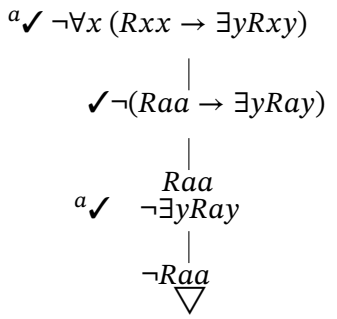
Nous ne pouvons plus appliquer aucune règle à la branche droite et nous avons trouvé un modèle pour la phrase « $\exists x \forall y\ (Rxy) \wedge \exists x \forall y\ \neg(Rxy)$ » – une structure $\mathcal{A}$, où les phrases « Raa » et « Rab » sont vraies et les phrases « Rba » et « Rbb » sont fausses ; en d'autres mots, il s'agit d'une structure où la relation $R^{\mathcal{A}}$ relie a à a et a à b et rien d'autre. Un modèle pour la phrase initiale serait donc par exemple une structure qui consiste d'un univers de discours de deux personnes, Sam et Marie, et d'une relation exprimée par « x aime y » qui est telle que Sam aime soi-même et Marie, et Marie ne s'aime pas et n'aime pas non plus Sam.

Comme dans le cas de la logique propositionnelle, nous pouvons également utiliser la méthode des arbres pour vérifier la validité d'une proposition : une phrase sera valide si et seulement si sa négation est inconsistante, c'est-à-dire si toutes les branches de l'arbre pour cette négation se ferment.

Vérifions, par exemple, la validité de la phrase « $\forall x\ (Rxx \rightarrow \exists y Rxy)$ ». Cette phrase ne contient aucune constante individuelle – c'est pourquoi nous commençons par instancier sa négation avec une nouvelle constante « a » et nous appliquons la règle pour les formules $\ulcorner\neg(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$:



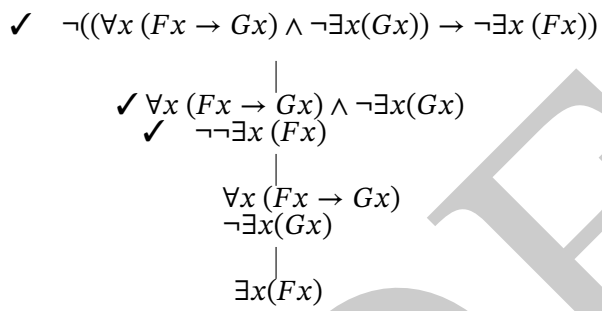
Comme « a » est la seule constante, l'instanciation nous donne « Raa » et nous pouvons fermer la (seule) branche :



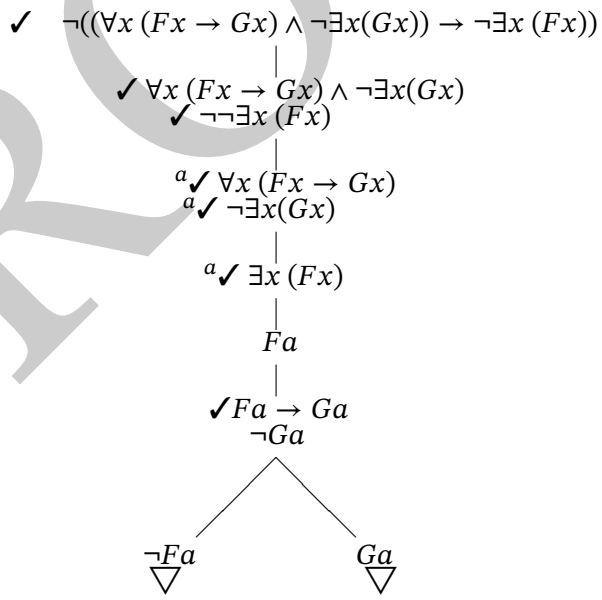
PROOF

La branche unique est fermée : la phrase est inconsistante et sa négation est valide : Si toute chose se trouve en relation R avec elle-même, toute chose entretient la relation R avec au moins une chose.

Avec la méthode des arbres, nous pouvons également tester la validité d'une inférence. Prenons l'argument qui a « $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ » et « $\neg\exists x(Gx)$ » comme prémisses, et « $\neg\exists x(Fx)$ » comme conclusion. Pour vérifier si oui ou non la conclusion est une conséquence logique des prémisses (si oui ou non il est le cas que $\{\forall x(Fx \rightarrow Gx), \neg\exists x(Gx)\} \vDash \neg\exists x(Fx)$), nous construisons l'arbre pour la négation de l'implication correspondante. Nous appliquons d'abord les règles pour les connecteurs :



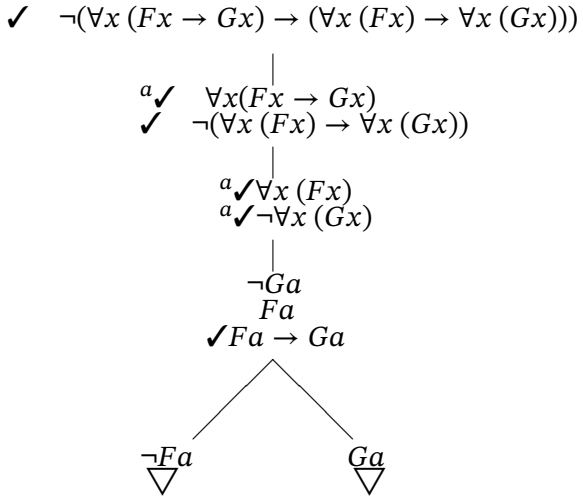
Comme nous n'avons aucune constante et qu'une seule quantification existentielle, nous introduisons une seule nouvelle constante, avec laquelle nous instancions la quantification universelle et la négation de la quantification existentielle. Nous appliquons la règle pour l'implication matérielle et fermons les deux branches :



En appliquant la règle pour « → », nous obtenons deux branches qui se ferment – l'inférence est valide. Si tous les F sont G, alors il n'y a aucun F s'il n'y a aucun G.

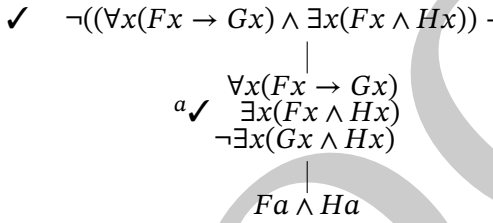
Un arbre très similaire prouve la validité de l'inférence « $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx) \vdash (\forall x\,(Fx) \rightarrow \forall x\,(Gx))$ » :

PROOF

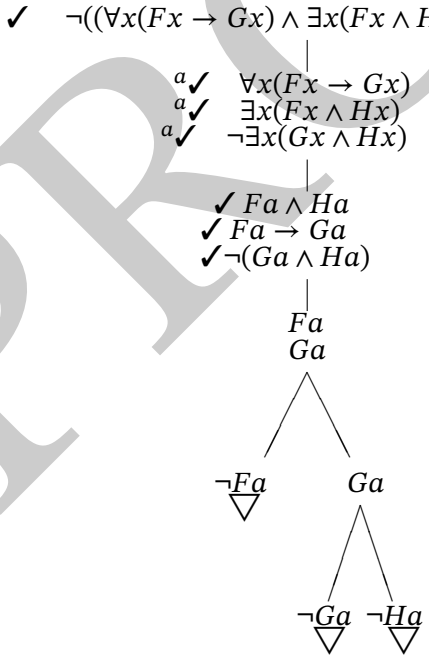


Si tous les F sont G, alors toutes les choses sont G si toutes les choses sont F. En d'autres mots, la quantification universelle peut être 'distribuée' sur l'implication matérielle.

Pour prouver que « $\exists x(Gx \wedge Hx)$ » s'ensuit des deux prémisses « $(\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ » et « $\exists x(Fx \wedge Hx)) \rightarrow$ », nous commençons également avec l'instantiation de la prémisse existentielle :



Nous pouvons maintenant instancier les quantifications universelles et construire l'arbre suivant :



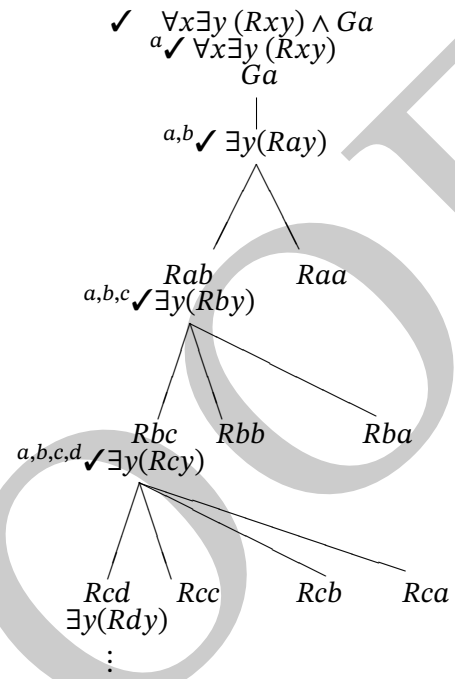
L'arbre fermé nous montre la validité de l'inférence : comme aucun chemin de vérité reste ouvert, il n'est pas logiquement possible pour les prémisses d'être vraies et pour la conclusion fausse.

PROOF

11.4 Les arbres infinis et une simplification des règles

La règle de branchement pour le quantificateur existentiel (et la négation du quantificateur universel) et la règle d'instanciation pour le quantificateur universel (et la négation du quantificateur existentiel) peuvent interférer l'une avec l'autre, de sorte que la première nous force à introduire de nouvelles constantes que la seconde nous force d'utiliser dans des instanciations qui ‹ produisent › de nouvelles quantifications existentielles qui donnent lieu à des nouvelles constantes qui doivent à leur tour être utilisées pour instancier les quantifications universelles et ainsi de suite.

Considérons la phrase « $\forall x \exists y (Rxy) \wedge Ga$ » et faisons son arbre. Nous remarquons que nous n'en arriverons jamais au bout :



L'arbre qui en résulte est infini dans deux directions : il contient une branche infinie (celle tout à gauche) et il contient un nombre infini de branches – deux au troisième niveau, trois au quatrième, quatre au cinquième et ainsi de suite. Nous observons aussi que les branches partant à droite n'ajoutent rien : la nouvelle constante « b », par exemple, introduite après le premier branchement, peut nous servir également pour représenter la vielle constante « a » – si nous le voulons, nous sommes libres de l'interpréter par le même individu que nous utilisons pour interpréter « a ». En introduisant une nouvelle constante, nous n'avons que changé notre terminologie : nous n'avons pas forcément introduit un nouveau individu, parce que nous n'avons pas exclu la possibilité que la nouvelle constante est un nouveau nom pour un individu dont l'existence a déjà été reconnue. Nous arrivons donc aux simplifications suivantes pour nos règles de branchement :

$\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$

$\ulcorner \phi(b) \urcorner$ pour une nouvelle constante « b »

Et de manière correspondante pour le quantificateur universel :

PROOF

$\ulcorner \neg \forall x(\phi(x)) \urcorner$

|

$\ulcorner \neg \phi(b) \urcorner$ pour une nouvelle constante « b »

Avec ces nouvelles règles, notre arbre n'est infini que dans la direction verticale :

$^{b,c,d,e,\ldots}\checkmark\ \forall x \exists y\,(Rxy)$
$^{b}\checkmark\ \exists y Ray$
|
Rab
$^{c}\checkmark\ \exists y Rby$
|
Rbc
$^{d}\checkmark\ \exists y Rcy$
|
Rcd
$^{e}\checkmark\ \exists y Rdy$
|
Rde
$^{f}\checkmark\ \exists y Rey$
|
⋮

Pour prouver la validité d'une proposition, la nouvelle méthode est aussi efficace que l'ancienne. Ceci est dû au fait suivant :

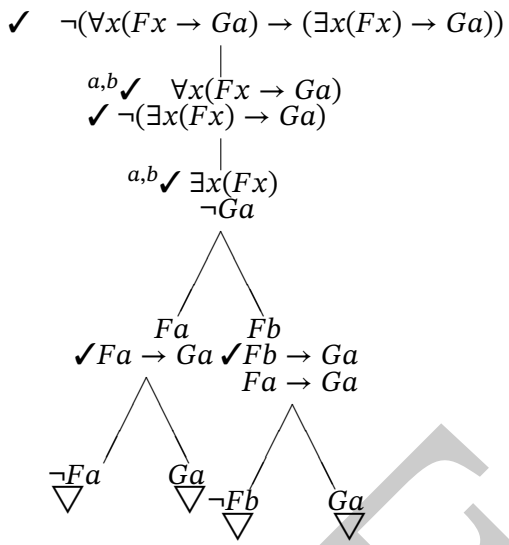
Théorème 76. *Si une phrase a un modèle de n individus, alors elle a aussi un modèle de $n+1$ individus.*

Démonstration. Partant d'un modèle de n individu rendant vraie la phrase en question, nous rajoutons simplement un individu de plus et stipulons que les mêmes prédicats sont vraies de lui que le sont d'un des n individus dans l'ancien modèle. □

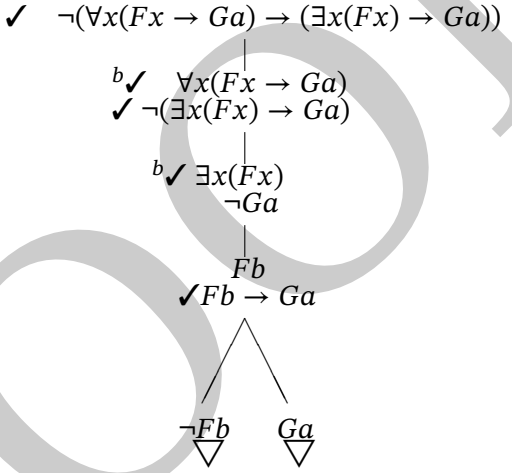
La conversion de ce théorème dit que si une phrase n'a pas de modèle de $n+1$ individus, elle n'aura pas de modèle de n individus. Un test d'inconsistance, comme l'est la méthode des arbres, peut donc être généreux avec l'introduction de nouveaux individus et ne doit pas trop se concerner avec les modèles économiques. Les branches générées par les règles du quantificateur existentiel (et de la négation du quantificateur universel) de l'ancienne méthode représentaient de telles modèles : nous préservons l'utilité de la méthode pour prouver des phrases si nous laissons tomber ces chemins de vérité qui correspondant à des modèles contenant moins d'individus.

Cette simplification des règles nous permet d'économiser des branches également dans les preuves ‹ordinaires›, comme le montre l'exemple suivant. Voici un arbre pour « $\forall x(Fx \to Ga) \to (\exists x(Fx) \to Ga)$) », par l'ancienne méthode :

PROOF



Avec la nouvelle méthode nous obtenons :



Le fait qu'il soit possible que nous construisons, en appliquant nos règles, des arbres infinis, montre une différence importante entre la logique propositionnelle et la logique des prédicats : la logique propositionnelle est décidable et la logique des prédicats ne l'est pas. Dans le cas de la logique propositionnelle, la méthode des arbres nous fournit une méthode syntaxique de prouver des phrases qui est correcte et complète : elle nous fournit un arbre fermé (une preuve) pour toute tautologie et ne nous fournit pas de preuve (pas d'arbre fermé) pour toute phrase qui n'est pas une tautologie. Quand elle ne produit pas d'arbre fermé, elle nous permet de construire un arbre entièrement développé qui reste ouvert – en ceci, elle nous fournit un contre-exemple à une affirmation d'inconsistance, c'est-à-dire un chemin de vérité / un modèle qui satisfait la formule du départ. En ceci, nous n'avons pas seulement (i), mais également (ii) :

(i) Si une phrase est une tautologie, alors toutes les branches de l'arbre pour sa négation se ferment.
(ii) Si une phrase n'est pas une tautologie, son arbre nous montre pour quelle interprétation de ses constituantes non logiques (phrases simples) elle est vraie.

La méthode des arbres pour la logique des prédicats retient la propriété (i) : les phrases que nous prouvons par cette méthode sont des tautologies. Comme le montre le dernier exemple, la propriété (ii) n'est pas retenu. Pour les phrases qui ne peuvent être vraies que dans une structure contenant une

PROOF

infinité d'objets, la méthode ne nous fournit pas d'interprétation de ses constituantes non logiques qui la rende vraie. Il n'est pas le cas que tout arbre qui n'est pas fermé peut être complètement développé en restant ouvert. Dans le cas d'arbres qui ne se ferment pas, mais ne peuvent pas être entièrement développé, nous n'avons pas de spécification de modèle : nous échouons dans la recherche d'une preuve (heureusement, comme la phrase en question n'est pas une tautologie), mais sans pour autant avoir une preuve du contraire, un contre-exemple à l'affirmation de la validité.

Cependant ce désavantage est limité aux structures infinies : si une phrase est vraie dans une structure finie, la méthode des arbres nous permet d'en trouver au moins une.

11.5 L'indécidabilité de la logique des prédicats

Cette différence montre une asymétrie fondamentale entre la logique des prédicats et la logique propositionnelle. Pour la logique propositionnelle, la méthode des arbre nous donne ce que l'on appelle une « procédure de décision » : une méthode mécanique pour tester si oui ou non une phrase est une tautologie. Une telle méthode mécanique à deux propriétés importantes :

(i) Si une phrase est valide, elle répond par « oui ».
(ii) Si une phrase n'est pas valide, elle répond par « non ».

Notre exemple montre que la deuxième condition n'est pas satisfaite par la méthode des arbres pour la logique des prédicats. Il peut arriver que la méthode ne répond pas. Cette limitation n'est pas spécifique à la méthode des arbres. Comme Alonzo Church a prouvé en 1936, il n'existe pas de procédure de décision pour la logique des prédicats. Si nous voulons savoir si oui ou non une phrase est valide, et que nous faisons l'arbre pour sa négation et qu'après n étapes restons avec des chemins ouverts, nous ne pouvons conclure que la phrase est réellement valide *seulement si* tous les quantificateurs universels et tous les négations de quantificateurs existentiels ont été instancié pour toutes les constantes sur leurs branches. Comme le montre l'exemple précédent, il est possible que cette situation ne se produise jamais.

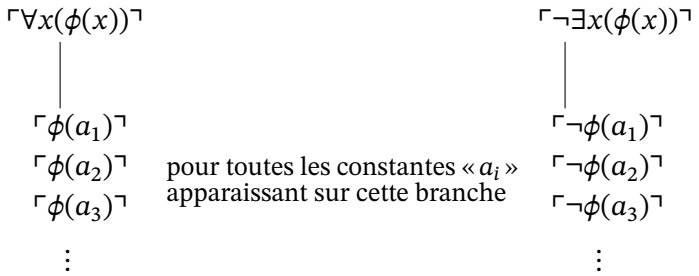
Cette limitation des la méthode des arbres ne signifie pas que nous n'arriverons jamais à trouver une structure vérifiant une phrase satisfaisable. Si la phrase admet un modèle fini, nous le trouverons. Mais si elle n'a que des modèles infinis, il n'est pas toujours possible d'en trouver un. Cette tâche requiert de l'ingéniosité.

Points à retenir

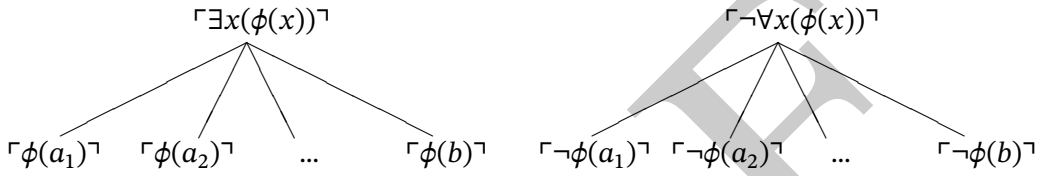
1. Dans une structure ayant un domaine fini, une quantification universelle est équivalente à la conjonction de ses instanciations et une quantification existentielle est équivalente à la disjonction de ses instanciations.
2. Si une quantification universelle $\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner$ est vraie, alors toutes ses instanciations $\ulcorner \phi(a) \urcorner$, pour une constante individuelle « a », sont vraies. Si une quantification existentielle $\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$ est fausse, alors toutes ses instanciations $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ sont fausses.
3. Si une quantification universelle $\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner$ est fausse, alors au moins une instanciation $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ est fausse. Si une quantification existentielle $\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$ est vraie, alors au moins une instanciation $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ est vraie.

PROOF

4. Les règles de construction d'arbres pour le quantificateur universel et la négation d'un quantificateur existentiel sont les suivantes :



Les règles de construction d'arbres pour le quantificateur existentiel et la négation du quantificateur universel sont les suivantes :



5. Nous pouvons simplifier les dernières règles pour « $\exists x(\phi(x))$ » et pour « $\neg\forall x(\phi(x))$ » en nous concentrant uniquement sur la branche contenant la constante nouvelle. Cette nouvelle méthode est aussi efficace pour prouver des phrases que l'ancienne, parce qu'une phrase avec un modèle de n individus a aussi un modèle avec $n + 1$ individus.
6. La méthode des arbres nous permet prouver une phrase *si* cette phrase est valide.
7. Nous ne pouvons pas déduire de l'impossibilité de prouver une phrase (du fait que l'arbre pour sa négation ne se ferme pas) le caractère non valide de celle-ci. Nous avons une garantie de trouver un modèle seulement si la phrase est vraie dans une structure avec un univers de discours fini.
8. Ceci correspond à une différence importante entre la logique propositionnelle et la logique des prédicats : la première est décidable (admet une procédure mécanique pour tester le caractère tautologique d'une proposition), la dernière ne l'est pas. Pour trouver des contre-exemples, il faut de l'ingéniosité.
9. théorie des modèles
10. logique libre

PROOF

12 La déduction naturelle pour la logique des prédicats

12.1 La spécialisation universelle et la généralisation existentielle

Pour pouvoir traiter des phrases quantifiées par les méthodes de la déduction naturelle, nous avons besoin de règles d'introduction et d'élimination pour les quantificateurs.

Comme nous l'avons fait pour la méthode des arbres (cf. p. 273), nous devons prendre en considération le fait qu'une quantification universelle sur un domaine fini est équivalente à la conjonction de toutes ses instanciations, et qu'une quantification existentielle sur un tel domaine fini correspond à une disjonction de ses instanciations. Éliminer un quantificateur universel revient donc à l'instancier pour tous les membres du domaine. Considérons l'inférence suivante :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les hommes sont mortels.}\\ \text{Socrate est un homme.}\end{array}}{\text{Socrate est mortel.}} \tag{12.1}$$

L'inférence valide (12.1) correspondra à cette preuve-ci dans le calcul que nous développerons dans cette leçon :

1	$Ha, \forall x(Hx \to Mx)$	$\vdash Ha$	prémisse
2	$Ha, \forall x(Hx \to Mx)$	$\vdash \forall x(Hx \to Mx)$	prémisse
3	$Ha, \forall x(Hx \to Mx)$	$\vdash Ha \to Ma$	de (2) par (SU)
4	$Ha, \forall x(Hx \to Mx)$	$\vdash Ma$	de (1) et (3) avec (MP)

La règle (SU), appelée «*spécialisation universelle*», nous permet de passer d'une quantification universelle à n'importe quelle instanciation de la phrase ouverte universellement quantifiée pour une constante. L'élimination du quantificateur universel revient donc à une instanciation de la phrase ouverte qu'il gouverne, remplaçant toutes les occurrences libres d'une variable par des occurrences d'une constante.

Comment pouvons nous *introduire* un quantificateur universel dans une formule ? L'analogie avec la conjonction pourrait nous faire penser qu'il suffirait, pour établir la vérité de «$\forall x(Fx)$», par exemple, de prouver «$F(a_1)$», «$F(a_2)$» et «$F(a_3)$», si nous nous trouvons dans une structure finie ne contenant que les trois objets a_1, a_2 et a_3 dans son domaine. Cette méthode, cependant, ne s'avère aucunement valide. Non seulement elle serait inapplicable dans le cas d'un domaine infini et le serait aussi dans le cas où nous ne disposons pas de noms pour tous les objets dans le domaine. Son application signifierait également utiliser, à l'intérieur d'une preuve, une information qui ne nous est donnée que de l'extérieur du modèle : même si nous arrivions 'accidentellement' à prouver «Fx» de tous les membres du domaine – et ainsi à prouver, pour toute constante «a», que Fa –, nous n'aurions pas encore prouvé *que «Fx» est vrai de tous les membres du domaines* – pour cela, nous aurions besoin d'une garantie que la totalité des individus dont nous avons prouvé «Fx» comprend réellement tous les individus du domaine.

PROOF

Une piste plus prometteuse nous est donnée par les preuves mathématiques et par l'introduction de nouvelles constantes dans la méthode des arbres. Si un géomètre, par exemple, veut prouver que la somme des angles intérieurs de n'importe quel triangle est égale à 180 degrés, il dessinera au tableau noir un triangle particulier, nommé *ABC* d'après ses trois angles. S'il ne fait usage, dans sa preuve du théorème, d'aucune propriété de ce triangle autre que celles qui lui sont imposées par la définition même d'un triangle, le théorème vaudra pour tout triangle. Le triangle particulier *ABC* aura représenté tous les triangles. Dans ce sens, le triangle *ABC* peut être appelé « triangle arbitraire » ou « triangle paradigmatique ».

Nous sommes passées par une étape analogue dans le développement de la méthode des arbres ; nous avons montré qu'il était possible de simplifier les règles pour le quantificateur existentiel et la négation du quantificateur universel, en nous limitant à une seule constante, nouvelle, qui représentait également les anciennes constantes déjà introduites sur la branche correspondante. Au lieu de dire que la constante nouvelle représentait les individus que nous n'avions pas encore considérés dans notre preuve, nous avons simplement dit qu'elle représentait *n'importe quel* individu du domaine. Nous nous sommes servi de la constante pour désigner un individu arbitraire.

Pour prouver une quantification universelle à partir des prémisses particulières, nous exigerons donc que ces prémisses soient vraies d'un individu arbitraire.[1] Un tel individu nous est fourni par exemple par la règle de spécialisation universelle, comme c'est le cas dans la preuve suivante :

1	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash \forall x(Fx \to Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash Fa$	de (1) par (SU)
4	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash Fa \to Ga$	de (2) par (SU)
5	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash Ga$	de (3) et (4) avec (MP)
6	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash \forall x(Gx)$	de (5) avec (GU)

Nous appellerons cette règle, qui nous permet d'établir une phrase générale à partir d'une phrase singulière parlant d'un individu arbitraire, « *généralisation universelle* » (GU).

Cependant, il est clair que nous devons restreindre notre usage de (GU). Le raisonnement suivant est clairement fallacieux :

1	Fa	$\vdash Fa$	prémisse
2	Fa	$\vdash \forall x(Fx)$	de (1) par (GU)

Nous ne pouvons pas, du fait qu'un certain individu a soit F conclure que toutes les choses dans l'univers de discours soient F – le a en question doit être arbitraire, paradigmatique, tel que tout ce qui vaut pour lui vaut pour *n'importe quel* élément de l'univers de discours. Mais qu'est-ce que cela signifie concrètement ? Dans le cas de la méthode des arbres, ceci signifiait que la constante était « nouvelle » pour la branche, c'est-à-dire n'avait pas d'occurrence précédente. Dans le cas du géomètre qui prouve des théorèmes sur tous les triangles, ceci signifie que la preuve en question ne dépend d'aucune assomption particulière sur le triangle considéré paradigmatique ou arbitraire.

[1] Je préfère cette présentation à celle de Lemmon (1965a, 107) qui parle de *noms arbitraires* pour des raisons esquissées dans la leçon trois (cf. p. 69). Nous reviendrons sur la notion philosophiquement intéressante d'« individu arbitraire » plus en detail à la p. 296.

PROOF

Dans la déduction naturelle, nous combinons ces deux exigences : la constante en question, « a », ne doit apparaître dans aucune supposition (première exigence) ou prémisse (deuxième exigence) dont dépend la preuve de la phrase singulière « Fa ».

De même que les règles pour l'introduction et l'élimination de la disjonction sont plus complexes que celles pour la conjonction, de même les règles pour le quantificateur existentiel sont un peu plus compliquées que celles pour le quantificateur universel. Pour introduire le quantificateur existentiel, nous *généralisons* une phrase particulière : si « Fa » est prouvé pour un certain a, alors nous pouvons prouver « $\exists x(Fx)$ ». La règle d'introduction du quantificateur existentiel est donc appelée « *généralisation existentielle* » (GE). En voici un exemple :

1	$\forall x(Fx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx)$	$\vdash Fa$	de (1) par (SU)
3	$\forall x(Fx)$	$\vdash \exists x(Fx)$	de (2) par (GE)

Même si la constante individuelle « a » que nous introduisons dans l'application de (SU) désigne un individu arbitraire, nous pouvons toujours conclure, du fait que cet individu arbitraire est F, qu'il y en a au moins un F – le fait que a a été choisi de manière arbitraire ne change rien au fait que seuls les choses existantes peuvent être choisis de cette manière.[2]

Pour la règle d'élimination du quantificateur existentiel, nous nous rappelons de la règle ($\vee$**E**) : cette règle permettait d'éliminer une disjonction s'il était prouvé que chaque disjoint menait à une seule et même formule. De manière analogue, la règle d'élimination du quantificateur existentiel nous permet de passer des preuves d'une formule ϕ à partir de toute la série des instanciations « $Fa_1 \vee Fa_2 \vee \ldots \vee Fa_n \vee \ldots$ » à une preuve de ϕ directement à partir de « $\exists x(Fx)$ ».

Au lieu de montrer que ϕ est une conséquence de toutes les instanciations de la quantification universelle, il suffit de montrer qu'elle s'ensuit d'une instanciation *quelconque* – d'une instanciation par un individu arbitraire, où « arbitraire » veut dire la même chose que dans l'application de la règle de généralisation universelle (GU, l'introduction du quantificateur universel). Nous appelons cette instanciation le « *disjoint typique* » qui correspond à la quantification existentielle.[3] Nous appelons «(SE)» ou « *spécialisation existentielle* » la règle qui élimine la quantification existentielle en faveur du disjoint typique.

Les règles de généralisation universelle (GU) et de spécialisation existentielle (SE) sont intimement liées : non seulement elles sont toutes deux restreintes par la condition selon laquelle l'individu en question est un individu arbitraire, mais de plus la notion d'arbitraire qu'elles utilisent est la même. (GU) est applicable à une phrase ϕ si et seulement si ϕ aurait pu être obtenue, par (SE), de sa quantification existentielle. L'application de la règle de spécialisation existentielle comprend quatre étapes :

1. la preuve d'une quantification existentielle sous certaines suppositions et à partir de certaines prémisses ;
2. la supposition du disjoint typique ;
3. une preuve d'une autre formule sous la supposition du disjoint typique ;

[2] La raison sémantique pour la validité du séquent « $\forall x(Fx) \vdash \exists x(Fx)$ » est que nous avons exclu les domaines vides dans notre définition d'une structure pour la logique des prédicats. Nous avons parlé d'une « logique libre » qui ne faisant pas cette présupposition dans le ch. 11.7 (cf. p. 285).

[3] Le fait qu'au lieu de parcourir toutes les instanciations il suffit de considérer un cas, typique et 'universalisable', correspond à la simplification que nous avons apporté à la règle de construction d'arbres pour le quantificateur existentiel à la p. 282.

PROOF

4. l'application de la règle, ayant comme conclusion cette dernière formule (de l'étape (3)), et comme suppositions et prémisses celles de la quantification existentielle (de l'étape (1)).

Voici, comme exemple, une preuve du séquent « $\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx) \vdash \exists x(Gx)$ » :

1	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash \forall x(Fx \to Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash \exists x(Fx)$	prémisse
3	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$Fa \vdash^* Fa$	supposition (du disjoint typique)
4	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$Fa \vdash^* Fa \to Ga$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$Fa \vdash^* Ga$	de (3) et (4) avec (MP)
6	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$Fa \vdash^* \exists x(Gx)$	de (5) avec (GE)
7	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash \exists x(Gx)$	de (2), (3) et (6) avec (SE)

Étant donné les prémisses que tout ce qui est F est également G et qu'il y a quelque chose qui est F, nous supposons, à la ligne (3), qu'un individu arbitraire a est F. Sous cette supposition, nous démontrons ensuite qu'il y a quelque chose qui est G (ligne 6). De ces deux lignes et de la ligne où nous avons prouvé la quantification existentielle, nous concluons qu'il y a quelque chose qui est G (ligne 7). Dans une application de (SE), nous indiquons trois lignes : celle où nous avons prouvé la quantification existentielle, celle où nous avons fait la supposition du disjoint typique et celle où nous avons montré que la phrase en question peut être démontrée sous cette supposition.

Comme l'indique le parallélisme entre (SE) et (GU), nous devons également adopter quelques restrictions pour éviter des raisonnements fallacieux comme le suivant :

1	$\exists x(Fx)$	$\vdash \exists x(Fx)$	prémisse
2	$\exists x(Fx)$	$Fa \vdash^* Fa$	supposition
3	$\exists x(Fx)$	$\vdash Fa$	de (1), (2) et (2) avec (SE)
4	$\exists x(Fx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	de (3) avec (GU)

L'application de (GU) est correcte, puisque « $\exists x(Fx)$ » ne contient pas « a ». Mais l'application de (SE) est incorrecte, puisque la conclusion prouvée sous la supposition du disjoint typique contient elle-même une occurrence de la constante pour l'individu arbitraire a – c'est pourquoi la conclusion obtenue *dépend* de notre choix et est particulière à l'individu spécifique introduit par le disjoint typique. Même si « Fa » est une conséquence d'elle-même, il ne s'ensuit pas de « $\exists x(Fx)$ » qu'un individu, arbitrairement choisi, est F. Nous devons donc limiter les conclusions obtenues à partir du disjoint typique à des phrases qui portent sur des individus autres que celui qui nous a servi pour l'instanciation.

Cette restriction correspond à l'exigence selon laquelle, de toutes les phrases que nous dérivons de la supposition du disjoint typique, seules celles qui ne concernent pas l'individu choisi comme arbitraire sont également des conséquences de la quantification existentielle.

Cette précaution, même si elle est nécessaire, n'est pas encore suffisante. Nous devons également supposer que « a » n'a pas d'occurrence dans les suppositions sous lesquelles est obtenue la conclusion dérivée du disjoint typique. Ceci est montré par le raisonnement fallacieux suivant :

1	$\exists x(Fx), Ga$	$\vdash \exists x(Fx)$	prémisse
2	$\exists x(Fx), Ga$	$\vdash Ga$	prémisse
3	$\exists x(Fx), Ga$	$Fa \vdash^* Fa$	supposition

PROOF

4	$\exists x(Fx), Ga$	Fa	$\vdash^* Fa \wedge Ga$	de (2) et (3) avec ($\wedge$**I**)
5	$\exists x(Fx), Ga$	Fa	$\vdash^* \exists x(Fx \wedge Gx)$	de (4) avec (GE)
6	$\exists x(Fx), Ga$		$\vdash \exists x(Fx \wedge Gx)$	de (2), (3) et (5) avec (SE)

Ce raisonnement est fallacieux : nous procédons de deux prémisses portant sur deux individus – qu'un individu arbitraire est F et que quelque chose est G – à la conclusion qu'il y a quelque chose qui est en même temps F et G. Le problème n'est pas que la conclusion obtenue, à la ligne (5), de la supposition du disjoint typique, contient « a ». Le caractère fallacieux du raisonnement est plutôt dû au fait qu'elle reste sur une prémisse, à savoir « Ga », autre que le disjoint typique, contenant « a » : parce que les prémisses parlent déjà de a (et disent que a est G), nous ne pouvons plus utiliser « a » pour parler d'un individu arbitraire. « $\exists x(Fx \wedge Gx)$ » a été dérivée en faisant une assomption sur l'individu arbitraire en question – qu'il n'était pas seulement F, mais également G.

Ces quatre règles (GU), (SU), (GE) et (SE) ainsi que les règles pour les connecteurs forment un calcul de déduction naturelle pour la logique des prédicats. Les règles pour les connecteurs sont maintenant interprétées comme s'appliquant à des phrases du langage $\mathcal{L}^+$. Il est important de noter que l'on ne peut pas, par exemple, supposer une phrase ouverte – une telle supposition donnerait facilement lieu à des raisonnements fallacieux et serait sémantiquement non sensée : nous supposons qu'une phrase est vraie et ne pouvons pas supposer qu'une phrase ouverte est satisfaite par quelques objets.[4]

12.2 Les règles de la déduction naturelle pour la logique des prédicats

Nous sommes maintenant en mesure de formuler nos règles de la déduction naturelle pour les quantificateurs, règles qui se rajoutent à celles pour les connecteurs, maintenant interprétées comme gouvernant non seulement des connecteurs propositionnels, mais aussi des connecteurs reliant des phrases ouvertes.

L'élimination du quantificateur universel et l'introduction du quantificateur existentiel

Soit ϕ une formule de $\mathcal{L}^+$, « x » une variable et « t » un terme *libre pour « x » dans ϕ*.[5] Soit $\ulcorner\phi(x/t)\urcorner$ le résultat de la substitution (uniforme) de « t » pour « x » dans ϕ. La règle de « *spécialisation universelle* » (SU) nous donne alors le droit de conclure $\ulcorner\phi(x/t)\urcorner$ à partir de $\ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$:

m	$\vdash \ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \ulcorner\phi(x/t)\urcorner$	de (m) avec (SU)

[4] L'application des anciennes règles aux nouvelles formules peut créer de nouveaux types d'erreurs : Pour l'application de la règle de preuve conditionnelle, par exemple, il faut garder à l'esprit qu'elle ne nous permet d'enlever que la supposition transformée en l'antécédent de l'implication. Nous ne pouvons pas, par exemple, supposer « Fa », prouver sous cette supposition que $\exists x(Gx)$ et conclure ensuite « $\exists x(Fx) \rightarrow \exists x(Gx)$ ».

[5] Nous avons défini cette notion dans la leçon 10 (cf. p. 265). Un terme n'est pas libre pour une variable dans une formule si une éventuelle substitution de la variable par le terme avait comme conséquence qu'une occurrence libre de cette variable dans le terme devenait gouvernée par un quantificateur dans la formule. Dans le cas où le terme en question est une variable, cela veut dire qu'il serait substitué à l'intérieur d'un quantificateur dont la portée duquel il se trouve.

PROOF

Par (SU), nous passons d'une quantification universelle à une de ses instanciations : nous réduisons le nombre de quantifications dans la formule par un, mais seulement par un.

La règle de «*généralisation existentielle*» (GE) est la converse de (SU) : elle nous donne le droit d'inférer $\ulcorner \exists x(\phi) \urcorner$ à partir de $\ulcorner \phi(x/t) \urcorner$:

m	$\vdash \ulcorner \phi(x/t) \urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \ulcorner \exists x(\phi) \urcorner$	de (*m*) avec (GE)

Dans les deux cas, d'éventuelles suppositions ou prémisses à la ligne (*m*) sont conservées à la ligne (*n*).

L'introduction du quantificateur universel et l'élimination du quantificateur existentiel

Soit $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ une formule qui contient une constante individuelle «*a*». S'il n'est pas le cas que «*a*» a une occurrence dans une des prémisses dont dépend la preuve de ϕ, la règle de *généralisation universelle* (GU) nous permet d'étendre une preuve de $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ à une preuve de $\ulcorner \forall x(\phi(a/x)) \urcorner$:

m	$\vdash \ulcorner \phi(a) \urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \ulcorner \forall x(\phi(a/x)) \urcorner$	de (*m*) avec (GU)

Ce qui est vrai d'un individu arbitraire de notre domaine de discours doit être vrai de tous ces individus.

La règle de *spécialisation existentielle* (SE) nous permet de prouver, à partir de $\ulcorner \exists x(\phi(a/x)) \urcorner$ toute formule ψ que nous pouvons prouver à partir de la supposition $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ – à condition que cette supposition porte réellement sur un individu arbitraire, c'est-à-dire : s'il n'est pas le cas que «*a*» a une occurrence dans ψ ou dans une supposition ou une prémisse dont dépend la preuve de ψ à partir de $\ulcorner \phi(a) \urcorner$:

m	$\vdash \ulcorner \exists x(\phi(a/x)) \urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\ulcorner \phi(a) \urcorner \vdash^* \ulcorner \phi(a) \urcorner$	supposition
⋮	⋮	
o	$\ulcorner \phi(a) \urcorner \vdash^* \psi$	
⋮	⋮	
p	$\vdash \psi$	de (*m*), (*n*) et (*o*) avec (SE)

La ligne (*p*) contiendra toutes les prémisses ou suppositions de la ligne (*m*) et toutes les suppositions nécessaires pour la preuve de ψ à partir de $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ (autres que $\ulcorner \phi(a) \urcorner$).

PROOF

Exemples

Le premier exemple illustre le bon usage de la règle de spécialisation existentielle (SE). Pour prouver une conclusion à partir d'une quantification existentielle, nous essayons de la dériver de son disjoint typique. Voici une preuve du séquent « $\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \exists x(Fx \wedge Hx)$ ». Nous commençons par la supposition du disjoint typique :

1	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \forall x(Gx \rightarrow Hx)$	prémisse
2	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \exists x(Fx \wedge Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa \wedge Ga$	supposition

Une instanciation de la quantification universelle pour la constante « a » qui représente l'individu arbitraire qui était dit être F et G nous permet alors d'appliquer les règles ordinaires de connecteurs, prouvant que a n'est pas seulement F mais aussi H :

4	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Ga \rightarrow Ha$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Ga$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
6	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Ha$	de (4) et (5) avec (MP)
7	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
8	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa \wedge Ha$	de (6) et (7) avec ($\wedge$**I**)

Pour compléter la preuve de « $\exists x(Fx \wedge Hx)$ », il nous reste à faire une généralisation existentielle par rapport à l'individu arbitraire et d'appliquer la règle de spécialisation existentielle au résultat :

9	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx \wedge Hx)$	de (8) avec (GE)
10	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \exists x(Fx \wedge Hx)$	de (2), (3) et (9) avec (SE)

L'application de (SE) est légitime car « a » n'a pas d'occurrence dans « $\exists x(Fx \wedge Hx)$ » et parce que la preuve de la dernière phrase ne dépendait pas d'autres suppositions sur a que celle que le disjoint typique était vrai.

Prouvons la distributivité du quantificateur universel sur la conjonction, c'est-à-dire le séquent « $\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx) \vdash \forall x(Fx \wedge Gx)$ ».[6] La preuve consiste en une instanciation des deux conjoints, suivie d'une généralisation de la conjonction des instanciations :

1	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash \forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	de (1) avec ($\wedge$**E**)
3	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash Fa$	de (2) avec (SU)
4	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash \forall x(Gx)$	de (1) avec ($\wedge$**E**)
5	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash Ga$	de (2) avec (SU)
6	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash Fa \wedge Ga$	de (3) et (5) avec ($\wedge$**I**)
7	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash \forall x(Fx \wedge Gx)$	de (6) avec (GU)

Dans la preuve précédente, nous n'avons dû faire aucune supposition. Par contre, pour prouver la distributivité du quantificateur existentiel sur la disjonction, nous devons en faire une. Prouvons alors

[6] Nous avons prouvé ce séquent à l'aide de la méthode des arbres dans l'exercice 3 de la série 11 (cf. p. 431).

PROOF

le séquent « $\exists x(Fx \vee Gx) \vdash \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$ » :

1	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$\vdash \exists x(Fx \vee Gx)$	prémisse
2	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga$	$\vdash^* Fa \vee Ga$	supposition
3	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga, Fa$	$\vdash^* Fa$	supposition
4	$\exists x(Fx \vee Gx, Fa \vee Ga, Fa$	$\vdash^* \exists x(Fx)$	de (3) avec (GE)
5	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga, Fa$	$\vdash^* \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	de (4) avec ($\vee$**I**)
6	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga, Ga$	$\vdash^* Ga$	supposition
7	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga, Ga$	$\vdash^* \exists x(Gx)$	de (6) avec (GE)
8	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga, Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	de (7) avec ($\vee$**I**)
9	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	de (2, 3, 5, 6, 8) avec ($\vee$**E**)
10	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$\vdash \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	de (1), (2) et (9) avec (SE)

Nous prouvons la distributivité du quantificateur existentiel sur la conjonction sous forme de théorème plutôt que de séquent. Grâce au méta-théorème de déduction (cf. p. 301) et la présence d'une règle d'inférence de preuve conditionnelle (CP), cela revient à la même chose. Voici donc une preuve de « $\vdash \exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow (\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx))$ » :

1	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash^* \exists x(Fx \wedge Gx)$	supposition
2	$\exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa \wedge Ga$	supposition
3	$\exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa$	de (2) par ($\wedge$E)
4	$\exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx)$	de (3) par (GE)
5	$\exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Ga$	de (2) par ($\wedge$E)
6	$\exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \exists x(Gx)$	de (5) par (GE)
7	$\exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)$	de (4) et (6) par ($\wedge$I)
8	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash^* \exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)$	de (1), (2), (7) par (SE)
9		$\vdash \exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow (\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx))$	de (1) et (8) par (PC)

Comme nous l'avons vu dans la discussion sur les règles de passage (p. 266 dans a leçon 10), le quantificateur existentiel distribue aussi sur l'antécédent d'une implication qui ne contient pas d'occurrence libre de la variable qu'il quantifie. Nous pouvons donc prouver « $\exists x(Fa \rightarrow Fx) \vdash Fa \rightarrow \exists x(Fx)$ » :

1	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$\vdash \exists x(Fa \rightarrow Fx)$	prémisse
2	$\exists x(Fa \rightarrow Fx), Fa$	$\vdash^* Fa$	supposition
3	$\exists x(Fa \rightarrow Fx), Fa, Fa \rightarrow Fb$	$\vdash^* Fa \rightarrow Fb$	supposition
4	$\exists x(Fa \rightarrow Fx), Fa, Fa \rightarrow Fb$	$\vdash^* Fb$	de (2) et (3) avec (MP)
5	$\exists x(Fa \rightarrow Fx), Fa, Fa \rightarrow Fb$	$\vdash^* \exists x(Fx)$	de (4) avec (GE)
6	$\exists x(Fa \rightarrow Fx), Fa$	$\vdash^* \exists x(Fx)$	de (1), (3) et (5) avec (SE)
7	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$\vdash Fa \rightarrow \exists x(Fx)$	de (2) et (6) avec (PC)

Puisque nous avons déjà une occurrence de la constante « a », nous devons choisir, à la ligne (3), la constante « b » pour désigner l'individu arbitraire qui figure dans le disjoint typique de la quantification existentielle.

Nous pouvons aussi prouver un séquent, « $\forall x \forall y(Rxy) \vdash \forall y \forall x(Rxy)$ », qui correspond à une ob-

PROOF

servation que nous avons faite auparavant :[7] que les variables, prises individuellement, sont interchangeables – tout ce qui distingue une variable d'une autre sont leurs propriétés relationnelles, en particulier si elles sont liées par des quantificateurs de différentes types :

1	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall x\forall y(Rxy)$	prémisse
2	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall y(Ray)$	de (1) avec (SU)
3	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash\ Rab$	de (2) avec (SU)
4	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall x(Rxb)$	de (3) avec (GU)
5	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall y\forall x(Rxy)$	de (4) avec (GU)

Comme dans la dernière preuve, nous devons choisir deux constantes individuelles différentes, car sans le faire, nous déduirions le séquent invalide « $\forall x\forall y(Rxy) \vdash \forall x(Rxx)$ », ayant perdu toute possibilité de distinguer les deux places argumentales.

Finalement, nous prouvons un séquent compliqué, à savoir le suivant :

$$\exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow Rxy)), \forall x(Fx \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Rxy)) \vdash \forall x(Gx \rightarrow \neg Bx)$$

En abrégeant « $\exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow Rxy))$ » par « **A** », « $\forall x(Fx \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Rxy))$ » par « **B** » et « $Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$ » par « **C** », nous obtenons la preuve suivante :

1	**A**, **B**	$\vdash\ \exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow Rxy))$	prémisse
2	**A**, **B**	$\vdash\ \forall x(Fx \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Rxy))$	prémisse
3	**A**, **B**, **C**	$\vdash^*\ Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	supposition
4	**A**, **B**, **C**	$\vdash^*\ Fa$	de (3) avec ($\wedge$)
5	**A**, **B**, **C**	$\vdash^*\ \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	de (3) avec ($\wedge$)
6	**A**, **B**, **C**	$\vdash^*\ Fa \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Ray)$	de (2) avec (SU)
7	**A**, **B**, **C**	$\vdash^*\ \forall y(By \rightarrow \neg Ray)$	de (4) et (6) avec (MP)
8	**A**, **B**, **C**, Gb	$\vdash^*\ Gb$	supposition
9	**A**, **B**, **C**, Gb	$\vdash^*\ Gb \rightarrow Rab$	de (5) avec (SU)
10	**A**, **B**, **C**, Gb	$\vdash^*\ Rab$	de (8) et (9) avec (MP)
11	**A**, **B**, **C**, Gb	$\vdash^*\ Bb \rightarrow \neg Rab$	de (7) avec (SU)
12	**A**, **B**, **C**, Gb	$\vdash^*\ \neg\neg Rab$	de (10) avec (DN)
13	**A**, **B**, **C**, Gb	$\vdash^*\ \neg Bb$	de (12) et (11) avec (MT)
14	**A**, **B**, **C**	$\vdash^*\ Gb \rightarrow \neg Bb$	de (8) et (13) avec (PC)
15	**A**, **B**, **C**	$\vdash^*\ \forall x(Gx \rightarrow \neg Bx)$	de (14) avec (GU)
16	**A**, **B**	$\vdash\ \forall x(Gx \rightarrow \neg Bx)$	de (1), (3) et (15) avec (SE)

Comme toujours, nous commençons par des instanciations des quantifications, ce qui nous permet ensuite d'appliquer les règles pour les connecteurs. En vue d'une application de (PC), nous supposons, à la ligne (8), l'antécédent de l'implication dont nous voulons prouver la quantification universelle. Nous aurions également pu supposer « Ga » et faire les instantiation dans les lignes (9) et (11) avec « a » au lieu de « b ». Nous généralisons le résultat obtenu à la ligne (15) et enlevons la supposition du disjoint typique, ce qui est permis parce que la conclusion obtenue n'en dépend pas.

[7] Cf. notre preuve de « $\forall x(Fx) \rightarrow \forall y(Fy)$ » par la méthode des arbres dans la série 11 (cf. p. 426).

PROOF

12.3 La critique référentialiste de Frege

À la base de la théorie de Frege comme interprétée par ses adversaires dans les années cinquante et soixante se trouve *une conception satisfactionnelle (descriptiviste) du sens*. La conception satisfactionnelle du sens est la pensée qu'à chaque mot sont attachées quelques conditions que n'importe quelle chose dans le monde doit satisfaire pour être le référent du mot. Le référent de « Superman » est l'individu unique qui satisfait les conditions rattachées à ce mot. S'il n'y pas de tel objet, ou s'il y en a plusieurs, rien n'est dénoté par « Superman ». Pour les phrases, cette conception satisfactionnelle nous amène à identifier la pensée, c'est-à-dire le sens d'une phrase, avec les conditions de vérité de cette phrase (les conditions que notre monde doit satisfaire pour que la phrase en question soit vraie).

À cette conception satisfactionelle s'oppose *une théorie relationnelle*, comme elle a été défendue par David Kaplan. Pour les termes singuliers, Kaplan (1989) propose de caractériser la théorie de Frege par le schéma suivant :

$$\text{terme singulier} \overset{\text{exprime}}{\longrightarrow} \text{concept / sens} \overset{\text{est satisfait par}}{\longrightarrow} \text{individu qui tombe le concept}$$

La relation de référence ⟨terme singulier $\overset{\text{dénote}}{\longrightarrow}$ individu⟩ est conçu comme produit de ces deux relations :

$$\overset{\text{dénote}}{\longrightarrow} = \overset{\text{exprime}}{\rightarrow} \circ \overset{\text{est satisfait par}}{\rightarrow}$$

Dans un certain sens, la relation de dénotation chez Frege est même définie de cette manière : c'est à travers le sens et par le biais du sens de nos mots que nous réussissons de parler du monde. Dans un esprit Kantian, pour Frege, parler du monde est parler de comment le monde nous est donné et c'est le sens qui caractérise ce 'mode de donation' du monde.

À cette conception, Kaplan oppose l'idée de la *référence directe*, i.e. d'une relation de référence qui n'est pas méditatée par un sens. Un terme singulier qui réfère directement exprime la chose même, grâce à un lien qui relie l'expression même à la chose pour laquelle elle sert de substitut. La dénotation des expressions directement référentielles leurs est essentielle : ce que distingue deux expressions directement référentielles ne peut être que leurs dénotations ; toute différence en la direction dans laquelle le référent est approché ou en la manière dont il est conçu est rélégué au domaine de la coloration.

À la base de cette querelle, on trouve deux conceptions différentes du rapport entre langage et monde. Selon un camp (représenté p. ex. par Carnap), le monde est d'un côté et le langage de l'autre, et c'est le langage qui impose des conditions, le monde qui les satisfait ou pas. Selon l'autre, on est forcé de prendre en compte les liens (pragmatiques par ex.) à l'intérieur du niveau du langage *déjà* pour établir les liens de référence qui lient ce niveau avec le monde ; il faut prendre en compte le fait que les mots, eux aussi, sont *dans* le monde – au moins les mots conçus comme occurrences (« tokens », et non pas comme types) qui ont une location spatio-temporelle (ils se trouvent sur le tableau noir p. ex.).

Ces occurrences entrent, en tant qu'objets du monde, dans des relations avec d'autres objets du monde (comme le locuteur, les personnes par lesquelles j'ai appris ce mot (ce qu'on appelle une chaîne de transmission), l'auditeur, etc.). La relation de dénotation entre une occurrence concrète de « ce bout de craie » et ce bout de craie (la chose blanche, pointue, dans ma main) est une relation entre deux choses qui se trouvent dans le (même, puisqu'il n'y a qu'un seul) monde.

PROOF

Le nouveau paradigme dit que ce qui fixe la référence des mots, ce n'est pas le contenu conceptuel attaché aux mots mais les relations entre des occurrences des mots et certains objets. Le référent d'un(e occurrence d'un) mot est cette chose qui se trouve dans une telle relation spécifique avec cette occurrence. C'est pour cette raison que les indexicaux peuvent parfaitement servir comme exemples : pour arriver au référent, il faut déterminer quel objet dans le monde se trouve dans la bonne relation avec cette occurrence (la relation d'*avoir été énoncée par* quelqu'un, en l'occurrence).

Les propriétés sémantiques d'une photo, p. ex. le fait que cette photo est *de* Mme Thatcher, viennent du fait qu'elle a été prise en la présence de Mme Thatcher et que la photo vient de l'impression de la pellicule causée par Mme Thatcher. Même si c'est bien possible que Mme Thatcher satisfait le « contenu conceptuel » de la photo (a les mêmes apparences que la personne photographiée), ceci n'est pas nécessaire. Si Mme Thatcher avait une soeur jumelle qui lui ressemblait énormément, on ne dirait pas que la photo est une photo de cette soeur jumelle ; même si la photo ne ressemble pas du tout à Mme Thatcher (parce qu'il faisait noir, etc.), on dit toujours qu'elle est une photo (ratée) d'elle. En conséquent, même s'il arrivait que seul Mme Thatcher satisfasse le contenu conceptuel, cette satisfaction n'est pas ce qui fait de la photo une photo de Mme Thatcher, mais ce qui en est responsable est une relation réelle (dans les cas paradigmatiques, il s'agit d'une relation causale).[8]

Un des exemples les plus clairs de ce nouveau paradigme et en même temps une critique de Frege est constitué par ce que Donnellan (1968) appelle *l'emploi référentiel des descriptions définies*. Si je dis, dans un bar, « le type là-bas qui boit du Martini a dragué ma fille » je peux désigner quelqu'un même si ce quelqu'un ne boit que de l'eau – et même si, là-bas, caché derrière un rideau, il y a quelqu'un qui, en effet, boit du Martini. La théorie de Frege nous dirait que j'ai fait référence à la personne cachée – ce qui, intuitivement, n'est pas le résultat qu'on aimerait avoir.[9] C'est plus clair encore pour les descriptions incomplètes comme « ce type »,[10] ou « lui ». Ce qui fixe la référence est p. ex. la saillance perceptuelle de l'individu en question dans le contexte.

Une option possible pour le fregéen serait de dire que, dans ces cas-là, la relation même est représentée dans le concept – le sens de « ce type » serait alors donné par « le type que je vois s'agiter ». L'objection à cela, donnée par Kripke (1972), est que les chaînes de transmission reliant notre usage des noms propres avec les baptêmes originaux, et donc finalement avec les choses baptisées, nous permettent de parler des choses *dont on n'a que les noms* et dont on ne sait rien d'autre, ou encore, par rapport auxquelles on est dans des illusions terribles. Au moins dans ces cas-ci, la référence ne semble pas être médiatisée par un contenu conceptuel. On n'est pas conscient des chaînes causales et on n'a pas besoin de les conceptualiser pour faire référence.

Hilary Putnam (1975a) a généralisé cette théorie à une sous-espèce des mots communs, c'est-à-dire aux termes d'espèce naturelle comme « or », « eau » et « tigre ». Dans cette théorie, il y a un certain inversement de la relation entre sens et référence. La référence est première. Les référents nous sont *donnés* et le sens c'est la façon dont le référent nous est donné ou encore la façon dont nous nous le

[8] Il est difficile de caractériser ces relations sans présupposer qu'elles sont toutes réductibles à des relations causales. Cette dernière réduction est le but d'un certain programme de recherche qui vise à naturaliser toutes les relations sémantiques. De toute façon, une caractérisation adéquate de cette relation devrait éviter de trivialiser la thèse qui survient si on comptait la relation de satisfaction comme relation en question.

[9] Peut-être une distinction entre « référent sémantique » et « référent pragmatique », pourrait aider ici au néo-fregéen. Le référent sémantique serait l'homme derrière le rideau (et le référent sémantique de « Jean » est Jean), même si le référent pragmatique est l'homme au bar qui boit de l'eau (comme le référent pragmatique de « Jean » peut être Pierre, si le locuteur a voulu faire référence à Pierre).

[10] La stratégie de n. 9 ne marche pas dans ces cas, puisqu'il n'y a pas de référent (unique) sémantique.

PROOF

représentons.

Considérons de nouveau :

Aristote est l'élève le plus célèbre de Platon. (Ari1*)

(Ari1*) n'est ni analytique (argument sémantique), ni a priori (argument épistémique), ni nécessaire (argument modal).

Une description définie peut nous servir pour *fixer la référence* d'un nom propre, sans pour autant nous *donner sa signification*.

Un désignateur est rigide si et seulement si sa référence ne varie pas parmi les situations contrefactuelles prises comme contextes d'évaluation. Il faut distinguer les contextes d'évaluation des contextes d'application.

Les termes d'espèces naturelles comme « eau » et « tigre » sont aussi des désignateurs rigides.

Points à retenir

1. La déduction naturelle pour la logique des prédicats consiste en les règles de déduction naturelle pour les connecteurs et en quatre règles d'introduction et d'élimination de quantificateurs.
2. La règle (SU), appelée « spécialisation universelle », nous permet de passer d'une quantification universelle à une instanciation de la phrase ouverte pour n'importe quel terme.
3. Un quantificateur existentiel est introduit par la règle de généralisation existentielle (GE).
4. Pour qu'une application des règles (SU) et (GE) soit correcte, il est requis que le terme remplacé par la variable soit libre pour cette variable dans la formule qui le contient, c'est-à-dire qu'il ne se trouve pas dans la portée d'un quantificateur qui lie cette variable.
5. Pour prouver une quantification universelle à partir d'une prémisse particulière à l'aide de la règle de *généralisation universelle* (GU), nous exigeons que cette prémisse soit vraie d'un individu arbitraire, c'est-à-dire d'un individu qui n'apparaît dans aucune supposition ou prémisse dont dépend la preuve de cette phrase particulière.
6. Par (GU), nous pouvons ensuite inférer une quantification universelle dans laquelle le terme arbitraire est substitué *partout* par une variable. Il est important que cette substitution soit uniforme.
7. La règle d'élimination du quantificateur existentiel (SE) correspond à celle de l'élimination de la disjonction ($\vee$**E**) et est par conséquent plus compliquée. L'application de la règle de spécialisation existentielle (SE) comprend quatre étapes :
   (a) la preuve d'une quantification existentielle sous certaines suppositions et à partir de certaines prémisses ;
   (b) la supposition du disjoint typique ;
   (c) une preuve d'une autre phrase sous la supposition du disjoint typique ;
   (d) l'application de la règle, avec la conclusion que nous pouvons également prouver la phrase prouvée sous la supposition du disjoint typique à partir des suppositions et prémisses nécessaires pour la preuve de la quantification existentielle ;
8. La règle de spécialisation existentielle (SE) est sujette aux mêmes deux conditions que la règle de généralisation universelle :

PROOF

a) la constante remplaçant la variable dans le disjoint typique ne doit apparaître dans aucune prémisse ou supposition de laquelle dépend la quantification existentielle ;
b) elle ne doit pas avoir d'occurrence dans la formule que nous voulons prouver.

9. L'application de ces règles nous permet de prouver des théorèmes (« $\vdash \phi$ ») et des séquents (« $\phi \vdash \psi$ »). La déduction naturelle est une méthode syntaxique qui est correcte et complète par rapport à la sémantique de la logique des prédicats : toute phrase valide est un théorème et tout théorème est valide ; tout séquent déductible correspond à une relation de conséquence sémantique et toute conséquence sémantique peut être déduite comme séquent.

PROOF

PROOF

dialectica *series of anthologies*

13 Propriétés métalogiques de la logique des prédicats

13.1 La correction et la complétude de la méthode des arbres pour la logique des prédicats

Dans cette leçon, nous démontrerons quelques propriétés métalogiques de la logique des prédicats :

- la *correction* de la méthode des arbres, du calcul axiomatique et de la méthode de déduction naturelle, dont s'ensuit leur consistance ;
- la *complétude* de la méthode des arbres, du calcul axiomatique et de la déduction naturelle ;
- le *théorème de Löwenheim-Skolem* sur la logique des prédicats.
- la *compacité* de la logique des prédicats ;

Pour prouver la complétude de la méthode des arbres pour la logique des prédicats, nous reprenons quelques notions et définitions de la leçon 7 et suivons la présentation de Smullyan (1968, 57 et seq.). Comme avant, nous divisons les sept autres règles de construction d'arbres (considérant les règles pour l'équivalence matérielle comme dérivées) en deux catégories : celles qui traitent des formules que nous appelons « du type α » ($\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$, $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$) qui 'continuent sur la même branche', et celles qui traitent des formules « du type β » ($\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ et $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$) qui nous obligent à créer au moins une nouvelle branche. Nous ajoutons deux nouvelles catégories :

α	α_1	α_2
$\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	ϕ	ϕ
$\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\neg(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$	ϕ	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$

β	β_1	β_2
$\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	ψ

γ	$\gamma(a)$
$\ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$	$\phi(x/a)$
$\ulcorner\neg\exists x(\phi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi(x/a)\urcorner$

δ	$\delta(a)$
$\ulcorner\exists x(\phi)\urcorner$	$\phi(x/a)$
$\ulcorner\neg\forall x(\phi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi(x/a)\urcorner$

Nous modifions la construction des tableaux en ajoutant les règles (C) et (D) à (A) et (B) :

PROOF

Définition 77 (Tableaux)**.** *Un* tableau *est un arbre binaire dont les nœuds sont des formules bien formées de la logique des prédicats construites à partir d'une formule comme suit : si χ est une formule dont le tableau $\mathcal{T}$ a déjà été construit et que ζ en est un point extrême, nous élargissons $\mathcal{T}$ par l'une des méthodes suivantes :*

(A) Si une formule du type α a une occurrence sur le chemin B_ζ (le chemin de χ jusqu'à ζ dans $\mathcal{T}$), nous ajoutons soit α_1 soit α_2 comme successeur unique à ζ.

(B) Si une formule du type β a une occurrence sur le chemin B_ζ, nous ajoutons β_1 comme successeur gauche et β_2 comme successeur de droite à ζ.

(C) Si une formule du type γ a une occurrence sur le chemin B_ζ, nous ajoutons des formules $\ulcorner\gamma(a)\urcorner$ comme successeurs pour toutes les constantes « a » apparaissant sur le chemin.

(D) Si une formule du type δ a une occurrence sur le chemin B_ζ, nous ajoutons des formules $\ulcorner\delta(a)\urcorner$ pour une nouvelle constante « a » qui n'apparaissait pas encore sur le chemin.

Nous constatons les quatre faits suivants concernant les formules du type α, β, γ et δ :

$\mathbf{F}_1$ une formule du type α est vraie ssi α_1 est vrai et α_2 est vrai ;

$\mathbf{F}_2$ une formule du type β est vraie ssi soit β_1 est vrai soit β_2 est vrai ;

$\mathbf{F}_3$ une formule du type γ est vraie ssi $\ulcorner\gamma(a)\urcorner$ est vrai pour tout a dans l'univers ;

$\mathbf{F}_4$ une formule du type δ est vraie ssi $\ulcorner\delta(a)\urcorner$ est vrai pour au moins un a dans l'univers.

Nous notons aussi les quatre faits suivant concernant la satisfaisabilité d'un ensemble arbitraire E :

$\mathbf{G}_1$ Si S est satisfaisable et que $\alpha \in S$, alors $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ est satisfaisable.

$\mathbf{G}_2$ Si S est satisfaisable et que $\beta \in S$, alors soit $S \cup \{\beta_1\}$, soit $S \cup \{\beta_2\}$ est satisfaisable.

$\mathbf{G}_3$ Si S est satisfaisable et que $\gamma \in S$, alors $S \cup \{\gamma(a)\}$ est satisfaisable pour toute constante « a ».

$\mathbf{G}_4$ Si S est satisfaisable, que $\delta \in S$ et que « a » est une constante qui n'a aucune occurrence dans un élément de S, alors $S \cup \{\delta(a)\}$ est satisfaisable.

Pour prouver $\mathbf{G}_4$ nous procédons comme suit : Si S est satisfaisable, il y a une structure et une assignation de valeurs par rapport auxquelles toutes les phrases dans S sont vraies. En particulier, il existe une interprétation I des signes non logiques dans S et une assignation de valeurs à toutes les variables dans S qui rendent la formule du type δ vraie. δ est d'un type existentiel – de $\mathbf{F}_4$ il s'ensuit alors que δ est vraie ssi il existe un élément de l'univers de discours de lequel elle est vraie. Nous appelons cet élément « a ». Ayant ajouté cette nouvelle constante à notre langue, nous définissons une nouvelle interprétation des constantes comme suit :

$$I^*(\text{« } k \text{ »}) := \begin{cases} a & k = a \\ I(\text{« } k \text{ »}) & k \neq a \end{cases}$$

Sous cette nouvelle interprétation I^*, $\ulcorner\delta(a)\urcorner$ est vraie. $S \cup \{\ulcorner\delta(a)\urcorner\}$ est donc satisfaisable.

Nous pouvons maintenant prouver la correction de la méthode des arbres pour la logique des prédicats :

Théorème 78 (Correction de la méthode des arbres)**.** *La méthode des arbres pour la logique des prédicats est correcte : toute formule prouvable est valide.*

Démonstration. Comme pour la logique propositionnelle, nous prouvons la correction par induction mathématique. $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_3$ et $\mathbf{G}_4$ nous assurent qu'une branche satisfaisable étendue par l'une des règles (A), (C) ou (D) reste satisfaisable.

PROOF

Si on étend une branche satisfaisable en deux branches par (B), au moins une des branches reste satisfaisable (par $\mathbf{G}_2$). Toute extension directe d'un tableau satisfaisable est donc satisfaisable. Il s'ensuit par induction mathématique que si l'origine d'un tableau est satisfaisable, le tableau entier l'est également. Par conversion, si un tableau n'est pas satisfaisable (ne contient que des branches fermées), l'origine ne l'est pas non plus. Sa négation est donc valide. □

Dans le cas de la logique propositionnelle, nous avons prouvé la complétude de la méthode des arbres en nous appuyant sur les faits suivants :

(i) pour chaque proposition, nous obtenons un arbre complet après un nombre fini d'étapes ;
(ii) les phrases se trouvant sur une branche complète et ouverte forment un ensemble de Hintikka ;
(iii) tout ensemble de Hintikka est satisfaisable, c'est-à-dire est un sous-ensemble d'un ensemble saturé.

Nous devons adapter notre définition des ensembles de Hintikka pour tenir compte du fait que la logique des prédicats permet des arbres infinis :

Définition 79. *Un ensemble de Hintikka $\mathcal{H}$ pour un univers de discours D est un ensemble de formules de la logique des prédicats satisfaisant les conditions suivantes :*

(a) $\mathcal{H}$ ne contient pas de formule atomique et sa négation.
(b) Si $\alpha \in \mathcal{H}$, alors $\alpha_1 \in \mathcal{H}$ et $\alpha_2 \in \mathcal{H}$.
(c) Si $\beta \in \mathcal{H}$, alors soit $\beta_1 \in \mathcal{H}$, soit $\beta_2 \in \mathcal{H}$.
(d) Si $\gamma \in \mathcal{H}$, alors $\gamma(a) \in \mathcal{H}$ pour tout $a \in D$.
(e) Si $\delta \in \mathcal{H}$, alors $\delta(a) \in \mathcal{H}$ pour au moins un $a \in D$.

Nous prouvons un lemme analogue :

Théorème 80 (Lemme)**.** *Tout ensemble de Hintikka pour un univers D est satisfaisable dans D.*

Démonstration. Soit $\mathcal{H}$ un ensemble de Hintikka pour l'univers D. Comme pour la logique propositionnelle, nous devons trouver une interprétation (anciennement appelée « valuation ») qui rende vraies toutes les phrases dans $\mathcal{H}$. Nous la définissons ainsi pour le cas spécial d'une formule atomique ϕ :

$$I(\phi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \phi \in \mathcal{H} \\ \mathbf{f} & \ulcorner\neg\phi\urcorner \in \mathcal{H} \\ \text{un de } \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{f} & \phi \notin \mathcal{H} \ \wedge \ \ulcorner\neg\phi\urcorner \notin \mathcal{H} \end{cases}$$

Nous devons alors montrer que I rend vraies non seulement les phrases atomiques, mais toutes les phrases dans $\mathcal{H}$. Pour cela, nous devons adapter notre définition de « degré » à la logique des prédicats :

Définition 81 (Degrés)**.** *Le* degré *d'une formule ϕ de la logique des prédicats est le nombre naturel déterminé par les règles suivantes :*

1. *Si ϕ est une phrase atomique, alors son degré est* 0.
2. *Si ϕ est une phrase niée $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et que le degré de ψ est n, alors son degré est $n+1$.*
3. *Si ϕ est une conjonction $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, une disjonction $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, une implication $\ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ ou une équivalence $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ et si le degré de ψ est n et que le degré de χ est m, alors le degré de ϕ est $n+m+1$.*

PROOF

4. *Si ϕ est une phrase quantifiée $\ulcorner\forall x(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x(\psi)\urcorner$ et que le degré de ψ est n, alors son degré est $n+1$.*

Nous prouvons alors par induction mathématique sur le degré des formules que I rend vraies toutes les formules :

base de l'induction Il s'ensuit de sa définition que I rend vraies toutes les formules atomiques (de degré o) dans $\mathcal{H}$.

pas de l'induction Supposons que I rende vraie toute phrase ϕ dans $\mathcal{H}$ de degré inférieur à n. Si ϕ est d'un degré supérieur à o, ϕ doit être une formule α, β, γ ou δ :

α **:** Si ϕ est du type α, alors α_1 et α_2 sont aussi dans $\mathcal{H}$. Mais ces formules sont d'un degré inférieur à n, donc elles sont rendues vraies par I. ϕ doit donc être vraie aussi.

β **:** Si ϕ est du type β, alors soit β_1, soit β_2 est un membre de $\mathcal{H}$. Quelle qu'elle soit, elle doit être rendue vraie par I (puisqu'elle est d'un degré inférieur à n). Donc ϕ est aussi rendue vraie par I.

γ **:** Si ϕ est du type γ, alors $\gamma(k)$, pour tout $k \in U$, est un membre de $\mathcal{H}$. Comme, pour tout $k \in U$, $\gamma(k)$ est d'un degré inférieur à n, il s'ensuit de l'hypothèse d'induction que ϕ est vraie.

δ **:** Si ϕ est du type δ, alors il y a un $k \in U$ tel que $\delta(k)$ est un membre de $\mathcal{H}$. $\delta(k)$ est d'un degré inférieur à n et vraie par l'hypothèse d'induction. ϕ est donc également vraie.

Nous avons donc défini une interprétation qui rend vraies toutes les phrases dans $\mathcal{H}$ et, plus généralement, toutes les phrases dans un ensemble de Hintikka.

□

En logique propositionnelle, chaque arbre était complet après un nombre fini d'applications de règles de construction d'arbre. La complication cruciale dans le cas de la logique des prédicats est qu'un arbre pour une phrase peut être infini. Par le lemme de König (cf. p. 187 dans la leçon 7), un tel arbre contiendra une branche infinie. Pouvons-nous assumer que les phrases sur une telle branche constituent un ensemble de Hintikka ?

Malheureusement, la réponse est négative, comme le montre l'exemple d'un arbre infini donné dans la leçon 11 (p. 282). Sur un tel arbre, il peut se trouver une formule conjonctive, par exemple, qui ne sera jamais traité puisque chaque instanciation d'une quantification universelle nous force à introduire une nouvelle constante qui doit également être instanciée par la suite. Nos règles de construction d'arbres nous forcent à 'retourner en arrière' un nombre infini de fois.

Cette complication peut être évitée en adoptant la modification suivante de notre notion de tableau :

Définition 82 (Tableaux déterministes)**.** *Un* tableau déterministe *pour ϕ est un tableau construit par le processus ayant comme étape n le suivant :*

$n = 0$ *Nous plaçons ϕ à l'origine de l'arbre.*

$n \to n+1$ *Après avoir conclu la n-ième étape de la construction du tableau, nous procédons ainsi :*

(i) Si le tableau est déjà fermé, nous nous arrêtons.

(ii) Si chaque point se trouvant sur une branche ouverte et qui n'est pas une formule atomique a déjà été utilisé, nous nous arrêtons.

(iii) Autrement, nous construisons une extension directe du tableau en fonction du point ϕ de niveau minimal (et autant que possible à gauche) qui n'a pas encore été utilisé et qui se trouve

PROOF

sur au moins une branche ouverte :

(A) Si ϕ est une formule du type α, nous ajoutons α_1 et α_2 à toutes les branches ouvertes passant par ϕ et marquons ϕ comme utilisé.

(B) Si ϕ est une formule du type β, nous ajoutons β_1 comme successeur de gauche et β_2 comme successeur de droite à toutes les branches ouvertes passant par ϕ et nous marquons ϕ comme utilisé.

(C) Si ϕ est une formule du type γ, nous ajoutons à toute branche ouverte passant par ϕ une formule $\gamma(a)$ (où « a » est la première constante n'apparaissant pas encore sur la branche) et également la même formule *ϕ et nous marquons l'ancienne occurrence de ϕ comme utilisée.*

(D) Si ϕ est une formule du type δ, nous ajoutons à toute branche ouverte passant par ϕ la nouvelle formule $\delta(a)$ (où « a » est la première constante n'apparaissant pas encore sur la branche) et nous marquons ϕ comme utilisé.

Les tableaux déterministes se distinguent d'autres tableaux par trois aspects :

1. Ils sont beaucoup plus longs, puisque nous répétons chaque quantification universelle (et négation d'une quantification existentielle) après son instanciation.
2. Dans leur construction, nous ne devons jamais retourner en arrière : aucune occurrence d'une quantification universelle ne sera instanciée plus d'une fois.
3. Les formules sur une branche ouverte d'un tableau déterministe, soit qui est infini soit ne contient que de phrases utilisées, forment un ensemble de Hintikka.

(3) s'ensuit de notre définition parce qu'une branche ouverte et finie soit ne contient pas de formule du type γ, soit ne contient une quantification universelle (ou une négation d'une quantification existentielle) 'vide', c'est-à-dire de la forme $\ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$ où ϕ ne contient pas d'occurrence de « x ». Si le tableau est infini, notre méthode de construction nous assure que toutes les autres formules que celles du type γ ont été utilisées.

Nous pouvons maintenant prouver la complétude de la méthode des arbres :

Théorème 83 (Complétude de la méthode des arbres)**.** *La méthode des arbres pour la logique des prédicats est complète : toute formule valide est prouvable.*

Démonstration. Supposons que ϕ est une formule valide et $\mathcal{T}$ son tableau déterministe (qui a $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ comme origine). Si $\mathcal{T}$ contenait une branche ouverte, les formules sur cette branche formeraient un ensemble de Hintikka qui, par le lemme, serait satisfaisable. Comme $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ serait un élément de cette branche, $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ serait également satisfaisable, donc ϕ ne serait pas valide. □

Le lemme de König, que nous avons prouvé dans la leçon 7 (cf. p. 187), dit qu'un arbre infini doit contenir une branche infinie. Un tableau qui ne contient que des branches finies doit être fini. Le théorème de complétude nous assure par conséquent que tout tableau systématique pour la négation d'une formule valide doit se fermer après un nombre fini d'étapes.

PROOF

13.2 La compacité de la logique des prédicats et le théorème de Löwenheim-Skolem

Revenons sur la modification que nous avons faite de la méthode des arbres en modifiant les règles pour le quantificateur existentiel et la négation du quantificateur universel en ne les instanciant qu'avec la constante nouvelle, censée représenter un individu arbitraire. Est-elle vraiment innocente ?

La réponse est oui, pour la raison suivante : Si une formule ϕ est vraie ou fausse dans une structure avec un univers de discours de n individus, elle sera également vraie ou fausse dans beaucoup de modèles contenant des univers de discours plus larges. Supposons que nous sommes arrivés, par la nouvelle méthode, à un modèle qui rend vraie la phrase « Rab », pour une nouvelle constante « b », et que nous aurions obtenu, par l'ancienne méthode, deux modèles, rendant vraies « Raa » et « Rab » respectivement. Supposant que nous n'avons pas utilisé d'autres constantes, l'un de ces modèles ne contient qu'un seul individu, a, bien que les autres en contiennent aussi un autre, b. Cependant, cet autre individu ne peut pas être distingué de a dans le modèle : d'après tout ce que nous savons de a et de b, il pourrait s'agir du même individu. Nous remarquons ainsi que pour tout modèle, nous pouvons en créer d'autres, en y ajoutant des individus indistinguables de ceux qui se trouvent dans le domaine du discours du premier.

Nous pouvons faire quelques observations sur la satisfaisabilité et la consistance de formules ou d'ensembles de formules de notre langage $\mathcal{L}^+$. Soit Σ un ensemble de formules de cette langue.

1. Que Σ soit ou pas satisfaisable, ne dépend que de la cardinalité de $|\mathcal{A}|$, c'est-à-dire du nombre d'éléments contenus dans l'univers de discours de $\mathcal{A}$. À condition que nous ayons à notre disposition le bon nombre d'éléments, nous pouvons toujours réinterpréter les formules de Σ de façon de rester vraies.
2. Si Σ est satisfaisable dans $\mathcal{A}$, alors Σ est également satisfaisable dans toute structure qui garde l'interprétation des signes de relations, des signes de fonctions et des constantes mais contient un univers de discours plus large.
3. Il y a des formules satisfaisables dans une structure infinie qui ne sont pas satisfaisables dans une structure finie.[1]

Sujet d'un méta-théorème important, il existe une converse partielle à notre à notre première observation, converse qui nous permet de réduire nos modèles au lieu de les agrandir.

Löwenheim a prouvé en 1915 que si une formule ϕ est satisfaisable, alors elle est satisfaisable dans un domaine de discours dénombrable, c'est-à-dire un domaine de discours contenant le même nombre d'éléments qu'il y a de nombres naturels. Nous obtenons ce résultat comme corollaire de la satisfaisabilité de tout ensemble de formules sur une branche ouverte d'un tableau déterministe :

Théorème 84 (Löwenheim)**.** *Si une formule ϕ est satisfaisable alors elle est satisfaisable dans une structure avec un domaine de discours dénombrable.*

Démonstration. Par le théorème de complétude, le tableau systématique de ϕ ne peut pas être fermé. Il doit donc contenir une branche ouverte. Les formules se trouvant sur cette branche sont simultanément satisfaisables parce qu'elles forment un ensemble de Hintikka. L'interprétation qui satisfait la

[1] Dans l'exercise 4 de la série 11 (cf. p. **??**) nous avons prouvé que toute relation symétrique et transitive doit être réflexive. Cette affirmation n'est vraie que dans les structures finie, et donc sa négation n'est satisfaisable que dans une structure finie (où la relation ne doint soi-disant jamais 'revenir sur elle-même'.

PROOF

branche ouverte ne parle que d'un nombre dénombrable d'individus ; par la construction du tableau systématique, tous les individus dans son domaine de discours seront nommés par des constantes, dont il n'y a qu'un nombre dénombrable. L'interprétation satisfaisant la branche ouverte doit aussi satisfaire son origine, qui est ϕ. □

Skolem a étendu ce résultat, prouvant que si un ensemble dénombrable de phrases est satisfaisable simultanément, il est simultanément satisfaisable dans un domaine de discours dénombrable.

La preuve repose sur une extension de la méthode de tableaux déterministes à des ensembles de formules : nous disons d'un tableau qu'il est « Σ-complet » pour un ensemble de formules Σ si les formules sur chacune de ces branches déterminent un ensemble de Hintikka et s'il contient également toutes les formules dans Σ. Pour n'importe quel ensemble de phrases Σ, nous construisons un tableau qui est Σ-complet en utilisant la procédure systématique pour la construction d'un tableau déterministe, commençant par la première formule dans Σ (par rapport à n'importe quelle énumération) et ajoutant la *n*ème formule dans Σ à la *n*ème étape de la construction à chaque branche ouverte. Pris ensemble, ceci nous donne le théorème suivant :

Théorème 85 (Löwenheim-Skolem)**.** *Si un ensemble dénombrable de formules* Σ *est simultanément satisfaisable, alors* Σ *est satisfaisable dans un modèle dont le domaine est dénombrable.*

Démonstration. Supposons que Σ est un ensemble dénombrable de formules. Nous savons qu'il existe un tableau $\mathcal{T}$ qui est S-complet. Si $\mathcal{T}$ était fermé, il ne contiendrait qu'un nombre fini de formules (par le lemme de König). Puisqu'il contient toutes les formules de Σ, Σ devrait également être fini et, par le théorème de complétude, ne serait pas satisfaisable. Donc $\mathcal{T}$ ne peut pas être fermé et contient une branche ouverte. Par la construction des tableaux Σ-complets, les formules sur cette branche ouverte composent un ensemble de Hintikka contenant toutes les formules dans Σ. Par le lemme, cet ensemble est satisfaisable dans un univers de discours dénombrable. □

Comme corollaire, nous pouvons prouver la compacité de la logique des prédicats :

Théorème 86 (Compacité)**.** *La logique des prédicats est compacte : si un ensemble de formules* Σ *est insatisfaisable alors il existe un sous-ensemble fini* $\Sigma' \Subset \Sigma$ *qui est également insatisfaisable.*

Démonstration. Si Σ est insatisfaisable, il y a un tableau fermé qui est Σ-complet. Un tel tableau doit être fini, donc ne peut contenir qu'un nombre fini d'éléments de Σ. □

Comme dans le cas de la compacité de la logique propositionnelle, ce théorème nous assure que toute formule qui est une conséquence logique de quelques prémisses, s'ensuit déjà d'un nombre fini de ses prémisses.

Les raisonnements de Löwenheim et Skolem, bien que pertinents pour des questions logiques, n'utilisent pas de formalisme logique ni des axiomes d'un calcul précis. Ils portent sur des structures considérées comme des entités mathématiques, c'est-à-dire des ensembles satisfaisant quelques conditions. Le champ de recherche auquel appartiennent des raisonnements de ce type s'appelle la « *théorie des modèles* ». La théorie des modèles étudie, en toute généralité, la nature et l'existence des modèles pour des systèmes modèles, et les question de la consistance et de la satisfaisabilité qui y sont liées.

à venir

PROOF

PROOF

dialectica *series of anthologies*

14 La logique modale

14.1 La logique modale propositionnelle

Voici quelques inférences valides en logique modale :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Quelqu'un de sage est nécessairement heureux.}\\ \text{Dieu est nécessairement sage.}\end{array}}{\text{Dieu est nécessairement heureux.}} \tag{14.1}$$

Il n'est pas possible qu'une chose soit entièrement rouge et verte en même temps.

$$\frac{\text{Cette chose est entièrement verte.}}{\text{Cette chose n'est pas entièrement rouge.}} \tag{14.2}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Il est possible que si } p \text{ alors } q.\\ \text{Il est nécessaire que } p.\end{array}}{\text{Il est possible que } q.} \tag{14.3}$$

La logique modale étudie les notions de possibilité, d'impossibilité, de nécessité, de contingence et de compatibilité. Une phrase est possible si elle peut être vraie et impossible dans le cas inverse. Elle est nécessaire si sa négation est impossible, contingente si elle n'est ni nécessaire ni impossible. Deux phrases sont compatibles s'il est possible qu'elles soient toutes deux vraies.

Dans ce chapitre, nous développerons les moyens pour rendre compte de ces inférences, en introduisons des systèmes axiomatiques et des méthode des arbres pour la logique modale propositionnelle et des prédicats. Nous commençons en élargissant notre langage :

Définition 87. *L'*alphabet *du langage $\mathcal{L}^{\Box}$ de la logique modale propositionnelle consiste en les signes suivants :*

1. *des phrases atomiques « p_0 », « p_1 », « p_2 » ... (une infinité dénombrable);*
2. *un opérateur « $\Box \ldots$ » (« nécessairement »);*
3. *les connecteurs « $\neg \ldots$ », « $\ldots \wedge \cdots$ », « $\ldots \vee \cdots$ », « $\ldots \rightarrow \cdots$ » et « $\ldots \leftrightarrow \cdots$ »;*
4. *des symboles auxiliaires : parenthèses;*

Comme la négation, « $\Box \ldots$ est un opérateur du type **S**/**S** :

Définition 88. *Une* formule propositionnelle *de $\mathcal{L}^{\Box}$ est toute expression obtenue par la procédure suivante :*

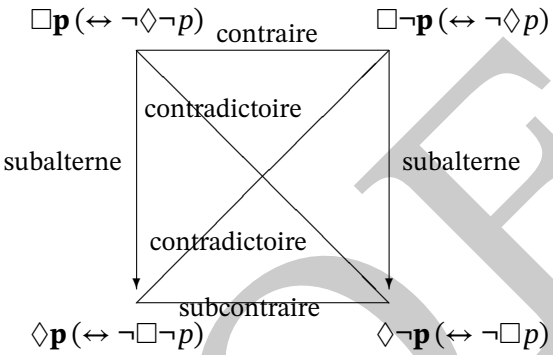
1. *Toute phrase atomique « p_i » ($i \in \mathbb{N}$) est une formule propositionnelle.*
2. *Si ϕ est une formule propositionnelle, alors $\ulcorner(\Box\phi)\urcorner$ et $\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$ sont des formules propositionnelles.*
3. *Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \vee \psi)\urcorner$ et $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ sont des formules propositionnelles.*
4. *Il n'y a pas d'autres formules propositionnelles.*

PROOF

Nous utiliserons les expressions « il es nécessaire que p », « nécessairement p » et « il est nécessairement vrai que p » comme équivalentes, même si « nécessairement » est parfois utilisé pour marquer les cas de modalité dite « de re » dans la logique modale des prédicats (cf. 317 ci-dessous).

Nous introduisons l'opérateur « $\Diamond \ldots$ » comme abréviation pour « $\neg\Box\neg \ldots$ » et ainsi établissons les équivalences suivantes par définition :

$$\begin{aligned} \neg\Diamond\phi &\iff \Box\neg\phi \\ \Diamond\neg\phi &\iff \neg\Box\phi \\ \neg\Diamond\neg\phi &\iff \Box\phi \end{aligned}$$



L'idée de base de la sémantique pour la logique modale est que nous relativisons la notion de vérité à ce qu'on appelle normalement un « monde possible », un point d'évaluation autre que le monde comme il est, le monde dit « actuel ». Au lieu de dire de la phrase « il y a des cochons qui volent » qu'elle est fausse, nous dirons qu'elle est possiblement vraie, ainsi la distinguant de la phrase « $2 + 2 = 5$ », par exemple. Nous dirons qu'elle est vraie dans un monde possible, un scénario consistant, et que c'est parce que « il y a des cochons qui volent » est possiblement vrai, vrai dans un monde possible, que « il est possible qu'il y a des cochons qui volent » est une affirmation vraie sur notre monde actuel. Pour relativiser la vérité d'une phrase à un monde possible ou point d'évaluation, nous rajouterons un nom de ce dernier à nos affirmations de « validité » (du type « $\vDash \phi$ ») qui deviennent ainsi des affirmations des affirmations de « vérité par rapport à un monde » (du type « $w_1 \vDash \phi$ »). « $w_1 \vDash \phi$ » veut dire que *phi* décrit correctement (est vraie dans) le monde w_1.

Le système le plus simple (et le système le plus faible dit « normal ») de logique modale propositionnelle est le système **K**. Il consiste en une axiomatisation de la logique propositionnelle (comme l'est par exemple le calcul HC introduit en leçon 4, cf. p. 107) et un seul schéma d'axiomes modal :

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \tag{K}$$

(K) dit que je peux ‹ distribuer › l'opérateur de nécessité à travers une implication : s'il est nécessaire qu'une implication avec un antécédent nécessaire soit vraie, alors son conséquent obtient également avec nécessité. **K**, ainsi que toutes les systèmes modales normales, contient également (MP) et une nouvelle règle d'inférence appelée « règle de nécessitation » (Nec) :

$$\frac{\vdash \phi}{\vdash \ulcorner\Box\phi\urcorner}\ \text{Nec}$$

nous permet de passer de n'importe quel théorème « ϕ » à sa nécessitation $\ulcorner\Box\phi\urcorner$: nous pouvons toujours préfixer d'un opérateur de nécessité un théorème d'un système modale normale.

PROOF

Il est important de distinguer cette règle d'inférence, qui n'est applicable qu'à des *théorèmes* d'une phrase de la forme « $p \to \Box p$ ». Si une telle phrase était dérivable dans un système modal, ce système modal serait trivialisé : chaque phrase impliquerait sa nécessitation, et (avec une instanciation de (K)) la nécessitation de sa nécessitation, et ainsi de suite. Parce que Nec est une règle d'inférence des systèmes modales normales et que « $p \to \Box p$ » n'en est pas un théorème, que nous n'avons pas de théorème de déduction pour ces systèmes :

Dans le nouveau calcul **K**, nous construisons des preuves de la même manière que dans HC.

Voici par exemple une preuve de « $\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)$ » :

(1)	$\mathbf{K} \vdash (p \wedge q) \to p$	$\mathbf{H_8}$
(2)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \to p)$	Nec de (1)
(3)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \to p) \to (\Box(p \wedge q) \to \Box p)$	**K**
(4)	$\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \to \Box p$	(MP) de (2) et (3)
(5)	$\mathbf{K} \vdash (p \wedge q) \to q$	$\mathbf{H_9}$
(6)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \to q)$	Nec de (5)
(7)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \to q) \to (\Box(p \wedge q) \to \Box q)$	**K**
(8)	$\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \to \Box q$	(MP) de (6) et (7)
(9)	$\mathbf{K} \vdash (\Box(p \wedge q) \to \Box p) \to ((\Box(p \wedge q) \to \Box q) \to (\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)))$	$\mathbf{H_{10}}$
(10)	$\mathbf{K} \vdash (\Box(p \wedge q) \to \Box q) \to (\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q))$	(MP) de (9) et (4)
(11)	$\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)$	(MP) de (10) et (8)

D'autres théorèmes de **K** sont par exemple :

(i) « $(\Box p \wedge \Box q) \to \Box(p \wedge q)$ »

(ii) « $(\Box p \vee \Box q) \to \Box(p \vee q)$ »

(iii) « $(\Diamond p \vee \Diamond q) \leftrightarrow \Diamond(p \vee q)$ »

(iv) « $\Diamond(p \wedge q) \to (\Diamond p \wedge \Diamond q)$ »

Par contre, les suivants ne sont pas des théorèmes de **K** :

(i') « $\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$ »

(ii') « $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \to \Diamond(p \wedge q)$ »

(iii') « $\Box p \to p$ »

14.2 Sémantique de la logique modale propositionnelle

L'analogie entre l'opérateur de nécessité et le quantificateur universel (et l'analogie correspondante entre l'opérateur de possibilité et le quantificateur existentiel) nous donne la clef pour la sémantique de la logique modale, qui a été introduite par Saul Kripke (Kripke, 1959, 1963a,b, 1965).

PROOF

Comme pour la logique des prédicats, nous développons la sémantique de la logique modale propositionnelle en deux étapes : la première notion détermine ‹ l'univers modal › de différents ‹ mondes possibles ›, la deuxième fournit une interprétation des phrases simples (relative à un monde possible).

Définition 89. *Un* cadre *est une paire $\langle W, R\rangle$ d'un ensemble non vide W, dont les membres sont appelés « mondes possibles » et une relation binaire R dite « d'accessibilité » entre ces mondes possibles.*

Définition 90. *Un* modèle *est un triple $\langle W, R, V\rangle$ consistant en un cadre $\langle W, R\rangle$ et en une fonction $V : \mathsf{Form}(\mathcal{L}^{\Box}) \times W \to \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$ (appelée « valuation ») qui assigne à toute formule et tout monde possible une valeur de vérité satisfaisant les conditions suivantes :*

I1 *Si ϕ est une phrase atomique « p » et $w \in W$, soit $V(\phi, w) := \mathbf{v}$, soit $V(\phi, w) := \mathbf{f}$*

I2 $$V(\neg\phi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & V(\phi, w) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & V(\phi, w) = \mathbf{v} \end{cases}$$

I3 $$V(\phi \wedge \psi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & V(\phi, w) = \mathbf{v} \textit{ et } V(\psi, w) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & V(\phi, w) = \mathbf{f} \textit{ ou } V(\psi, w) = \mathbf{f} \end{cases}$$

I4 $$V(\phi \vee \psi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & V(\phi, w) = \mathbf{v} \textit{ ou } V(\psi, w) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & V(\phi, w) = \mathbf{f} \textit{ et } V(\psi, w) = \mathbf{f} \end{cases}$$

I5 $$V(\phi \to \psi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & V(\phi, w) = \mathbf{f} \textit{ou } V(\psi, w) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & V(\phi, w) = \mathbf{v} \textit{ et } V(\psi, w) = \mathbf{f} \end{cases}$$

I6 $$V(\phi \leftrightarrow \psi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & V(\phi, w) = V(\psi, w) \\ \mathbf{f} & V(\phi, w) \neq V(\psi, w) \end{cases}$$

I7 $$V(\Box\phi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & \forall v(Rwv \to V(\phi, v) = \mathbf{v}) \\ \mathbf{f} & \exists v(Rwv \wedge V(\phi, v) = \mathbf{f}) \end{cases}$$

I1 relativise l'attribution des valeurs de vérités à un monde possible spécifique : dans différents mondes possibles, les phrases simples recevront différentes valeurs de vérités. En ce sens, les mondes possibles correspondent aux différentes lignes dans une table de vérité.

I2 à **I6** assurent que l'interprétation des connecteurs propositionnelles est consistante avec leurs tables de vérité : nos mondes seront « logiquement possibles » dans le sens qu'il respectent la sémantique standard des connecteurs propositionnels.

I7 est la condition qui interprète l'opérateur de nécessité : une phrase est nécessaire dans un monde w si et seulement si elle est vraie dans tous les mondes qui se trouvent en relation R avec w. Étant donné l'interdéfinissabilité des opérateurs modaux ($\ulcorner\Box\phi\urcorner \Leftrightarrow \ulcorner\neg\Diamond\neg\phi\urcorner$), il est facile de voir que **I7** est équivalent à la condition suivante pour l'opérateur de possibilité :

I7* $$V(\Diamond\phi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & \exists v(Rwv \wedge V(\phi, v) = \mathbf{v}) \\ \mathbf{f} & \forall v(Rwv \to V(\phi, v) = \mathbf{f}) \end{cases}$$

Nous adoptons une définition relationnelle de validité :

Définition 91. *Une formule propositionnelle ϕ de $\mathcal{L}^{\Box}$ est* valide sur un cadre *$\langle W, R\rangle$ si et seulement si pour tout modèle $\langle W, R, I\rangle$ et pour tout monde possible $w \in W$ du cadre, alors $V(\phi, w) = \mathbf{v}$.*

Nous avons un premier théorème de correction :

PROOF

Théorème 92 (Correction de **K**). *Tout théorème de* **K** *est valide sur tous les cadres.*

Démonstration. A VENIR. □

Nous avons remarqué (cf. (iii') ci-dessus) que « $\Box p \to p$ » n'est pas un théorème de **K**. Si nous l'ajoutons comme axiome

$$\Box p \to p \tag{T}$$

à **K**, nous obtenons un système plus fort, appelé **T**. Voici quelques théorèmes de **T** :

(i) « $p \to \Diamond p$ »
(ii) « $\Diamond(p \to \Box p)$ »

Pour certaines interprétations de « $\Box$ », l'axiome (T) est trop fort : bien qu'adéquat pour l'interprétation dite « aléthique » de « $\Box$ » comme « Nécessairement ... », il exclut une interprétation comme « il est obligatoire que ... ». Pour cette interprétation dite « déontique », un système plus faible est plus adéquat, ayant comme seul axiome supplémentaire à (K) le suivant :

$$\Box p \to \Diamond p \tag{D}$$

Lu « déontiquement », (D) dit que ce qui est obligatoire est permis : s'il est obligatoire de faire quelque chose, il n'est pas interdit de ne pas le faire.

Pour les preuves de correction des deux systèmes **T** et **D**, nous devons considérer de plus près la relation R dans notre définition d'un cadre. Dans le cas de **K**, aucune restriction sur R n'a été adoptée : n'importe quelle interprétation de R sur W nous donne un cadre sur lequel tout théorème de **K** est valide.

L'axiome (T), par contre, peut être lu comme restriction aux relations d'accessibilité : il force cette relation à être réflexive : si w est en relation avec n'importe quel autre monde v, alors forcément w est en relation avec lui-même.

Théorème 93 (Correction de **T**). *Si* $\langle W, R\rangle$ *est tel que* $\forall w \forall v\, (Rwv \to Rww)$*, alors tout théorème de* **T** *est valide sur* $\langle W, R\rangle$.

Pour la correction de **D**, nous remarquons que l'axiome (D) ne peut être vrai dans un monde que si ce monde est en relation R avec au moins un monde. Autrement dit, (D) sera faux dans un monde si ce monde est une impasse par rapport à R. Nous appelons un cadre « sériel » si sa relation d'accessibilité n'a pas d'impasses. Prouvons la correction de **D** par rapport aux cadres sériels :

Théorème 94 (Correction de **D**). *Si* $\langle W, R\rangle$ *est tel que* $\forall w \exists v (Rwv)$*, alors tout théorème de* **D** *est valide sur* $\langle W, R\rangle$.

Notre définition du langage $\mathcal{L}^{\Box}$ permet des modalités itérées comme dans « $\Box\Box p$ », « $\Box\Diamond p$ » et « $\Box(p \to \Diamond q)$ ». Quelques-unes de ces formules propositionnelles sont des théorèmes des logiques modales déjà introduites :

(i) « $(\Diamond\Box p \vee \Diamond q) \leftrightarrow \Diamond(\Box p \vee q)$ » est un théorème de **K**.
(ii) « $\Box\Box p \to \Box p$ » est un théorème de **T**.
(iii) « $\Box\Box p \to \Diamond\Box p$ » est un théorème de **D**.

D'autres, par contre, ne le sont pas :

PROOF

(i') « $\Box p \to \Box\Box p$ » n'est pas un théorème de **T** (ni, par conséquent, de **D** ni de **K**).
(ii') « $\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$ » n'est pas un théorème de **T** (ni, par conséquent, de **D** ni de **K**).

Si nous rajoutons (i') à **T**, nous obtenons la logique **S4**, caractérisée par le schéma d'axiomes suivant :

$$\Box p \to \Box\Box p \tag{4}$$

En voici quelques théorèmes :
(i) « $\Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$ »
(ii) « $\Box\Box p \leftrightarrow \Box p$ »
(iii) « $\Diamond\Box\Diamond p \to \Diamond p$ »
(iv) « $\Box\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ »
(v) « $\Box\Diamond\Box\Diamond p \leftrightarrow \Box\Diamond p$ »
(vi) « $\Diamond\Box\Diamond\Box p \leftrightarrow \Diamond\Box p$ »
Ces théorèmes nous montrent qu'en **S4**, toute phrase modale est équivalente à l'une des formes suivantes :
(i) une phrase sans opérateur modale
(ii) une phrase de la forme « $\Box$ ... » où « ... » ne contient pas d'opérateur modale ;
(iii) une phrase de la forme « $\Diamond$ ... » où « ... » ne contient pas d'opérateur modale ;
(iv) une phrase de la forme « $\Box\Diamond$ ... » où « ... » ne contient pas d'opérateur modale ;
(v) une phrase de la forme « $\Diamond\Box$ ... » où « ... » ne contient pas d'opérateur modale ;
(vi) une phrase de la forme « $\Box\Diamond\Box$ ... » où « ... » ne contient pas d'opérateur modale ;
(vii) une phrase de la forme « $\Diamond\Box\Diamond$ ... » où « ... » ne contient pas d'opérateur modale.

Pour la preuve de correction, nous notons d'abord qu'un cadre sur lequel tous les théorèmes de **S4** sont valides doit être sériel : puisque **S4** contient (D), un cadre avec une impasse servirait comme contre-exemple à un théorème. En plus, **S4** contient également **T** – la relation d'accessibilité doit donc aussi être réflexive ; elle serait en conséquence automatiquement sérielle. Pour valider tous les théorèmes de **S4**, la relation d'accessibilité doit non seulement être réflexive, mais aussi transitive :

Théorème 95 (Correction de **S4**). *Si* $\langle W, R\rangle$ *est tel que* $\forall w\forall v(Rwv \to Rww)$ *et* $\forall w\forall v\forall u((Rwv \wedge Rvu) \to Rwu)$*, alors tout théorème de* **S4** *est valide sur* $\langle W, R\rangle$.

Bien que « $\Box p \to \Box\Box p$ » soit un théorème de **S4**, « $\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$ » ne l'est pas. En ajoutant

$$\neg\Box p \to \Box\neg\Box p \tag{5}$$

à **T**, nous obtenons un système plus fort que **S4**, appelé **S5**. Dans **S5**, les opérateurs modaux distribuent plus librement sur la disjonction et la conjonction, puisque tous les suivants sont des théorèmes de **S5** :
(i) « $(\Box p \vee \Box q) \leftrightarrow \Box(p \vee \Box q)$ »
(ii) « $(\Box p \vee \Diamond q) \leftrightarrow \Box(p \vee \Diamond q)$ »
(iii) « $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \leftrightarrow \Diamond(p \vee \Diamond q)$ »
(iv) « $(\Diamond p \wedge \Box q) \leftrightarrow \Diamond(p \vee \Box q)$ »
Grâce à ces quatre théorèmes de ‹ distribution ›, toute modalité itérée en **S5** se réduit à une modalité simple – dans toute paire de modalités, nous pouvons effacer la première :
(v) « $\Box\Box p \leftrightarrow \Box p$ »

PROOF

(v) « $\Box\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$ »
(v) « $\Diamond\Box p \leftrightarrow \Box p$ »
(v) « $\Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$ »

Comme (4) est un théorème de **S5**, **S4** est contenue dans **S5**. La relation d'accessibilité d'un cadre sur lequel (5) est valide doit donc être réflexive et transitive. En outre, elle doit être symétrique, donc ce qu'on appelle une « relation d'équivalence » :

Théorème 96 (Correction de **S5**). *Si* $\langle W, R\rangle$ *est tel que* $\forall w\forall v(Rwv \rightarrow Rww)$, $\forall w\forall v\forall u((Rwv \wedge Rvu) \rightarrow Rwu)$, *et* $\forall w\forall v(Rwv \rightarrow Rvw)$ *alors tout théorème de* **S5** *est valide sur* $\langle W, R\rangle$.

En somme, nous avons les correspondances suivantes :

système	axiomes	cadres
K	(K)	tous
D	(K)+(D)	sériels
T	(K)+(T)	réflexifs
S4	(K)+(T)+(4)	réflexifs et transitifs
S5	(K)+(T)+(5)	réflexifs, transitives et symétriques

14.3 La théorie de la référence directe et la sémantique bidimensionnelle

La théorie de la référence directe est née dans les discussions sur l'interprétation de la logique modale dans les années cinquante et soixante et a trouvé son expression canonique dans une série de conférences de Saul Kripke (Kripke, 1972).[1] Elle maintient les thèses suivantes :

- Il y a des expressions directement référentielles, qui ne désignent pas leur référents par l'intermédiaire d'une composante descriptive de leur significations (leur « sens »).
- Les exemples paradigmatiques d'expressions directement référentielles sont les noms propres (dans le sens contemporain, à distinguer des descriptions définies).
- D'autres exemples sont les « noms »désignant les espèces naturelles, comme « eau », « cheval »et « or ».
- Les expressions directement référentielles désignent leurs référents avec nécessité : il n'est pas possible, par exemple, que l'eau soit quelque chose de différent de H_2O.
- Mais cela ne veut pas dire que « eau = H_2O »soit a priori. Il faut reconnaître l'existence des nécessités a posteriori.

La reconstruction du paradoxe de Frege par Kit Fine :

différence sémantique : les deux phrases sont sémantiquement différentes
compositionnalité : si les phrases sont sémantiquement différentes, alors les deux noms propres sont sémantiquement différents
lien référentiel : si les deux noms propres sont sémantiquement différents, ils sont référentiellement différents

[1] Pour des introductions générales à la théorie de Kripke, voir (Salmon, 1982, 1986; Devitt and Sterelny, 1987; Devitt, 1981).

PROOF

identité référentielle : les deux noms propres ne sont pas référentiellement différents

Les quatre propositions sont contradictoires : il s'ensuit de (1), (2) et (3) que les deux noms propres sont référentiellement différents, ce qui contredit (4). Il faut donc rejeter une des prémisses. (1) s'ensuit de deux autres prémisses :

1a différence cognitive : les deux phrases sont cognitivement différentes

1b lien cognitif : si les deux phrases sont cognitivement différentes, alors elles sont sémantiquement différentes

Les fregéens rejettent la prémisse (3), acceptant des différences sémantiques entre des noms propres qui ne sont pas des différences au niveau de leurs références.

Cette position est problématique parce qu'elle nous oblige à dire, dans des cas concrets, quelle est la différence sémantique qui n'est pas une différence référentielle. Il semble possible de donner le même sens aux deux noms propres et de toujours garder une différence cognitive.

Les partisans de la théorie de la référence directe rejettent le lien cognitif (1b). Mais le rejet de (1) semble contre-intuitif, puisqu'une différence sémantique semble constituer l'explication la plus plausible de la différence cognitive qui est elle-même incontestable.

Examinons de plus de près la prémisse de compositionnalité (2). Elle s'ensuit de deux autres principes :

3a compositionnalité propre : si les deux phrases sont sémantiquement différentes, alors les deux paires de noms sont sémantiquement différentes

3b le principe de l'intrinsèque des relations sémantiques : si les deux paires de noms propres sont sémantiquement différents, alors les deux noms propres le sont également

Il est possible de maintenir (3a) tout en niant (3b). Ceci nous permet de rejeter (3) sans pour autant rejeter toute forme de compositionnalité. Le rejet de (3b) caractérise la théorie de Fine qu'il appelle le « relationalisme sémantique ».

Nous remarquons qu'une forme du paradoxe de Frege apparaît déjà avec les variables. Comparons « $x = x$ » et « $x = y$ ». L'une des deux phrases est un théorème de tout système logique contenant un signe d'identité. La deuxième phrase ne peut pas être un théorème d'un système qui accepte l'existence de plus d'un seul objet. Le paradoxe consiste en la contradiction entre les prémisses suivantes :

1. principe d'identité : « x » et « y » ont le même rôle sémantique
2. principe de différence : les deux paires de variables ⟨ « x », « y » ⟩ et ⟨ « x », « x » ⟩ ont des rôles sémantiques différents
3. principe de l'intrinsèque : si les deux paires de variables ⟨ « x », « y » ⟩ et ⟨ « x », « x » ⟩ ont des rôles sémantiques différents alors « x » et « y » ne peuvent pas avoir le même rôle sémantique

Il est résolu en rejétant le principe que les relations sémantiques sont des relations intrinsèques.

Les indexicaux sont des expressions dont la dénotation varie avec les circonstances de leur énonciation. Il y a des indexicaux personnels (« moi », « je », « nous »), géographiques (« ici », « là-bas »), temporels (« maintenant », « aujourd'hui »). Parfois on inclut dans cette liste les démonstratifs comme « cette table-là », « cet homme-ci », « ce truc-là ». Les indexicaux posent des problèmes pour la sémantique à plusieurs niveaux :

(i) Est-ce qu'ils ont un sens ? Et si oui, lequel ?
(ii) Qu'est-ce qui est constant dans leur usage ?
(iii) Comment décrire leur fonctionnement ?

Kaplan et Perry ont développé une théorie selon laquelle les expressions indexicales ont un *caractère*

PROOF

qui est constant dans leur usage et qui, appliqué à un contexte d'application, détermine leur référent.

Pour voir l'importance de la première question (i), considérons les phrases suivantes :

Un lion violent s'approche rapidement de *moi*. (E1)

Un lion violent s'approche rapidement de *Philipp Blum*. (E2)

Un lion violent s'approche rapidement de *la personne qui est en train de parler*. (E3)

Si je pense (E1), cela me fait courir. Si je pense (E2) ou (E3), je ne me mets pas forcément à courir. Pour voir l'importance de la deuxième question (ii), notons qu'avec

J'ai faim. (E4)

Sam et Maria disent, *dans un certain sens*, la même chose. Il est, par exemple, possible de répondre aux deux par « Moi aussi » et de dire ainsi qu'on a faim. *Dans un autre sens*, cependant, ils disent différentes choses, parce que Maria (si elle le prononce), mais non pas Sam, prendra (E4) comme raison pour aller manger.

PROOF

PROOF

dialectica *series of anthologies*

15 Les limites du formalisme

15.1 Le Néo-Fregéanisme

Nous avons vu, à la p. 95, que le programme logiciste de Frege, annoncé dans ses « Fondements de l'arithmétique » (1884),[1] et mis en œuvre dans les « Lois fondamentales de l'arithmétique » (1893 ; 1903)[2]

15.2 L'incomplétude des systèmes formels : les théorèmes de Gödel

Voici un exemple simplifié de ce que signifie le théorème de Gödel, autrement dit l'insuffisance des procédés mécaniques de la logique dans le raisonnement mathématique. Supposons qu'on ait pu construire une machine qui, étant donnée une formule, répond « vrai » si elle est capable de prouver que la formule est vraie, « faux » si elle est capable de prouver que la formule est fausse, et rien du tout sinon. Soumettons lui la phrase : « La machine ne répond pas « vrai » à cette phrase »

La machine ne peut pas répondre « vrai », car si elle répond « vrai », la phrase est fausse, et la machine ne donne que des réponses justes.

La machine ne peut pas répondre « faux », car si elle répond « faux », la phrase est vraie, et la machine ne donne que des réponses justes.

Conclusion : la machine ne dit rien. Et nous, alors, nous pouvons affirmer que donc la phrase est vraie ! Ce que la machine ne peut pas faire. On ne peut donc pas résumer les découvertes mathématiques à des procédés purement mécaniques !

Une autre version, toujours informelle, est la suivante. Tout système consistant dans lequel nous pouvons parler des nombres naturelles, est incomplet. Car nous pouvons formuler, dans un tel système, une phrase qui dit d'elle même qu'elle ne peut pas être prouvée :

(P) n'est pas prouvable. (P)

Le raisonnement se fait comme suit :

- Si la phrase est fausse, alors elle est prouvable est le système est incorrect parce qu'il prouve une phrase fausse.
- Si la phrase est vraie, alors elle n'est pas prouvable et alors le système ne prouve pas toutes les phrases vraies.

L'essentiel de la preuve de Gödel de l'incomplétude de l'arithmétique consist en un codage de la syntaxe, qui permet au système axiomatique de parler de ses propres phrases, et de dire d'elles qu'elles sont prouvables ou pas.

à venir

[1] Édition moderne : 1961, traduction française par Claude Imbert : 1969 Parmi les traduction anglaises, utilisez celle de J.-L. Austin (1950 ; 1980) et non pas celle de D. Jacquette (2007), cf. Kremer (2008) sur cette dernière.

[2] Éditions modernes : 1966a ; 1966b et 1998, traduction anglaise par M. Furth (1964 et par Ph. Ebert et M. Rossberg : 2013

PROOF

15.3 La logique de prouvabilité

Le système de la logique de prouvabilité est appelé **GL** (après Gödel et Löb) et consiste en **K** avec le schéma d'axiomes suivant :

$$\Box(\Box\phi \to \phi) \to \Box\phi \tag{GL}$$

En voici quelques propriétés :

(i) « $\Box\phi \to \Box\Box\phi$ » est un théorème de **GL**.
(ii) « $\Box\phi \to \phi$ » n'est pas un théorème de **GL**
(iii) « $\Box(\Box p \to \phi) \leftrightarrow \Box\phi$ » est un théorème de **GL**.
(iv) « $((\Box\phi \to \phi) \wedge \Box(\Box\phi \to \phi)) \to \phi$ » est un théorème de **GL**.
(v) « $\Box\Diamond\phi \leftrightarrow \Box(\psi \wedge \neg\psi)$ » est un théorème de **GL**.

Si nous abrégons par « **Bew** (ϕ) » l'assertion que ϕ peut être prouvé dans une formalisation de l'arithmétique de Peano **PA**, nous pouvons prouver en métamathématiques les assertions suivantes :

(i) Si nous avons **PA** $\vdash \phi$, nous pouvons prouver **PA** $\vdash$ **Bew** (ϕ).
(ii) **PA** $\vdash$ **Bew**$(\ulcorner\phi \to \psi\urcorner) \to$ (**Bew**$(\phi) \to$ **Bew**(ψ)

« **Bew** ... », interprété comme opérateur modal, est donc au moins aussi fort que le système **K**.

Dans sa preuve de l'incomplétude de l'arithmétique, Gödel montrait le 'lemme diagonal' suivant :

(iii) Si $F(x)$ est un prédicat du langage de **PA** avec aucune autre variable libre que x, il existe une phrase ϕ de ce langage tel que **PA** $\vdash \phi \leftrightarrow F(\ulcorner\phi\urcorner)$.

Il s'ensuit le premier théorème d'incomplétude :

Théorème 97 (Incomplétude de l'arithmétique)**.** *Si* **PA** *est consistant, elle est incomplète : il existe une phrase qui peut être formulée dans son langage mais qui est indécidable (ne peut ni être prouvé ni être déprouvé).*

Démonstration. « **Bew**(x) » est un prédicat avec une seule variable libre, donc il existe une phrase tel que **PA** $\vdash p \leftrightarrow \neg$**Bew**$(\ulcorner p\urcorner)$. Si cette phrase était prouvable **PA** $\vdash p$, alors nous aurions par MP que **PA** $\vdash \neg$**Bew**$(\ulcorner p\urcorner)$, ce qui contredit **PA** $\vdash$ **Bew**$(\ulcorner p\urcorner)$ que nous obtenons de (i). Si **PA** ne prouve pas de contradiction, « p » n'est pas prouvable et alors « **Bew**$(\ulcorner p\urcorner)$ » est faux. Si « $\neg p$ » était prouvable, alors « **Bew**$(\ulcorner p\urcorner)$ » le serait aussi (par la direction de droite à gauche du lemme diagonal) : donc une fausseté pourrait être prouvé. Donc ni **PA** $\vdash p$ ni **PA** $\vdash \neg p$. □

M.H. Löb a prouvé en 1954 :

(iv) Si **PA** $\vdash$ **Bew**$(\phi) \to \phi$, alors **PA** $\vdash \phi$.

On obtient le deuxième théorème d'incomplétude comme conséquence immédiate :

Théorème 98 (Deuxième théorème d'incomplétude)**.** *Si* **PA** *est consistant, alors* **PA** $\nvdash \neg$**Bew**$(\ulcorner\phi \wedge \neg\phi\urcorner)$.

Démonstration. Si **PA** prouvait sa propre consistance, **PA** $\vdash \neg$**Bew**$(\ulcorner p \wedge \neg p\urcorner)$, alors **PA** $\vdash$ **Bew**$(\ulcorner p \wedge \neg p\urcorner) \to (p \wedge \neg p)$, d'où s'ensuit par le théorème de Löb que **PA** $\vdash p \wedge \neg p$, ce qui le rendait inconsistant. □

PROOF

16 Exercices

16.1 Formalisation, validité

Question 1.1 (2 points) Formalisez le discours suivant :

> Si les États-Unis n'attaquent pas l'Iran et que le prix de l'essence augmente, la Syrie attaque Israël. Si la Syrie n'attaque pas Israël, le Liban le fera. Si les États-Unis n'attaquent pas l'Iran, le prix de l'essence augmente ou la Syrie attaque Israël. Si la Syrie attaque Israël, alors les États-Unis attaquent l'Iran.

(Solution à la p. 353)

Question 1.2 (1 point) Au cours d'une discussion, Sam me dit que mon argument est faux. En me disant cela, Sam se trompe. Pourquoi ?

(Solution à la p. 353)

Question 1.3 (1 point) Sam sait que si Maria aime Paul, alors elle sera déçue. Joséphine, la soeur de Maria, connaît les sentiments de Maria pour Paul. Joséphine aime Paul, et pour cette raison elle lui ment à chaque fois qu'il lui demande quels sont les sentiments de Maria à son égard. Paul a posé la question à Joséphine. Cette dernière lui a répondu que Maria ne l'aime pas.
Sans chercher à formaliser ces énoncés, déterminez si Maria sera déçue ou non.

(Solution à la p. 353)

Question 1.4 (4 points) Lesquels des arguments suivants sont convaincants et valides (tels qu'il est impossible que les prémisses sont vraies et la conclusion fausse)?

(a) Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage ; je serai heureux et sage ; alors j'étudie la logique.
(b) Napoléon était allemand ; les allemands sont européens ; donc Napoléon était européen.
(c) Napoléon était allemand ; les allemands sont asiatiques ; donc Napoléon était asiatique.
(d) Napoléon était français ; tous les français sont européens ; donc Hitler était Autrichien.
(e) Si Napoléon avait était chinois, alors il aurait été asiatique ; Napoléon n'était pas asiatique ; donc il n'était pas chinois.
(f) Le réalisme naïf nous amène à la physique et la physique, si elle est vraie, montre que le réalisme naïf est faux. Donc le réalisme naïf, s'il est vrai, est faux ; alors il est faux (Russell, *Inquiry into Meaning and Truth*).
(g) « Dieu existe. » – « Pourquoi ? » – « La Bible le dit. » – « Mais pourquoi penses-tu que tout ce qui est dans la Bible est vrai ? » – « Parce que la Bible est la parole de Dieu. » – « Et comment sais-tu cela ? » – « C'est ce qui est dit dans la Bible. »

(Solution à la p. 354)

Question 1.5 (2 points) En respectant la convention qui veut que l'on forme le nom d'une expression en plaçant ce mot entre guillemets (et selon la fiction qu'il n'y a pas d'autre usage des guillemets), lesquelles des phrases suivantes expriment des affirmations vraies ?

PROOF

(a) L'*Illiade* a originalement été écrite en français.
(b) « L'*Iliade* » est un poème épique.
(c) Soit l'expression « philosophie » commence par des guillemets, soit « « philosophie » » commence par la lettre « p ».
(d) 2+2=4 est une vérité mathématique.
(e) « Berne » et « la capitale de la Suisse » mentionnent la même ville.
(f) « Le 45ème président des États-Unis » est « le mari de Melania Trump ».
(g) La phrase qui précède ne parle pas de Donald Trump.
(h) La phrase qui précède ne parle pas de Donald Trump.

(Solution à la p. 355)

Question 1.6 (2 points) Mettez les guillemets nécessaires pour éviter que le résultat soit faux ou non sensé à cause d'un mauvais usage des guillemets :

(a) Même si x est la 24ème lettre de l'alphabet, quelques savants ont dit que x est l'inconnu.
(b) Bien que Aristote soit un nom d'Aristote et que Aristote soit un nom d'Aristote, Aristote n'est pas un nom, c'est un homme.
(c) Philipp est mon nom et bien que je sache ce qu'est la philosophie, je n'ai jamais compris ce que les gens veulent dire par philosophie.
(d) Italo Svevo est un pseudonyme de Ettore Schmitz.
(e) Je m'appelle Philipp.
(f) Dans la langue française,
n'est-il pas amusant de constater que
mot est bien un mot
que nom est un mot et un nom
que adjectif est un mot, un nom et un adjectif
tandis qu'adverbe n'est pas un adverbe

(Solution à la p. 355)

Question 1.7 (1 point) Cent politiciens sont réunis dans une salle. Chacun est soit honnête soit corrompu, mais personne n'est les deux. Nous savons les faits suivants :

1. Au moins un politicien est honnête.
2. Pour toute paire de politiciens dans la salle, au moins un d'entre eux est corrompu.

Pouvons-nous conclure de ces informations combien des politiciens sont honnêtes et combien sont corrompus ? Si oui, combien le sont-ils ?

(Solution à la p. 356)

Question 1.8 (3 points) Utilisez la distinction entre la sémantique et la pragmatique pour expliquer la différence entre la première et la deuxième assertion des trois paires suivantes :

1. « Il pleut, et elle fait une promenade. » et « Il pleut, mais elle fait une promenade. ».
2. « Il pleut, et il ne pleut pas. » et « Il pleut, et je ne crois pas qu'il pleut. ».
3. « Je sais que je ne sais rien. » et « Celui qui ne sait rien sait au moins ceci. ».

(Solution à la p. 356)

Question 1.9 (1 point) Décrivez deux différences fondamentales entre des langues naturelles et des langues formelles.

(Solution à la p. 357)

Question 1.10 (3 points) Est-ce que les arguments suivants sont valides ? Si oui, sont-ils *logique-*

PROOF

ment valides ?
(a) Tom est célibataire ou anarchiste. Il n'est pas anarchiste. Donc il est célibataire.
(b) Tom est célibataire ou végétarien. Il n'est pas végétarien. Donc il n'est pas marié.
(c) Tom est célibataire et banquier. Il n'est pas célibataire. Donc il n'est pas communiste.
(Solution à la p. 358)

16.2 Les connecteurs propositionnels

Question 2.1 (2 points) Une erreur s'est glissée dans chacune des tables de vérité suivantes. Laquelle ?
(a) Première table :

p	q	$\neg p$	$q \to \neg p$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

(b) Deuxième table :

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \vee r$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V

(Solution à la p. 358)

Question 2.2 (2 points) Faites des tables de vérité pour les phrases suivantes :
(a) « $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ » (solution : p. 359)
(b) « $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ » (solution : p. 359)

Question 2.3 (2 points) Supposons que « p » abrège « Maria aime Marc », que « q » abrège « Guillaume adore Chantal » et que « r » remplace « Laura apprécie Jean-Pascal ». Jean dit « $\neg(p \wedge \neg q)$ » et Janine dit « $p \wedge \neg(q \wedge \neg r)$ ». Si Jean et Janine ont les deux raison, qui a des sentiments positifs envers qui ? (Solution à la p. 360)

Question 2.4 (1 point) Si ces deux phrases sont vraies :
(i) Si Jean-Paul est à la maison, il est avec Jean-Pascal.
(ii) Si Jean-Paul est à la maison, il n'est pas avec Jean-Pascal.
Où est Jean-Paul ?

PROOF

(Solution à la p. 361)

Question 2.5 (4 points) Montrez que les phrases suivantes ont les mêmes tables de vérité :

(a) « $\neg p$ » et « $\neg\neg\neg p$ » (solution : p. 361)

(b) « $p \to q$ » et « $\neg p \vee q$ » (solution : p. 361)

(c) « $\neg(p \wedge q)$ » et « $\neg p \vee \neg q$ » (solution : p. 361)

(d) « $\neg(p \vee q)$ » et « $\neg p \wedge \neg q$ » (solution : p. 362)

Question 2.6 (2 points) Déterminez si « $((p \wedge q) \vee r) \leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$ » est une tautologie.

(Solution à la p. 362)

Question 2.7 (2 points) À partir de la table de vérité de « $\neg(p \to \neg q)$ », trouvez deux équivalences à cette phrase.

(Solution à la p. 362)

Question 2.8 (1 point) Trois hommes sont accusés d'un crimes. Ils font les assertion suivantes :

Jean-Maurice : « Je suis innocent. »

Jean-Philippe : « Jean-Baptiste est innocent. »

Jean-Baptiste : « Non, je ne le suis pas. »

Plus tard, deux ont confessé d'avoir menti. Qui a commis le crime ?

(Solution à la p. 362)

Question 2.9 (4 points) Considérez le discours politique suivant (cf. p. 325) :

> Si les États-Unis n'attaquent pas l'Iran et que le prix de l'essence augmente, la Syrie attaque Israël. Si la Syrie n'attaque pas Israël, le Liban le fera. Si les États-Unis n'attaquent pas l'Iran, le prix de l'essence augmente ou la Syrie attaque Israël. Si la Syrie attaque Israël, alors les États-Unis attaquent l'Iran.

Existe-t-il un discours plus court qui aurait la même table de vérité ? Si oui, lequel ? Quel serait le discours opposé (contradictoire) ?

(Solution à la p. 363)

16.3 Relations logiques et inférences logiques

Question 3.1 (2 points) Si possible, mettez les guillemets ou demi-crochets nécessaires pour que les phrases suivantes deviennent vraies (vous pouvez ignorer l'accord des pronoms) :[1]

(a) Marseille est au sud de Paris, mais Paris n'est pas au nord de Marseille.

(b) Le dernier mot de la solution optimale à la question (a) est Marseille.

(c) Le nom du dernier mot de la solution optimale à la question (a) est Marseille.

(d) Pour toute phrase ϕ, le dernier mot de le dernier mot de ϕ contient plus d'une syllabe contient plus d'une syllabe.

(e) La femme de Trump appelle Trump Trump.

(f) Il n'est pas le cas que la femme de Trump appelle Trump par le nom de Trump.

(g) Le dernier mot de (1g) est vulgaire.

(h) Le dernier mot de (1g) est vulgaire.

[1] Supposons également que le nom du président des États-Unis n'est pas vulgaire, même si peut-être il l'est. Nous parlons de la relation de satisfaction, entre un prédicat ou une phrase ouverte et une chose dont ce prédicat est vrai dans la section 9.3 de la leçon 9.

PROOF

(i) La première lettre de l'alphabet grec est α est satisfaite par un objet β seulement si β est identique à α.
(j) Pour toute phrase ϕ, ϕ implique $\neg\phi$ implique ϕ implique ϕ et $\neg\phi$.
(Solution à la p. 365)

Question 3.2 (1 point) Mettez les guillemets nécessaires pour que le *limerick* suivant devienne vrai :[2]

> According to W. Quine
> Whose views on quotation are fine,
> Boston names Boston,
> And Boston names Boston,
> But 9 doesn't designate 9.

(Solution à la p. 366)

Question 3.3 (2 points) Appelons une ligne du problème 1 « *incorrigible* » s'il n'y a aucune manière de mettre des guillemets et des crochets sans que le résultat devienne faux ou du non-sens. Il semble que non seulement (i) et (ii) sont vraies, mais aussi (iii) :
(i) (1g) est incorrigible.
(ii) (1h) n'est pas incorrigible.
(iii) (1g) est identique à (1h).
Mais au moins un de (i), (ii) et (iii) doit être faux. Autrement nous aurions une violation du principe que si x est identique à y, alors tout ce qui est vrai de x doit aussi être vrai de y. Lequel est faux ? Et pourquoi ?
(Solution à la p. 367)

Question 3.4 (5 points) Vérifiez la validité des schémas d'inférence suivants, en montrant que les implications matérielles correspondantes sont des tautologies :

(a) $\dfrac{\begin{array}{c}p \to q\\ q \to r\end{array}}{p \to r}$ transitivité (solution : p. 368)

(b) $\dfrac{\begin{array}{c}p \to r\\ q \to r\end{array}}{(p \vee q) \to r}$ augmentation$_1$ $\qquad \dfrac{p \to r}{(p \wedge q) \to r}$ augmentation$_2$ (solution : p. 368)

(c) $\dfrac{p \to \neg p}{\neg p}$ reductio$_1$ $\qquad \dfrac{\begin{array}{c}p \to q\\ p \to \neg q\end{array}}{\neg p}$ reductio$_2$ (solution : p. 369)

(d) $\dfrac{p \wedge q}{p}$ simplification (solution : p. 369)

(e) $\dfrac{\neg p}{p \to q}$ ex falso quodlibet (solution : p. 370)

(f) $\dfrac{q}{p \to q}$ verum sequitur ad quodlibet (solution : p. 370)

(g) $\dfrac{\begin{array}{c}p \to q\\ p\end{array}}{q}$ modus ponendo ponens (solution : p. 370)

[2] D'après Wikipédia, un limerick est « un poème humoristique, à l'origine en anglais, de 5 vers rimés (rimes *aabba*), de caractère souvent grivois, irrévérencieux ou irréligieux ».

PROOF

(h) $\dfrac{\begin{array}{l}p \to q\\ \neg q\end{array}}{\neg p}$ modus tollendo tollens (solution : p. 371)

(i) $\dfrac{\begin{array}{l}p \vee q\\ \neg q\end{array}}{p}$ modus tollendo ponens (solution : p. 371)

(j) $\dfrac{\begin{array}{l}p \mid q\\ p\end{array}}{\neg q}$ modus ponendo tollens (solution : p. 371)

(Nous définissions la « barre de Sheffer » (cf. les p. 80 et 92) ainsi : $\left(\begin{array}{cc||c} p & q & p|q \\ \hline V & V & F \\ V & F & V \\ F & V & V \\ F & F & V \end{array}\right)$)

Question 3.5 (3 points) Qu'est-ce qu'une tautologie ? Une contradiction ? Indiquez quels rapports simples il y a entre tautologies, contradictions et la négation.
(Solution à la p. 371)

Question 3.6 (2 points) Formulez les lois de distributivité et utilisez des tables de vérités pour montrer qu'elles sont correctes.
(Solution à la p. 372)

Question 3.7 (1 point) Utilisez une table de vérité pour trouver une équivalence à « $\neg p \to q$ » en utilisant uniquement la barre de Sheffer.
(Solution à la p. 373)

Question 3.8 (4 points) Supposons que les Lausannois disent toujours la vérité et que les Genevois mentent toujours, et que toute personne dans les exemple vient de exactement une de ces villes.

(a) Nous rencontrons une personne A qui dit de lui même et d'une autre personne B : « Soit je suis un Genevois soit B est un Lausannois. » Si nous supposons qu'il utilise la disjonction inclusive (c'est-à-dire celle définit par $V - V - V - F$), d'où sont A et B ?

(b) Nous rencontrons trois personnes, A, B et C, dont deux font les assertions suivantes :
A : « Nous sommes tous trois des Genevois ».
B : « Il y a exactement un Lausannois parmi nous ».
D'où sont-ils ?

(c) Encore une fois nous rencontrons un trio, A, B et C. A dit que B et C viennent de la même ville. Nous demandons alors à C : « A et B, viennent-ils de la même ville ? » Quelle sera sa réponse ?

(d) Supposons que A dit : « Soit je suis un Genevois, soit 2+2=5. » Qu'est-ce que nous pouvons en conclure ?

(Solution à la p. 373)

16.4 La méthode axiomatique

Question 4.1 (2 points) Insérez les concepts suivants dans une colonne du tableau : « formule bien formée », « tautologie », « validité » (la conclusion ne peut pas être fausse si les prémisses sont vraies), « règle d'inférence », « vérité », « actes de parole » (ce qui distingue les questions des promesses, ordres, etc.), « la différence entre « et » et « mais » » (le fait que le deuxième, mais pas le

PROOF

premier, indique un contraste), « vouloir dire » (comme dans « qu'a-t-elle voulu dire en secouant la tête ? »), « axiome », « preuve », « conséquence (sémantique) », « contexte ».

syntaxe	sémantique	pragmatique

(Solution à la p. 374)

Question 4.2 (2 points) Aristote, dans la *Métaphysique* Λ 9 dit :

> Soit l'intelligence divine pense, soit elle ne pense rien. Or si elle ne pense rien, elle est dans un état semblable au sommeil, mais c'est là chose contraire à sa dignité. Par ailleurs, si elle pense, alors soit elle se pense elle-même, soit elle pense quelque autre chose. Mais il est absurde qu'autre chose soit objet de sa pensée. Donc elle pense, et elle se pense elle-même.

Formalisez les quatre premières phrases à l'aide de quatre propositions simples, de manière à ce que la dernière phrase s'ensuive des quatre prémisses. Vous avez le droit d'utiliser les inférences dont vous avez démontrées la validité en réponse à la quatrième question de la troisième série d'exercices.
(Solution à la p. 375)

Question 4.3 (1 point) Une étudiante de logique rencontre quelqu'un de très intéressant sur une piste de danse. Elle lui demande : « J'ai une petite faveur à vous demander. Je vais faire une assertion. Tout ce que je demande c'est que si cette assertion est vraie, alors vous me donnez votre numéro de téléphone. » – La faveur lui a été accordé. – « Vous devez me promettre autre chose encore : si mon assertion est fausse, vous ne me donnez pas votre numéro de téléphone. » – La promesse a été donnée. L'étudiante fait alors son assertion et la personne très intéressante découvre que, pour tenir sa parole, elle doit donner à l'étudiante intelligente non pas son numéro de téléphone, mais plutôt un bisou ! Quelle pourrait être une assertion qui a de tels pouvoirs magiques ?
(Solution à la p. 376)

Question 4.4 (1 point) Si « ϕ » est un nom pour la proposition « Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage » et si ψ est la proposition « J'étudie la logique », quelle est la proposition désignée par $\ulcorner\phi\vee\neg\psi\urcorner$? Quelle est la proposition désignée par « « Je serai heureux et sage » est une conséquence logique de ϕ et de ψ » ?
(Solution à la p. 376)

Question 4.5 (2 points) Lesquelles des assertions suivantes sont vraies ?

(a) Aucune inférence valide n'a de conclusion fausse.
(b) Toute inférence ayant une conclusion vraie est valide.
(c) Toute inférence valide contient au moins une prémisse.
(d) Aucune inférence valide n'a que des prémisses vraies et une conclusion fausse.

PROOF

(e) Il y a des inférences valides qui n'ont que des prémisses vraies et une conclusion fausse.
(f) Toute inférence ayant des prémisses contradictoires est valide.
(Solution à la p. 377)

Question 4.6 (1 point) Considérez le connecteur binaire « $\downarrow$ » défini comme suit (cf. p. 55) :

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

On voit que « $p \downarrow q$ » est équivalent à « $\neg\phi \wedge \neg\psi$ ». Montrez de quelle manière il est possible d'ajouter ce connecteur à $\mathcal{L}$ et comment, dans ce nouveau langage, on peut définir « $\neg$ », « $\wedge$ », « $\vee$ », « $\rightarrow$ » et « $\leftrightarrow$ » en termes de « $\downarrow$ » (utilisez les lois de Morgan !).
(Solution à la p. 377)

Question 4.7 (1 point) Un problème de probabilité difficile : les instructeurs du camp de ski font un contrôle nocturne et retrouvent trois sacs de couchage fermés, avec deux personnes dans chacun. Ils savent que dans un des sacs se trouvent deux hommes, dans un autre deux femmes et dans un troisième un homme et une femme. Ils choisissent un sac à l'hasard, l'ouvrent et retrouvent un homme (l'autre personne étant toujours cachée). Quelle est la probabilité que l'autre personne dans le même sac soit également un homme ?
Le chef des instructeurs, Jean, raisonne comme-ci :

> La probabilité que l'autre personne dans ce sac-ci est également un homme est de 50%. Puisque nous avons déjà rencontré un homme dedans, ce sac ne peut pas être celui avec les deux femmes. Alors il doit être un des deux autres, l'un contenant, comme deuxième personne, un homme et l'autre une femme.

Jean, a-t-il raison ?
(Solution à la p. 378)

Question 4.8 (2 points) Montrez que l'ensemble de formules propositionnelles { « $\neg p \wedge q$ », « $p \wedge \neg q$ », « $p \rightarrow q$ », « $q \rightarrow p$ » } forme un carré d'opposition.
(Solution à la p. 378)

Question 4.9 (8 points) Montrez que les propositions suivantes sont des théorèmes de HC :
(a) « $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$ » (solution : p. 380)
(b) « $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ » (solution : p. 380)
(c) « $(p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ » (solution : p. 380)
(d) « $p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee r))$ » (solution : p. 380)

16.5 La méthode des arbres

Question 5.1 (2 points) Rappelons-nous des définitions formelles d'une tautologie, d'une contradiction, et d'une proposition satisfaisable.

PROOF

(a) Montrez (d'une manière informelle, mais explicite) qu'une formule propositionnelle ϕ est une tautologie si et seulement si $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ n'est pas satisfaisable.
(b) Montrez (d'une manière informelle, mais explicite) qu'une formule propositionnelle ϕ est satisfaisable si et seulement si $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ n'est pas une tautologie.

(Solution à la p. 381)

Question 5.2 (4 points) À l'aide l'aide de la méthode des arbres, prouvez :

(a) « $p \to \neg\neg p$ » (solution : p. 381)
(b) « $(p \to q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ » (solution : p. 382)
(c) « $(p \to \neg p) \to \neg p$ » (solution : p. 382)
(d) « $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$ » (solution : p. 382)

Question 5.3 (6 points) Soit « A » le nom d'une inférence :

(a) Si toutes les prémisses et la conclusion sont vraies, peut-on conclure que A est valide ou peut-on conclure que A est non valide ?
(b) Si toutes ses prémisses sont vraies mais la conclusion fausse, peut-on conclure que A est valide ou peut-on conclure que A est non valide ?
(c) Si au moins une de ses prémisses est fausse et sa conclusion vraie, peut-on conclure que A est valide ou peut-on conclure que A est non valide ?
(d) Si au moins une de ses prémisses est fausse et la conclusion est fausse, peut-on conclure que A est valide ou peut-on conclure que A est non valide ?
(e) Si ses prémisses sont consistantes avec sa conclusion, A peut-elle être non valide ?
(f) Si ses prémisses sont inconsistantes et sa conclusion fausse, A-elle peut être non valide ?
(g) Si sa seule prémisse est une vérité logique et sa conclusion vraie, A peut-elle être non valide ?
(h) Si ses prémisses sont consistantes entre elles, mais sa conclusion fausse, A peut-elle être valide ?
(i) Si sa conclusion est inconsistante avec ses prémisses, A peut-elle être valide ?
(j) Si sa conclusion est inconsistante avec ses prémisses, mais que les prémisses sont consistantes entre elles, A peut-elle être valide ?
(k) Si la négation de sa conclusion est consistante avec l'une de ses prémisses, A peut-elle être valide ?
(l) Si la négation de sa conclusion est inconsistante avec la négation de une de ses prémisses, A peut-elle être valide ?
(m) Si la négation de sa conclusion est inconsistante avec la négation de une de ses prémisses, et que A ne serait pas valide sans cette prémisse, A peut-elle être valide ?

(Solution à la p. 383)

Question 5.4 (4 points) À l'aide de la méthode des arbres, déterminez les valeurs de vérité des affirmations suivantes :

(a) « $\{(p \to q) \to r\,,\ \neg q \to \neg p\} \vDash r$ » (solution : p. 384)
(b) « $\{(p \vee \neg q) \wedge q\,,\ (p \vee ((r \to p) \wedge r)) \to r\} \vDash q \to r$ » (solution : p. 385)
(c) « $\{p \to q\,,\ p \to \neg q\} \vDash \neg p$ » (solution : p. 385)
(d) « $\{p \wedge (r \vee q)\,,\ \neg q \to \neg p\} \vDash p \wedge r$ » (solution : p. 386)

Question 5.5 (3 points) Supposons que les Lausannois disent toujours la vérité et que les Genevois mentent toujours, et qu'une famille n'a que des membres de la même ville.

(a) Deux frères d'une des deux villes ont été demandés s'ils étaient mariés. Ils ont répondu :
Edmond « Nous sommes les deux mariés. »
Maurice « Je ne suis pas marié. »

PROOF

Edmond, est-il marié ? Que dire de Maurice ?

(b) La même question a été posée à deux soeurs. Elles ont dit :
Marie « Nous sommes soit les deux mariées, soit les deux non mariées. »
Pascale « Je ne suis pas mariée. »
Qui est marié ?

(c) Cette fois, la même question a été posée à un troisième duo. L'aîné des deux frères n'a seulement dit qu'au moins un des deux était marié. Le record de ce que le cadet a dit a été perdu : soit il a dit qu'il était marié, soit il a dit qu'il n'était pas marié. Néanmois, leur interrogateur a pu inférer qui des deux était marié. Savez-vous le ?

(Solution à la p. 386)

Question 5.6 (1 points) Question de raisonnement hors-logique : problème probabiliste. Vous participez à une émission du type « Qui veut gagner des millions ? ». Il y a trois portes dans le studio, vous devez en choisir une. Vous savez que deux des portes sont vides, et que derrière la troisième se trouve le prix, un chameau. Vous ne savez pas derrière quelle porte se trouve le prix, mais le présentateur du jeux télévisé le sait. Vous choisissez une des portes à l'hasard, disons celle de gauche. Le présentateur choisit une des deux autres portes qu'il sait est vide, disons celle tout à droite, et il vous montre qu'elle est vide. Il vous offre le choix suivant :

> Vous pouvez soit rester avec votre choix du début et ouvrir la porte à gauche, soit encore changer votre choix et ouvrir la porte au milieu. (C)

Est-ce qu'il est rationnel de changer, et si oui, pourquoi, si non, pourquoi pas ? (Vous n'avez pas à mobiliser des outils logiques pour répondre à cette question, mais soyez aussi explicites que vous pouvez.)

(Solution à la p. 387)

16.6 La déduction naturelle

Question 6.1 (16 points) Démontrez les séquents suivants en utilisant les règles d'inférence de la déduction naturelle :

(a) « $(p \vee \neg q) \to p\,,\ \neg p \vdash \neg p \wedge q$ » (solution : p. 388)
(b) « $p \to (q \to r) \vdash (p \wedge q) \to r$ » (solution : p. 388)
(c) « $\vdash p \vee \neg p$ » (solution : p. 388)
(d) « $p \vee q\,,\ p \to r\,,\ q \to r \vdash r \vee s$ » (solution : p. 389)
(e) « $p \to (q \to r) \vdash (p \to q) \to (p \to r)$ » (solution : p. 389)
(f) « $p \vdash (\neg(q \to r) \to \neg p) \to (\neg r \to \neg q)$ » (solution : p. 389)
(g) « $(p \to q) \wedge (p \to r) \vdash p \to (q \wedge r)$ » (solution : p. 389)
(h) « $(p \to r) \wedge (q \to r) \vdash (p \vee q) \to r$ » (solution : p. 390)
(i) « $\neg p \to p \vdash p$ » (solution : p. 390)
(j) « $p \vee q \vdash q \vee p$ » (solution : p. 390)
(k) « $p \to q\,,\ \neg p \to q \vdash q$ » (solution : p. 390)
(l) « $p \wedge q\,,\ q \to r \vdash r \vee s$ » (solution : p. 391)
(m) « $\neg\neg p\,,\ p \to q \vdash q$ » (solution : p. 391)
(n) « $\neg(p \to q) \vdash p \to \neg q$ » (solution : p. 391)

PROOF

(o) « $q \to r \vdash (p \vee q) \to (p \vee r)$ » (solution : p. 391)
(p) « $p \vee q \vdash (p \to q) \to q$ » (solution : p. 392)

Question 6.2 (4 points) À l'aide de la méthode des arbres, déterminez si les phrases suivantes peuvent être prouvées :

(a) « $(p \wedge q \wedge ((q \wedge p) \to r)) \to (q \to r)$ » (solution : p. 392)
(b) « $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ » (solution : p. 392)
(c) « $((p \to (p \wedge q)) \wedge p) \to q$ » (solution : p. 393)
(d) « $((p \vee r) \wedge (q \to r) \wedge (p \to q)) \to (p \leftrightarrow q)$ » (solution : p. 393)

16.7 La logique propositionnelle

Question 7.1 (6 points) Formalisez les arguments suivants et prouvez, par la méthode de la déduction naturelle, qu'ils sont valides (ce qui est difficile dans le cas du troisième) :

(a) « Étant donné que l'embryon est une personne, il a droit à la vie. Si l'embryon a droit à la vie, alors il est faux que quelqu'un a le droit de lui enlever la vie. Cependant, si l'avortement est moral, quelqu'un a le droit de lui enlever la vie. Par conséquent, si l'embryon est une personne, l'avortement est immoral. » (solution : p. 393)
(b) « Si l'existence de Dieu est probable, alors la proposition qu'Il existe serait une proposition empirique. Si tel est le cas, alors il serait possible d'ajouter cette proposition à d'autres propositions empiriques pour en déduire des conclusions qui ne sont pas déductibles de ces autres propositions empiriques seules. Or cela n'est en fait pas possible. Il n'est donc pas le cas que l'existence de Dieu est probable. » (A.J. Ayer, « Language, Truth, and Logic ») (solution : p. 394)
(c) « Si je crois en Dieu, alors s'il existe, je gagne, et s'il n'existe pas, alors je ne perds pas. Si, à l'inverse, je ne crois pas en Dieu, alors, s'Il existe, je perds, et s'Il n'existe pas, alors je ne gagne pas. Il s'ensuit que si je crois, alors je gagnerai ou je ne perdrai pas, tandis que si je ne crois pas, alors je perdrai ou je ne gagnera pas. » (En faisant un pari sur l'existence de Dieu – « le pari de Pascal » ; notez que « perdre » n'est pas synonyme de « ne pas gagner ».) (solution : p. 394)

Question 7.2 (2 points) Vérifiez au moyen de tables de vérité si les formules suivantes sont des tautologies :

(a) « $p \to \neg\neg p$ » (solution : p. 395)
(b) « $(p \to (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (p \to r))$ » (solution : p. 395)
(c) « $\neg(\neg p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ » (solution : p. 396)
(d) « $(p \to \neg p) \leftrightarrow \neg p$ » (solution : p. 396)

Question 7.3 (2 points) Une autre difficulté de raisonnement probabiliste qui semble montrer que la probabilité de trouver l'une de trois boîtes, dont une contient un prix et dont deux sont vides, est de 1/2 !

> Appelons les trois boîtes A, B et C, supposons que vous avez choisi A et raisonnons sur le cas (certain) où au moins une des autres boîtes est vide. Il semble alors :
>
> **P1** Si B est vide, alors la probabilité que le prix est dans A est 1/2 (puisqu'il est alors soit dans A, soit dans C).
> **P2** Si C est vide, alors la probabilité que le prix est dans A est 1/2 (puisqu'il est alors soit dans A, soit dans B).

PROOF

> Nous remarquons, cependant, que la disjonction est exhaustive : comme il n'y a qu'un seul prix et trois boîtes, alors soit B soit C *doit* être vide ! Nous avons :
>
> **P3** Soit B est vide, soit C est vide.
>
> Nous concluons donc, par élimination de la disjonction (ou le « dilème constructif ») que la probabilité que le prix est dans A est de 1/2.

Où l'erreur se trouve-t-elle dans ce raisonnement ?
Vous recevrez un point supplémentaire pour montrer à quel point la situation de cet exemple diffère du cas des instructeurs de camp de ski (série 4, question 7, à la p. 378) et de la question de savoir s'il faut changer son choix dans la série télévisée (série 5, question 3, à la p. 386).
Vous recevrez encore un point supplémentaire si vous adaptez de manière intelligente la morale de ces considérations au fameux contre-exemple que McGee a donné contre la validité de MP (cf. la section sur Lewis Carroll dans la leçon 3, à la p. 82).
(Solution à la p. 396)

Question 7.4 (2 points) Prouvez les affirmations suivantes à l'aide de la méthode des arbres :
(a) « $(p \to \neg r) \wedge q\,,\ q \to ((p \wedge r) \vee ((r \to \neg p) \to r)) \vdash r$ » (solution : p. 397)
(b) « $\vdash \neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$ » (solution : p. 398)

Question 7.5 (2 points) Si ψ est une tautologie, alors $\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$ en est une également. Montrez que la converse est fausse, c'est-à-dire qu'il n'est pas vrai que : si $\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$ est une tautologie, alors ψ est également une tautologie.
(Solution à la p. 399)

Question 7.6 (6 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les affirmations suivantes :
(a) « $p\,,\ p \to q\,,\ p \to r \vdash q \wedge r$ » (solution : p. 399)
(b) « $\neg p \wedge q \vdash p \to r$ » (solution : p. 399)
(c) « $p \vee p \vdash p$ » (solution : p. 400)
(d) « $\vdash\ (p \to q) \to (p \to (q \vee r))$ » (solution : p. 400)
(e) « $p \to (\neg\neg p \to q)\,, \neg q \vdash \neg p$ » (solution : p. 400)
(f) « $p \to \neg p \vdash \neg p$ » (solution : p. 400)

16.8 Premier examen probatoire

Question 8.1 (10 points) À l'aide de la méthode des arbres, déterminez les valeurs de vérité des phrases suivantes :
(a) « $p \to (q \to r)\,, \neg q \to \neg p\,,\ p\ \vdash r$ » (solution : p. 400)
(b) « $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge q\,,\ (q \vee ((r \to p) \wedge r)) \to \neg p\ \vdash q \to \neg p$ » (solution : p. 401)
(c) « $p \to (q \to r)\,,\ \neg r\ \vdash \neg(p \wedge q)$ » (solution : p. 401)
(d) « $p \wedge (q \leftrightarrow r)\,,\ \neg p \vee (q \to \neg r)\ \vdash p \to \neg r$ » (solution : p. 402)
(e) « $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge q\,,\ (\neg q \vee ((r \leftrightarrow p) \wedge r)) \to \neg p\ \vdash r \to \neg p$ » (solution : p. 402)
(f) « $\vdash p \to (q \to p)$ » (solution : p. 403)
(g) « $\vdash ((q \leftrightarrow \neg r) \wedge (p \leftrightarrow \neg q)) \to (r \leftrightarrow p)$ » (solution : p. 403)
(h) « $\vdash (\neg q \to p) \to (\neg p \to (\neg q \to p))$ » (solution : p. 404)

PROOF

(i) « $\vdash (p \vee q) \leftrightarrow ((p \to q) \to q)$ » (solution : p. 404)
(j) « $\vdash ((p \leftrightarrow q) \wedge (q \wedge r) \wedge (q \to s)) \to (s \to p)$ » (solution : p. 404)

Question 8.2 (10 points) Démontrez les séquents suivants, utilisant les règles d'inférence de la déduction naturelle :

(a) « $p \wedge q \vdash p \vee q$ » (solution : p. 405)
(b) « $p \wedge (q \leftrightarrow s)$, $(q \leftrightarrow s) \to r \vdash r \vee t$ » (solution : p. 405)
(c) « $\neg(\neg p \wedge \neg q)$, $\neg p \vdash q$ » (solution : p. 405)
(d) « $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r) \vdash p \leftrightarrow r$ » (solution : p. 405)
(e) « $p \vee q$, $p \to r$, $q \to r \vdash r \vee s$ » (solution : p. 406)
(f) « $p \to q$, $r \to s \vdash (p \wedge r) \to (q \wedge s)$ » (solution : p. 406)
(g) « $\vdash \ p \to (q \vee \neg q)$ » (solution : p. 406)
(h) « $p \to (p \to q)$, $p \vdash q$ » (solution : p. 407)
(i) « $\neg\neg q \to p$, $\neg p \vdash \neg q$ » (solution : p. 407)
(j) « $\neg p \to q \vdash \neg q \to p$ » (solution : p. 407)

16.9 Deuxième examen probatoire

Question 9.1 (3 points) La police arrête trois suspects : Maria, Sam et Jonathan. Ils font les témoignages suivantes :

1. Maria : « Jonathan est innocent, mais Sam ne l'est pas. »
2. Sam : « Si Maria n'est pas innocente, alors Jonathan ne l'est pas non plus. »
3. Jonathan : « Je suis innocent, mais un des deux autres ne l'est pas. »

Abrégeant « Maria est innocente » par « p », « Sam est innocent » par « q » et « Jonathan est innocent » par « r »,

(a) exprimez les trois témoignages comme formules de la logique propositionnelle et en faites les tables de vérité.
(b) utilisez ces tables de vérités pour déterminer
  (i) si les trois témoignages sont consistants ;
  (ii) si un des témoignages est une conséquence logique d'un autre ;
  (iii) qui a menti si les trois sont innocents ;
  (iv) qui est innocent si les trois témoignages sont vrais ;
  (v) qui est innocent et qui est coupable si les innocents ont dit la vérité et les coupables ont menti.

(Solution à la p. 407)

Question 9.2 (2 points) Formulez en français, de la manière la plus élégante possible, les formules suivantes. Il est permis, et même recommandé, de s'écarter de la traduction littérale :

(a) « $p \wedge q$ »
(b) « $p \to q$ »
(c) « $(p \to q) \wedge (r \to q)$ »
(d) « $p \vee q$ »
(e) « $(p \wedge q) \leftrightarrow r$ »
(f) « $\neg p \to \neg q$ »
(g) « $(p \wedge q) \vee r$ »

PROOF

(h) « $p \to (q \vee r)$ »
(i) « $\neg\neg p$ »
(j) « $(\neg p \to q) \wedge (p \to r)$ »
(Solution à la p. 408)

Question 9.3 (2 points) Formulez, en français, les conversion des implications suivantes (a conversion de « $p \to q$ » est « $\neg q \to \neg p$ ») :
(a) « Si tu ne finis pas ton assiette, tu n'auras pas de dessert. »
(b) « Si tu finis ton assiette, tu auras un bonbon. »
(c) « Si tu étudies la logique, tu seras heureux et sage. »
(d) « Si 2+2=5, alors les poules ont des dents. »
(e) « S'il gagne son paris, je mange mon chapeau. »
(f) « S'il n'est pas revenu après trois jours, j'alerte les secours. »
(g) « Si tu es logicien dans l'âme, cet exercice n'est pas difficile pour toi. »
(Solution à la p. 408)

Question 9.4 (2 points) Déterminez lesquelles des phrases données ont la même table de vérité :
(a) « $(p \wedge \neg q) \wedge r$ » et « $p \wedge (\neg q \wedge r)$ » (solution : p. 409)
(b) « $\neg(p \vee q)$ » et « $\neg p \vee \neg q$ » (solution : p. 409)

Question 9.5 (1 point) Montrez à l'aide de la méthode des arbres que l'inférence suivante est logiquement valide :

$$\frac{\begin{array}{c} p \wedge (q \leftrightarrow r) \\ \neg p \vee (q \to \neg r) \end{array}}{p \to \neg r}$$

(Solution à la p. 409)

Question 9.6 (2 points) Formulez deux règles de transformation d'arbres pour la barre de Sheffer et justifiez intuitivement leur validité.
(Solution à la p. 410)

Question 9.7 (2 points) Montrez de quelle manière définir « $\wedge$ », « $\to$ » et « $\leftrightarrow$ » en termes de « $\vee$ » et de « $\neg$ ».
(Solution à la p. 411)

Question 9.8 (2 points) Montrer que les phrases suivantes sont des tautologies :
(a) « $((p_1 \to q_1) \wedge (p_2 \to q_2) \wedge \neg(q_1 \wedge q_2) \wedge (p_1 \vee p_2)) \to ((q_1 \to p_1) \wedge (q_2 \to p_2))$ » (solution : p. 411)
(b) « $((p_1 \to q_1) \wedge (p_2 \to q_2) \wedge (p_3 \to q_3) \wedge \neg(q_1 \wedge q_2) \wedge \neg(q_2 \wedge q_3) \wedge \neg(q_1 \wedge q_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3)) \to ((q_1 \to p_1) \wedge (q_2 \to p_2) \wedge (q_3 \to p_3))$ » (solution : p. 411)

Question 9.9 (4 points) Retournons à l'expérience de pensée de la 6ème question de la 5ème série, au sujet des menteurs genevois et des honnêtes Lausannois.
(a) Quelle assertion pourrait être faite par une femme Lausannoise ou un homme Genevois, mais ne peut pas être faite par un homme Lausannois ou une femme Genevoise ?
(b) Quelle assertion pourrait être faite par toute femme, Lausannoise ou Genevoise, mais ne peut pas être faite par n'importe quel homme, Lausannois ou Genevois ?
(c) Quelle assertion ne peut être faite que par une femme Lausannoise, mais ne peut pas être faite ni par un homme Lausannois ni par un·e Genevois·e ?
(d) Quelle assertion ne peut être faite que par une femme Genevoise ?
(Solution à la p. 413)

PROOF

16.10 La syllogistique

Question 10.1 (2 points) Classifiez les propositions suivantes selon la distinction « **SaP** »/ « **SiP** »/ « **SeP** »/ « **SoP** » :
(a) « Tous les anges sont immortels. »
(b) « Aucun ange n'est mortel. »
(c) « L'homme est un être raisonnable. »
(d) « Quelques oeuvres d'art ne sont pas jolies. »
(e) « Quelques oeuvres d'art sont laides. »
(f) « Personne parmi les hommes n'est sans vice. »
(Solution à la p. 413)

Question 10.2 (2 points) Faites un diagramme de Venn pour l'affirmation suivante. Est-elle compatible avec « Aucun F n'est G » (c'est-à-dire : les deux phrases, peuvent-elles être vraies ensemble)? Pourquoi ?

> Tous les F sont G et tous les G sont F.

(Solution à la p. 413)

Question 10.3 (1 point) Soient les cartes suivantes :

On sait que chaque carte comporte une lettre de l'alphabet d'un côté et un chiffre de l'autre. Supposez que l'on fasse l'affirmation suivante :

> S'il y a une voyelle d'un côté de ces quatre cartes, il y a un nombre pair de l'autre côté.

Supposons que cette implication soit vraie. Combien de cartes faut-il retourner *au minimum* pour vérifier sa vérité ? Lesquelles ?
(Solution à la p. 414)

Question 10.4 (2 points) Est-ce que les phrases suivantes peuvent être vraies ensembles ; si oui, comment ? (utilisez le prédicat « x est une personne » et la relation « x aime y »)
(a) Toute personne aime quelqu'un.

PROOF

(b) Personne n'est aimé par tout le monde.
(Solution à la p. 414)

Question 10.5 (2 points) Formalisez les deux affirmations suivantes dans le calcul des prédicats (avec « oiseau(x) », « corbeau(x) », « personne(x) », « blanc(x) », « noir(x) », « vertueux(x) », « heureux(x) ») et dites s'il s'agit ou non de tautologies (de la logique des prédicats) :
(a) S'il y a des oiseaux blancs et pas de corbeaux noirs, alors certains oiseaux ne sont pas des corbeaux.
(b) S'il est vrai que, si tous les gens sont vertueux, alors tous les gens sont heureux, alors tous les gens vertueux sont heureux.
(Solution à la p. 415)

Question 10.6 (2 points) Formalisez les deux énoncés suivants dans le calcul des prédicats. Ces deux énoncés sont-ils sémantiquement équivalents ?
(a) Tous les hommes ont une cervelle de moineau.
(b) Seuls les hommes ont une cervelle de moineau.
(Solution à la p. 416)

Question 10.7 (1 point) Faites un diagramme de Venn pour la proposition suivante :

> Une chose est flexible si et seulement si elle est soit granulée soit lourde.

(Solution à la p. 416)

Question 10.8 (2 points) Formulez, dans le langage naturel, des phrases contradictoires aux phrases suivantes (indiquez les ambiguïtés là où il y en a) :
(a) Tout ce qui brille n'est pas d'or.
(b) Cette salle est à moitié vide.
(c) Tous les chemins mènent à Rome.
(d) Certains Québécois ont au moins deux voitures.
(e) Les chiens ont quatre pattes.
(f) Le chien est un animal.
(g) Le pingouin est mon animal préféré.
(Solution à la p. 416)

Question 10.9 (3 points) Vérifiez (de manière intuitive) si l'argument suivant, dont les prémisses sont (1) à (10) et dont la conclusion est (11), est valide. À chaque étape, n'utilisez que deux affirmations à la fois et en déduisez une troisième. Supposez que l'univers de discours ne contient que des animaux et faites attention de ne pas utiliser d'autres prémisses, même si elles sont ou paraissent évidentes.
(1) Tous les animaux dans la maison sont des chats.
(2) Tout animal est susceptible d'être mon ami s'il adore la lune.
(3) Si je déteste un animal, je l'évite.
(4) Aucun animal n'est carnivore, sauf s'il chasse la nuit.
(5) Aucun chat ne parvient pas à tuer des souris.
(6) Aucun animal ne s'habitue à moi, sauf ceux qui sont dans la maison.
(7) Les kangourous ne sont pas susceptibles d'être mes amis.
(8) Seuls les carnivores tuent des souris.
(9) Je déteste les animaux qui ne s'habituent pas à moi.
(10) Les animaux qui chassent la nuit adorent toujours la lune.
(11) Donc, j'évite les kangourous.

PROOF

(Solution à la p. 417)

Question 10.10 (3 points) Soient les abréviations suivantes :

« a »	pour le nom propre	« Aristote »
« s »	pour le nom propre	« Socrate »
« $P(\dots)$ »	pour le prédicat unaire	« ... est un philosophe »
« $Q(\dots)$ »	pour le prédicat unaire	« ... est un politicien »
« $S(\dots)$ »	pour le prédicat unaire	« ... est sérieux »
« $A(\dots, \cdots)$ »	pour le prédicat binaire	« ... admire ⋯ »
« $R(\dots, \cdots)$ »	pour le prédicat binaire	« ... respecte ⋯ »

Ainsi, on peut écrire « $S(s)$ » pour « Socrate est sérieux », « $A(s, a)$ » pour « Socrate admire Aristote », « $\exists x(P(x))$ » pour « il y a un philosophe », etc.
Au moyen de ces abréviations, donnez une formalisation dans le langage du calcul des prédicats de chacune des propositions suivantes (lorsqu'une proposition est ambiguë, donnez les deux formalisations possibles) :

(a) « Les philosophes sont sérieux. »
(b) « Les philosophes ne sont pas tous sérieux. »
(c) « Quelques philosophes sont politiciens. »
(d) « Tout politicien s'admire. »
(e) « Tout philosophe respecte Aristote. »
(f) « Certains philosophes respectent Aristote et Socrate. »
(g) « Tous les philosophes admirent un politicien. »
(h) « Les philosophes respectent les politiciens sérieux. »
(i) « Aristote est admiré. »
(j) « Quelqu'un est admiré par Aristote. »

(Solution à la p. 417)

16.11 La logique des prédicats

Question 11.1 (5 points) Formalisez les arguments donnés dans le langage de la logique des prédicats et vérifiez s'ils sont valides avec des diagrammes de Venn :

(a) « Tous les témoins qui sont des actionnaires sont des employés. Tous les témoins sont soit des employés, soit des actionnaires. Donc, tous les témoins sont des employés. » (solution : p. 418)
(b) « Toute personne qui connaît Jeanne et Marie admire Jeanne. Quelques personnes qui connaissent Jeanne ne l'admirent pas. Donc, il existe quelqu'un qui connaît Jeanne mais pas Marie. » (solution : p. 418)
(c) « Aucun pingouin européen n'est noir ; tous les pingouins noirs sont européen. Donc, aucun pingouin n'est noir. » (solution : p. 419)
(d) « Seuls les maîtres de conférence parlant anglais sont éligibles ; certaines pesonnes parlent anglais mais ne sont pas des maîtres de conférence ; donc certaines pesonnes qui ne sont pas éligibles parlent anglais. » (solution : p. 419)

PROOF

(e) « Tout est soit une substance, soit un attribut ; les modes ne sont pas des substances. Donc, les modes sont des attributs. » (solution : p. 419)

Question 11.2 (2 points) Formalisez les phrases suivantes dans le langage de la logique des prédicats :

(a) Si tous les commandeurs doivent être renversés, alors aucun commandeur ne doit pas être renversé.
(b) Tout oiseau qui n'est ni nuisible ni dangereux n'est pas un rapace.
(c) Quelques champignons sont à la fois répandus et vénéneux.
(d) Quelques champignons sont répandus et quelques champignons sont vénéneux.

(Solution à la p. 420)

Question 11.3 (2 points) Formulez en langage ordinaire les négations des phrases (c) et (d) de la question 11.2. (c) et (d) ne sont pas logiquement équivalentes dans la mesure où l'un des deux implique l'autre, mais la converse (que la deuxième implique la première) n'est pas vraie. Dans quel sens va l'implication ?

(Solution à la p. 420)

Question 11.4 (3 points) Parmi les énoncés suivants, trouvez ceux qui sont équivalents et ceux qui sont la négation l'un de l'autre. Formalisez chacun des énoncés en langage de la logique des prédicats :

(a) Les amours heureuses sont imaginaires.
(b) Les amours imaginaires sont heureuses.
(c) Les amours malheureuses ne sont pas imaginaires.
(d) Il n'y a pas d'amours heureuses qui ne soient imaginaires.
(e) Il n'y a que des choses autres que des amours et de l'imaginaire qui sont malheureuses.
(f) Il n'y a pas des amours imaginaires malheureuses.

(Solution à la p. 420)

Question 11.5 (3 points) Supposez que l'univers de discours ne contient que trois individus : a, b et c. Exprimez les phrases suivantes sans des quantificateurs et dites lesquelles sont équivalentes avec lesquelles :

(a) « $\exists x(Fx \vee Gx)$ »
(b) « $\forall x(Fx \vee Gx)$ »
(c) « $\forall x(Fx \wedge Gx)$ »
(d) « $\exists xFx \vee \exists xGx$ »
(e) « $\forall xFx \vee \forall xGx$ »
(f) « $\forall xFx \wedge \forall xGx$ »

(Solution à la p. 421)

Question 11.6 (2 points) Formalisez dans la langage de la logique des prédicats, en utilisant au moins deux quantificateurs pour chaque phrase :

(a) « Tous les humains possèdent tous les défauts. »
(b) « Certains humains possèdent certains défauts. »
(c) « Chaque humain possède au moins un défaut. »
(d) « Certains défauts sont possédés par tous les humains. »

(Solution à la p. 421)

Question 11.7 (1 point) Formalisez dans la langage de la logique des prédicats, en utilisant au moins trois quantificateurs pour chaque phrase. Indiquez les ambiguïtes là où il y en a :

PROOF

(a) « Chaque humain possède au moins un défaut qu'il cache à tous ceux qui le connaissent. »
(b) « Un défaut commun à tous les humains est caché à tout le monde. »
(Solution à la p. 422)

Question 11.8 (2 points) Donnez des phrases en français dont les formules suivantes sont des formalisations :
(a) « $\forall x(Dx \rightarrow \forall y((Cy \wedge Fy) \rightarrow Hxy))$ »
(b) « $\exists x((Dx \wedge Fx) \rightarrow Pax)$ »
(Solution à la p. 422)

16.12 Syntaxe et sémantique de la logique des prédicats

Question 12.1 (3 points) Expliquez
(a) ce qu'est un terme singulier ;
(b) ce qu'est une phrase ouverte ;
(c) quelle est la distinction entre usage et mention ;
(d) ce qu'est un système formel axiomatique ;
(e) quelle est l'analyse russellienne d'une description définie ;
(f) quelle est l'analyse fregéenne des énoncés d'identité.
(Solution à la p. 422)

Question 12.2 (2 points) Formalisez les phrases suivantes dans le langage de la logique des prédicats :
(a) « Il n'y a que trois manières de cuisiner des pâtes. »
(b) « Le Père Noël n'existe pas. »
(c) « Sam est le singe le plus intelligent du zoo. »
(d) « À part moi, il n'y avait que Sam qui était là. »
(Solution à la p. 423)

Question 12.3 (3 points) À l'aide de la définition de validité, justifiez la vérité des affirmations suivantes :
(a) « $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Gx \rightarrow \neg Hx) \vDash \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$ » (solution : p. 423)
(b) « $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vDash \neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$ » (solution : p. 423)
(c) « $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(\neg Gx) \vDash \exists x(\neg Fx)$ » (solution : p. 424)

Question 12.4 (1 point)] Formalisez dans le langage de la logique des prédicats :
(a) "Tous les Suisses peuvent entrer."
(b) "Que des Suisses peuvent entrer."
(Solution à la p. 424)

Question 12.5 (7 points) Formalisez (supposez que le domaine de quantification est la totalité des êtres humains) :
(a) Suzie est F.
(b) Sam est F.
(c) Quelques D sont F.
(d) Tout D est F.
(e) Seuls les D sont F.
(f) Les D ne sont pas les seuls à être F.

PROOF

(g) Aucun H n'est F.
(h) Tous les F sont G sauf ceux qui sont H.
(i) Quelques H ne sont pas F.
(j) Sam n'est pas F.
(k) Suzie a tué Sam.
(l) Quelqu'un a tué Sam.
(m) Sam a tué quelqu'un.
(n) Quelqu'un a tué quelqu'un.
(o) Quelqu'un s'est tué.
(p) Personne ne s'est tué.
(q) Quelqu'un a tué tout le monde.
(r) Quelqu'un a été tué par tout le monde.
(s) Il y a un S entre Sam et Suzie.
(t) Chaque douanier hait un coureur. [n'importe lequel]
(u) Quelques coureurs aiment chaque douanier.
(v) Il y a un coureur haï par tous les douaniers fous.
(w) Quelques C n'ont la relation P avec aucun FD.
(x) Quelques C ont la relation P seulement avec des D qui ne sont pas F.
(Solution à la p. 424)

Question 12.6 (4 points) Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats avec $\mathbf{I} = \{0\}$, $\mathbf{J} = \{0, 1, 2\}$, $\mathbf{K} = \{0, 1\}$, $\lambda(0) = 2$, $\mu(0) = 1$, $\mu(1) = \mu(2) = 2$. Nous remplaçons les signes non logiques par les suivants :

$$\begin{array}{rcl} \dots R_0 \cdots & \rightsquigarrow & \dots \leq \cdots \\ f_0(\dots) & \rightsquigarrow & -\dots \\ f_1(\dots, \cdots) & \rightsquigarrow & \dots + \cdots \\ f_2(\dots, \cdots) & \rightsquigarrow & \dots \times \cdots \\ c_0 & \rightsquigarrow & 0 \\ c_1 & \rightsquigarrow & 1 \end{array}$$

(a) Les expressions suivantes sont-elles des termes de $\mathcal{L}^+$?
  (i) « 0 »
  (ii) « $x_1 + 1$ »
  (iii) « $+x_1$ »
  (iv) « $x_1\times$ »
  (v) « $x_1 \times (0 + 1)$ »
  (vi) « 2 »
(b) Les expressions suivantes sont-elles des formules atomiques de $\mathcal{L}^+$?
  (i+) « $x_1 + 1$ »
  (ii+) « $0 + 0 = 1$ »
  (iii+) « $(x_1 \leq 1) \neq 1$ »
  (iv+) « $\forall x_1(x_1 \leq (0 + 1))$ »
  (v+) « $0 + 1 \neq 0 \times 1$ »

PROOF

(vi+) « $x_1 \leq 1$ »

(c) Les expressions suivantes sont-elles des formules de $\mathcal{L}^+$?

(i∗) « 0 »
(ii∗) « $x_1 + 1 \leq x_1$ »
(iii∗) « $\forall x_1(x_1 \times (0 + 1))$ »
(iv∗) « $1 + (x_1 \times (0 + 1))$ »
(v∗) « $(1 + 1) \wedge (0 \leq 1)$ »
(vi∗) « $\forall x_1(x_1 \leq (0 + 1))$ »

(d) Dans lesquelles des formules suivantes $\mathcal{L}^+$ la variable « x_1 » a-t-elle une occurrence libre ?

(i∗∗) « $x_1 + 1 \leq 1$ »
(ii∗∗) « $\forall x_1 \neg(x_1 \neq (0 + 1))$ »
(iii∗∗) « $\exists x_2(1 + (x_2 \times (0 + 1) \leq x_1))$ »
(iv∗∗) « $\forall x_1(0 \leq x_1) \wedge ((0 \leq 1) \vee 1 \not\neq x_1)$ »
(v∗∗) « $\forall x_1((0 \leq x_1) \rightarrow (1 \not\neq x_1))$ »
(vi∗∗) « $\forall x_2 \exists x_1 \neg(x_2 \leq x_1)$ »

16.13 La méthode des arbres de la logique des prédicats

Question 13.1 (5 points) Déterminez si les phrases suivantes sont valides à l'aide de la méthode des arbres :

(a) « $\forall x(Fx) \rightarrow \forall y(Fy)$ » (solution : p. 426)
(b) « $\exists x \forall y\,(Rxy) \rightarrow \forall y \exists x\,(Rxy)$ » (solution : p. 426)
(c) « $Ga \rightarrow (\forall x\,(Fx) \rightarrow \exists x\,(Fx))$ » (solution : p. 427)
(d) « $\neg \exists y\,(Py) \rightarrow \forall y\,(Fy \rightarrow \exists x(Fx))$ » (solution : p. 427)
(e) « $\forall x\,(Fx \rightarrow (Gx \wedge Hx)) \rightarrow \forall x\,((Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx)$ » (solution : p. 428)

Question 13.2 (3 points) À l'aide de la méthode des arbres, trouvez des modèles pour les phrases suivantes :

(a) « $\exists x \forall y\,(Rxy) \wedge \exists x \exists y\,(\neg Rxy)$ » (solution : p. 428)
(b) « $\forall x\,(\neg Sxx) \wedge \exists x \exists y \exists z\,(Sxy \wedge Syx \wedge \neg Sxz)$ » (solution : p. 429)
(c) « $\forall x \exists y\,(Rxy) \wedge \forall x\,(\neg Rxx) \wedge \neg \forall x \forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$ » (solution : p. 429)

Question 13.3 (6 points) À l'aide de la méthode des arbres, vérifiez la validité des phrases suivantes. Décrivez des structures dans lesquelles les converses de (b) et de (d) sont fausses, premièrement en langue naturelle et deuxièmement aussi formellement que possible.

(a) « $\forall x\,(Fx \wedge Gx) \leftrightarrow (\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx))$ » (solution : p. 431)
(b) « $(\forall xFx \vee \forall xGx) \rightarrow \forall x(Fx \vee Gx)$ » (solution : p. 431)
(c) « $\exists x\,(Fx \vee Gx) \leftrightarrow (\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx))$ » (solution : p. 433)
(d) « $\exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow (\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx))$ » (solution : p. 433)

Question 13.4 (6 points) Soient les abréviations suivantes :

« p » pour	« $\forall x \forall y\,(Rxy \rightarrow Ryx)$ »	(« la relation R est symétrique »)
« q » pour	« $\forall x \forall y \forall z\,((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$ »	(« la relation R est transitive »)
« r » pour	« $\forall x \forall y\,(Rxy \rightarrow Rxx)$ »	(« la relation R est réflexive »)
« s » pour	« $\forall x \exists y(Rxy)$ »	(« la relation R est ‹ ouverte › »)
« t » pour	« $\forall x \forall y\,(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$ »	(« la relation R est anti-symétrique »)

PROOF

(a) Prouvez, par la méthode des arbres, la phrase suivante :

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

(b) Montrez qu'il n'est pas possible de trouver un modèle par la méthode des arbres pour l'affirmation suivante :

$$\neg((q \wedge s \wedge t) \rightarrow \exists x \forall y(\neg Ryx))$$

(c) Donnez un exemple d'une structure dans laquelle cette affirmation est vraie.

16.14 La déduction naturelle de la logique des prédicats

Question 14.1 (12 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les séquents suivants :

(a) « $\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)\,,\ \forall x(Hx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$ » (solution : p. 436)
(b) « $\forall x(Gx \rightarrow \neg Fx)\,,\ \forall x(Hx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$ » (solution : p. 436)
(c) « $\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx) \vdash \forall x(Fx \vee Gx)$ » (solution : p. 437)
(d) « $(\forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx)) \leftrightarrow \exists x(Fx) \vdash \neg\exists x\neg(Fx)$ » (solution : p. 437)
(e) « $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Fx) \rightarrow \forall x(Gx)$ » (solution : p. 437)
(f) « $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists x(Fx) \rightarrow \exists x(Gx)$ » (solution : p. 437)
(g) « $\forall x(Fx \wedge Gx) \vdash \forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$ » (solution : p. 438)
(h) « $\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx) \vdash \exists x(Fx \vee Gx)$ » (solution : p. 438)
(i) « $\exists x\forall y\exists z(Sxyz) \vdash \forall y\exists x\exists z(Sxyz)$ » (solution : p. 438)
(j) « $\exists x\forall y(Rxy) \vdash \forall y\exists x(Rxy)$ » (solution : p. 438)
(k) « $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(\exists y(Fy \wedge Rxy) \rightarrow \exists y(Gy \wedge Rxy))$ » (solution : p. 439)
(l) « $\exists x(Fx \wedge Gx)\,,\ \exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow \neg Rxy)) \vdash \exists x(Fx \wedge \neg\forall y(Fy \rightarrow Rxy))$ » (solution : p. 439)

Question 14.2 (2 points) Prouvez les équivalences suivantes par la méthode de la déduction naturelle :

(a) « $\exists x(Fx) \dashv\vdash \neg\forall x\neg(Fx)$ » (solution : p. 440)
(b) « $\exists x\neg(Fx) \dashv\vdash \neg\forall x(Fx)$ » (solution : p. 440)

Question 14.3 (6 points) Dites si les applications suivantes des règles de déduction naturelle pour les quantificateurs sont correctes. Si elles ne le sont pas, dites pourquoi.

(a)

1	$\forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash\ \forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	prémisse
2	$\forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash\ \exists z(Faa \wedge Gaz)$	de (1) par (SU)

(b)

1	$\forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash\ \forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	prémisse
2	$\forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash\ \exists z(Faz \wedge Gbz)$	de (1) par (SU)

(c)

1	Fba	$\vdash\ Fba$	prémisse
2	Fba	$\vdash\ \exists y(Fby)$	de (1) par (GE)

(d)

1	$\exists x(Fxa)$	$\vdash\ \exists x(Fxa)$	prémisse
2	$\exists x(Fxa)$	$\vdash\ \exists y\exists x(Fxx)$	de (1) par (GE)

PROOF

(e)

1	$Fab \rightarrow \forall x(Gax)$	$\vdash Fab \rightarrow \forall x(Gax)$	prémisse
2	$Fab \rightarrow \forall x(Gax)$	$\vdash \forall y(Fay \rightarrow \forall x(Gax))$	de (1) par (GU)

(f)

1	$\exists x(Fxa \wedge Gbx)$	$\vdash \exists x(Fxa \wedge Gbx)$	prémisse
2	$\exists x(Fxa \wedge Gbx)$	$\vdash Fba \wedge Gbb$	de (1) par (SE)

(Solution à la p. 441)

16.15 La logique des prédicats

Question 15.4 (4 points) Montrez par la méthode des arbres que les formules suivants ne sont **pas** des théorèmes de la logique des prédicats :

(a) « $\forall x(Fx \vee Gx) \rightarrow (\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx))$ » (solution : p. 442)

(b) « $\forall x \exists y(Rxy) \rightarrow \exists y \forall x(Rxy)$ » (solution : p. 442)

Question 15.5 (2 points) Y a-t-il une autre manière de démontrer les résultats de la question 3 ? Si oui, laquelle ?

Question 15.6 (4 points) A VENIR : question sur les limites de la logique des prédicats.
(Solution à la p. **??**)

16.16 La logique des prédicats

Question 16.1 (6 points) À l'aide de la méthode des arbres, démontrez la validité des raisonnements suivants :

(a) « $\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx), \forall x(Fx \wedge Hx) \vDash \exists x \neg(Gx)$ » (solution : p. 444)

(b) « $\exists x(Fxb) \rightarrow \forall x(Gx), \forall x(Fax) \vDash \forall x(Hxc \rightarrow Gx)$ » (solution : p. 444)

(c) « $\exists x(Fx), \exists x(Gx) \vDash \exists x(\exists y(Fy) \wedge Gx)$ » (solution : p. 444)

(d) « $\forall x \exists y(Fxy \rightarrow Gbx), \forall x \forall y(Fyx) \vDash \exists x(Gxx)$ » (solution : p. 445)

(e) « $Ga \rightarrow \forall x(Fx), \exists x(Fx) \rightarrow Ga \vDash \forall x(Ga \leftrightarrow Fx)$ » (solution : p. 445)

(f) « $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx), \forall x(Hx \leftrightarrow Ix), \exists x(Ix \wedge \forall y(Fy \rightarrow Jy)) \vDash \exists x(Hx \wedge \forall y(Jy \vee \neg Gy))$ » (solution : p. 446)

Question 16.2 (2 points) Déterminez lesquelles des formules suivantes sont logiquement équivalentes à « $\neg \forall x(Fx \vee Gx)$ » :

(a) « $\exists x(\neg Fx \wedge \neg Gx)$ »

(b) « $\exists x \neg(Fx \wedge Gx)$ »

(c) « $\neg \forall x Fx \vee \neg \forall x Gx$ »

(d) « $\exists x(\neg Fx \vee \neg Gx)$ »

(e) « $\forall x(\neg Fx \vee Gx)$ »

(f) « $\neg \forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ »

PROOF

(g) « $\neg\forall x(\neg Fx \to Gx)$ »
(h) « $\exists x\neg(Fx \vee Gx)$ »
(i) « $\exists x\neg Fx \wedge \exists x\neg Gx$ »
(j) « $\exists x\neg(\neg Gx \to Fx)$ »
(Solution à la p. 447)

Question 16.3 (12 points) Prouvez les relations suivantes entre des propriétés de relations par la méthode de la déduction naturelle (cf. p. 308 pour la terminologie). Vous avez le doit d'utiliser les équivalences entre « $\neg\forall$ ... » et « $\exists\neg$ ... » (démontrées comme réponse à la question 14.2, cf. p. 440 et suivantes) :
(a) les relations vides sont symétriques et asymétriques (solution : p. 448);
(b) toute relation asymétrique est anti-symétrique (solution : p. 448);
(c) toute relation asymétrique est irréflexive (solution : p. 449);
(d) toute relation irréflexive et transitive est asymétrique (solution : p. 449);
(e) toute relation intransitive est irréflexive (solution : p. 450);
(f) toute relation sérielle, transitive et symétrique est réflexive (solution : p. 450);
(g) si une relation est transitive, elle est irréflexive ssi elle est asymétrique (solution : p. 450);
(h) aucune relation intransitive est réflexive (solution : p. 451);
(i) aucune relation asymétrique est non réflexive (= ni réflexive ni irréflexive) (solution : p. 452);
(j) aucune relation est transitive, réflexive et asymétrique (solution : p. 452);
(k) aucune relation est transitive, non symétrique et irréflexive (solution : p. 452);
(l) si une relation est transitive et intransitive, alors elle est asymétrique (solution : p. 452).

16.17 La logique modale

Question 17.1 (7 points) Prouvez, par la méthode axiomatique, les affirmations suivantes (vous avez le droit d'utiliser n'importe quel théorème de la logique propositionnelle comme axiome) :
(a) « $\mathbf{K} \vdash (\Box p \wedge \Box q) \to \Box(p \wedge q)$ » (solution : p. 453)
(b) « $\mathbf{K} \vdash (\Diamond p \vee \Diamond q) \leftrightarrow \Diamond(p \vee q)$ » (solution : p. 453)
(c) « $\mathbf{K} \vdash \Diamond(p \to q) \leftrightarrow (\Box p \to \Diamond q)$ » (solution : p. 453)
(d) « $\mathbf{D} \vdash \Diamond(p \to p)$ » (solution : p. 453)
(e) « $\mathbf{T} \vdash \Diamond(p \to \Box p)$ » (solution : p. 453)
(f) « $\mathbf{S4} \vdash \Box p \leftrightarrow \Box\Box p$ » (solution : p. 453)
(g) « $\mathbf{S5} \vdash \Box(p \vee \Box q) \leftrightarrow (\Box p \vee \Box q)$ » (solution : p. 453)

Question 17.2 (4 points) Démontrez les affirmations suivantes à l'aide de la sémantique de la logique modale propositionnelle :
(a) « $\mathbf{K} \not\models \Box\phi \to \Diamond\phi$ » (solution : p. 453)
(b) « $\mathbf{D} \not\models \Box\phi \to \phi$ » (solution : p. 453)
(c) « $\mathbf{S4} \not\models \phi \to \Box\Diamond\phi$ » (solution : p. 453)
(d) « $\mathbf{S4} \not\models \Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$ » (solution : p. 453)

16.18 Troisième examen probatoire

Question 18.1 (6 points) Formalisez les arguments suivants et prouvez, par la déduction naturelle,

PROOF

qu'ils sont valides :

(a) « Tous les vieux hommes bavent. M Leroux est un vieil homme et un collectionneur de timbres. Donc, il y a des collectionneurs de timbres qui bavent. » (solution : p. 453)

(b) « Aucun canard ne danse le tango. Aucun officier ne s'abstient de danser le tango. Tous les habitants de ma grange sont des canards. Donc aucun habitant de ma grange n'est un officier. » (solution : p. 454)

(c) « Quelques femmes adorent Léo. Tous les hommes adorent toute femme. Puisque Léo est un homme, il y a quelqu'un qui adore et qui est adoré par Léo. » (solution : p. 455)

(d) « Certains n'aiment personne, et personne n'aime quelqu'un qui ne s'aime pas lui-même. Donc il y a quelques-uns que personne n'aime. » (solution : p. 455)

(e) « Laura a visité tous les pays de l'Union Européenne sauf les pays méditerranéens. L'Italie est un pays de l'Union Européenne, mais n'a encore jamais été visité par Laura. Donc l'Italie doit être un pays méditerranéen. » (solution : p. 456)

(f) « Certains critiquent tout argument invalide. Personne ne critique un argument convaincant. Donc aucun argument invalide est convaincant. » (solution : p. 456)

Question 18.2 (6 points) À l'aide de la méthode des arbres, prouvez les propositions suivantes :

(a) « $\exists x \forall y \exists z\,(Sxyz) \rightarrow \forall y \exists x \exists z\,(Sxyz)$ » (solution : p. 457)

(b) « $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\exists x\,(Fx) \rightarrow \exists x\,(Gx))$ » (solution : p. 458)

(c) « $(\forall x\,(Fx \rightarrow Hx) \wedge \forall x(Gx \rightarrow Hx) \wedge \forall x\,(Fx \vee Gx)) \rightarrow \forall x\,(Hx)$ » (solution : p. 458)

(d) « $\forall x \neg Fx \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow Gx)$ » (solution : p. 459)

(e) « $(\forall x Fx \rightarrow \exists x Gx) \rightarrow \exists x(Fx \rightarrow Gx)$ » (solution : p. 459)

(f) « $\neg(\exists x Fx \wedge \forall x \neg Fx)$ » (solution : p. 460)

Question 18.3 (8 points) Prouvez les équivalences suivantes avec la méthode des arbres *et* également avec la méthode de la déduction naturelle :

(a) « $\exists x(Fx \wedge Gx) \dashv\vdash \neg\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ » (arbres : p. 460 et p. 461, déductions : p. 460 et p. 461)

(b) « $\forall x(Fx \rightarrow \exists y(Gxy)) \dashv\vdash \forall x \exists y(Fx \rightarrow Gxy)$ » (arbres : p. 461 et p. 462, déductions : p. 461 et p. 462)

16.19 Quatrième examen probatoire

Question 19.1 (2 points) Considérez les deux affirmations suivantes :

1 Chaque philosophe admire un philosophe.
2 Il y a un philosophe admiré par tous les philosophes.

(a) Y a-t-il une des deux assertions qui est structurellement ambiguë ? Si oui, entre quelles formalisation dans le langage de la logique des prédicats ?

(b) Y'a-t-il une des deux assertions qui s'ensuit logiquement de l'autre ? Si oui, dans quelle direction obtient la relation de conséquence logique ?

(c) Décrivez une situation où seule une des deux assertions est vraie.

(Solution à la p. 463)

Question 19.3 (3 points) Expliquez, en vos propres mots, les distinctions (i) entre variables et constantes individuelles et (ii) entre noms propres, indexicaux et descriptions définies.

(Solution à la p. 463)

PROOF

Question 19.3 (15 points) Prouvez par déduction naturelle :

(a) « $\forall x \neg(Fx \wedge Gx), Ga \vdash \neg Fa$ » (solution : p. 463)
(b) « $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$ » (solution : p. 464)
(c) « $\forall x(Hx \rightarrow Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx) \vdash \exists x(Fx \wedge \neg Hx))$ » (solution : p. 464)
(d) « $\exists x(Fx) \rightarrow Fa \vdash \forall x(Fx \rightarrow Fa)$ » (solution : p. 464)
(e) « $\exists x \exists y(Rxy) \vdash \exists y \exists x(Rxy)$ » (solution : p. 465)
(f) « $\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$ » (solution : p. 465)
(g) « $\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx), \forall x \neg(Hx) \vdash \forall x \neg(Fx)$ » (solution : p. 465)
(h) « $\exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)$ » (solution : p. 465)
(i) « $\forall x(Fx \rightarrow Fa) \vdash \exists x(Fx) \rightarrow Fa$ » (solution : p. 466)
(j) « $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x \neg Gx \vdash \neg\exists x Fx$ » (solution : p. 466)
(k) « $\exists x Fx, \exists x Gx \vdash \exists x \exists y(Fx \wedge Gy)$ » (solution : p. 466)
(l) « $Fa \rightarrow \forall x Gx \vdash \forall x(Fa \rightarrow Gx)$ » (solution : p. 466)
(m) « $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Hx \wedge \forall y(Gy \rightarrow \neg Ixy) \vdash \exists x(Hx \wedge \forall y(Fy \rightarrow \neg Ixy))$ » (solution : p. 466)
(n) « $\forall x(Fx \rightarrow (Gx \vee Hx)), \forall x \neg Gx \vdash \forall x Fx \rightarrow \forall x Hx$ » (solution : p. 466)
(o) « $\vdash \forall x(Fx \rightarrow \forall y(Gy \rightarrow Rxy)) \rightarrow \forall x \forall y((Fx \wedge Gx) \rightarrow Rxy)$ » (solution : p. 466)

16.20 Cinquième examen probatoire

Question 20.1 (9 points) Formalisez les arguments suivants dans le langage de la logique des prédicats et démontrez leur validité à l'aide de la méthode des arbres :

(a) « Il y a quelqu'un de sympa qui payera pour tout ce qui est cassé. Donc, tout ce qui est cassé sera payé pour par quelqu'un de sympa. » (solution : p. 466)
(b) « Il n'est pas le cas qu'il y ait quelqu'un qui est devenu membre du club sympa et qui a payé pour toutes les vacances de exactement tous les membres qui ne les ont pas payé eux-mêmes. » (solution : p. 467)
(c) « Tous les bonobos mâles savent résoudre tout problème. Il y a au moins un problème. Tout bonobo qui sait résoudre un problème recevra une banane. Sultan est un bonobo mâle. Alors, il recevra une banane. » (solution : p. 468)
(d) « Sultan et Chica savent résoudre les mêmes problèmes. Si Sultan sait résoudre n'importe quel problème, il recevra une banane. Sultan ne recevra aucune banane. Donc, Chica ne sait résoudre aucun des problèmes. » (solution : p. 468)
(e) « Pas tous les bonobos s'efforcent autant. Aucun bonobo s'efforce plus que lui-même. En conséquence, il y a au moins deux bonobos. » (solution : p. 469)
(f) « Sultan n'est pas Chica. Sultan ne recevra pas de banane sauf s'il sait résoudre tous les problèmes. Si la bonobo Chica s'efforce plus que Sultan, alors Chica sait résoudre un problème que Sultan ne sait pas résoudre. Tous les bonobos autres que Sultan s'efforcent plus que lui. Il s'ensuit que Sultan ne recevra pas de banane. » (solution : p. 470)
(g) « Parmi tous les bonobos, il n'y a que Sultan qui est mâle. Les bonobos qui recevront une banane sont les mâles. De suite, Sultan est le bonobo qui recevra la banane. » (solution : p. 471)
(h) «»identité : Hodges p. 198 (solution : p. 472)
(i) «»identité : Hodges p. 198 (solution : p. 472)

Question 20.2 (4 points) Formalisez les arguments suivants dans le langage de la logique des pré-

PROOF

dicats et démontrez leur validité à l'aide de la méthode de la déduction naturelle :

(a) « Quelques femmes aiment Leonardo. Tous les hommes aiment chaque femme. Puisque Leonardo est un homme, il y a quelqu'un qui aime Leonardo et est aimé par Leonardo. » (solution : p. 472)

(b) « Certains n'aiment personne et personne n'aime quelqu'un qui ne s'aime pas lui-même. Il y a donc certains qui ne sont aimé par personne. » (solution : p. 472)

(c) « Personne n'est obligé de faire ce qu'il ne peut pas faire. Il y a des choses que Macron promets qu'il ne peut pas faire. Il y a donc des choses que Macron promets mais qu'il n'est pas obligé de faire. » (solution : p. 472)

(d) « Quelques-uns critiquent tout argument non valide. Personne ne critique un argument convaincant. Il s'ensuit qu'aucun argument non valide est convaincant. » (solution : p. 472)

Question 20.3 (2 points) Prouvez par la méthode des arbres :

(a) « $\forall x(\forall y(Fy) \to Gx) \to (\forall y(Fy) \to \forall x(Gx))$ » (solution : p. 472)

(b) « $\exists x(Fx \to Gx) \to (\forall x(Fx) \to \exists x(Gx))$ » (solution : p. 473)

Question 20.4 (5 points) Encore les Lausannois et les Genevois. Les Lausannois ne mentent jamais (disent toujours la vérité), les Genevois mentent toujours. Comme toujours, nous présupposons que tous les participants des dialogues viennent d'exactement une de ces villes.

(a) Nous rencontrons deux personnes, Georges-André et Florence. Georges-André dit : « Si je suis Lausannois, alors Florence en est aussi une. » Pouvons nous déterminer d'où viennent les deux ?

(b) Quelqu'un a demandé à Jean-Pascal s'il était Lausannois. Jean-Pascal a répondu qu'il mangera son chapeau s'il est Lausannois. Prouvez qu'il mangera son chapeau.

(c) Encore un duo. Paul-René dit : « Si Yvette est Lausannoise, alors je suis Genevois. » D'où viennent-ils ?

(d) Deux individus, X et Y apparaissent en justice. Nous avons deux témoins, Timea et Stanislas, qui disent :
Timea : « Si Sandrine est coupable, alors Rémy est également coupable. »
Stanislas : « Soit Sandrine est innocente soit Rémy est coupable. »
A et B, viennent-ils de la même ville ?

(e) Nous parlons avec Georges, Charlotte et Hélène. Ils disent :
Georges : « Charlotte est Lausannoise. »
Charlotte : « Si Georges est Lausannois, alors Hélène l'est aussi »
Pouvons-nous déterminer d'où ils viennent ?

(Solution à la p. 473)

Examen final

L'examen final, noté par la même échelle que les exercices mais à faire individuellement, consistra d'un choix de questions d'exercices. Les questions des séries d"exercices pertinents pour l'examen sont les suivants :

1.10, 2.1, 2.2, 2.3, 2.5, 2.6, 2.9, 3.4, 3.6, 3.7, 4.2, 4.5, 4.6, 4.8, 5.2, 5.3, 5.4, 6.1, 6.2, 7.1, 7.2, 7.4, 7.6, 8.1, 8.2, 9.4, 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 10.4, 10.6, 11.2, 11.3, 11.3, 11.4, 11.5, 11.6, 11.7, 11.8, 12.2, 12.3, 12.4, 12.5, 13.1, 13.2, 13.3, 14.1, 14.2, 15.4, 16.1, 16.3, 18.1, 18.2, 18.3, 19.1, 19.3, 20.1, 20.2, 20.3

PROOF

Les étudiants n'aurons pas droit à leurs notes, mais recevront un « résumé de notions clefs ».

PROOF

17 Solutions aux exercices

17.1 Formalisation, validité

Question 1.1 (2 points) Voici l'une des formalisations possibles :

Si les États-Unis n'attaquent pas l'Iran et que le prix de l'essence augmente, la Syrie attaque Israël.	$\rightsquigarrow$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow r$
Si la Syrie n'attaque pas Israël, le Liban le fera.	$\rightsquigarrow$	$\neg r \rightarrow s$
Si les États-Unis n'attaquent pas l'Iran, le prix de l'essence augmente ou la Syrie attaque l'Israël.	$\rightsquigarrow$	$\neg p \rightarrow (q \vee r)$
Si la Syrie attaque Israël, alors les États-Unis attaquent l'Iran.	$\rightsquigarrow$	$r \rightarrow p$

Il y a différentes solutions. Par exemple on peut également formaliser « les États-Unis n'attaquent pas l'Iran » comme « p », sans tenir compte de la négation. Le discours devient alors :

Si les États-Unis n'attaquent pas l'Iran et que le prix de l'essence augmente, la Syrie attaque Israël.	$\rightsquigarrow$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
Si la Syrie n'attaque pas Israël, le Liban le fera.	$\rightsquigarrow$	$\neg r \rightarrow s$
Si les États-Unis n'attaquent pas l'Iran, le prix de l'essence augmente ou la Syrie attaque l'Israël.	$\rightsquigarrow$	$p \rightarrow (q \vee r)$
Si la Syrie attaque Israël, alors les États-Unis attaquent l'Iran.	$\rightsquigarrow$	$r \rightarrow \neg p$

Question 1.2 (1 point) Au cours d'une discussion avec Sam, il me dit que mon argument est faux. En me disant cela, Sam se trompe. Pourquoi ?

Solution : Un argument ne peut pas être dit vrai ou faux, même s'il contient des prémisses et une conclusion qui peuvent être dites vraies ou fausses. L'évaluation d'un argument ne se fait pas par rapport à sa vérité : il est bon, convaincant, pertinent, etc., mais pas vrai ou faux. En logique, un argument peut être dit « valide » ou « non valide » : il est valide si la vérité des prémisses garantie la vérité de la conclusion, c'est-à-dire s'il est impossible que ses prémisses soient vraies et la conclusion fausse (cf. la sct. 1.6).

Question 1.3 (1 point) Sam sait que si Maria aime Paul, alors elle sera déçue. Joséphine, la soeur de Maria, connaît les sentiments de Maria pour Paul. Joséphine aime Paul, et pour cette raison elle lui ment à chaque fois qu'il lui demande quels sont les sentiments de Maria à son égard. Paul a posé la question à Joséphine. Cette dernière lui a répondu que Maria ne l'aime pas. Déterminons si Maria sera déçue ou non.

Solution : Maria sera déçue si elle aime Paul. Dès lors, la seule question à se poser est de savoir si Maria aime Paul – et c'est le cas. Joséphine a dit que Maria ne l'aime pas, mais elle a menti. Alors

PROOF

Maria aime Paul. Maira sera donc – hélas ! – déçue.

Question 1.4 (4 points) Lesquels des arguments suivants sont convaincants et valides ?

(a) « Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage ; je serai heureux et sage ; alors j'étudie la logique. » – Il s'agit d'un exemple type du raisonnement fallacieux que l'on appelle l'« affirmation du conséquent » : dans une implication matérielle, l'antécédent est une condition suffisante pour le conséquent, mais l'inverse n'est que nécessaire et pas suffisant (cf. p. 54). Autrement dit, je pourrais être heureux et sage par d'autres moyens que l'étude de la logique (!), On ne peut pas conclure du fait qu'une condition nécessaire pour x soit réalisée que x l'est aussi. Ma prémisse serait alors vraie et ma conclusion fausse. Donc : **non valide**.

(b) « Napoléon était allemand ; les allemands sont européens ; donc Napoléon était européen. » – **Valide** : la première prémisse n'est pas vraie, mais l'argument reste valide, parce que si sa première prémisse *était* vraie, la conclusion le *serait* aussi. La validité de cet argument ne peut pas être capturée par la logique propositionnelle classique : pour montrer que l'argument est valide, nous devons utiliser des quantificateurs :

$$\frac{\begin{array}{c} An \\ \forall x(Ax \to Ex) \end{array}}{En} \tag{1}$$

(1) consiste de deux prémisses : que Napoléon (n) est allemand (A) et que pour tout x ($\forall x$), si x est allemand (Ax), alors ce x est européen (Ex).

(c) « Napoléon était allemand ; les allemands sont asiatiques ; donc Napoléon était asiatique. » – **Valide**, mais pas non plus formalisable dans le langage de la logique propositionnelle. Cette fois-ci, les deux prémisses sont fausses, et pourtant, l'argument reste toujours valide, puisque si les prémisses étaient toutes deux vraies, elle mèneraient à une conclusion vraie également.

(d) « Napoléon était français ; tous les français sont européens ; donc Hitler était Autrichien. » – Les prémisses peuvent être vraies même si la conclusion ne l'est pas : donc l'argument est **non valide**, même si dans ce cas particulier, les trois phrases sont vraies.

(e) « Si Napoléon avait était chinois, alors il aurait été asiatique ; Napoléon n'était pas asiatique ; donc il n'était pas chinois. » – Il s'agit d'une forme de raisonnement que l'on appelle « conversion » (cf. p. 121) : de « si p, alors q », on peut conclure « si $\neg q$, alors $\neg p$ » ; si le conséquent est faux, l'antécédent ne peut pas être vrai, sinon toute l'implication serait fausse ; donc **valide**.

(f) « Le réalisme naïf nous amène à la physique et la physique, si elle est vraie, nous montre que le réalisme naïf est faux. Donc le réalisme naïf, s'il est vrai, est faux ; alors il est faux » – il s'agit d'un raisonnement par réduction à l'absurde (*reductio ad absurdum*, cf. p. 24) (au moins si « amène » est interprété comme « implique ») de la forme « si p, alors $\neg p$; donc $\neg p$ ». Une proposition qui implique sa propre fausseté doit être fausse (si elle est vraie, elle est fausse ; si elle est fausse, elle est aussi fausse ; elle est ou bien vraie ou fausse ; alors elle est fausse) : **valide**.

(g) « S'il pleut, on annulera le pique-nique. S'il ne pleut pas, Marie insistera pour aller à la plage, alors le pique-nique sera annulé. Ou bien il pleuvra ou bien il ne pleuvra pas. Donc le pique-nique sera annulé. » – Il s'agit de ce que l'on appelle un « dilemme constructif »(la forme de notre toute première preuve, à la p. 2). Il n'y a que deux valeurs de vérité (il pleut ou non), et toutes deux rendent la conclusion « le pique-nique sera annulé » vraie : **valide**.

(h) « « Dieu existe. » – « Pourquoi ? » – « La Bible le dit. » – « Mais pourquoi penses-tu que tout ce qui est dans la Bible est vrai ? » – « Parce que la Bible est la parole de Dieu. » – « Et comment sais-tu cela ? » – « C'est ce qui est dit dans la Bible. » » Ce raisonnement est circulaire : pour que sa

PROOF

conclusion soit vraie (que Dieu existe), il faut que sa prémisse « la Bible est la parole de Dieu. » soit vraie, or cette prémisse repose sur la conclusion « Dieu existe. ». En effet, « la Bible est la parole de Dieu. » ne peut être vrai que si « Dieu existe. » est vrai. La vérité de la conclusion repose donc sur sa propre vérité, considérée comme prémisse. C'est pour cela que l'argument ne peut pas convaincre et n'est pas solide : il faut être *déjà* convaincu de sa conclusion pour accepter la prémisse (cf. p. 86 à la sct. 3.6 pour en savoir plus). Logiquement, cependant, l'argument *est* **valide** : la conclusion s'ensuit des prémisses.

Question 1.5 (2 points) Lesquelles des phrases suivantes expriment des affirmations vraies ?

(a) « L'*Iliade* a originalement été écrite en français. » est **faux**, parce que l'*Iliade* a été écrite en grec ancien.

(b) « « L'*Iliade* » est un poème épique. » est **faux**, parce que le *mot* « l'*Iliade* » n'est pas un poème épique.

(c) « Soit l'expression « philosophie » commence par des guillemets, soit « « philosophie » » commence par la lettre « p ». » est **faux**, parce que « philosophie » commence par un « p » et non pas des guillemets et parce que « « philosophie » » en fait commence par des guillemets.

(d) « 2+2=4 est une vérité mathématique. » est **faux**, parce que ce n'est pas une phrase grammaticalement correcte : elle a la même forme logique que « il pleut est l'amie de Sam » : une phrase, suivie d'un prédicat (qui a besoin d'un nom pour former une phrase).

(e) « « Berne » et « la capitale de la Suisse » mentionnent la même ville. » est **vrai**, puisque Berne est la capitale de la Suisse.

(f) « « le 45ème président des États-Unis » est « le mari de Melania Trump ». » est **faux**, puisque les deux expressions ne sont pas identiques.

(g) « La phrase qui précède ne parle pas de Donald Trump. » est **vrai**, bien que le mari de Melania (et aussi le 45ème président des États-Unis) est Donald Trump. Ce n'est que de son nom est non pas de la personne que nous parlons dans la phrase (f).

(h) « La phrase qui précède ne parle pas de Donald Trump. » est **faux**, parce que la phrase (g) parle de Barack Obama est dit de lui qu'il n'est pas mentionné dans la phrase (f).

Question 1.6 (2 points) Mettons des guillemets :

(a) Même si « *x* » est la 24ème lettre de l'alphabet, quelques savants ont dit que *x* est l'inconnu. – Ils n'ignoraient pas la lettre, mais c'est la lettre qui fait partie de l'alphabet. La première occurrence utilise le métalangage pour se référer à la lettre « *x* », la deuxième parle directement de *x*, quoi que cela soit, considérée comme inconnue.

(b) (cf. Lepage, 2001, 16) Bien que « « Aristote » » soit un nom d'« Aristote » et que « Aristote » soit un nom d'Aristote, Aristote n'est pas un nom, c'est un homme. – Le troisième mot de la phrase est un nom du huitième et le onzième est un nom d'Aristote, mais Aristote est un philosophe et non pas un mot (ni, par conséquent, un nom). La première occurrence de « Aristote » a été mise entre double guillemets pour référer à la deuxième occurrence de « Aristote », cette fois entre guillemets simples. Le même processus a été répété sur la troisième et quatrième occurrence. En revanche, lorsqu'il est affirmé que « Aristote n'est pas un nom », c'est le philosophe même qui est désigné, et aucun guillement n'est alors à ajouter.
Une autre solution un peu moins intéressante transforme la phrase en la suivante : « Bien que « Aristote » soit un nom d'Aristote et que « Aristote » soit un nom d'Aristote, Aristote n'est pas un nom, c'est un homme. »

PROOF

(c) « Philipp » est mon nom et bien que je sache ce qu'est la philosophie, je n'ai jamais compris ce que les gens veulent dire par « philosophie. » – « Philipp » est en effet mon prénom – c'est un mot (la suite des lettres < « P », « h », « i », « l », « i », « p »,« p » >). Lorsque je parle de la philosophie, je désigne quelque chose qui est désigné par le mot « philosophie ». En revanche, lorsque certaines personnes utilisent également le mot « philosophie », je ne sais pas ce qu'elles désignent par là (par ex. en parlant de la ‹ philosophie › de leur entreprise). Je mentionne donc le mot même, ne sachant pas ce qu'il désigne.

(d) « Italo Svevo » est un pseudonyme de Ettore Schmitz. – Celui qui a le pseudonyme est un homme ; le pseudonyme lui-même est un mot.

(e) Je m'appelle « Philipp ». – C'est peut-être un cas limite : je préfère de mettre les guillemets pour préserver la homogénéité de la logique du verbe « appeler » : dans les usages du type « Elle s'appelle « Marie » mais je préfère de l'appeler « Maroushka » », le deuxième nom de la personne doit être entre guillemets (puisque c'est le nom et non pas la personne qui est le complément direct du verbe), alors je préfère en mettre aussi pour le premier.

(f) Dans la langue française,
n'est-il pas amusant de constater que
« mot » est bien un mot
que « nom » est un mot et un nom
que « adjectif » est un mot, un nom et un adjectif
tandis qu'« adverbe » n'est pas un adverbe ?

Question 1.7 (1 point) (Smullyan, *The Lady and the Tiger*, 1982b, 3) Cent politiciens sont réunis dans une salle. Chacun est soit honnête soit corrompu, mais personne n'est les deux. Nous savons les faits suivants :

1. Au moins un politicien est honnête.
2. Pour toute paire de politiciens dans la salle, au moins un d'entre eux est corrompu.

Pouvons-nous conclure de ces informations combien des politiciens sont honnêtes et combien sont corrompus ? Si oui, combien le sont-ils ?

Solution : Un seul est honnête, et 99 sont corrompus.
Premier argument : Nous savons qu'au moins un politicien est honnête. Appelons-le « Sam ». Nous choisissons un autre politicien au hasard, par exemple, Jean. De la paire de Sam et Jean, nous savons qu'au moins un est corrompu. Sam ne l'est pas, donc Jean doit l'être. Le choix de Jean était arbitraire, donc ce que vaut pour Jean, vaut également pour tous les autres 98 politiciens. Donc ils sont tous corrompus.
Deuxième argument : Le deuxième bout d'information nous dit que pour chaque deux, ils ne sont pas les deux honnêtes. Alors il n'y a pas deux qui sont honnêtes, donc au maximum un est honnête. Le première bout d'information nous dit qu'au minimum un est honnête. Donc exactement un politicien est honnête.

Question 1.8 (3 points) Utilisons la distinction entre la sémantique et la pragmatique pour expliquer la différence entre les deux assertions des trois paires :

(a) « Il pleut, et elle fait une promenade. » et « Il pleut, mais elle fait une promenade. » : Les deux phrases ont les mêmes conditions de vérité, c'est-à-dire l'une est vraie si et seulement si l'autre l'est aussi. Il n'y a donc pas de différence sémantique entre les deux phrases. Elles se distinguent, par contre, sur un plan pragmatique : l'utilisation de la dernière, mais pas de la première, laisse

PROOF

entendre que le locuteur voit une tension entre la pluie et la promenade (cf. p. 44). Il communique ceci par son choix de mots, sans pour autant laisser dépendre la vérité de sa phrase de l'existence d'un tel contraste.

(b) « Il pleut, et il ne pleut pas. » et « Il pleut, et je ne crois pas qu'il pleut. » : « Il pleut et il ne pleut pas » est une contradiction de la forme « $p \wedge \neg p$ » – les deux conjoints ne peuvent pas être vrais ensembles, la phrase conjonctive est fausse quelle que soit la valeur de vérité de « il pleut » – elle est donc fausse pour des raisons de sémantique. Pour des raisons sémantiques, c'est-à-dire qu'en vertu des significations de « $\wedge$ » et de « $\neg$ », cette phrase ne peut pas être vraie. Une autre question qui ne concerne pas la sémantique est celle de savoir comment interpréter le statut des contradictions. Dans le *Tractatus*, Wittgenstein défendait une position selon laquelle les tautologies et les contradictions ne nous disent rien (puisque leur vérité ou fausseté n'exclut aucune possibilité), mais maintient qu'elles nous montrent quelque chose. Il s'agit ici d'une thèse philosophique qui n'est pas une conséquence directe de leur statut sémantique. On ne peut donc pas dire que des phrases de la forme « $p \wedge \neg p$ » n'ont pas de sens (au moins sans dire beaucoup plus) – au contraire, il s'agit d'une contradiction, expression qui a un sens bien définie (elle est fausse selon toutes les possibilités d'attribuer une valeur de vérité à ses constituants). « Il pleut, mais je ne le crois pas » n'a pas la forme « $p \wedge \neg p$ », mais la forme « $p \wedge$ je ne crois pas que p » – une assertion de cette phrase est étrange et, d'après certains, viole le principe selon lequel il faut croire ce qu'on affirme – mais elle est insolite pour des raisons de pragmatique et non pas des raisons de sémantique. La conjonction peut être vraie, par exemple dans des cas où je n'ai formé aucune opinion sur le temps qu'il fait (parce que je dors, par exemple). La discussion autour de ces questions est très vivante et le bon diagnostique du « paradoxe de Moore » est controversé (cf. par ex. Hintikka, 1962).

(c) « Je sais que je ne sais rien. » et « Qui ne sait rien sait au moins ceci. » : Il s'agit de deux contradictions, mais de types différents. « Je sais que je ne sais rien. » ne peut pas être vraie parce qu'on ne peut savoir que des vérités. Il s'ensuit donc de la vérité (supposée) que je sais que je ne sais rien que je ne sais rien, et alors que je ne sais pas que je ne sais rien. Le monde ne peut pas être tel que « Je sais que je ne sais rien. » est vraie. Ceci est aussi le cas pour « Qui ne sait rien sait au moins ceci. », mais ici nous pouvons (donc devrions) conclure que si la phrase est vraie, alors il n'y a personne qui ne sait rien et le terme singulier « qui ne sait rien » ne dénote pas. Il s'agit d'un cas analogue au barbier qui rase tous les hommes de son villages qui ne se rasent pas eux-mêmes (et au cas de l'ensemble qui contient tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes, cf. sct. 4.3) : de telles entités ne peuvent pas exister. La différence entre sémantique et pragmatique intervient au niveau du diagnostique de la source des deux contradictions : même si la première est clairement d'ordre sémantique, la deuxième peut être interprétée de manière pragmatique (de la manière de Strawson, opposée à la théorie de Russell) : d'après ces théoriciens, la présupposition que les termes singuliers qu'on utilise ont une référence est de l'ordre pragmatique, non sémantique (cf. p. 238 et suivantes pour en savoir plus).

Question 1.9 (1 point) Décrivons quelques différences fondamentales entre des langues naturelles et des langues formelles :

1. Dans une langue naturelle, les règles qui servent à former des expressions complexes à partir d'expressions plus simples sont sensitives à la signification de ces expressions ; dans une langue formelle, leur applicabilité ne dépend que de critères syntaxiques.
2. Les langues naturelles sont des langues parlées et les langues formelles ne le sont pas.

PROOF

3. La maîtrise d'une langue naturelle requiert des connaissances de son aspect pragmatique ; la pragmatique ne joue pas de rôle pour une langue formelle.
4. Les langues formelles sont construites de manière explicite, en énumérant leur vocabulaire primitif et les règles récursives qui permettent de produire des expressions complexes ; les expressions d'une langue naturelle, au contraire, ont leur forme logique de manière implicite – il faut les 'régimenter' pour la rendre explicite.
5. Dans les langues naturelles, il y a des cas d'ambiguïtés syntaxiques, ce qui est exclu dans les langues formelles.
6. Des phénomènes d'indexicalité sont possibles dans de nombreuses langues naturelles, mais ils sont normalement exclus dans les langues formelles.

Le principe de compositionnalité ne s'applique en partie aux langues naturelles, mais ses règles sont complexes et n'assurent pas le transfert des valeurs de vérité. Dans les langues formelles dites « extensionnelles », en revanche, le principe de vérifonctionnalité accompagne le principe de compositionnalité, et les valeurs de vérité des composants sont donc transmises aux regroupements plus complexes, selon la signification des connecteurs reliant ces composants.

Question 1.10 (3 points) Est-ce que les arguments suivants sont valides ? Si oui, sont-ils *logiquement* valides ?

(a) « Tom est célibataire ou anarchiste. Il n'est pas anarchiste. Donc il est célibataire. » – **Logiquement valide** et de la forme « p ou q ; $\neg q$; donc p ».

(b) « Tom est célibataire ou végétarien. Il n'est pas végétarien. Donc il n'est pas marié. » – **Matériellement valide** ; il s'ensuit par une inférence logiquement valide que Tom est célibataire. Qu'il n'est pas marié s'ensuit en vertu de la signification du prédicat « ...est célibataire » (en vertu du fait que toute personne qui est célibataire est non mariée).[1]

(c) « Tom est célibataire ou banquier. Il n'est pas célibataire. Donc il n'est pas communiste. » – Un argument qui peut être convaincant, mais qui n'est **pas valide**. Il ne s'ensuit seulement que Tom est banquier. Il est donc peu probable, mais toujours possible, qu'il est aussi communiste. Autrement dit : Comparé à « célibataire » et « marié », « banquier » et « communiste » ne sont pas contradictoires.

17.2 Les connecteurs propositionnels

Question 2.1 (2 points) Les tables de vérité correctes sont les suivantes :

(a) Première table :

p	q	$\neg p$	$q \rightarrow \neg p$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	**V**

[1] Il est, par contre, tout à fait possible de nier la converse de cette affirmation sur la signification de « célibataire » : si nous ne l'utilisons (comme le mot anglais « single » que pour ceux qui ne sont pas en couple, mariés ou non), alors « célibataire » et « marié » ne sont plus contradictoires, mais seulement contraires (cf. p. 78) : on ne peut être les deux (en même temps), mais on peut être ni l'un ni l'autre (si on est en couple, mais on n'est pas marié). Il reste vrai, cependant, que d'être célibataire est une condition suffisante (même si peut-être pas nécessaire) pour être non marié

PROOF

(b) Deuxième table :

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \vee r$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	**F**
F	F	V	V	F	V

Question 2.2 (2 points) Faisons des tables de vérité pour les phrases données :

(a) Première phrase :

(i) Première méthode :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	F	**V**
V	F	F	V	F	**V**
F	V	V	F	F	**V**
F	F	V	V	V	**F**

(ii) Deuxième méthode :

$\neg$	$(\neg$	p	$\wedge$	$\neg$	$q)$
V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F
V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F

(iii) On voit donc que « $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ » a la même table de vérité que « $p \vee q$ ».

(b) Deuxième phrase :

(i) Première méthode :

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
V	V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	V	V	F	V	**V**
V	F	V	V	V	F	V	V	**V**
V	F	F	F	F	F	F	F	**V**
F	V	V	V	F	F	F	F	**V**
F	V	F	V	F	F	F	F	**V**
F	F	V	V	F	F	F	F	**V**
F	F	F	F	F	F	F	F	**V**

PROOF

(ii) Deuxième méthode :

$(p$	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$r))$	$\leftrightarrow$	$((p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$(p$	$\wedge$	$r))$
V	V	V	V	V	**V**	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	F	**V**	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	**V**	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	**V**	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	**V**	F	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	**V**	F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	V	V	**V**	F	F	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	**V**	F	F	F	F	F	F	F

(iii) Du fait qu'il n'y a que des « V » dans la colonne du connecteur principal, on voit que « $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ » est une tautologie.

Question 2.3 (2 points) Supposons que « p » abrège « Maria aime Marc », « q » abrège « Guillaume adore Chantal » et « r » remplace « Laura apprécie Jean-Pascal ». Jean dit « $\neg(p \wedge \neg q)$ » et Janine dit « $p \wedge \neg(q \wedge \neg r)$ ». Si Jean et Janine ont les deux raison, qui a des sentiments positifs envers qui ?

1. (2 points, 1 pour le raisonnement, 1 pour la réponse) :
   a) Première méthode : Si Jean a raison, alors il n'est pas le cas que, à la fois, « p » est vrai et « q » est faux (la deuxième ligne du premier tableau reçoit la valeur « faux »). Si Janine a raison, alors il n'est pas le cas que « p » et « q » sont vrais et « r » est faux (deuxième ligne du deuxième tableau), ni il est le cas que « p » est faux (lignes 5 à 8 du deuxième tableau). Alors « p » est vrai. Mais alors « q » ne peut pas être faux (autrement Jean aurait tort). Alors « q » doit être vrai. Alors « r » doit aussi être vrai (à cause de ce que dit Janine). Alors Maria aime Marc, Guillaume adore Chantal et Laura apprécie Jean-Paul.
   b) Deuxième méthode : Construisons les tables comme suit :

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

p	q	r	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$\neg(q \wedge \neg r)$	$p \wedge \neg(q \wedge \neg r)$
V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	F	V	F

PROOF

Faisons un tableau qui combine les deux :

p	q	r	$p \wedge \neg(q \wedge \neg r)$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$(p \wedge \neg(q \wedge \neg r)) \wedge (\neg(p \wedge \neg q))$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F

On voit que toutes les lignes à part la première reçoivent la valeur « F ». Si Jean et Janine ont les deux raison, alors « p », « q » et « r » sont toutes vrais. Alors Maria aime Marc, Guillaume adore Chantal et Laura apprécie Jean-Paul.

Question 2.4 (1 point) Si ces deux phrases sont vraies :

(i) Si Jean-Paul est à la maison, il est avec Jean-Pascal.

(ii) Si Jean-Paul est à la maison, il n'est pas avec Jean-Pascal.

Alors où est Jean-Paul ?

- D'une manière informelle : Si Jean-Paul était à la maison, il serait avec Jean-Pascal (clause (i)) et il ne serait pas avec Jean-Pascal (clause (ii)). Il n'est pas possible d'être avec Jean-Pascal tout en n'étant pas avec Jean-Pascal. Alors Jean-Paul n'est pas à la maison.
- Par une règle d'inférence : le schéma de *réduction à l'absurde* nous permet de conclure « $\neg p$ » de « $p \to q$ » et de « $p \to \neg q$ ». Alors Jean-Paul n'est pas à la maison.
- Par une table de vérité :

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$(p \to q) \wedge (p \to \neg q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

On voit que dans les deux cas où les deux ont raison (troisième et quatrième ligne), « p » est faux. Alors Jean-Paul n'est pas à la maison.

Question 2.5 (4 points) Montrons que les phrases données ont les mêmes tables de vérité :

Solution :

1.

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg\neg p$
V	F	V	F
F	V	F	V

2.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

PROOF

3.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

4.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Question 2.6 (2 points) Déterminons si « $((p \wedge q) \vee r) \leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$ » est une tautologie :

$((p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$r)$	$\leftrightarrow$	$((p$	$\vee$	$r)$	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$r))$
V	V	V	V	V	**V**	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	F	**V**	V	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	**V**	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	**V**	V	V	F	F	F	F	F
F	F	V	V	V	**V**	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	**V**	F	F	F	F	V	V	F
F	F	F	V	V	**V**	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	**V**	F	F	F	F	F	F	F

Question 2.7 (2 points) Il y en a beaucoup de phrases équivalentes à « $\neg(p \rightarrow \neg q)$ » (en fait, une infinité). La grande majorité sont des phrases plus complexes, par ex. toutes les phrases qui rajoutent un conjoint tautologique (comme, par ex. : « $\neg(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \vee \neg q)$ ») ou un disjoint contradictoire (comme, par ex. : « $\neg(p \rightarrow \neg q) \vee (q \wedge \neg q)$ »).

En voici quelques-unes plutôt simples :

1. la phrase en question elle-même, « $\neg(p \rightarrow \neg q)$ », est logiquement équivalente à elle-même ;
2. par la définition de l'implication, nous voyons que « $p \wedge \neg\neg q$ » est une phrase équivalente, alors (par l'élimination de la négation) « $p \wedge q$ » l'est également ;
3. par la même définition, nous voyons que « $\neg(\neg p \vee \neg q)$ » est équivalent, alors (par une application des lois de Morgan) « $p \wedge q$ » l'est également ;
4. par l'application de la conversion, nous obtenons « $\neg(\neg q \rightarrow \neg p)$ ».

Question 2.8 (1 point) (Smullyan, *The Riddle of Scheherazade*) Trois hommes sont accusés d'un crimes. Ils font les assertion suivantes :

Jean-Maurice : « Je suis innocent. »

Jean-Philippe : « Jean-Baptiste est innocent. »

Jean-Baptiste : « Non, je ne le suis pas. »

Plus tard, deux ont confessé d'avoir menti. Qui a commis le crime ? **Solution :** Deux des trois Jeans font des affirmations contradictoires (Jean-Philippe : « Jean-Baptiste est innocent » ; Jean-Baptiste : « Jean-Baptiste n'est pas innocent ») – au moins une doit être vraie, alors ils n'ont pas menti les deux. Si deux des trois Jeans ont mentis, le premier, Jean-Maurice, a certainement menti. Alors il n'a pas dit la vérité. Ce qu'il a dit est qu'il était innocent. Alors il est coupable.

Question 2.9 (4 points) Discours politique.

PROOF

1. Pour la formalisation, on a (cf. la première question des exercises 1 à la p. 353) :

Si les États-Unis ...et le prix ..., la Syrie ...	$\rightsquigarrow$	$\mathbf{A} := (\neg p \wedge q) \rightarrow r$
Si la Syrie ..., le Liban ...	$\rightsquigarrow$	$\mathbf{B} := \neg r \rightarrow s$
Si les États-Unis ..., le prix ...et la Syrie ...	$\rightsquigarrow$	$\mathbf{C} := \neg p \rightarrow (q \vee r)$
Si les Syrie..., alors les États-Unis ...	$\rightsquigarrow$	$\mathbf{D} := r \rightarrow p$

2. Les tables de vérités sont les suivantes :
   a) Pour les trois premières prémisses, on a :

p	q	r	s	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	**A**	$\neg r$	**B**	$\neg p$	$q \vee r$	**C**
V	V	V	V	F	F	V	F	V	F	V	V
V	V	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	F	V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	F

   b) Pris ensemble, ceci nous donne :

p	q	r	s	**A**	**B**	**C**	**D**	$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V	V	F
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	V	V	F
F	V	F	F	F	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	F	F

PROOF

F	F	F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F	F	V	F

3. Pour trouver un discours équivalent, il y a différentes manières de procéder :
   - La solution élégante : Nous observons dans la table de vérité ci-dessus que le discours est faux si et seulement si une des lignes 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 ou 16 est le cas. Ce sont donc les cas qu'il faut exclure. Pour exclure les lignes 9 à 16, il suffit de postuler la vérité de « p ». Pour exclure les lignes 4 et 8, nous postulons la vérité de « $r \vee s$ ». Pris ensemble, nous obtenons donc « $p \wedge (r \vee s)$ » : « les États-Unis attaquent l'Iran et soit la Syrie soit le Liban attaque l'Israël ».
   - La solution ‹ brute › : Le discours est vrai si seulement si une des lignes 1, 2, 3, 5, 6 ou 7 est le cas. Le discours donc dit qu'une de ces lignes représente la réalité comment elle est. Il faut alors juste en faire la disjonction de toutes ces possibilités :

     $$(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s)$$
     $$\vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s)$$

   - On voit ainsi que les deux solutions sont équivalentes : Dans la longue disjonction de la solution brute, on voit que certains disjoints ne diffèrent en ce qu'ils contiennent une seule phrase atomique une fois positivement et une fois négativement : le premier et le deuxième, ainsi que le quatrième et le cinquième, ne diffèrent que en rapport à « s », et le troisième et le sixième ne se distinguent que par rapport à « q ». On peut donc les laisser tomber :

     $$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

     On fait la même chose avec le premier et le troisième disjoint :

     $$(p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r \wedge s)$$

     On applique la loi de distributivité (cf. la leçon 3, à la p. 77) :

     $$(p \vee (p \wedge \neg r \wedge s)) \wedge (r \vee (p \wedge \neg r \wedge s))$$

     Nous voyons que le premier conjoint est vrai si et seulement si la phrase atomique « p » est vraie et que le deuxième peut être simplifié :

     $$p \wedge (r \vee (p \wedge s))$$

     Dans le deuxième conjoint, nous n'avons plus besoin de requérir que p, puisque la vérité de « p » est déjà assurée avec le premier conjoint :

     $$p \wedge (r \vee s)$$

   - Une solution directe : on transforme les quatre propositions initiales à l'aide de l'équivalence logique $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner \Rightarrow \ulcorner \neg \phi \vee \psi \urcorner$ en disjonctions :

PROOF

(i)	$(\neg p \wedge q) \to r$	$\rightsquigarrow$	$\neg(\neg p \wedge q) \vee r$
(ii)	$\neg r \to s$	$\rightsquigarrow$	$\neg\neg r \vee s$
(iii)	$\neg p \to (q \vee r)$	$\rightsquigarrow$	$\neg\neg p \vee (q \vee r)$
(iv)	$r \to p$	$\rightsquigarrow$	$\neg r \vee p$

On utilisant une des lois de Morgan (cf. p. 75), (i) peut encore être simplifié davantage, obtenant « $p \vee \neg q \vee r$ ». On observe alors que (i), (iii) et (iv) contiennent tous « p » comme disjoint. Donc : si « p » est vrai, alors les autres le sont également. Pour (ii), on a besoin de « $r \vee s$ ». On essaie alors avec « $p \wedge (r \vee s)$ » et on remarque que cette phrase à la même table de vérité que le discours entier.

4. Pour le discours opposé (contradictoire), beaucoup transforment « $p \to q$ » en « $\neg p \to \neg q$ ». Ces deux affirmations, pourtant, ne sont pas contradictoires :

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg q$	$(p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V

On voit que si « p » et « q » sont soit les deux vrais, soit les deux faux, les deux implications matérielles sont vraies.
La négation (= opposition contradictoire) de « les États-Unis attaquent l'Iran et soit la Syrie soit le Liban attaque l'Israël » (« $p \wedge (r \vee s)$ ») est « $\neg(p \wedge (r \vee s))$ », ce qui se simplifie, par les lois de Morgan en « $\neg p \vee (\neg r \wedge \neg s)$ » (« soit les États-Unis n'attaquent pas l'Iran, soit ni la Syrie ni le Liban attaquent l'Israël ») et, par la définition de l'implication, en « $p \to (\neg r \wedge \neg s)$ » : « si les États-Unis attaquent l'Iran, ni la Syrie ni le Liban n'attaque l'Israël ».

17.3 Relations logiques et inférences logiques

Question 3.1 (2 points) (d'après Cartwright (1987, 257)) Mettons les guillemets ou demi-crochets nécessaires pour que les phrases suivantes deviennent vraies, ignorant l'accord des pronoms.

Mettre des demi-crochets au lieu des guillemets est toujours possible : ⌜ Socrate⌝ est la même chose que « Socrate » (cf. p. 71).
Lorsque nous avons des variables méta-linguistiques (« ϕ », « ψ »), cependant, il est nécessaire de mettre les demi-crochets.

(a) Il y a différentes solutions :
  (i) Marseille est au sud de Paris, mais « Paris » n'est pas au nord de « Marseille ».
  (ii) Marseille est au sud de Paris, mais « Paris » n'est pas au nord de Marseille.
  (iii) Marseille est au sud de Paris, mais Paris n'est pas au nord de « Marseille ».

(b) En fonction de (1a), il y a aussi différentes solutions :
  (i) Le dernier mot de la solution optimale à la question (a) est « « Marseille » ».
  (ii) Le dernier mot de la solution optimale à la question (a) est « Marseille ».

(c) De même, il y a différentes solutions (une paire de guillemets plus qu'en (b) :
  (i) Le nom du dernier mot de la solution optimale à la question (a) est « « « « Marseille » » » ».

PROOF

(ii) Le nom du dernier mot de la solution optimale à la question (a) est « « Marseille » ».

(d) Il y a différentes solutions :
   (i) Pour toute phrase ϕ, le dernier mot de « le dernier mot de ϕ contient plus d'une syllabe » contient plus d'une syllabe.
   (ii) « Pour toute phrase ϕ, le dernier mot de « le dernier mot de ϕ contient plus d'une syllabe » » contient plus d'une syllabe.

(e) Voici deux solutions :
   (i) La femme de Trump appelle Trump « Trump ».
   (ii) La femme de Trump appelle « Trump » « « Trump » ».

(f) Le nombre de solutions est également illimité :
   (i) Il n'est pas le cas que la femme de Trump appelle Trump par le nom de « Trump ».
   (ii) Il n'est pas le cas que la femme de Trump appelle Trump par le nom de « « Trump » ».
   (iii) Il n'est pas le cas que la femme de Trump appelle « Trump » par le nom de Trump (bien, espérons).

(g) Cette phrase est incorrigible, *voir ci-dessous* : il n'est pas possible de rajouter des guillemets ou des crochet de sorte que le résultat devienne ni faux ni dénoué de sens.

(h) Le dernier mot de (1g) est « vulgaire ». [cette phrase n'est donc pas incorrigible]

(i) Pour satisfaire la prédicat en question (= être la première lettre de l'alphabet grec), une chose doit être une *lettre*, à savoir la lettre « α » :

> « La première lettre de l'alphabet grec est α » est satisfaite par un objet β seulement si β est identique à « α ».

(j) La tautologie en question est : $\ulcorner(\phi \to \neg\phi) \to (\phi \to (\phi \wedge \neg\phi))\urcorner$. On a donc

> Pour toute phrase ϕ, $\ulcorner\phi$ implique $\neg\phi\urcorner$ implique $\ulcorner\phi$ implique ϕ et $\neg\phi\urcorner$.

En général, l'itération des demi-crochets de Quine n'a aucun effet : « $\ulcorner\phi \to \ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner\urcorner$ » est un nom de la même formule que « $\ulcorner\phi \to (\phi \wedge \psi)\urcorner$ » : si la première expression désigne « $p \to (p \wedge q)$ », la deuxième le fait également.

Question 3.2 (1 point) Mettons les guillemets nécessaires dans le *limerick* que George Boolos (1995, 392) attribue à Richard Cartwright (cf. p. 29).

Solutions : Voici une solution, utilisant des guillemets anglais :

> According to W. Quine
> Whose views on quotation are fine,
> “Boston” names Boston,
> And “ “Boston” ” names “Boston”
> But 9 doesn't designate 9.

En voici une autre :

> According to W. Quine
> Whose views on quotation are fine,
> “Boston” names Boston,
> And “Boston” names Boston,
> But “9” doesn't designate “9”.

PROOF

Nous pouvons également compter comme correctes les solutions qui mettent

> But “9” doesn’t designate 9.

Ceci n’est pas dû à l’usage des guillemets, mais aux opinions que Quine a défendues en philosophie des mathématiques : d’après le jeune Quine (Quine and Goodman, 1947), les noms de nombres ne désignent pas, parce qu’il n’a pas de nombres (plus tard, il a changé d’avis).

Question 3.3 (2 points) Appelons une ligne du problème 1 « *incorrigible* » s’il n’y a aucune manière de mettre des guillemets et des demi-crochets sans que le résultat devienne faux ou du non-sens. Il semble que non seulement (i) et (ii) sont vrais, mais aussi (iii) :
(i) **(1g)** est incorrigible.
(ii) **(1h)** n’est pas incorrigible.
(iii) **(1g)** est identique à **(1h)**.
Mais au moins un de (i), (ii) et (iii) doit être faux. Autrement nous aurions une violation du principe que si x est identique à y, alors tout ce qui est vrai de x doit aussi être vrai de y. Lequel est faux ? Et pourquoi ?

Solution : Il est clair que les assertions (i) et (ii) sont vraies. **(1-g)** est incorrigible. Toutes les phrases suivantes ne sont pas vraies :
(1g+) Le dernier mot de **(1g+)** est « vulgaire ».
(1g∗) « Le dernier mot de **(1g∗)** » est vulgaire.
(1g∗∗) « Le dernier mot de **(1g∗∗)** » est « vulgaire ».
La première n’est pas vraie parce que si elle était vraie, le dernier mot de **(1g+)** serait celui dénoté par « vulgaire » et alors un mot sans guillemets. Ce qu’elle dit est vrai de **(1g)**, mais elle ne parle pas de cette autre phrase, mais d’elle-même. La deuxième est fausse parce que l’expression en question n’est pas vulgaire. La troisième est fausse, parce que le dernier mot de « Le dernier mot de **(1g∗∗)** » est « **(1g∗∗)** » et n’est pas « vulgaire ». En bref, même s’il y a des expressions, dans les langues naturelles qui sont « sémantiquement fermées » (cf. la n. 10 à la p. 63 et la sct. 13.6) comme « ajouté à sa propre citation »(cf. p. 29), « vulgaire » n’est pas un tel mot.

Le principe en question est indiscutable : il s’agit de l’indiscernabilité des choses identiques, la direction moins controversée de la fameuse « loi de Leibniz » qui dit que deux choses sont identiques si et seulement si elles partagent toutes leurs propriétés (cf. sct. 10.7).[2]

La question difficile est de comment justifier le rejet de (iii). Voici quelques options (toutes controversées) :

1. L’incorrigibilité est une propriété de phrases-token et non pas de phrases-type.[3] Même si les types (les structures grammaticales, suites de lettres) de **(1g)** et **(1h)** sont identiques, leurs token (les instanciations concrètes imprimées sur une page) ne le sont pas.

[2] Cette affirmation peut paraître paradoxale (comment *deux* choses peuvent être identiques ?), mais en fait elle ne l’est pas : l’usage de variables permet de la clarifier. Dire que deux choses sont identiques si et seulement si elles sont indiscernables revient à dire que, pour tout x et tout y, $x = y$ si et seulement si x et y ont les mêmes propriétés :

$$\forall x, y \forall F\,(x = y \leftrightarrow (Fx \leftrightarrow Fy))$$

L’implication de gauche à droite est appelée « indiscernabilité des identiques », celle de droite à gauche « identité des indiscernables ».

[3] Il s’agit d’une ambiguïté dans le mot « mot » dont nous reparlerons à la p. 232.

PROOF

2. Deux phrases ne peuvent pas être identiques si elles appartiennent à différents niveaux de langage : (1g) appartient au langage-objet, (1h) au métalangage ; donc les deux phrases ne sont pas identiques.
3. Les propriétés sémantiques des deux phrases sont différentes, parce que l'auto-référentialité est une propriété sémantique. Les phrases « Socrate aime Socrate » et « Socrate aime lui-même » diffèrent sémantiquement.
4. « ...est vulgaire » crée un contexte intensionnel, comme le fait « ...est ainsi appelé à cause de sa taille » (cf. p. 224).

Question 3.4 (5 points) Vérifions la validité des schémas d'inférence suivantes, en montrant que les implications matérielles correspondantes sont des tautologies.

(a) Transitivité : les inférences du type « $\dfrac{p \to q \quad q \to r}{p \to r}$ » sont valides si et seulement si

$$\vDash ((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$$

Nous démontrons ceci ainsi :

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

(b) • Augmentation$_1$: les inférences du type « $\dfrac{p \to r \quad q \to r}{(p \vee q) \to r}$ » sont valides si et seulement si

$$\vDash ((p \to r) \wedge (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r)$$

Nous démontrons ceci ainsi :

p	q	r	$p \to r$	$q \to r$	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \to r$	$((p \to r) \wedge (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	F	V	V

PROOF

- Augmentation$_2$: les inférences du type « $\dfrac{p \to r}{(p \wedge q) \to r}$ » sont valides si et seulement si

  $\vDash (p \to r) \to ((p \wedge q) \to r)$

  Nous démontrons ceci ainsi :

p	q	r	$p \to r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	$(p \to r) \to ((p \wedge q) \to r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

(c) Reductio$_1$: les inférences du type « $\dfrac{p \to \neg p}{\neg p}$ » sont valides si et seulement si

$\vDash (p \to \neg p) \to \neg p$

Nous démontrons ceci ainsi :

p	$\neg p$	$p \to \neg p$	$(p \to \neg p) \to \neg p$
V	F	F	V
F	V	V	V

Reductio$_2$: les inférences du type « $\dfrac{\dfrac{p \to q}{p \to \neg q}}{\neg p}$ » sont valides si et seulement si

$\vDash ((p \to q) \wedge (p \to \neg q)) \to \neg p$

Nous démontrons ceci ainsi :

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$p \to \neg q$	$(p \to q) \wedge (p \to \neg q)$	$\neg p$	$((p \to q) \wedge (p \to \neg q)) \to \neg p$
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V

(d) Simplification : les inférences du type « $\dfrac{p \wedge q}{p}$ » sont valides si et seulement si

$\vDash (p \wedge q) \to p$

En voici la table de vérité :

PROOF

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

(e) Ex Falso Quodlibet : les inférences du type « $\dfrac{\neg p}{p \to q}$ » sont valides si et seulement si

$$\vDash \neg p \to (p \to q)$$

La table de vérité :

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \to (p \to q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

(f) Verum Sequitur ad Quodlibet : les inférences du type « $\dfrac{q}{p \to q}$ » sont valides si et seulement si

$$\vDash q \to (p \to q)$$

En voici la vérification :

p	q	$p \to q$	$q \to (p \to q)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	V

(g) Modus ponendo ponens : les inférences du type « $\dfrac{\begin{array}{c}p \to q \\ p\end{array}}{q}$ » sont valides si et seulement si

$$\vDash ((p \to q) \wedge p) \to q$$

Il s'agit d'une tautologie :

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

PROOF

(h) Modus tollendo tollens : les inférences du type « $\dfrac{p \to q \quad \neg q}{\neg p}$ » sont valides si et seulement si

$$\vDash ((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$$

C'est également une tautologie :

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

(i) Modus tollendo ponens (= syllogisme disjonctif) : les inférences du type « $\dfrac{p \vee q \quad \neg q}{p}$ » sont valides si et seulement si

$$\vDash ((p \vee q) \wedge \neg q) \to p$$

La table de vérité :

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$(p \vee q) \wedge \neg q$	$((p \vee q) \wedge \neg q) \to p$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V

(j) Modus ponendo tollens : les inférences du type « $\dfrac{p \mid q \quad p}{\neg q}$ » sont valides si et seulement si

$$\vDash ((p \mid q) \wedge p) \to \neg q$$

La table de vérité :

p	q	$p \mid q$	$(p \mid q) \wedge p$	$\neg q$	$((p \mid q) \wedge p) \to \neg q$
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V

Question 3.5 (3 points) Qu'est-ce qu'une tautologie ? Une contradiction ? Indiquons quels rapports simples il y a entre tautologies, contradictions et la négation :

- Une tautologie est une phrase qui est logiquement vraie, c'est-à-dire qui est vraie peu importent les valeurs de vérité attribuées à ses constituantes propositionnelles.

PROOF

Alternativement : Une tautologie est une phrase qui est une conséquence logique de n'importe quelle phrase.

- Une contradiction est une phrase qui est logiquement fausse, c'est-à-dire qui est fausse peu importent les valeurs de vérité attribuées à ses constituantes propositionnelles.
  Alternativement : Une contradiction est une phrase qui a n'importe quelle phrase comme conséquence logique.
- La négation d'une tautologie est une contradiction. La négation d'une contradiction est une tautologie.

Question 3.6 (2 points) Formulons les lois de distributivité et utilisons des tables de vérités pour montrer qu'elles sont correctes. Les lois de distributivité disent que :

- toute formule qui a la même forme que « $p \vee (q \wedge r)$ » est logiquement équivalente à une formule qui a la même forme que « $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ».
- toute formule qui a la même forme que « $p \wedge (q \vee r)$ » est logiquement équivalente à une formule qui a la même forme que « $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ».

Une autre manière de dire la même chose :

$$\begin{aligned} \ulcorner \phi \vee (\psi \wedge \chi) \urcorner \quad &\iff \quad \ulcorner (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi) \urcorner \\ \ulcorner \phi \wedge (\psi \vee \chi) \urcorner \quad &\iff \quad \ulcorner (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi) \urcorner \end{aligned}$$

Les tables de vérité sont les suivantes :

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

Question 3.7 (1 point) Utilisons une table de vérité pour trouver une équivalence à « $\neg p \to q$ » en

PROOF

utilisant uniquement la barre de Sheffer.

Sachant que « $(\neg p \rightarrow q)$ » est logiquement équivalent à « $(p \vee q)$ », il suffit de chercher une équivalence à « $(p \vee q)$ » n'utilisant que la barre Sheffer. De plus, la table de vérité de « $(p \vee q)$ » (V,V,V,F) se trouve être l'opposé de « $(p|q)$ » (F,F,F,V).

C'est donc avec l'opposé de « $(p|q)$ » que l'on obtient « $(p \vee q)$ », ce que l'on obtient en inversant les valeurs de vérité de « p » et de « q » avec « $((p|p)|(q|q))$ ».

p	q	$p\|p$	$q\|q$	$(p\|p)\|(q\|q)$	$\neg p \rightarrow q$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F

Question 3.8 (4 points) Les Genevois qui mentent toujours et les Lausannois qui disent toujours la vérité (d'après Smullyan (1978, 21–25)). Nous rencontrerons plusieurs arguments / questions de ce type dans ces exercices. Je les ai ‹emprunté› à Raymond Smullyan, auteur de plusieurs livres de ‹logique populaire› de la plus haute qualité, dont les suivants :

« What is the Name of this Book ? The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles » (1978, traduction : 1981)

« This Book Needs No Title. A Budget of Living Paradoxes » (1980)

« 5000 B.C. and other Philosophical Fantasies » (1983)

« Lady or the Tiger ? And Other Logic Puzzles Including a Mathematical Novel That Features Gödel's Great Discovery » (1982b, traduction : 1984)

« Alice in Puzzle-Land. A Carrollian Tale for Children Under Eighty » (1982a)

« Satan, Cantor, and Infinity and Other Mind-Boggling Puzzles » (1992, traduction : 1993)

« The Riddle of Scheherazade : And Other Amazing Puzzles, Ancient & Modern » (1997, traduction : 1998)

« The Magic Garden of George B. and Other Logic Puzzles » (2007, re-éd. 2015)

« King Arthur in Search of His Dog and Other Curious Puzzles » (2010)

« Alice in Puzzle-Land » (1982a) est *peut-être* le meilleur (mais c'est peut-être une question subjective).

Il y a d'autres livres de puzzles et problèmes logiques (par ex. Gardner (1969, 1977, 1984, 1988, 1994)), mais Smullyan reste (et peut-être même restera) en mon opinion le maître de ce genre. Pour vous donner un aperçu, voici le début du premier cité en entier :

> **1. Was I Fooled ?**
> My introduction to logic was at the age of six. It happened this way : On April 1, 1925, I was sick in bed with grippe, or flu, or something. In the morning my brother Emile (ten years my senior) came into my bedroom and said : "Well, Raymond, today is April Fool's Day, and I will fool you as you have never been fooled before !" I waited all day long for him to fool me, but he didn't. Late that night, my mother asked me, "Why don't you go to sleep ?" I replied, "I'm waiting for Emile to fool me." My mother turned to Emile and said, "Emile, will you please fool the child !" Emile then turned to me, and the following dialogue ensued :

PROOF

> Emile : So, you expected me to fool you, didn't you?
> Raymond : Yes.
> Emile : But I didn't, did I?
> Raymond : No.
> Emile : But you expected me to, didn't you?
> Raymond : Yes.
> Emile : So I fooled you, didn't I!
>
> Well, I recall lying in bed long after the lights were turned out wondering whether or not I had really been fooled. On the one hand, if I wasn't fooled, then I did not get what I expected, hence I was fooled. (This was Emile's argument.) But with equal reason it can be said that if I was fooled, then I *did* get what I expected, so then, in what sense was I fooled. So, was I fooled or wasn't I? (1978, 3–4)

Voici la **solution** :

(a) Si A est Genevois, alors il a menti : alors *ni* est-il le cas qu'il est Genevois *ni* est-il le cas que B est Lausannois. En particulier, il est à la fois Genevois et n'est pas Genevois. Alors il n'est pas Genevois et doit être Lausannois. Alors il a dit la vérité et B est également Lausannois.

(b) A ne peut pas avoir raison : s'il était Lausannois, alors il dirait la vérité, alors il serait Genevois. Alors A est Genevois et il doit y avoir au moins un Lausannois parmi eux. Si B est également un Genevois, alors C doit être le Lausannois, mais alors ce que dit B est vrai et B n'est *pas* un Genevois. Alors B doit être un Lausannois, et doit dire la vérité. Mais alors C doit être Genevois.

(c) Si A est Lausannois, alors il a raison et B et C sont de la même ville. Si C est Genevois (et alors B l'est aussi), alors il répondra « oui », parce que A et B ne sont pas de la même ville et C ment toujours. Si C est Lausannois (et alors B l'est aussi), il répondra « oui », parce que A et B sont de la même ville et C ne ment jamais.
Si, par contre, A est Genevois, alors il ment et B et C ne sont pas de la même ville. Si C est Genevois (et alors B est Lausannois), C répondra « oui », parce que A et B ne sont pas de la même ville et C ment toujours. Si C est Lausannois (et alors B est Genevois), alors C répondra « oui », parce que A et B sont de la même ville et C ne ment jamais. Dans tous les cas, alors, il répondra par l'affirmative.

(d) La seule conclusion possible est que la supposition est fausse : A ne peut pas avoir dit cela. Si A l'a dit et est Lausannois, alors $2+2=5$, ce qui est impossible. Si A l'a dit et est Genevois, alors il aurait pas menti, parce qu'il serait alors vrai que soit il est Genevois soit $2+2=5$ (en vertu du premier disjoint). Mais alors il ne peut pas être Genevois. En conséquence, soit le problème est mal-posé (et soit il vient d'une autre ville que Lausanne ou Genève, soit il y a des Lausannois qui mentent ou des Genevois qui disent la vérité), soit il n'a pas fait cette assertion.

17.4 La méthode axiomatique

Question 4.1 (2 points) Voici le tableau :

syntaxe	sémantique	pragmatique
« formule bien formée »	« tautologie »	« actes de parole »
« règle d'inférence »	« validité »	« « et » / « mais » »

PROOF

« axiome »	« vérité »	« vouloir dire »
« preuve »	« conséquence (sémantique) »	« contexte »

Bien que la validité (valide/invalide) ne soit pas à confondre avec la vérité (vrai/faux), cette première dépend de la seconde (cf. la définition de la validité à la p. 27). C'est pour cela que nous la rangeons dans la colonne « sémantique ».

« Vouloir dire » est un cas limite, puisqu'on peut l'utiliser aussi pour dire « signifier » – ce qui en ferait une notion sémantique. Néanmoins, nous avons vu que la sémantique en logique ne s'occupe de rien d'autre que les valeurs de vérités des phrases, et que l'idée de « signification » telle que représentée dans un dictionnaire est donc à oublier ici.

Le même problème se pose pour la différence entre « et » et « mais » (cf. la septième question de la première série à la p. 357 et la p. 44). À part des différences pragmatiques, il y a aussi des différences syntaxiques : le premier mot contient deux lettres, le deuxième quatre.

Question 4.2 (2 points) Formalisons l'argument d'Aristote dans la *Métaphysique* Λ 9 comme suit :

Soit l'intelligence divine pense, soit elle ne pense rien.	$p \vee \neg p$
Or si elle ne pense rien, elle est dans un état semblable au sommeil,	$\neg p \to q$
mais c'est là chose contraire à sa dignité.	$\neg q$
Par ailleurs, si elle pense, alors ou elle se pense elle-même,	$p \to (r \vee s)$
ou elle pense quelque autre chose.	
Mais il est absurde qu'autre chose soit objet de sa pensée.	$\neg s$
Donc elle pense, et elle se pense elle-même.	$p \wedge r$

On a donc l'argument suivant :

(A1)	$p \vee \neg p$
(A2)	$\neg p \to q$
(A3)	$\neg q$
(A4)	$p \to (r \vee s)$
(A5)	$\neg s$
(A6)	$p \wedge r$

Nous pouvons démontrer la validité de cet inférence de manières différentes :

1. Par des règles d'inférence (de la déduction naturelle, cf. le ch. 6) :

1	$\vdash p \vee \neg p$	tautologie
2	$\vdash \neg p \to q$	prémisse
3	$\vdash \neg q$	prémisse
4	$\vdash \neg\neg p$	MT (modus tollens) de (2) et (3)
5	$\vdash p$	DN (élimination de la double négation) de (4)
6	$\vdash p \to (r \vee s)$	prémisse
7	$\vdash \neg s$	prémisse
8	$\vdash r \vee s$	MP (modus ponens) de (6) et (5)

PROOF

9	$\vdash r$	SD (syllogisme disjonctif) de (7) et (8)
10	$\vdash p \wedge r$	$\wedge$**I** (introduction de la conjonction) de (5) et (9)

2. Par un simple raisonnement : Si, dans la ligne (A1), « $\neg p$ » était vrai, alors « q » serait vrai aussi (A2). Mais on sait que « q » n'est pas vrai (A3). Alors « $\neg p$ » n'est pas vrai, alors « p » est vrai (A1). Donc « $r \vee s$ » est vrai (A4), c'est-à-dire au moins une des phrases « r » et « s » est vraie. Mais « s » n'est pas vrai (A5). Donc « r » doit être vrai. Donc, en somme, « p » et « r » doivent être vrais (A6).
3. À l'aide d'une table de vérité :

p	q	r	s	$r \vee s$	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$p \rightarrow (r \vee s)$	$\neg q$	$\neg s$	$\mathbf{A} := (\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q \wedge (p \rightarrow (r \vee s)) \wedge \neg s$	$p \wedge r$	$\mathbf{A} \rightarrow (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	F	V	V	F	F	F	V	V
V	V	V	F	V	F	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V	F	F	F	F	V
V	V	F	F	F	F	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	F	F	V

Question 4.3 (1 point, d'après Raymond Smullyan, *The Riddle of Scheherazade*) Comment la logique aide à draguer. **Solution** : Une phrase qui fera l'affaire est :

Vous me donnerez ni votre numéro de téléphone ni un bisou. (D)

Si (D) est vrai, alors la personne d'intérêt devra, pour tenir sa parole, vous donner son numéro de téléphone. Mais alors (D) serait faux. Alors (D) doit être faux. Mais si (D) est faux, alors soit vous recevez son numéro de téléphone soit un bisous. Mais la personne d'intérêt ne peut pas vous donner son numéro de téléphone, puisqu'elle a promis de ne pas le donner si (D) est faux. Alors elle doit vous donner un bisou pour tenir sa parole.

Question 4.4 (1 point) Si « ϕ » est un nom pour la proposition « Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage » et si ψ est la proposition « J'étudie la logique », ... ?

$\ulcorner \phi \vee \neg \psi \urcorner$ désigne la proposition « Soit si j'étudie la logique, je serai heureux et sage, soit je n'étudie pas la logique ».

PROOF

« « Je serais heureux et sage » est une conséquence logique de ϕ et de ψ » désigne la proposition « « Je serais heureux et sage » est une conséquence logique de « Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage » et de « J'étudie la logique » ».

Question 4.5 (2 points)

(a) Il n'est **pas vrai** qu'aucune inférence valide n'a une conclusion fausse. Une inférence qui contient une prémisse fausse peut avoir une conclusion fausse et quand même être valide.

(b) Il n'est **pas vrai** que toute inférence avec une conclusion vraie est valide. Pour que la inférence soit valide, il faut que la vérité des prémisses garantisse la vérité de la conclusion.

(c) Il n'est **pas vrai** que toute inférence valide contient au moins une prémisse. Les vérités logiques (les tautologies) sont les conclusions des inférences sans prémisses.

(d) Il est **vrai** qu'aucune inférence valide n'a toutes ses prémisses vraies et une conclusion fausse. Ceci est le cas exclu par la définition de la validité.

(e) Il n'est **pas vrai** qu'il y a des inférences valides qui n'ont que des prémisses vraies et une conclusion fausse. Ceci est exclu par la vérité de (d) (et donc par la définition de la validité).

(f) Il est **vrai** que toute inférence avec des prémisses contradictoires est valide. Elle est valide à condition que si les prémisses sont vraies, alors la conclusion l'est aussi. Si les prémisses ne peuvent pas être vraies, alors il n'importe peu si la conclusion l'est.

Question 4.6 (1 point) Considérons le connecteur binaire « $\downarrow$ » défini ainsi :

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Solution : Rajoutons « $\downarrow$ » à notre langue de la manière suivante.

Nous construisons une langue $\mathcal{L}^{\#}$ en ajoutant à la définition de l'alphabet la clause

- « $\downarrow$ » (« ni ... ni $\cdots$ »)

et en rajoutant à la définition des formules bien formées la clause

- Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi \downarrow \psi)\urcorner$ est une formule propositionnelle.

Dans $\mathcal{L}^{\#}$, tous les autres connecteurs sont définissables à partir de « $\downarrow$ » :

$$\begin{aligned}
\neg\phi &:\Longleftrightarrow \phi \downarrow \phi \\
\phi \vee \psi &:\Longleftrightarrow (\phi \downarrow \psi) \downarrow (\phi \downarrow \psi) \\
\phi \wedge \psi &\Longleftrightarrow \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \\
\phi \rightarrow \psi &\Longleftrightarrow \neg\phi \vee \psi \\
\phi \leftrightarrow \psi &\Longleftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi)
\end{aligned}$$

On pourrait donner les équivalents des trois dernières lignes en utilisent que « $\downarrow$ » mais cela serait plus compliqué. Voici les solutions plus élégantes :

$$\begin{aligned}
\phi \wedge \psi &:\Longleftrightarrow ((\phi \downarrow \phi) \downarrow (\psi \downarrow \psi)) \\
\phi \rightarrow \psi &:\Longleftrightarrow ((\phi \downarrow \phi) \downarrow \psi) \downarrow ((\phi \downarrow \phi) \downarrow \psi) \\
\phi \leftrightarrow \psi &:\Longleftrightarrow ((\phi \downarrow \phi) \downarrow \psi) \downarrow (\phi \downarrow (\psi \downarrow \psi))
\end{aligned}$$

PROOF

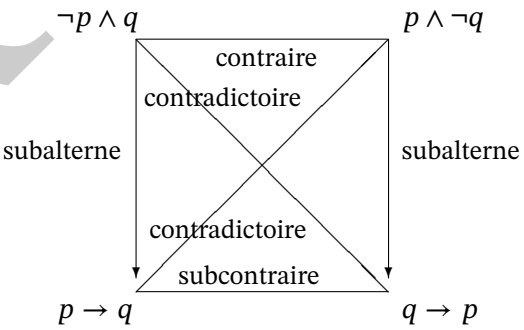
Question 4.7 (1 point) Jean fait une erreur, assez commun dans le raisonnement probabiliste. La **solution** est une probabilité de 2/3, c'est-à-dire de 66.66 %. Nous pouvons argumenter pour cette conclusion de la manière suivante :

1. Oublions le sac avec les deux femmes. Dans les deux autres, il y a trois hommes, appelons-les Marc, Fritz et John. Supposons que Marc et Fritz partagent un sac, et que John le partage avec une femme. L'homme que nous avons rencontré peut être, avec la même probabilité de 1/3, soit Marc, soit Fritz, soit John. Si c'est Marc ou Fritz (une probabilité de 2/3), alors l'autre personne dans le sac sera également masculine.
2. Oublions le sac avec les deux femmes. Parmi les quatre autres personnes impliquées, seule une est une femme. Il ne reste que trois personnes inconnues, elle doit être une de ces trois – ce qui donne une probabilité de 1/3, et donc une probabilité pour un des deux autres (les hommes) de 2/3.
3. Changeons l'exemple et prenons quatre cartes de jeu, trois rouges et une noire. Nous mélangeons, choisissons une à l'hasard et retrouvons une rouge. Il nous restent trois cartes, dont une noire et deux rouges. Pensez-vous sérieusement qu'en choisissant une de ces trois, la probabilité n'est que 1/2 qu'elle soit rouge ?

Comme nous le verrons plus tard (série 7, question 3, p. 396), il est important de bien spécifier les conditions pour les raisonnements de probabilité conditionnelle. Dans notre monde, au moins,[4] il faut identifier les possibilités de manière précise, en spécifiant quel individu aura quel propriété dans le cas considéré. Posant le problème en terme « nous trouvons un homme ; quelle est la probabilité que nous en trouvons un autre ? » nous incline qu'il n'y a que deux possibilités (les deux sacs), même si en vérité il y en a trois (les trois hommes).

Même si ce raisonnement est bon et la probabilité est réellement de 2/3, il est une bonne question jusqu'à quel point le raisonnement ci-dessus peut être généralisé (cf. la problème probabiliste dans la série 7, à la p. 396).

Question 4.8 (2 points) Montrons que l'ensemble de formules propositionnelles $\{ « \neg p \wedge q », « p \wedge \neg q », « p \to q », « q \to p » \}$ forme un carré d'opposition :



Les relations se vérifient ainsi :

1. Contrariété : Si « p » est faux et « q » vrai, alors il n'est pas le cas que « p » est vrai et « q » faux ; et vice versa.
2. Contradiction : Les phrases suivantes sont vraies : « $\neg p \wedge q \leftrightarrow \neg(q \to p)$ » ; « $p \to q \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ ».

[4] Selon la mythologie philosophique, il en est différent dans le monde de la mécanique quantique, voir Kripke, *Naming and Necessity* et d'autres. La mécanique quantique semble ‹identifier› les possibilités qualitativement identiques. Si nous faisons la même chose dans notre exemple, nous obtenons un résultat faux. Nous avons donc un vrai problème.

PROOF

3. Subalternation : Si « p » est faux et « q » vrai, alors « $p \to q$ » est vrai. Si « p » est vrai et « q » faux, alors « $q \to p$ » est vrai.
4. Subcontrariété : Si « $p \to q$ » est faux, alors « p » est vrai et « q » est faux ; alors « $q \to p$ » est vrai. Si « $q \to p$ » est faux, alors « q » est vrai et « p » est faux ; alors « $p \to q$ » est vrai.

Voici les tables de vérité correspondantes :

1. Contrariété :

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(\neg p \wedge q) \wedge (p \wedge \neg p)$	$(\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \wedge \neg p))$
V	V	F	F	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	F	V

2. Contradiction :

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$q \to p$	$\neg(q \to p)$	$(\neg p \wedge q) \leftrightarrow \neg(q \to p)$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	F	V

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$(p \to q) \leftrightarrow \neg(q \to p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V

3. Subalternation :

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \to q$	$(\neg p \wedge q) \to (p \to q)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$q \to p$	$(p \wedge \neg q) \to (q \to p)$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V

4. Sub-contrariété :

PROOF

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \vee (q \to p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Question 4.8 (8 points) Montrons que les phrases données sont des théorèmes de HC. La difficulté est de trouver les bonnes instanciations des axiomes – tout le reste s'ensuit avec MP :
(a) Pour montrer que « $(p \wedge q) \to (q \wedge p)$ » est un théorème de HC :

(1)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge q) \to q$	$\mathbf{H_9}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge q) \to p$	$\mathbf{H_8}$
(3)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \wedge q) \to q) \to (((p \wedge q) \to p) \to ((p \wedge q) \to (q \wedge p)))$	$\mathbf{H_{10}}$
(4)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \wedge q) \to p) \to ((p \wedge q) \to (q \wedge p))$	(MP) de (1) et (3)
(5)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$	(MP) de (2) et (4)

(b) Pour dériver la "conditionalisation", « $p \to (q \to p)$ » :

(1)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \wedge q) \to p) \to (p \to (q \to p))$	$\mathbf{H_3}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge q) \to p$	$\mathbf{H_8}$
(3)	$\mathsf{HC} \vdash p \to (q \to p)$	(MP) de (1) et (2)

(c) La troisième dérivation, de « $(p \vee q) \to (\neg p \to q)$ », se fait ainsi :

(1)	$\mathsf{HC} \vdash p \to (\neg p \to q)$	$\mathbf{H_{12}}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash ((q \wedge \neg p) \to q) \to (q \to (\neg p \to q))$	$\mathbf{H_3}$
(3)	$\mathsf{HC} \vdash (q \wedge \neg p) \to q$	$\mathbf{H_8}$
(4)	$\mathsf{HC} \vdash q \to (\neg p \to q)$	(MP) de (2) et (3)
(5)	$\mathsf{HC} \vdash (p \to (\neg p \to q)) \to ((q \to (\neg p \to q)) \to ((p \vee q) \to (\neg p \to q)))$	$\mathbf{H_7}$
(6)	$\mathsf{HC} \vdash (q \to (\neg p \to q)) \to ((p \vee q) \to (\neg p \to q))$	(MP) de (1) et (5)
(7)	$\mathsf{HC} \vdash (p \vee q) \to (\neg p \to q)$	(MP) de (4) et (6)

Une autre possibilité est de réutiliser le résultat de (b) à la ligne (2), en tant qu'instance de substitution (cf. la leçon 4 sur les instances de substitutions) :

(1)	$\mathsf{HC} \vdash p \to (\neg p \to q)$	$\mathbf{H_{12}}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash q \to (\neg p \to q)$	
(3)	$\mathsf{HC} \vdash (p \to (\neg p \to q)) \to ((q \to (\neg p \to q)) \to ((p \vee q) \to (\neg p \to q)))$	$\mathbf{H_7}$
(4)	$\mathsf{HC} \vdash (q \to (\neg p \to q)) \to ((p \vee q) \to (\neg p \to q))$	(MP) de (1) et (3)
(5)	$\mathsf{HC} \vdash (p \vee q) \to (\neg p \to q)$	(MP) de (2) et (4)

(d) Pour montrer que « $p \to (q \to (p \vee r))$ »est un théorème, nous le dérivons comme suit :

(1)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge q) \to p$	$\mathbf{H_8}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash p \to (p \vee r)$	$\mathbf{H_5}$
(3)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \wedge q) \to p) \to ((p \to (p \vee r)) \to ((p \wedge q) \to (p \vee r)))$	$\mathbf{H_2}$

PROOF

(4) $\mathsf{HC} \vdash (p \to (p \vee r)) \to ((p \wedge q) \to (p \vee r))$ (MP) de (1) et (3)
(5) $\mathsf{HC} \vdash (p \wedge q) \to (p \vee r)$ (MP) de (2) et (4)
(6) $\mathsf{HC} \vdash ((p \wedge q) \to (p \vee r)) \to (p \to (q \to (p \vee r)))$ $\mathbf{H_3}$
(7) $\mathsf{HC} \vdash p \to (q \to (p \vee r))$ (MP) de (5) et (6)

17.5 La méthode des arbres

Question 5.1 (2 points) Manipulons les définitions de « tautologie », « contradiction » et « formule satisfaisable » :

(a) Voici comment on montre qu'une formule propositionnelle ϕ est une tautologie si et seulement si $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ n'est pas satisfaisable :

$\Longrightarrow$ Si ϕ est une tautologie, alors ϕ est vrai sous toutes les valuations. Si ϕ est vrai sous une valuation, alors $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ est faux sous cette valuation. Alors : si ϕ est vrai sous toutes les valuations, alors $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ est faux sous toutes les valuations. Alors il n'y a pas de valuation telle que $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ soit vrai sous cette valuation. Donc $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ n'est pas satisfaisable.

$\Longleftarrow$ Si $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ n'est pas satisfaisable, alors il n'y a pas de valuation telle que $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ soit vrai sous cette valuation. Alors $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ est faux sous toutes les valuations, alors ϕ est vrai sous toutes les valuations. Alors ϕ est une tautologie.

Semi-formellement :

$$\begin{aligned}
\phi \text{ est une tautologie} &\iff \forall V(V(\phi) = \mathbf{v}) \\
&\iff \sim \exists V \sim (V(\phi) = \mathbf{v}) \\
&\iff \sim \exists V \sim (V(\ulcorner\neg\phi\urcorner) = \mathbf{f}) \\
&\iff \sim \exists V(V(\ulcorner\neg\phi\urcorner) = \mathbf{v}) \\
&\iff \sim (\neg\phi \text{ est satisfaisable}) \\
&\iff \text{il est faux que } \ulcorner\neg\phi\urcorner \text{ est satisfaisable}
\end{aligned}$$

(b) Pour montrer qu'une formule propositionnelle ϕ est satisfaisable si et seulement si $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ n'est pas une tautologie, on procède de manière analogue à (a), ou on dit simplement :

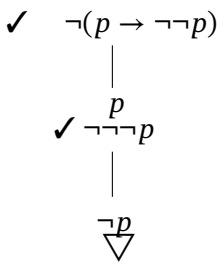
$$\begin{aligned}
\phi \text{ est satisfaisable} &\iff \exists V(V(\phi) = \mathbf{v}) \\
&\iff \sim \forall V \sim (V(\phi) = \mathbf{v}) \\
&\iff \sim \forall V(V(\phi) = \mathbf{f}) \\
&\iff \sim \forall V(V(\ulcorner\neg\phi\urcorner) = \mathbf{v}) \\
&\iff \sim (\ulcorner\neg\phi\urcorner \text{ est une tautologie})
\end{aligned}$$

Question 5.2 (4 points) Prouvons les phrases données par la méthode des arbres.

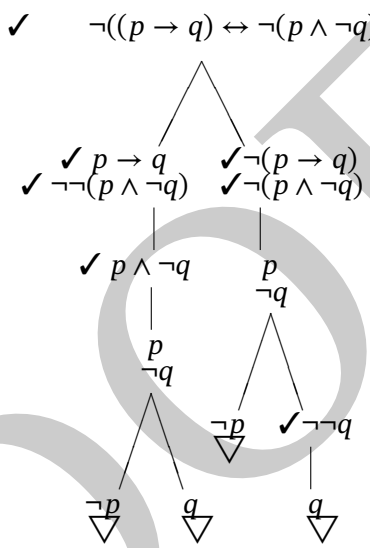
Solution : Prouver une phrase par la méthode des arbres revient à faire un arbre de la négation et de montrer que toutes les branches de cet arbre se ferment :

(a) Un arbre pour « $p \to \neg\neg p$ ». La seule branche se ferme, « $\neg(p \to \neg\neg p)$ » n'est donc pas consistent – il s'agit d'une contradiction. Sa négation, « $p \to \neg\neg p$ », est une tautologie et peut être prouvée par la méthode des arbres.

PROOF

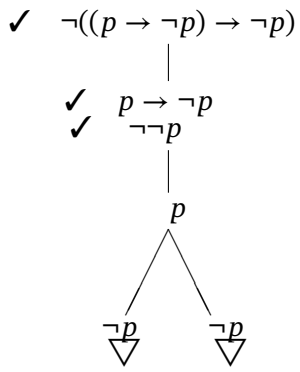


(b) Un arbre pour « $(p \to q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ » :



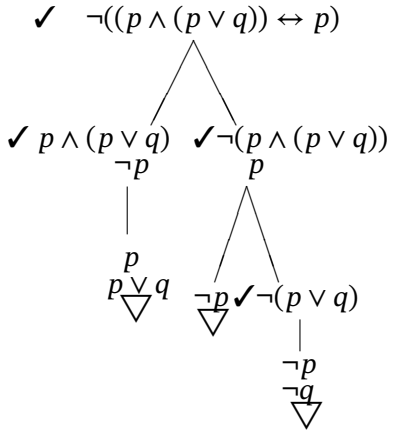
Strictement parlant, cette deuxième élimination de la double négation n'est pas nécessaire : même sans appliquer la règle, nous pouvons constater que la branche contient une phrase (à savoir « $\neg q$ ») et sa négation.

(c) Un arbre pour « $(p \to \neg p) \to \neg p$ » :



(d) Un arbre pour « $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$ » :

PROOF



Question 5.3 (6 points) Soit « A » le nom d'une inférence :

(a) Si toutes ses prémisses sont vraies et sa conclusion l'est aussi, **on ne peut rien conclure** sur la validité de A : quelques-unes sont valides, mais « Socrate est un homme ; donc Socrate est un philosophe », par exemple, ne l'est pas.

(b) Si toutes ses prémisses sont vraies mais sa conclusion fausse, **on peut conclure** que A est non valide, car il n'est alors pas impossible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse.

(c) Si au moins une de ses prémisses est fausse et sa conclusion vraie, **on ne peut rien conclure** sur la validité de A : « Socrate est un romain ; tous les romains sont mortels ; donc Socrate est mortel » est valide, mais « Socrate est un romain ; tous les romains sont mortels ; donc Socrate est un philosophe » ne l'est pas.

(d) Si au moins une de ses prémisses est fausse et sa conclusion fausse, **on ne peut rien conclure** sur la validité de A : « Socrate est un romain ; tous les romains sont immortels ; donc Socrate est immortel » est valide, mais « Socrate est un romain ; tous les romains sont immortels ; donc Socrate n'est pas un philosophe » ne l'est pas.

(e) Si ses prémisses sont consistantes avec sa conclusion, A **peut** être non valide : « Socrate est un homme ; donc Socrate est philosophe », par exemple, n'est pas valide.

(f) Si ses prémisses sont inconsistantes et sa conclusion fausse, A **ne peut pas** être non valide, parce qu'il est logiquement impossible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse.

(g) Si la prémisse est une vérité logique et sa conclusion vraie, A **peut** être non valide : « Socrate dors ou il ne dors pas ; donc il est un philosophe », par exemple, n'est pas valide.

(h) Si ses prémisses sont consistantes entre elles, mais sa conclusion fausse, A **peut** être valide : « Socrate est un philosophe ; tous les philosophes sont romains ; donc Socrate est romain », par exemple, est valide et sa première prémisse est consistante avec sa deuxième.

(i) Si sa conclusion est inconsistante avec ses prémisses, A **peut** être valide, à savoir dans le cas où ses prémisses sont déjà inconsistantes entre elles : « Socrate est philosophe ; Socrate n'est pas philosophe ; donc Socrate n'est pas philosophe », par exemple, est valide.

(j) Si sa conclusion est inconsistante avec ses prémisses, mais ses prémisses consistantes entre elles, A **ne peut pas** être valide. Supposons le contraire : alors il serait possible que ses prémisses soient vraies (puisqu'elles sont consistantes entre elles) ; mais si l'inférence est valide, il s'ensuit alors que sa conclusion est vraie ; il est donc possible que ses prémisses *et* sa conclusion soient vraies ; mais alors elles ne sont pas inconsistantes.

(k) Si la négation de sa conclusion est consistante avec l'une de ses prémisses, A **peut** être valide :

PROOF

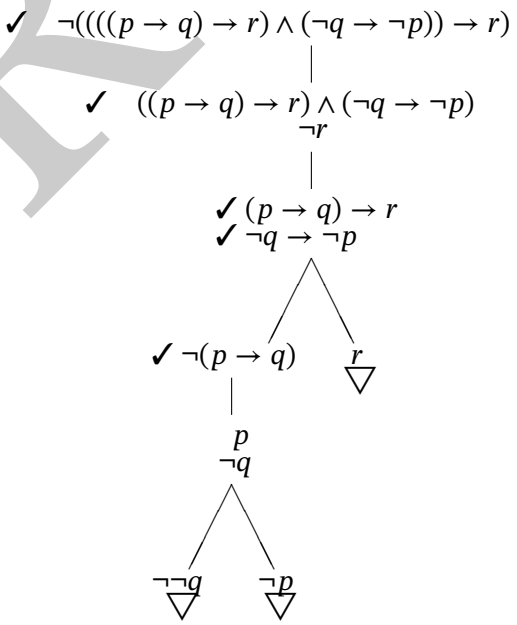
« Xanthippe est une femme ; toutes les femmes sont mortelles ; donc Xanthippe est mortelle » est valide, même si « Xanthippe n'est pas mortelle » est consistant avec « Xanthippe est une femme ».

(l) Si la négation de sa conclusion est inconsistante avec la négation d'une de ses prémisses, *A* **peut** être valide : « Xanthippe dort et ne dort pas ; donc Xanthippe dort ou elle ne dort pas » est valide, même si la négation de sa conclusion est elle-même inconsistante, et donc inconsistante avec la négation de la prémisse. Un autre exemple est « Socrate n'est pas un philosophe mortel ; Socrate est un homme ; tous les hommes sont mortels ; donc Socrate est mortel » – l'inférence est valide, même si « Socrate n'est pas mortel » est inconsistant avec « Socrate est un philosophe mortel ».

(m) Si la négation de sa conclusion est inconsistante avec la négation d'une de ses prémisses, et si *A* ne serait pas valide sans cette prémisse, *A* **ne peut pas** être valide. Supposons le contraire : (i) que l'argument « p ; q ; donc r » est valide, (ii) que « q ; donc r » est non valide et (iii) que « $\neg r$ » est inconsistant avec « $\neg p$ ». Si (ii) est vrai, alors « q » est consistant avec « $\neg r$ ». Mais alors soit { « p », « q », « $\neg r$ »}, soit { « $\neg p$ », « q », « $\neg r$ »} doit être consistant. Mais si (iii) est vrai, alors { « $\neg p$ », « $\neg r$ » } est inconsistant, alors { « $\neg p$ », « q », « $\neg r$ »} l'est aussi. Donc { « p », « q », « $\neg r$ »} doit être consistant. Ceci veut dire que l'argument « p ; q ; donc r » n'était pas valide (¬(i)). On a dérivé une contradiction de (i), (ii) et (iii). Alors la supposition était fausse ; alors A ne peut pas être valide.

Question 5.4 (4 points) Vérifier si les arguments donnés sont valides revient à déterminer si ses prémisses sont consistantes avec la négation de leur conclusion. Pour tester si la phrase « $\{p, q, r\} \vDash s$ » est vraie, c'est-à-dire si « s » est une conséquence logique de « p », « q » et de « r », il faut faire l'arbre pour la *négation* de l'implication correspondante « $\neg((p \wedge q \wedge r) \rightarrow s)$ », c'est-à-dire l'arbre pour la conjonction « $p \wedge q \wedge r \wedge (\neg s)$ ». Si une des branches de cet arbre reste ouverte, il y a une possibilité logique que la conjonction des prémisses et de la négation de sa conclusion soit vraie et alors l'argument n'est pas valide. Si, au contraire, toutes les branches se ferment, alors il n'y a pas de telle possibilité logique et l'argument initial est valide.

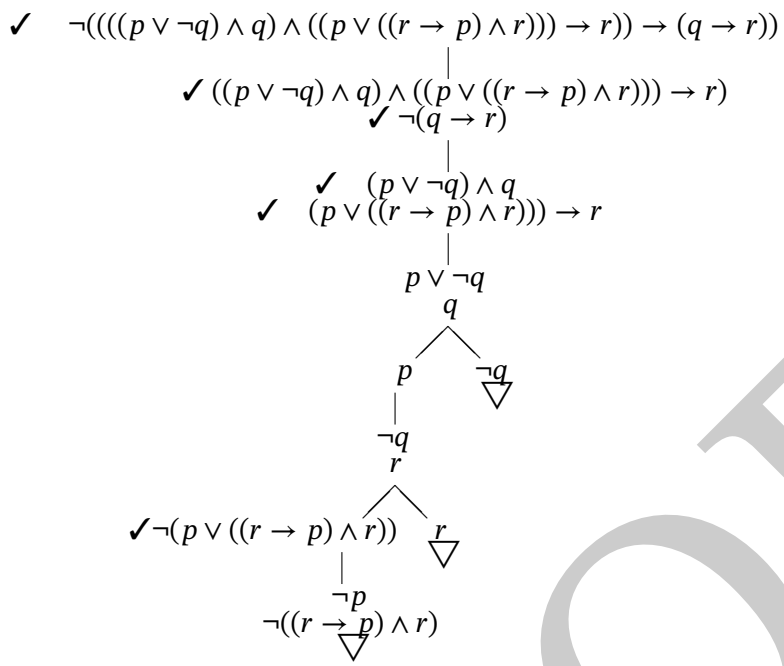
(a) Pour montrer que l'affirmation « $\{(p \rightarrow q) \rightarrow r, \neg q \rightarrow \neg p\} \vDash r$ » est vraie, faisons l'arbre pour la négation de l'implication correspondante :



PROOF

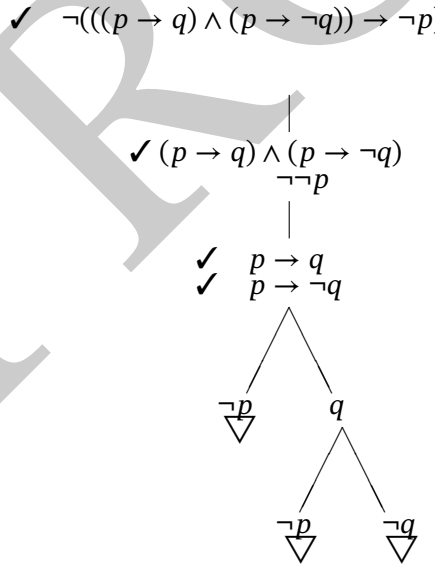
Toutes les branches se ferment, l'implication correspondante est une tautologie.

(b) Voici un arbre pour « $\{(p \vee \neg q) \wedge q, (p \vee ((r \to p) \wedge r)) \to r\} \vDash q \to r$ » :



Toutes les branches pour la négation de l'implication correspondante se ferment, l'assertion de validité est vraie.

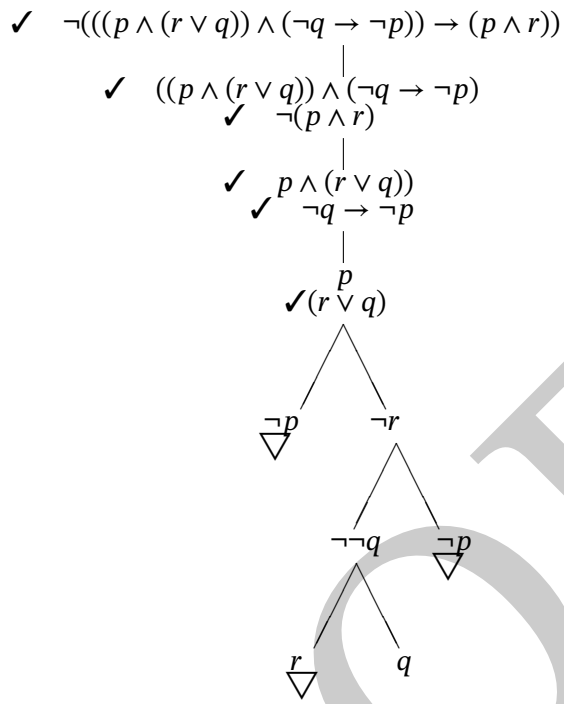
(c) Pour montrer que « $\{p \to q, p \to \neg q\} \vDash \neg p$ » est vrai (c'est-à-dire pour montrer que « $\neg p$ » est une conséquence logique des deux prémisses « $p \to q$ » et de « $p \to \neg q$ »), faisons l'arbre pour la négation de l'implication correspondante :



Toutes les branches pour la négation de l'implication correspondante se ferment, l'argument est valide.

PROOF

(d) Pour montrer que « $\{p \wedge (r \vee q), \neg q \to \neg p\} \vDash p \wedge r$ » est faux, faisons l'arbre pour la négation de l'implication correspondante :



La branche contenant « q » reste ouverte et l'arbre est entièrement développé. La formule initiale est donc consistante et satisfaisable (peut être vraie), et sa négation n'est pas une tautologie et ne peut pas être prouvée. L'argument est invalide, parce qu'il est possible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse.

Question 5.5 (3 points) (d'après Raymond Smullyan, *The Riddle of Scheherazade*) Les menteurs Genevois et les honnêtes Lausannois :

(a) Comme Edmond et Maurice sont des frères, et viennent d'une des deux villes, soit ils disent les deux la vérité, soit il disent les deux des faussetés. Comme les deux assertions sont contraires, elles ne peuvent pas être les deux vraies. Alors elles sont les deux fausses. Alors Maurice est marié, et Edmond ne peut pas l'être.

(b) Si les deux assertions sont vraies, alors elles sont non mariées les deux. Si les deux assertions sont fausses, alors Pascale est mariée et Marie ne l'est pas. Dans les deux cas, Marie n'est pas mariée. Nous ne pouvons rien dire de Pascale.

(c) Si le cadet a dit qu'il était marié, alors il est possible que les deux assertions soient fausses (le cadet n'est pas marié, l'aîné non plus), soit que les deux assertions vraies (le cadet marié, l'aîné soit marié soit non). Si le cadet a dit qu'il n'était pas marié, cependant, il n'est pas possible que les deux assertions soient fausses – si le cadet est marié, l'assertion de l'aîné est vraie. Alors les deux assertions doivent être vraies dans ce deuxième cas, alors le cadet n'est pas marié et l'aîné l'est. Comme nous savons que l'interrogateur a pu inférer lequel était marié, nous pouvons trancher les deux cas – le cadet a du dire qu'il n'était pas marié, et alors il ne l'est pas mais l'aîné l'est.

Question 5.6 (1 point) Il s'agit du célèbre problème de Monty Hall. Il est tentant d'argumenter comme suit :

PROOF

> Mon choix initial avait une probabilité de 1/3 de gagner le prix. Maintenant, qu'une des trois portes a été ouverte et était vide, ils restent deux portes. Soit j'ai dès le début pris la bonne porte, soit le prix est derrière la porte fermée que je n'ai pas choisie. Il n'y a rien qui rend une de ces deux options plus probable que l'autre, alors la probabilité est de 1/2 dans les deux cas, alors je ne gagne rien en changeant.

Ce raisonnement, cependant, est fallacieux. Voici différentes manières de voir ceci :

- La probabilité que le choix initial était le bon reste 1/3. Peu importe le choix, il est toujours possible pour le présentateur d'ouvrir une porte vide (et vous savez ceci dès le début). Le fait qu'il ouvre une porte n'apporte pas de nouvelle information par rapport au choix initial, et ne change pas la probabilité que le choix initial était le bon. Si la probabilité que le prix est derrière la porte gauche est toujours de 1/3, alors la probabilité qu'il est derrière celle du milieu est de 2/3, puisqu'il n'est pas derrière la porte droite. Il est donc rationnel pour vous de changer.
- Une autre manière d'argumenter pour la même conclusion : même si le choix de présentateur était entre deux portes et il était certain qu'il avait un choix à faire (puisqu'il était certain que, peu importe mon choix, deux portes étaient toujours disponibles pour lui de choisir, dont une est vide), son choix porte une information pour moi (et c'est la possession de cette nouvelle information qui rend rationnel mon choix de changer) : elle consiste dans le fait que le présentateur n'a pas pu ouvrir la porte que j'avais déjà choisie. Une manière de visualiser ceci est de comparer les trois possibilités équiprobables, dans une situation où j'ai initialement choisi la première porte (toute à gauche) et le présentateur m'offre de changer :

1ère porte	2ème porte	3ème porte	rester	changer
chameau	vide	vide	gagne	perd
vide	chameau	vide	perd	gagne
vide	vide	chameau	perd	gagne

  Dans le deuxième cas, le présentateur doit ouvrir la porte à droite, et alors je change pour celle au milieu ; dans le troisième cas, le présentateur doit ouvrir la porte au milieu et alors je change pour celle à droite.
- Encore un autre argument : soit j'ai trouvé le chameau au premier tour (probabilité de 1/3), soit je ne l'ai pas trouvé (probabilité de 2/3). Si je ne l'ai pas déjà trouvé, je le trouveras au deuxième tour, puisque le présentateur m'offre les *deux* portes, mettant à ma disposition son savoir laquelle des deux est vide. Dans le premier cas je perds en changeant (probabilité de 1/3), dans le deuxième cas je gagne (probabilité de 2/3).
- Imaginez que vous jouez le jeux 100 fois, toujours adoptant la même stratégie. Si vous ne changez jamais, vous gagnez dans un tiers des cas, à savoir dans les cas où votre choix initial était bon. Si vous changez toujours, vous gagnez dans le reste des cas (comme il ne reste que deux portes non choisies et une a été ouverte) : alors dans 2/3 des cas.
- Si vous n'êtes toujours pas convaincu, refaites l'exemple avec 100 portes, dont une seule contient un prix. Votre choix initial a donc une probabilité de 1/100 d'être bon. Supposons que j'ouvre et vous montre 98 portes, laissant une seule fermée des portes non choisies. Pensez-vous réellement que mon acte a amélioré vos chances d'avoir fait le bon choix initialement jusqu'à 50/50 ? Si vous le faites, j'aimerais faire un pari avec vous...

PROOF

17.6 La déduction naturelle

Question 6.1 (16 points) En principe, l'utilisation des règles dites « dérivées » comme la conversion ($\ulcorner \phi \to \psi \urcorner \vdash \ulcorner \neg\psi \to \neg\phi \urcorner$) et le syllogisme disjonctif ($\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner, \ulcorner \neg\phi \urcorner \vdash \psi$), n'est pas permise dans la preuve de ces séquents. En pratique, l'utilisation de la conversion correspond souvent à celle de MT à la place de MP, et celle du syllogisme disjonctif à un cas spécial de $\vee\mathbf{E}$.

(a) Voici une preuve de « $(p \vee \neg q) \to p\ ,\ \neg p \vdash \neg p \wedge q$ » :

1	$(p \vee \neg q) \to p\ ,\neg p$	$\vdash$	$(p \vee \neg q) \to p$	prémisse
2	$(p \vee \neg q) \to p\ ,\neg p$	$\vdash$	$\neg p$	prémisse
3	$(p \vee \neg q) \to p\ ,\neg p, \neg q$	$\vdash^*$	$\neg q$	supposition
4	$(p \vee \neg q) \to p\ ,\neg p, \neg q$	$\vdash^*$	$p \vee \neg q$	de (3) par ($\vee\mathbf{I}$)
5	$(p \vee \neg q) \to p\ ,\neg p, \neg q$	$\vdash^*$	p	de (1) et (4) par (MP)
6	$(p \vee \neg q) \to p\ ,\neg p$	$\vdash$	$\neg\neg q$	de (3), (2) et (5) par (RAA)
7	$(p \vee \neg q) \to p\ ,\neg p$	$\vdash$	q	de (6) par (DN)
8	$(p \vee \neg q) \to p\ ,\neg p$	$\vdash$	$\neg p \wedge q$	de (2) et (7) par ($\wedge\mathbf{I}$)

(b) Voici une preuve de « $p \to (q \to r) \vdash (p \wedge q) \to r$ » :

1	$p \to (q \to r)$	$\vdash$	$p \to (q \to r)$	prémisse
2	$p \to (q \to r), p \wedge q$	$\vdash^*$	$p \wedge q$	supposition
3	$p \to (q \to r), p \wedge q$	$\vdash^*$	p	de (2) par ($\wedge\mathbf{E}$)
4	$p \to (q \to r), p \wedge q$	$\vdash^*$	$q \to r$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \to (q \to r), p \wedge q$	$\vdash^*$	q	de (2) par ($\wedge\mathbf{E}$)
6	$p \to (q \to r), p \wedge q$	$\vdash^*$	r	de (4) et (5) par (MP)
7	$p \to (q \to r)$	$\vdash$	$(p \wedge q) \to r$	de (2) et (6) par (PC)

(c) Pour prouver « $\vdash p \vee \neg p$ », c'est-à-dire pour montrer que « $p \vee \neg p$ » est un théorème, nous utilisons RAA et introduisons comme supposition la négation de ce que nous voulons prouver :

1	$\neg(p \vee \neg p)$	$\vdash$	$\neg(p \vee \neg p)$	supposition
2	$\neg(p \vee \neg p), p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$\neg(p \vee \neg p), p$	$\vdash^*$	$p \vee \neg p$	de (2) par ($\vee\mathbf{I}$)
4	$\neg(p \vee \neg p)$	$\vdash^*$	$\neg p$	de (1), (2) et (3) par (RAA)
5	$\neg(p \vee \neg p), \neg p$	$\vdash^*$	$\neg p$	supposition
6	$\neg(p \vee \neg p), \neg p$	$\vdash^*$	$p \vee \neg p$	de (5) par ($\vee\mathbf{I}$)
7	$\neg(p \vee \neg p)$	$\vdash^*$	$\neg\neg p$	de (1), (5) et (6) par (RAA)
8		$\vdash$	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	de (1), (4) et (7) par (RAA)
9		$\vdash$	$p \vee \neg p$	de (8) par (DN)

Dans cette preuve, j'ai besoin de trois applications de RAA puisqu'il me faut une contradiction de deux phrases qui ne sont sous aucune autre supposition que $\neg(p \vee \neg p)$ afin de conclure, sous aucune supposition, que $\neg\neg(p \vee \neg p)$. Si je le conclurais des lignes (2) et (4), par exemple, je garderais la supposition que p (de la ligne (2)). Il existe une autre preuve qui ne nécessite que deux applications de RAA :

PROOF

1	$\neg(p \vee \neg p)$	$\vdash$	$\neg(p \vee \neg p)$	supposition
2	$\neg(p \vee \neg p), p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$\neg(p \vee \neg p), p$	$\vdash^*$	$p \vee \neg p$	de (2) par ($\vee$**I**)
4	$\neg(p \vee \neg p)$	$\vdash^*$	$\neg p$	de (1), (2) et (3) par (RAA)
5	$\neg(p \vee \neg p)$	$\vdash^*$	$p \vee \neg p$	de (4) par ($\vee$**I**)
6		$\vdash$	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	de (1), (1) et (5) par (RAA)
7		$\vdash$	$p \vee \neg p$	de (6) par (DN)

(d) Une preuve de « $p \vee q\,,\ p \to r\,,\ q \to r \vdash r \vee s$ » est la suivante :

1	$p \vee q, p \to r, q \to r$	$\vdash$	$p \vee q$	prémisse
2	$p \vee q, p \to r, q \to r$	$\vdash$	$p \to r$	prémisse
3	$p \vee q, p \to r, q \to r$	$\vdash$	$q \to r$	prémisse
4	$p \vee q, p \to r, q \to r, p$	$\vdash^*$	p	supposition
5	$p \vee q, p \to r, q \to r, p$	$\vdash^*$	r	de (2) et (5) par (MP)
6	$p \vee q, p \to r, q \to r, q$	$\vdash^*$	q	supposition
7	$p \vee q, p \to r, q \to r, q$	$\vdash^*$	r	de (3) et (6) par (MP)
8	$p \vee q, p \to r, q \to r$	$\vdash$	r	de (1), (4), (5), (6) et (7) par ($\vee$**E**)
9	$p \vee q, p \to r, q \to r$	$\vdash$	$r \vee s$	de (8) par ($\vee$**I**)

(e) Voici comment prouver « $(p \to q) \to (p \to r)$ » à partir de « $p \to (q \to r)$ » :

1	$p \to (q \to r)$	$\vdash$	$p \to (q \to r)$	prémisse
2	$p \to (q \to r), p \to q$	$\vdash^*$	$p \to q$	supposition
3	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
4	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash^*$	$q \to r$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash^*$	q	de (2) et (3) par (MP)
6	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash^*$	r	de (4) et (5) par (MP)
7	$p \to (q \to r), p \to q$	$\vdash^*$	$p \to r$	de (3) et (6) par (PC)
8	$p \to (q \to r)$	$\vdash$	$(p \to q) \to (p \to r)$	de (2) et (7) par (PC)

(f) À part la réduction à l'absurde (exercice (1c) ci-dessus), les preuves de théorèmes peuvent aussi utiliser PC. Pour montrer que « $(\neg(q \to r) \to \neg p) \to (\neg r \to \neg q)$ » est une tautologie :

1	p	$\vdash$	p	prémisse
2	$p, \neg(q \to r) \to \neg p$	$\vdash^*$	$\neg(q \to r) \to \neg p$	supposition
3	$p, \neg(q \to r) \to \neg p$	$\vdash^*$	$\neg\neg p$	de (1) par (DN)
4	$p, \neg(q \to r) \to \neg p$	$\vdash^*$	$\neg\neg(q \to r)$	de (2) et (3) par (MT)
5	$p, \neg(q \to r) \to \neg p$	$\vdash^*$	$q \to r$	de (4) par (DN)
6	$p, \neg(q \to r) \to \neg p, \neg r$	$\vdash^*$	$\neg r$	supposition
7	$p, \neg(q \to r) \to \neg p, \neg r$	$\vdash^*$	$\neg q$	de (5) et (6) par (MT)
8	$p, \neg(q \to r) \to \neg p$	$\vdash^*$	$\neg r \to \neg q$	de (6) et (7) par (PC)
9	p	$\vdash$	$(\neg(q \to r) \to \neg p) \to (\neg r \to \neg q)$	de (2) et (8) par (PC)

(g) Voici une preuve de « $(p \to q) \wedge (p \to r) \vdash p \to (q \wedge r)$ » :

PROOF

1	$(p \to q) \wedge (p \to r)$	$\vdash$	$(p \to q) \wedge (p \to r)$	prémisse
2	$(p \to q) \wedge (p \to r)$	$\vdash$	$p \to q$	de (1) par ($\wedge$**E**)
3	$(p \to q) \wedge (p \to r)$	$\vdash$	$p \to r$	de (1) par ($\wedge$**E**)
4	$(p \to q) \wedge (p \to r), p$	$\vdash^*$	p	supposition
5	$(p \to q) \wedge (p \to r), p$	$\vdash^*$	q	de (2) et (4) par (MP)
6	$(p \to q) \wedge (p \to r), p$	$\vdash^*$	r	de (3) et (4) par (MP)
7	$(p \to q) \wedge (p \to r), p$	$\vdash^*$	$q \wedge r$	de (5) et (6) par ($\wedge$**I**)
8	$(p \to q) \wedge (p \to r)$	$\vdash$	$p \to (q \wedge r)$	de (4) et (7) par (PC)

(h) Une preuve de « $(p \to r) \wedge (q \to r) \vdash (p \vee q) \to r$ » :

1	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	$\vdash$	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	prémisse
2	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	$\vdash$	$p \to r$	de (1) par ($\wedge$**E**)
3	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	$\vdash$	$q \to r$	de (1) par ($\wedge$**E**)
4	$(p \to r) \wedge (q \to r), p \vee q$	$\vdash^*$	$p \vee q$	supposition
5	$(p \to r) \wedge (q \to r), p \vee q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
6	$(p \to r) \wedge (q \to r), p \vee q, p$	$\vdash^*$	r	de (5) et (2) par (MP)
7	$(p \to r) \wedge (q \to r), p \vee q, p, q$	$\vdash^*$	q	supposition
8	$(p \to r) \wedge (q \to r), p \vee q, p, q$	$\vdash^*$	r	de (3) et (7) par (MP)
9	$(p \to r) \wedge (q \to r), p \vee q$	$\vdash^*$	r	de (4, 5, 6, 7, 8) par ($\vee$**E**)
10	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	$\vdash$	$(p \vee q) \to r$	de (4) et (9) par (PC)

Pour pouvoir inférer (10) avec PC, je dois avoir supposé « $p \vee q$ ».

(i) Une preuve de « $\neg p \to p \vdash p$ » qui correspond à une sorte de réduction à l'absurde :

1	$\neg p \to p$	$\vdash$	$\neg p \to p$	prémisse
2	$\neg p \to p, \neg p$	$\vdash^*$	$\neg p$	supposition
3	$\neg p \to p, \neg p$	$\vdash^*$	p	de (1) et (2) par (MP)
4	$\neg p \to p$	$\vdash$	$\neg\neg p$	de (2), (2) et (3) par (RAA)
5	$\neg p \to p$	$\vdash$	p	de (4) par (DN)

(j) Nous démontrons la commutativité de la disjonction ainsi :

1	$p \vee q$	$\vdash$	$p \vee q$	prémisse
2	$p \vee q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$p \vee q, p$	$\vdash^*$	$q \vee p$	de (2) par ($\vee$**I**)
4	$p \vee q, q$	$\vdash^*$	q	supposition
5	$p \vee q, q$	$\vdash^*$	$q \vee p$	de (3) par ($\vee$**I**)
6	$p \vee q$	$\vdash$	$q \vee p$	de (1, 2, 3, 4, 5) par ($\vee$**E**)

(k) Une sorte d'élimination de la disjonction :

1	$p \to q, \neg p \to q$	$\vdash$	$p \to q$	prémisse
2	$p \to q, \neg p \to q$	$\vdash$	$\neg p \to q$	prémisse
3	$p \to q, \neg p \to q, \neg q$	$\vdash^*$	$\neg q$	supposition

PROOF

4	$p \to q, \neg p \to q, \neg q$	$\vdash^*$	$\neg p$	de (1) et (3) par (MT)
5	$p \to q, \neg p \to q, \neg q$	$\vdash^*$	$\neg\neg p$	de (2) et (3) par (MT)
6	$p \to q, \neg p \to q, \neg q$	$\vdash^*$	p	de (5) par (DN)
7	$p \to q, \neg p \to q$	$\vdash$	$\neg\neg q$	de (3),(4) et (6) par (RAA)
8	$p \to q, \neg p \to q$	$\vdash$	q	de (7) par (DN)

(l) Une preuve de « $p \wedge q, q \to r \vdash r \vee s$ » est la suivante :

1	$p \wedge q, q \to r$	$\vdash$	$p \wedge q$	prémisse
2	$p \wedge q, q \to r$	$\vdash$	$q \to r$	prémisse
3	$p \wedge q, q \to r$	$\vdash$	q	de (1) par ($\wedge$**E**)
4	$p \wedge q, q \to r$	$\vdash$	r	de (2) et (3) par (MP)
5	$p \wedge q, q \to r$	$\vdash$	$r \vee s$	de (4) par ($\vee$**I**)

(m) Un MP un peu différent :

1	$\neg\neg p, p \to q$	$\vdash$	$\neg\neg p$	prémisse
2	$\neg\neg p, p \to q$	$\vdash$	$p \to q$	prémisse
3	$\neg\neg p, p \to q$	$\vdash$	p	de (2) par (DN)
4	$\neg\neg p, p \to q$	$\vdash$	q	de (1) et (3) par (MP)

(n) Une preuve de « $\neg(p \to q) \vdash p \to \neg q$ » :

1	$\neg(p \to q)$	$\vdash$	$\neg(p \to q)$	prémisse
2	$\neg(p \to q), p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$\neg(p \to q), p, q$	$\vdash^*$	q	supposition
4	$\neg(p \to q), q$	$\vdash^*$	$p \to q$	de (3) et (2) par (PC)
5	$\neg(p \to q)$	$\vdash^*$	$\neg q$	de (2), (1) et (4) par (RAA)
6	$\neg(p \to q)$	$\vdash$	$p \to \neg q$	de (2) et (5) par (PC)

Il est temptant de faire ici l'erreur de conclure – de « $\neg(p \to q)$ » et de « p » – que $\neg q$ par (MP). Cette application n'est par permise parce que « $\to$ » n'est pas le connecteur principal de la première formule. Le fait que l'application de (PC) dans la dernière ligne n'est pas nécessaire pour enlever une supposition montre que la conclusion prouvée était plus faible que nécessaire ; nous aurions pu directement prouver « $\neg q$ ».

(o) Pour introduire une disjonction sur les deux côtés d'une implication matérielle :

1	$q \to r$	$\vdash$	$q \to r$	prémisse
2	$q \to r, p \vee q$	$\vdash^*$	$p \vee q$	supposition
3	$q \to r, p \vee q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
4	$q \to r, p \vee q, p$	$\vdash^*$	$p \vee r$	de (3) par ($\vee$**I**)
5	$q \to r, p \vee q, q$	$\vdash^*$	q	supposition
6	$q \to r, p \vee q, q$	$\vdash^*$	r	de (1) et (5) par (MP)
7	$q \to r, p \vee q, q$	$\vdash^*$	$p \vee r$	de (6) par ($\vee$**I**)
8	$q \to r, p \vee q$	$\vdash^*$	$p \vee r$	de (2, 3, 4, 5, 7) par ($\vee$**E**)

PROOF

9	$q \to r$	$\vdash$	$(p \vee q) \to (p \vee r)$	de (2) et (8) par (PC)

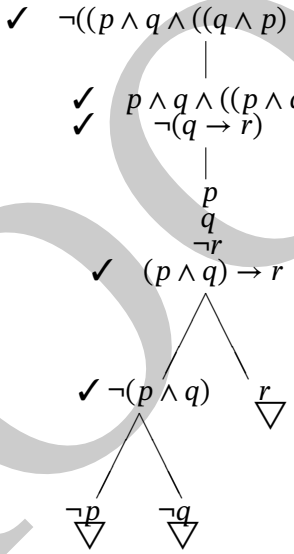
Pour pouvoir inférer (9) avec PC, je dois avoir supposé « $p \vee q$ ».

(p) Voici une preuve que « $(p \to q) \to q$ » s'ensuit de « $p \vee q$ » :

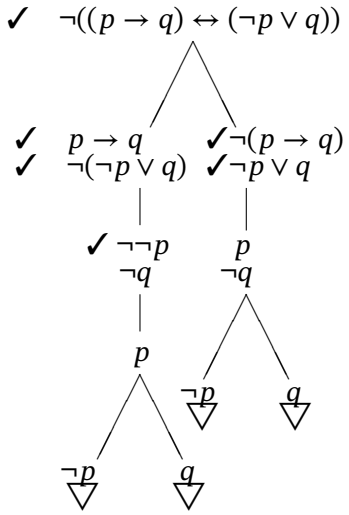
1	$p \vee q$	$\vdash$	$p \vee q$	prémisse
2	$p \vee q, p \to q$	$\vdash^*$	$p \to q$	supposition
3	$p \vee q, p \to q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
4	$p \vee q, p \to q, p$	$\vdash^*$	q	de (2) et (3) par (MP)
5	$p \vee q, p \to q, q$	$\vdash^*$	q	supposition
6	$p \vee q, p \to q$	$\vdash^*$	q	de (1, 3, 4, 5, 5) par ($\vee$**E**)
7	$p \vee q$	$\vdash$	$(p \to q) \to q$	de (2) et (6) par (PC)

Question 6.2 (4 points) À l'aide de la méthode des arbres, déterminons si les phrases données peuvent être prouvées :

(a) Une preuve de « $(p \wedge q \wedge ((q \wedge p) \to r)) \to (q \to r)$ » :

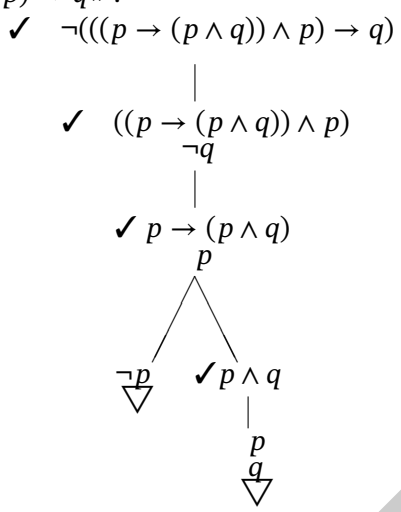


(b) Un arbre pour « $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ » :

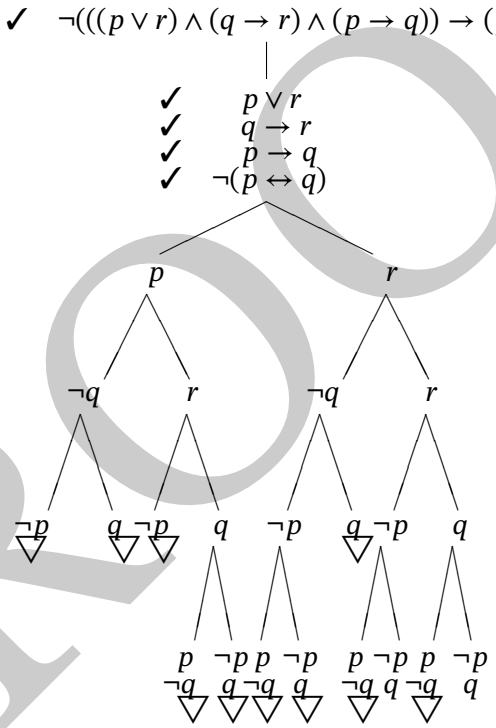


PROOF

(c) Voici un arbre pour « $((p \to (p \wedge q)) \wedge p) \to q$ » :



(d) « $((p \vee r) \wedge (q \to r) \wedge (p \to q)) \to (p \leftrightarrow q)$ » ne peut pas être prouvée, puisque deux branches restent ouvertes :



17.7 La logique propositionnelle

Question 7.1 (6 points) Formalisons les trois arguments donnés :

(a) Voici une formalisation :

Étant donné que l'embryon est une personne, il a droit à la vie.	$\rightsquigarrow$	$p \to q$
Si l'embryon a droit à la vie, alors il est faux que qqn a le droit de le lui enlever	$\rightsquigarrow$	$q \to \neg r$
Cependant, si l'avortement est moral, il y a qqn qui a le droit de lui enlever la vie.	$\rightsquigarrow$	$s \to r$
Par conséquent, si l'embryon est une personne, l'avortement est immoral.	$\rightsquigarrow$	$p \to \neg s$

PROOF

Nous démontrons ainsi la validité de l'argument :

1	$p \to q, q \to \neg r, s \to r$	$\vdash$	$p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to \neg r, s \to r$	$\vdash$	$q \to \neg r$	prémisse
3	$p \to q, q \to \neg r, s \to r$	$\vdash$	$s \to r$	prémisse
4	$p \to q, q \to \neg r, s \to r, p$	$\vdash^*$	p	supposition
5	$p \to q, q \to \neg r, s \to r, p$	$\vdash^*$	q	de (1) et (4) par MP
6	$p \to q, q \to \neg r, s \to r, p$	$\vdash^*$	$\neg r$	de (2) et (4) par MP
7	$p \to q, q \to \neg r, s \to r, p$	$\vdash^*$	$\neg s$	de (3) et (6) par MT
8	$p \to q, q \to \neg r, s \to r$	$\vdash$	$p \to \neg s$	de (4) et (7) par PC

(b) Voici une formalisation :

Si l'existence de Dieu était probable, alors la prop. qu'Il existe est une prop. empirique.	$\rightsquigarrow$	$p \to q$
Alors il serait possible de l'ajouter à d'autres prop. empiriques pour en déduire des conclusions qui ne sont pas déductibles de ces autres seules.	$\rightsquigarrow$	$q \to r$
Or cela n'est en fait pas possible.	$\rightsquigarrow$	$\neg r$
Il n'est donc pas le cas que l'existence de Dieu est probable.	$\rightsquigarrow$	$\neg p$

Il s'agit de deux applications du *modus tollens* :

1	$p \to q, q \to r, \neg r$	$\vdash$	$p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to r, \neg r$	$\vdash$	$q \to r$	prémisse
3	$p \to q, q \to r, \neg r$	$\vdash$	$\neg r$	prémisse
4	$p \to q, q \to r, \neg r$	$\vdash$	$\neg q$	de (2) et (3) par MT
5	$p \to q, q \to r, \neg r$	$\vdash$	$\neg p$	de (1) et (3) par MT

(c) Pour formaliser l'argument, et tenant compte de la remarque, nous mettons :

Si je crois en Dieu, alors s'Il existe je gagne, et s'Il n'existe pas je ne perds pas.	$\rightsquigarrow$	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s))$
Si je n'y crois pas, alors s'Il existe je perds, et s'Il n'existe pas je ne gagne pas.	$\rightsquigarrow$	$\neg p \to ((q \to s) \wedge (\neg q \to \neg r))$
De ceci il s'ensuit que si je crois, alors je gagnerai ou je ne perdrai pas,	$\rightsquigarrow$	$p \to (r \vee \neg s)$
tandis que si je ne crois pas, alors je perdrai ou je ne gagnera pas	$\rightsquigarrow$	$\neg p \to (s \vee \neg r)$

La déduction a deux parties :

1	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)) =: \mathbf{A}$	$\vdash$	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s))$	prémisse
2	$\mathbf{A}, p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$\mathbf{A}, p$	$\vdash^*$	$(q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)$	de (1) et (2) avec (MP
4	$\mathbf{A}, p$	$\vdash^*$	$q \to r$	de (3) par $\wedge\mathbf{E}$
5	$\mathbf{A}, p$	$\vdash^*$	$\neg q \to \neg s$	de (3) par $\wedge\mathbf{E}$
6	$\mathbf{A}, p, q$	$\vdash^*$	q	supposition
7	$\mathbf{A}, p, q$	$\vdash^*$	r	de (4) et (6) par (MP)
8	$\mathbf{A}, p, q$	$\vdash^*$	$r \vee \neg s$	de (7) par ($\vee\mathbf{I}$)
9	$\mathbf{A}, p$	$\vdash^*$	$q \to (r \vee \neg s)$	de (6) et (8) par (PC)
10	$\mathbf{A}, p, \neg q$	$\vdash^*$	$\neg q$	supposition

PROOF

11	**A**, $p, \neg q$	$\vdash^* \neg s$	de (5) et (10) par (MP)
12	**A**, $p, \neg q$	$\vdash^* r \vee \neg s$	de (11) par ($\vee$**I**)
13	**A**, p	$\vdash^* \neg q \to (r \vee \neg s)$	de (6) et (8) par (PC)
14	**A**, $p, \neg(r \vee \neg s)$	$\vdash^* \neg(r \vee \neg s)$	supposition
15	**A**, $p, \neg(r \vee \neg s)$	$\vdash^* \neg q$	de (9) et (14) par (MT)
16	**A**, $p, \neg(r \vee \neg s)$	$\vdash^* \neg\neg q$	de (13) et (14) par (MT)
17	**A**, p	$\vdash^* \neg\neg(r \vee \neg s)$	de (14), (15) et (16) par (RAA)
18	**A**, p	$\vdash^* r \vee \neg s$	de (18) par (DN)
19	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s))$	$\vdash p \to (r \vee \neg s)$	de (2) et (18) par (PC)

Le deuxième raisonnement se fait en substituant « $\neg p$ » à « p » et « r » à « s » :

1	$\neg p \to ((q \to s) \wedge (\neg q \to \neg r)) =$: **B**	$\vdash \neg p \to ((q \to s) \wedge (\neg q \to \neg r))$	prémisse
2	**B**, $\neg p$	$\vdash^* \neg p$	supposition
3	**B**, $\neg p$	$\vdash^* (q \to s) \wedge (\neg q \to \neg r)$	de (1) et (2) par (MP
4	**B**, $\neg p$	$\vdash^* q \to s$	de (3) par $\wedge$**E**
5	**B**, $\neg p$	$\vdash^* \neg q \to \neg r$	de (3) par $\wedge$**E**
6	**B**, $\neg p, q$	$\vdash^* q$	supposition
7	**B**, $\neg p, q$	$\vdash^* s$	de (4) et (6) par (MP)
8	**B**, $\neg p, q$	$\vdash^* s \vee \neg r$	de (7) par ($\vee$**I**)
9	**B**, $\neg p$	$\vdash^* q \to (s \vee \neg r)$	de (6) et (8) par (PC)
10	**B**, $\neg p, \neg q$	$\vdash^* \neg q$	supposition
11	**B**, $\neg p, \neg q$	$\vdash^* \neg r$	de (5) et (10) par (MP)
12	**B**, $\neg p, \neg q$	$\vdash^* s \vee \neg r$	de (11) par ($\vee$**I**)
13	**B**, $\neg p$	$\vdash^* \neg q \to (s \vee \neg r)$	de (6) et (8) par (PC)
14	**B**, $\neg p, \neg(s \vee \neg r)$	$\vdash^* \neg(s \vee \neg r)$	supposition
15	**B**, $\neg p, \neg(s \vee \neg r)$	$\vdash^* \neg q$	de (9) et (14) par (MT)
16	**B**, $\neg p, \neg(s \vee \neg r)$	$\vdash^* \neg\neg q$	de (13) et (14) par (MT)
17	**B**, $\neg p$	$\vdash^* \neg\neg(s \vee \neg r)$	de (14), (15) et (16) par (RAA)
18	**B**, $\neg p$	$\vdash^* s \vee \neg r$	de (18) par (DN)
19	$\neg p \to ((q \to s) \wedge (\neg q \to \neg r))$	$\vdash \neg p \to (s \vee \neg r)$	de (2) et (18) par (PC)

Question 7.2 (2 points) Vérifions au moyen de tables de vérité si les formules données sont des tautologies :

(a) « $p \to \neg\neg p$ » est une tautologie :

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$p \to \neg\neg p$
V	F	V	V
F	V	F	V

(b) « $(p \to (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (p \to r))$ » est une tautologie :

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (p \to r)$	$(p \to (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (p \to r))$

PROOF

V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V	F	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

(c) « $\neg(\neg p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ » n'est pas une tautologie :

p	q	$\neg p$	$\neg p \to q$	$\neg(\neg p \to q)$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F	F

(d) « $(p \to \neg p) \leftrightarrow \neg p$ » est une tautologie :

p	$\neg p$	$p \to \neg p$	$(p \to \neg p) \leftrightarrow \neg p$
V	F	F	V
F	V	V	V

Question 7.3 (2 points) Raisonnement sur les boîtes (encore de Smullyan, *The Riddle of Scheherazade*) :

P1 Si B est vide, alors la probabilité que le prix est dans A est 1/2.
P2 Si C est vide, alors la probabilité que le prix est dans A est 1/2.
P3 Soit B est vide, soit C est vide.
C La probabilité que le prix est dans A est 1/2.

Solution : Malgré leurs apparences grammaticales, (**P1**) et (**P2**) ne sont pas des implications matérielles.[5] Plutôt, il s'agit d'affirmation de *probabilité conditionnelle* :

P1+ Dans la moitié des cas où B est vide, le prix est dans A.
P2+ Dans la moitié des cas où C est vide, le prix est dans A.

Nous devons rajouter, pour parler de six cas équi-probables :

P4 Dans les deux moitiés des cas où A est vide, le prix n'est pas dans A.
C+ Dans deux de six cas équiprobables, le prix est dans A (la probabilité est de 1/3).

[5] C'est la formulation choisie par Smullyan. Il serait plus prudent de dire : si nous interprétons la phrase (**P1**) comme implication matérielle, donc comme équivalente à « soit B n'est pas vide, soit la probabilité que le prix est dans A n'est pas 1/2 », cette phrase est vraie grâce au *deuxième* disjoint, ce qui n'est pas l'interprétation voulue.

PROOF

La difficulté vient du fait que l'affirmation de probabilité conditionnelle, qui porte réellement sur la probabilité d'un évènement dans un sous-ensemble des cas possibles (c'est-à-dire dans les situations où l'antécédent est vrai) est formulée de manière comme si la probabilité ne figurait que dans le conséquent. Nous retrouvons ce phénomène assez souvent en langue naturelle :

paris conditionnels « Si tu joues un autre jeu, je paris que tu gagneras » ne veut pas dire que je ne fais un pari seulement si tu joues, mais que je paris que si tu joues, tu gagneras ; au moins en principe, tu pourrais gagner ce pari en ne jouant pas.

promesse conditionnel « Si tu me fais confiance, je te promets que je ne te deçevrai pas » fait une promesse même si tu ne me fais pas confiance ; je te donne un choix entre le manque de confiance et l'attente de non-déception.

insulte conditionnelle « S'il ne rend pas les exercices, l'idiot qu'il est manquera l'examen » insulte le pauvre tout court, peu importe si oui ou non il rend ces exercises ; il est appelé un idiot pour le fait qu'il ne réussira l'examen seulement s'il fait les exercices (nous nous demandons comment le locuteur pense réussir à passer l'examen).

(Premier point supplémentaire) Il ne s'agit pas ici de la question comment les possibilités en question sont spécifiées (série 4, question 7, à la p. 378), mais on oublie que les probabilités sont calculées sur toutes les possibilités, même celles qui sont incompatibles avec ce que l'on sait. Pour voir ceci, comparons l'argument donné avec un raisonnement similaire, mais formulé un peu différemment :

P1∗ Si B est vide, le prix est soit dans A soit dans C.
P2∗ Si C est vide, le prix est soit dans A soit dans B.

Même si un des deux antécédents doit être vrai, tout ce que nous en obtenons est la *disjonction* « soit le prix est dans A, soit dans C, soit dans A, soit dans B », ce qui se réduit à la disjonction initiale « Soit le prix est dans A, soit dans B, soit dans C ». Pour en calculer les probabilités, il faudrait rajouter comme troisième cas :

P4+ Si A est vide, le prix est soit dans B soit dans C.

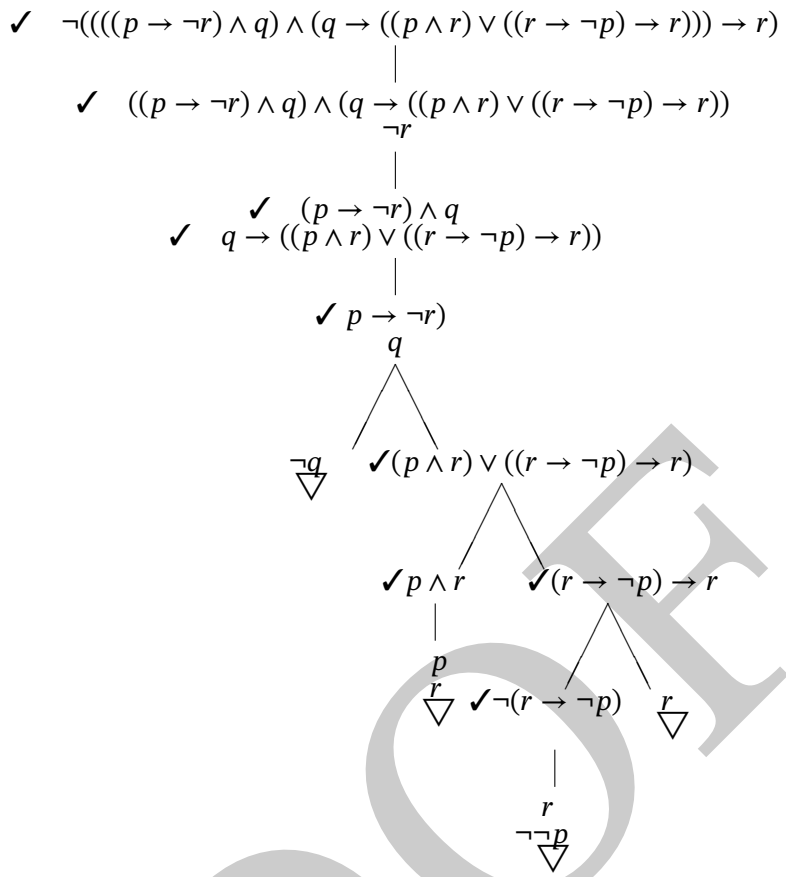
(Deuxième point supplémentaire) Il semble possible de reformuler le problème sous forme MP :

$$\frac{\text{si le prix n'est pas dans } B \text{ ni dans } C\text{, alors il est dans } A \qquad \text{le prix n'est pas dans } B}{\text{si le prix n'est pas dans } C\text{, alors il est dans } A} \tag{A}$$

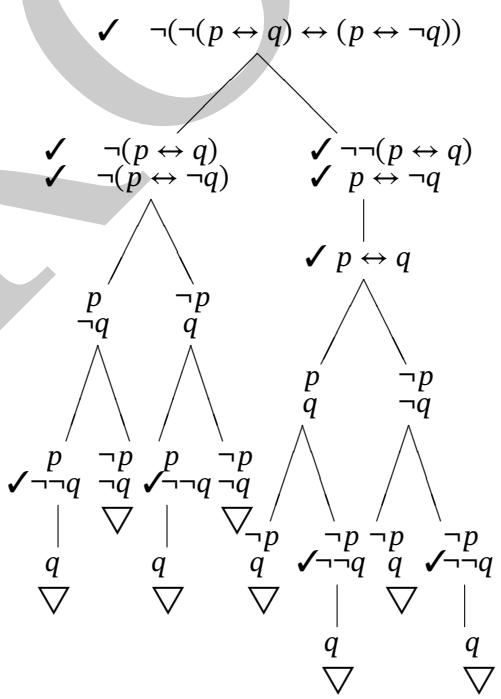
Question 7.4 (2 points) Par la méthode des arbres, prouvons les séquents donnés :

(a) Une preuve de « $(p \to \neg r) \wedge q\,,\ q \to ((p \wedge r) \vee ((r \to \neg p) \to r)) \vdash r$ » :

PROOF



(b) Un arbre pour « $\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$ » :



Question 7.5 (2 points) Si ψ est une tautologie, alors $\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$ en est une également. Montrons que

PROOF

la converse est fausse, c'est-à-dire qu'il n'est pas vrai en général que : si $\ulcorner\phi \to \psi\urcorner$ est une tautologie, alors ψ est également une tautologie.

Il y a plusieurs possibilités de montrer que $\ulcorner\phi \to \psi\urcorner$ peut être une tautologie même si ψ n'en est pas une :

- Par exemple : Soit ψ la phrase « Il pleut » et ϕ la phrase « Il pleut et il pleut » ($= \ulcorner\phi \wedge \phi\urcorner$). Alors $\ulcorner\phi \to \psi\urcorner$ est la phrase « S'il pleut et il pleut alors il pleut » et une tautologie, mais « Il pleut » n'en est pas une.
- Par instantiation : $\ulcorner\phi \to \phi\urcorner$, par exemple, est une tautologie, mais ϕ ne l'est normalement pas.
- Par raisonnement : Nous voyons dans la table de vérité pour « $\to$ » qu'une phrase conditionnelle peut être vraie même si l'antécédent est faux (à condition que le conséquent le soit aussi). Mais il y a beaucoup de tautologies de forme conditionnelle avec un conséquent faux. Il suffit d'en mentionner une.
- Par preuve : s'il était vrai que si $\ulcorner\phi \to \psi\urcorner$ ne pourrait pas être une tautologie, sans que ψ en soit aussi une, alors $\ulcorner(\phi \to \psi) \to \psi\urcorner$ serait également une tautologie. Mais nous pouvons montrer par une table de vérité que cela n'est pas le cas :

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi \to \psi\urcorner$	$\ulcorner(\phi \to \psi) \to \psi\urcorner$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

Question 7.6 (6 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvons les phrases données.

Un erreur fréquent est de ne pas distinguer entre $\wedge\mathbf{E}$ et $\vee\mathbf{E}$. La première règle est simple et nous permet d'inférer « p » et « q » à partir de « $p \wedge q$ ». La deuxième est différente : s'il était permis d'inférer « p » et « q » à partir de « $p \vee q$ », on pourrait tout conclure de tout, en passant de « p » à « $p \vee q$ » (par $\vee\mathbf{I}$) et après à « q » !

(a) Il s'agit d'une introduction de la conjonction :

1	$p, p \to q, p \to r$	$\vdash$	p	prémisse
2	$p, p \to q, p \to r$	$\vdash$	$p \to q$	prémisse
3	$p, p \to q, p \to r$	$\vdash$	$p \to r$	prémisse
4	$p, p \to q, p \to r$	$\vdash$	q	de (1) et (2) par (MP)
5	$p, p \to q, p \to r$	$\vdash$	r	de (2) et (3) par (MP)
6	$p, p \to q, p \to r$	$\vdash$	$q \wedge r$	de (4) et (5) par ($\wedge\mathbf{I}$)

(b) Toute implication matérielle ayant un faux antécédent peut être prouvée :

1	$\neg p \wedge q$	$\vdash$	$\neg p \wedge q$	prémisse
2	$\neg p \wedge q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$\neg p \wedge q, p, \neg r$	$\vdash^*$	$\neg r$	supposition
4	$\neg p \wedge q, p, \neg r$	$\vdash^*$	$\neg p$	de (1) par ($\wedge\mathbf{E}$)
5	$\neg p \wedge q, p$	$\vdash^*$	$\neg\neg r$	de (3), (2) et (4) par (RAA)
6	$\neg p \wedge q, p$	$\vdash^*$	r	de (5) par (DN)

PROOF

7	$\neg p \wedge q$	$\vdash$	$p \to r$	de (2) et (6) par (PC)

(c) Pour montrer que « $p \vee p$ » implique formellement « p » :

1	$p \vee p$	$\vdash$	$p \vee p$	prémisse
2	$p \vee p, p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$p \vee p, p$	$\vdash^*$	p	supposition
4	$p \vee p$	$\vdash$	p	de (1), (2) et (3) par ($\vee$**E**)

(d) Voici une preuve du théorème « $(p \to q) \to (p \to (q \vee r))$ » :

1	$p \to q$	$\vdash^*$	$p \to q$	supposition
2	$p \to q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$p \to q, p$	$\vdash^*$	q	de (1) et (2) par (MP)
4	$p \to q, p$	$\vdash^*$	$q \vee r$	de (3) par ($\vee$**I**)
5	$p \to q$	$\vdash^*$	$p \to (q \vee r)$	de (2) et (4) par (PC)
6		$\vdash$	$(p \to q) \to (p \to (q \vee r)$	de (1) et (5) par (PC)

(e) Voici une preuve de « $p \to (\neg\neg p \to q)$, $\neg q \vdash \neg p$ » :

1	$p \to (\neg\neg p \to q), \neg q$	$\vdash$		prémisse
2	$p \to (\neg\neg p \to q), \neg q$	$\vdash$		prémisse
3	$p \to (\neg\neg p \to q), \neg q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
4	$p \to (\neg\neg p \to q), \neg q, p$	$\vdash^*$	$\neg\neg p \to q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \to (\neg\neg p \to q), \neg q, p$	$\vdash^*$	$\neg\neg\neg p$	de (4) et (2) par (MT)
6	$p \to (\neg\neg p \to q), \neg q, p$	$\vdash^*$	$\neg p$	de (5) par (DN)
7	$p \to (\neg\neg p \to q), \neg q$	$\vdash$	$\neg p$	de (3), (3) et (6) par (RAA)

(f) Voici une preuve de « $p \to \neg p \vdash \neg p$ », encore une forme de la réduction à l'absurde :

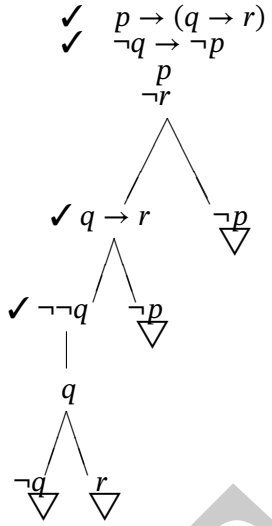
1	$p \to \neg p$	$\vdash$	$p \to \neg p$	prémisse
2	$p \to \neg p, p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$p \to \neg p, p$	$\vdash^*$	$\neg p$	de (1) et (2) par (MP)
4	$p \to \neg p$	$\vdash$	$\neg p$	de (2), (2) et (3) par (RAA)

PROOF

17.8 Premier examen probatoire

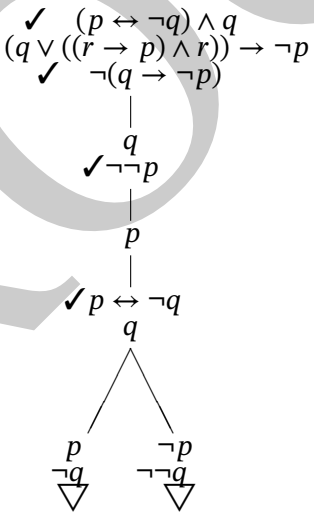
Question 8.1 (10 points) Déterminons par la méthode des arbres si les affirmations sont vraies :

(a) Un arbre pour « $p \to (q \to r), \neg q \to \neg p, p \vdash r$ » :



Toutes les branches se ferment, l'inférence est valide et le séquent correspondant est un théorème : « r » s'ensuit réellement des trois prémisses et la phrase initiale est vraie.

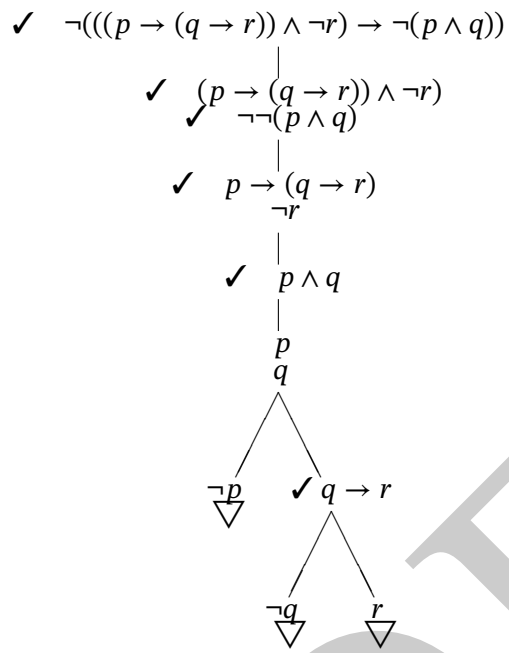
(b) Un arbre pour « $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge q, (q \vee ((r \to p) \wedge r)) \to \neg p \vdash q \to \neg p$ » :



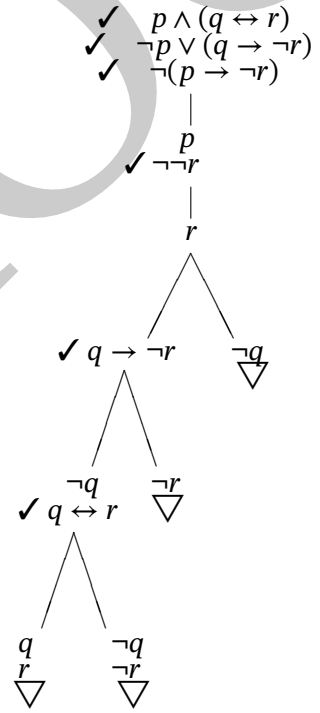
Toutes les branches se ferment – l'inférence est valide, et nous n'avons même pas utilisé la deuxième prémisse !

(c) Pour montrer que « $p \to (q \to r), \neg r \vdash \neg(p \wedge q)$ » est vrai, faisons l'arbre pour la négation de l'implication correspondante :

PROOF

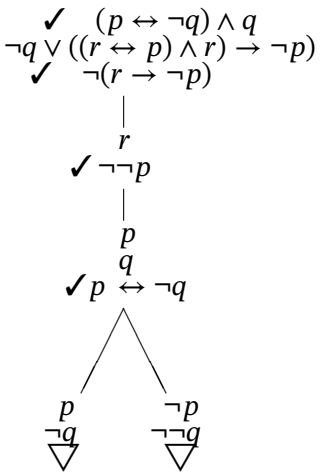


(d) Nous montrons ainsi que « $p \wedge (q \leftrightarrow r), \neg p \vee (q \rightarrow \neg r) \vdash p \rightarrow \neg r$ » est vrai :



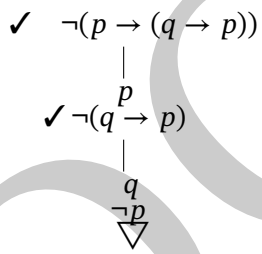
(e) Un arbre pour « $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge q, (\neg q \vee ((r \leftrightarrow p) \wedge r)) \rightarrow \neg p \vdash r \rightarrow \neg p$ » :

PROOF

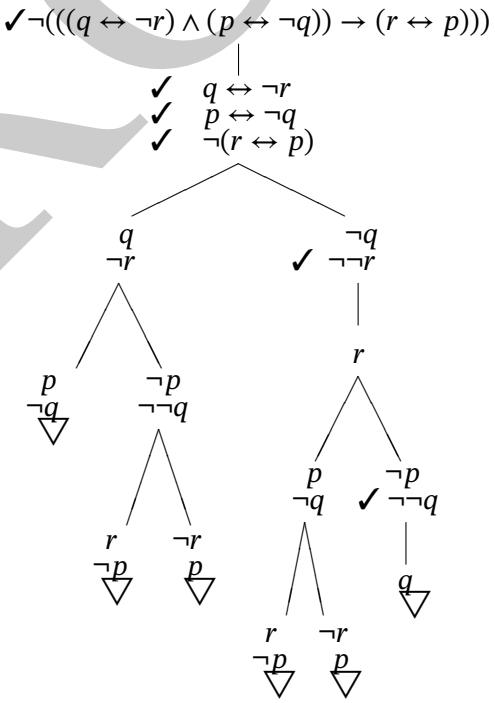


Toutes les branches se ferment même sans utiliser la deuxième prémisse ; l'inférence est valide.

(f) Une preuve de « $p \to (q \to p)$ » :



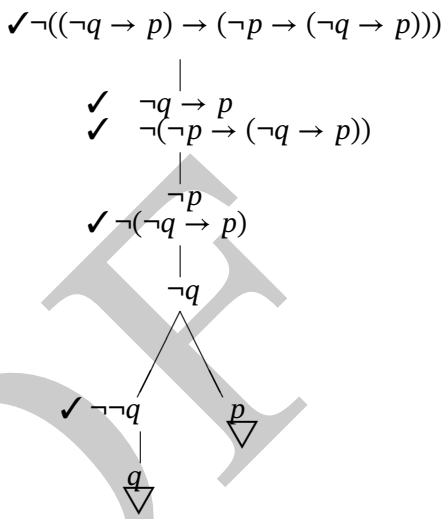
(g) « $((q \leftrightarrow \neg r) \wedge (p \leftrightarrow \neg q)) \to (r \leftrightarrow p)$ » peut être prouvé comme suit :



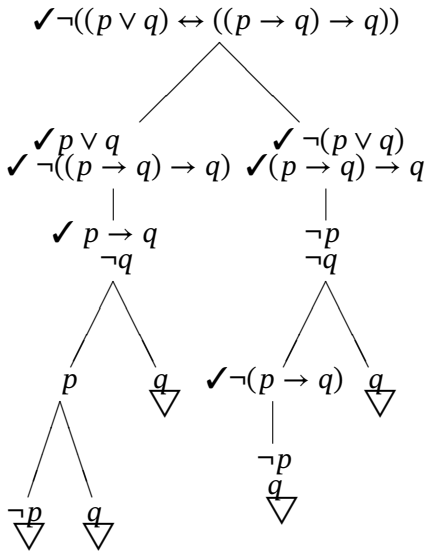
PROOF

L'élimination de la double négation « $\neg\neg r$ » n'était pas nécessaire.

(h) Une preuve de « $(\neg q \to p) \to (\neg p \to (\neg q \to p))$ » :

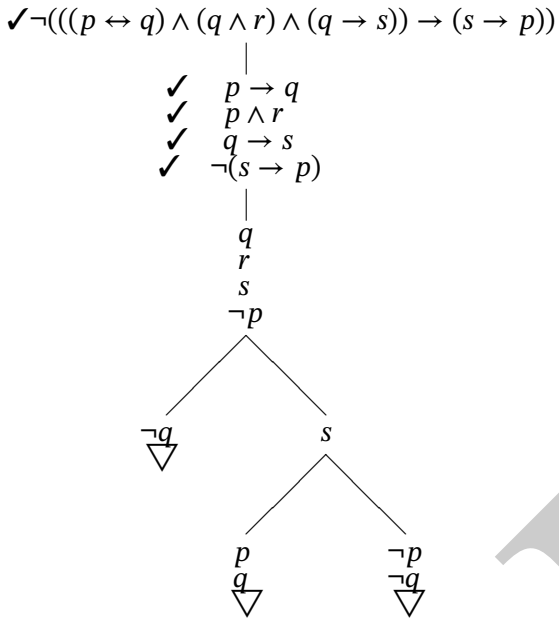


(i) Un arbre pour « $(p \vee q) \leftrightarrow ((p \to q) \to q)$ » :



(j) Un arbre pour « $((p \leftrightarrow q) \wedge (q \wedge r) \wedge (q \to s)) \to (s \to p)$ » :

PROOF



Question 8.2 (10 points) Démontrons les séquents donnés, utilisant les règles d'inférence de la déduction naturelle :

(a) Voici une preuve de « $p \wedge q \vdash p \vee q$ » :

1	$p \wedge q \vdash p \wedge q$	prémisse
2	$p \wedge q \vdash p$	de (1) par ($\wedge$**E**)
3	$p \wedge q \vdash p \vee q$	de (2) par ($\vee$**I**)

(b) Voici une preuve de « $p \wedge (q \leftrightarrow s)$, $(q \leftrightarrow s) \rightarrow r \vdash r \vee t$ » :

1	$p \wedge (q \leftrightarrow s), (q \leftrightarrow s) \rightarrow r \vdash p \wedge (q \leftrightarrow s)$	prémisse
2	$p \wedge (q \leftrightarrow s), (q \leftrightarrow s) \rightarrow r \vdash (q \leftrightarrow s) \rightarrow r$	prémisse
3	$p \wedge (q \leftrightarrow s), (q \leftrightarrow s) \rightarrow r \vdash q \leftrightarrow s$	de (1) par ($\wedge$**E**)
4	$p \wedge (q \leftrightarrow s), (q \leftrightarrow s) \rightarrow r \vdash r$	de (2) et (3) par (MP)
5	$p \wedge (q \leftrightarrow s), (q \leftrightarrow s) \rightarrow r \vdash r \vee t$	de (4) par ($\vee$**I**)

(c) Voici une preuve de « $\neg(\neg p \wedge \neg q)$, $\neg p \vdash q$ » :

1	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg p$	$\vdash \neg(\neg p \wedge \neg q)$	prémisse
2	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg p$	$\vdash \neg p$	prémisse
3	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg p, \neg q$	$\vdash^* \neg q$	supposition
4	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg p, \neg q$	$\vdash^* \neg p \wedge \neg q$	de (2) et (3) par ($\wedge$**I**)
5	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg p$	$\vdash \neg\neg q$	de (3), (4) et (1) par (RAA)
6	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg p$	$\vdash q$	de (5) par (DN)

(d) Voici une preuve de « $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r) \vdash p \leftrightarrow r$ » :

1	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash (p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	prémisse
2	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash p \leftrightarrow \neg q$	de (1) par ($\wedge$**E**)

PROOF

3	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash q \leftrightarrow \neg r$	de (1) par ($\wedge$**E**)
4	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash p \rightarrow \neg q$	de (2) par ($\leftrightarrow$ **E**)
5	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash \neg q \rightarrow p$	de (2) par ($\leftrightarrow$ **E**)
6	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash q \rightarrow \neg r$	de (3) par ($\leftrightarrow$ **E**)
7	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash \neg r \rightarrow q$	de (3) par ($\leftrightarrow$ **E**)
8	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r), p$	$\vdash^* p$	supposition
9	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r), p$	$\vdash^* \neg q$	de (4) et (8) par (MP)
10	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r), p$	$\vdash^* \neg\neg r$	de (7) et (9) par (MT)
11	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r), p$	$\vdash^* r$	de (10) par (DN)
12	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash p \rightarrow r$	de (8) et (11) par (PC)
13	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r), r$	$\vdash^* r$	supposition
14	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r), r$	$\vdash^* \neg\neg r$	de (13) par (DN)
15	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r), r$	$\vdash^* \neg q$	de (6) et (14) par (MT)
16	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r), r$	$\vdash^* p$	de (13) et (15) par (MP)
17	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash r \rightarrow p$	de (13) et (16) par (PC)
18	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash p \leftrightarrow r$	de (12) et (17) par ($\leftrightarrow$ **I**)

(e) Voici une preuve de « $p \vee q\,,\ p \rightarrow r\,,\ q \rightarrow r \vdash r \vee s$ » :

1	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$	$\vdash\ p \vee q$	prémisse
2	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$	$\vdash\ p \rightarrow r$	prémisse
3	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$	$\vdash\ q \rightarrow r$	prémisse
4	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$	$p \vdash^*\ p$	supposition
5	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$	$p \vdash^*\ r$	de (2) et (4) avec (MP)
6	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$	$q \vdash^*\ q$	supposition
7	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$	$q \vdash^*\ r$	de (3) et (6) avec (MP)
8	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$	$\vdash\ r$	de (1,3,4,5,6) avec ($\vee$E)
9	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$	$\vdash\ r \vee s$	de (7) avec ($\vee$I)

(f) Voici une preuve de « $p \rightarrow q, r \rightarrow s \vdash (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)$ » :

1	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$\vdash\ p \rightarrow q$	prémisse
2	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$\vdash\ r \rightarrow s$	prémisse
3	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$p \wedge r \vdash^*\ p \wedge r$	supposition
4	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$p \wedge r \vdash^*\ p$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
5	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$p \wedge r \vdash^*\ q$	de (1) et (4) avec (MP)
6	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$p \wedge r \vdash^*\ r$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
7	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$p \wedge r \vdash^*\ s$	de (2) et (6) avec (MP)
8	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$p \wedge r \vdash^*\ q \wedge s$	de (5) et (7) avec ($\wedge$**I**)
9	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$\vdash\ (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)$	de (3) et (8) avec (PC)

(g) Voici une preuve de « $\vdash\ p \rightarrow (q \vee \neg q)$ » :

1	$p \vdash^*\ p$		supposition
2	$p, \neg(q \vee \neg q) \vdash^*\ \neg(q \vee \neg q)$		supposition

PROOF

3	$p, \neg(q \vee \neg q), q \vdash^* q$	supposition
4	$p, \neg(q \vee \neg q), q \vdash^* q \vee \neg q$	de (3) avec ($\vee$**I**)
5	$p, \neg(q \vee \neg q) \vdash^* \neg q$	de (3), (2) et (4) avec (RAA)
6	$p, \neg(q \vee \neg q), \neg q \vdash^* \neg q$	supposition
7	$p, \neg(q \vee \neg q), \neg q \vdash^* q \vee \neg q$	de (3) avec ($\vee$**I**)
8	$p, \neg(q \vee \neg q) \vdash^* \neg\neg q$	de (6), (2) et (7) avec (RAA)
9	$p \vdash^* q \vee \neg q$	de (2), (5) et (8) avec (RAA)
10	$\vdash p \to (q \vee \neg q)$	de (1) et (9) avec (PC)

(h) Voici une preuve que « q » s'ensuit de « $p \to (p \to q)$ » et de « p » :

1	$p \to (p \to q), p \vdash p \to (p \to q)$	prémisse
2	$p \to (p \to q), p \vdash p$	prémisse
3	$p \to (p \to q), p \vdash p \to q$	de (1) et (2) par (MP)
4	$p \to (p \to q), p \vdash q$	de (2) et (3) par (MP)

(i) Voici une preuve de « $\neg\neg q \to p, \neg p \vdash \neg q$ » :

1	$\neg\neg q \to p, \neg p \vdash \neg\neg q \to p$	prémisse
2	$\neg\neg q \to p, \neg p \vdash \neg p$	prémisse
3	$\neg\neg q \to p, \neg p \vdash \neg\neg\neg q$	de (1) et (2) par (MT)
4	$\neg\neg q \to p, \neg p \vdash \neg q$	de (3) par (DN)

DN ne s'applique que si « $\neg$ » est le connecteur principal : je ne peux donc pas passer de (1) à « $q \to p$ » par DN.

(j) Voici une preuve d'une instance de conversion :

1	$\neg p \to q \vdash \neg p \to q$	prémisse
2	$\neg p \to q, \neg q \vdash^* \neg q$	supposition
3	$\neg p \to q, \neg q \vdash^* \neg\neg p$	de (1) et (2) par (MT)
4	$\neg p \to q, \neg q \vdash^* p$	de (3) par (DN)
5	$\neg p \to q \vdash \neg q \to p$	de (2) et (4) par (PC)

17.9 Deuxième examen probatoire

Question 9.1 (3 points) La police arrête trois suspects : Maria, Sam et Jonathan. Ils font des témoignages suivantes :

1. Maria : « Jonathan est innocent, mais Sam ne l'est pas. »
2. Sam : « Si Maria n'est pas innocente, alors Jonathan ne l'est pas non plus. »
3. Jonathan : « Je suis innocent, mais un des deux autres ne l'est pas. »

Abrégeant « Maria est innocente » par « p », « Sam est innocent » par « q » et « Jonathan est innocent » par « r », répondons aux questions.

Solution : Un point pour la formalisation, un demi-point pour le tables de vérité, un demi-point pour deux réponses correctes, un point pour le reste.

PROOF

(a) Exprimons les trois témoignages comme formules de la logique propositionnelle et en faisons les tables de vérité.
   a) Maria : « $r \wedge \neg q$ »
   b) Sam : « $\neg p \to \neg r$ »
   c) Jonathan : « $r \wedge (\neg p \vee \neg q)$ »

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg p \vee \neg q$	$r \wedge \neg q$	$\neg p \to \neg r$	$r \wedge (\neg p \vee \neg q)$
V	V	V	F	F	F	F	F	V	F
V	V	F	F	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	F	V	F
F	V	V	V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	F	V	F

(b) (i) Les trois témoignages sont **consistants** parce que les trois reçoivent « V » à la troisième ligne.
(ii) La table montre que **le témoignage de Jonathan s'ensuit de celui de Maria**.
(iii) Si tout le monde est innocent, nous sommes dans la première ligne du tableau. Dans ce cas, **Maria et Jonathan** ont menti.
(iv) Si les trois témoignages sont vrais, nous sommes dans la troisième ligne du tableau. Alors **Maria et Jonathan sont innocents, mais Sam ne l'est pas**.
(v) Si les innocents ont dit la vérité et les autres ont menti, nous stipulons que la valeur de vérité du témoignage de Maria correspond à celui de "p", celle du témoignage de Sam à celle de "q" et celle du témoignage de Jonathan à celle de "r". Nous sommes donc dans la sixième ligne du tableau et **Sam est innocent et Maria et Jonathan ne le sont pas**.

Question 9.2 (2 points) Formulons en français, de la manière la plus élégante possible, les formules suivantes. Il est permis, et même recommandé, de s'écarter de la traduction littérale :
(a) Voici quelques exemples d'affirmations qui ont la forme logique de « $p \wedge q$ » : «»
(b) Voici quelques exemples d'affirmations qui ont la forme logique de « $p \to q$ » : «»
(c) Voici quelques exemples d'affirmations qui ont la forme logique de « $(p \to q) \wedge (r \to q)$ » : «»
(d) Voici quelques exemples d'affirmations qui ont la forme logique de « $p \vee q$ » : «»
(e) Voici quelques exemples d'affirmations qui ont la forme logique de « $(p \wedge q) \leftrightarrow r$ » : «»
(f) Voici quelques exemples d'affirmations qui ont la forme logique de « $\neg p \to \neg q$ » : «»
(g) Voici quelques exemples d'affirmations qui ont la forme logique de « $(p \wedge q) \vee r$ » : «»
(h) Voici quelques exemples d'affirmations qui ont la forme logique de « $p \to (q \vee r)$ » : «»
(i) Voici quelques exemples d'affirmations qui ont la forme logique de « $\neg\neg p$ » : «»
(j) Voici quelques exemples d'affirmations qui ont la forme logique de « $(\neg p \to q) \wedge (p \to r)$ » : «»

Question 9.3 (2 points) Formulons, en français, les conversion des implications suivantes (la conversion de « $p \to q$ » est « $\neg q \to \neg p$ ») :
(a) Une conversion de « Si tu ne finis pas ton assiette, tu n'auras pas de dessert. » est la suivante : «».
(b) Une conversion de « Si tu finis ton assiette, tu auras un bonbon. » est la suivante : «».

PROOF

(c) Une conversion de « Si tu étudies la logique, tu seras heureux et sage. » est la suivante : «».
(d) Une conversion de « Si 2+2=5, alors les poules ont des dents. » est la suivante : «».
(e) Une conversion de « S'il gagne son paris, je mange mon chapeau. » est la suivante : «».
(f) Une conversion de « S'il n'est pas revenu après trois jours, j'alerte les secours. » est la suivante : «».
(g) Une conversion de « Si tu es logicien dans l'âme, cet exercice n'est pas difficile pour toi. » est la suivante : «».

Question 9.4 (2 points) Déterminons lesquelles des phrases données ont la même table de vérité :

(a) Les tables de vérité pour « $(p \wedge \neg q) \wedge r$ » et pour « $p \wedge (\neg q \wedge r)$ » sont les suivantes :

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \wedge r$	$(\neg q \wedge r)$	$p \wedge (\neg q \wedge r)$
V	V	V	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	V	F
F	F	F	V	F	F	F	F

La sixième et la huitième colonne sont identiques : les deux phrases ont alors la même table de vérité.

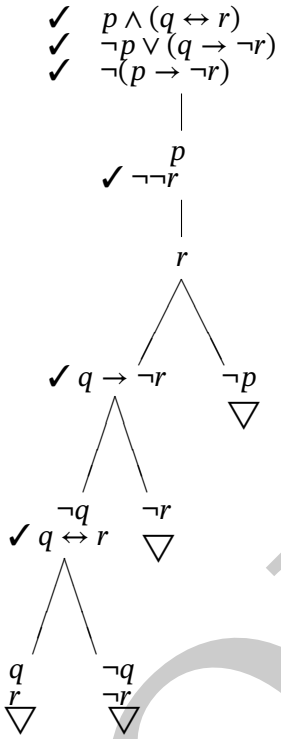
(b) Les tables de vérité pour « $\neg(p \vee q)$ » et pour « $\neg p \vee \neg q$ » sont les suivantes :

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

La quatrième et la septième colonne ne sont pas identiques : les deux phrases n'ont pas la même table de vérité.

Question 9.5 (1 point) L'arbre pour « $p \wedge (q \leftrightarrow r), \neg p \vee (q \rightarrow \neg r) \vdash p \rightarrow \neg r$ » :

PROOF

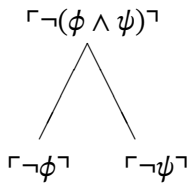


Question 9.6 (2 points) Formulons des règles de transformation d'arbres pour la barre de Sheffer et justifions intuitivement leur validité.

Solution : Rappelons-nous que la table de vérité de la barre de Sheffer est la suivante :

p	q	$p\|q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Nous voyons que « $p|q$ » est équivalent (logiquement) à « $\neg(p \wedge q)$ ». L'arbre de $\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$:



Nous avons donc comme règles de transformation pour $\ulcorner\phi|\psi\urcorner$ et pour $\ulcorner\neg(\phi|\psi)\urcorner$:

PROOF

Question 9.7 (2 points) Comment définir « $\wedge$ », « $\to$ » et « $\leftrightarrow$ » en termes de « $\vee$ » et de « $\neg$ » :

$$\begin{aligned}
\phi \wedge \psi \quad &:\Longleftrightarrow \quad \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \\
\phi \to \psi \quad &:\Longleftrightarrow \quad \neg(\phi \wedge \neg\psi) \\
\text{ou :} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \neg\phi \vee \psi \\
\phi \leftrightarrow \psi \quad &:\Longleftrightarrow \quad \neg(\phi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\neg\phi \wedge \psi) \\
\text{ou :} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vee \neg(\phi \vee \psi) \\
\text{ou :} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \neg(\neg(\neg\phi \vee \psi) \vee \neg(\phi \vee \neg\psi))
\end{aligned}$$

Question 9.8 (2 points) Montrons que les phrases données sont des tautologies :

(a) $((p_1 \to q_1) \wedge (p_2 \to q_2) \wedge \neg(q_1 \wedge q_2) \wedge (p_1 \vee p_2)) \to ((q_1 \to p_1) \wedge (q_2 \to p_2)) =: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$:

p_1	p_2	q_1	q_2	$p_1 \to q_1$	$p_2 \to q_2$	$\neg(q_1 \wedge q_2)$	$p_1 \vee p_2$	**A**	$q_1 \to p_1$	$q_2 \to p_2$	**B**	$\mathbf{A} \to \mathbf{B}$
V	V	V	V	V	V	F	V	F	V	V	V	**V**
V	V	V	F	V	F	V	V	F	V	V	V	**V**
V	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	**V**
V	V	F	F	F	F	V	V	F	V	V	V	**V**
V	F	V	V	V	V	F	V	F	V	F	F	**V**
V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	F	F	**V**
V	F	F	F	F	V	V	V	F	V	V	V	**V**
F	V	V	V	V	V	F	V	F	F	V	F	**V**
F	V	V	F	V	F	V	V	F	F	V	F	**V**
F	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	F	V	F	V	V	F	V	V	V	**V**
F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	**V**
F	F	V	F	V	V	V	F	F	F	V	F	**V**
F	F	F	V	V	V	V	F	F	V	F	F	**V**
F	F	F	F	V	V	V	F	F	V	V	V	**V**

(b) $((p_1 \to q_1) \wedge (p_2 \to q_2) \wedge (p_3 \to q_3) \wedge \neg(q_1 \wedge q_2) \wedge \neg(q_2 \wedge q_3) \wedge \neg(q_1 \wedge q_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3)) \to ((q_1 \to p_1) \wedge (q_2 \to p_2) \wedge (q_3 \to p_3)) =: (\mathbf{A1} \wedge \mathbf{A2} \wedge \mathbf{A3}) \to \mathbf{B}$:

p_1	p_2	p_3	q_1	q_2	q_3	**A1**	**A2**	**A3**	$\mathbf{A1} \wedge \mathbf{A2} \wedge \mathbf{A3} =: \mathbf{A}$	**B**	$\mathbf{A} \to \mathbf{B}$
V	V	V	V	V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	V	V	V	F	F	F	V	F	V	V
V	V	V	V	F	V	F	F	V	F	V	V
V	V	V	V	F	F	F	V	V	F	V	V
V	V	V	F	V	V	F	F	V	F	V	V
V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	V	V
V	V	V	F	F	V	F	V	V	F	V	V
V	V	V	F	F	F	F	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	F	V	V	F	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	F	V	F	F	V	F	F	V

PROOF

V	V	F	V	F	F	F	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	F	F	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	F	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	V	V	F	V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	F	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	F	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	V	F	F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	V	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	V	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	V	V	F	F	V	V

PROOF

Question 9.9 (4 points) (encore de Smullyan, *The Riddle of Scheherazade*) Voici quelques exemples de phrases qui ne peuvent pas être affirmées véridiquement par tout le monde :

(a) « Je suis une femme » – dite par une Lausannoise, la phrase est vraie, dite par un Genevois, elle est fausse. Elle ne peut pas être dite dans les deux autres cas.

(b) « Je suis soit une Lausannoise soit un Genevois » – dite par une Lausannoise, la phrase est vraie ; dite par une Genevoise, elle est fausse. Elle ne peut pas être dite par des hommes.

(c) « Je ne suis pas Lausannois » – vrai si dit par une Lausannoise, mais faux pour le Lausannois, et vrai – et donc non disable – pour les Genevois de tout sexe.

(d) « Je suis pas Genevois » – les Lausannois ne peuvent pas la dire parce qu'elle serait fausse (et ils ne mentent jamais), les Genevois ne peuvent pas la dire parce qu'elle ne serait pas fausse (et ils mentent toujours).

17.10 La syllogistique

Question 10.1 (2 points) Classifions les phrases données selon la distinction « **SaP** » / « **SiP** / « **SeP** » / « **SoP** » :

(a) « Tous les anges sont immortels » a la forme **SaP**.

(b) « Aucun ange n'est mortel » a la forme **SeP**.

(c) « L'homme est un être raisonnable » a la forme **SaP**.

(d) « Quelques oeuvres d'art ne sont pas jolies » a la forme **SoP**.

(e) « Quelques oeuvres d'art sont laides » a la forme **SiP**.

(f) « Personne parmi les hommes n'est sans vice » a la forme **SeP**.

Question 10.2 (2 points) Faites un diagramme de Venn pour la proposition suivante. Est-elle compatible avec « Aucun F n'est G » ?

Tous les F sont G et tous les G sont F.

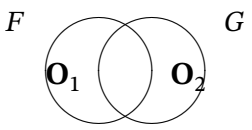
Solution : En logique des prédicats, la phrase en question a la forme :

$$\forall x\,(Fx \to Gx) \;\wedge\; \forall x(Gx \to Fx)$$

ce qui est sémantiquement équivalent à

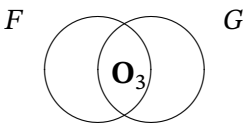
$$\forall x\,(Fx \leftrightarrow Gx)$$

Le diagramme de Venn est le suivant :

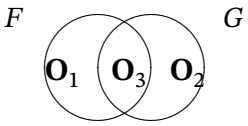


Le premier « **O** » (« $\mathbf{O}_1$ ») représente l'implication de gauche à droite, la deuxième (« $\mathbf{O}_2$ ») celle de droite à gauche. Le diagramme pour « Aucun F n'est G » est le suivant :

PROOF



Combinant les deux, nous obtenons :



D'après ce diagramme, il n'y a pas de F qui ne sont pas de G, pas des F qui sont des G et pas de G qui ne sont pas de F. Il n'y a donc aucun F et aucun G.

La question de compatibilité reçoit une réponse différentielle : les deux propositions ne sont pas compatibles selon la syllogistique, qui présuppose que les termes généraux qu'elle traite sont vrais d'au moins un objet ; elles sont cependant compatibles dans la logique des prédicats, qui permet le cas où il n'y a pas de F : la phrase initiale est alors vraie à condition qu'il n'y a pas non plus de G, ce qui n'est pas non plus exclu par la logique des prédicats. « Aucun F n'est G » serait formalisée comme

$$\neg\exists x\,(Fx \wedge Gx)$$

ce qui est consistant avec « $\forall x\,(Fx \leftrightarrow Gx)$ ».

Question 10.3 (1 point) Soient les cartes suivantes :

On sait que chaque carte comporte une lettre de l'alphabet d'un côté et un chiffre de l'autre. Supposez que l'on fasse l'affirmation suivante :

> S'il y a une voyelle d'un côté de ces quatre cartes, il y a un nombre pair de l'autre côté.

Combien de cartes faut-il retourner *au minimum* pour vérifier cette affirmation ? Lesquelles ?

Solution : Nous voyons une voyelle (E) et un nombre pair (4). Il est donc clair qu'il faut tourner la première carte, E, pour voir si on trouve un nombre pair de l'autre côté. Quelle autre carte faut-il tourner ? Si on tourne la troisième, on n'apprend rien sur la vérité de l'implication (puisqu'il ne s'ensuit rien de la vérité de son conséquent). Si on tourne la deuxième, on n'apprend également rien (puisqu'il ne s'ensuit rien de la fausseté de son antécédent). Pour trouver qu'il faut tourner la quatrième, on applique le principe de conversion : « S'il y a une voyelle d'un côté de ces quatre cartes, il y a un nombre pair de l'autre côté. » est équivalent à « S'il n'y a pas de nombre pair sur un côté, il y a une lettre qui n'est pas une voyelle sur l'autre ». Il faut donc tourner la quatrième pour voir si la lettre de l'autre côté n'est pas une voyelle. Si c'est le cas, l'implication est vraie, sinon, elle est fausse. Il faut donc tourner les cartes E et 7.

Question 10.4 (2 points) Formalisons les phrases comme suit :

PROOF

(a)	« Toute personne aime quelqu'un »	$\forall x(\text{personne}(x) \rightarrow \exists y(\text{personne}(y) \wedge x \text{ aime } y))$
(b)	« Personne n'est aimé par tout le monde »	$\neg\exists y(\text{personne}(y) \wedge \forall x(\text{personne}(x) \rightarrow x \text{ aime } y))$

Si nous abrégeons « x est une personne » par « Px » et « x aime y »par « Axy », nous obtenons (dans la troisième colonne nous traitons comme implicite l'information qu'il s'agit des personnes) :

(a')	« Toute personne aime quelqu'un »	$\forall x(Px \rightarrow \exists y(Py \wedge Axy))$	$\forall x\exists y(Axy)$
(b')	« Personne n'est aimé par tout le monde »	$\neg\exists y(Py \wedge \forall x(Px \rightarrow Axy))$	$\neg\exists y\forall x(Axy)$

Les deux phrases peuvent être vraies ensemble si pour toute personne, il existe quelqu'un qui est aimé par cette personne mais que différentes personnes ont différents aimants. S'il n'y a, par exemple, que quatre personnes dans notre univers de discours – Sam, Annette, Marie et Jeanne – et si Sam aime Annette, Annette aime Sam, Marie aime Sam et Jeanne aime Marie, la première phrase est vraie. Puisque personne n'est aimé par tous les quatre, la deuxième phrase est également vraie dans cette situation.

Question 10.5 (2 points) Formalisons les deux affirmations données dans le calcul des prédicats (avec « oiseau(x) », « corbeau(x) », « personne(x) », « blanc(x) », « noir(x) », « vertueux(x) », « heureux(x) ») pour déterminer s'il s'agit ou non de tautologies (de la logique des prédicats) :

(a) La formalisation de la phrase « S'il y a des oiseaux blancs et pas de corbeaux noirs, alors certains oiseaux ne sont pas des corbeaux » nous donne :

$$(\exists x(\text{oiseau}(x) \wedge \text{blanc}(x)) \wedge \neg\exists y(\text{corbeau}(y) \wedge \text{noir}(y))) \rightarrow \exists x(\text{oiseau}(x) \wedge \neg\text{corbeau}(x))$$

Cette phrase n'est pas une tautologie, puisque elle n'est vraie que si on présuppose que rien (ou, de moins, aucun oiseau) de blanc ne peut être noir (ou si on présuppose que rien (ou, de moins, aucun corbeau) de noir ne peut être blanc). C'est peut-être une inférence matérielle ou peut-être une inférence sémantique, mais il ne s'agit pas d'une inférence logique.

(b) La formalisation de la phrase « S'il est vrai que, si tous les gens sont vertueux, alors tous les gens sont heureux, alors tous les gens vertueux sont heureux » nous donne :

$$(\forall x(\text{personne}(x) \rightarrow \text{vertueux}(x)) \rightarrow \forall x(\text{personne}(x) \rightarrow \text{heureux}(x))) \rightarrow (\forall x((\text{personne}(x) \wedge \text{vertueux}(x) \rightarrow \text{heureux}(x))))$$

Avec les abréviations évidentes et prenant comme présupposé qu'il s'agit des personnes, nous obtenons :

$$(\forall x(Vx) \rightarrow \forall x(Hx)) \rightarrow \forall x(Vx \rightarrow Hx)$$

Comme les trois quantificateurs sont indépendants, le fait que nous utilisons trois fois « x » est un accident typographique. Au lieu de l'implication précédente, nous aurions pu formaliser comme suit :

$$(\forall x(Vx) \rightarrow \forall y(Hy)) \rightarrow \forall z(Vz \rightarrow Hz)$$

Cette phrase n'est pas non plus une tautologie, parce qu'il est logiquement possible qu'il y ait des gens qui ne sont pas vertueux mais aussi des gens vertueux qui ne sont pas heureux. Dans

PROOF

ce cas, il n'est pas le cas que tous les gens sont vertueux, et donc l'antécédent de la première implication est faux, ce qui rend la première implication vraie. Puisque cette première implication est l'antécédent de l'implication toute entière, cette dernière est fausse s'il y a des gens vertueux qui ne sont pas heureux.

Si, par exemple, notre univers de discours contient Marie, qui n'est pas vertueuse, et Sam, qui est vertueux mais qui n'est pas heureux, « $(\forall x(\text{personne}(x) \rightarrow \text{vertueux}(x)) \rightarrow \forall x(\text{personne}(x) \rightarrow \text{heureux}(x)))$ » est vrai, parce que son antécédent, « $\forall x(\text{personne}(x) \rightarrow \text{vertueux}(x)$ » est faux. Mais il est faux que toute personne vertueuse est heureuse (puisque Sam est vertueux, mais pas heureux).

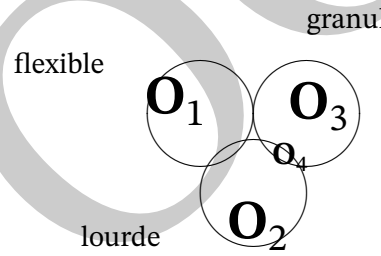
Question 10.6 (2 points) Formalisons les deux énoncés donnés dans le calcul des prédicats et déterminons s'ils sémantiquement équivalents :

(a)	« Tous les hommes ont une cervelle de moineau. »	$\forall x(\text{homme}(x) \rightarrow \text{a une cervelle de moineau}(x))$
(b)	« Seuls les hommes ont une cervelle de moineau. »	$\forall x(\text{a une cervelle de moineau}(x) \rightarrow \text{homme}(x))$

Les deux énoncés ne sont pas équivalents :

1. Si tous les hommes ont une cervelle de moineau mais que les moineaux ont aussi une cervelle de moineau, (a) est vrai, mais (b) est faux.
2. Si seuls les hommes ont une cervelle de moineau, mais que quelques hommes n'ont pas de cerveau du tout, (b) est vrai, mais (a) est faux.

Question 10.7 (1 point) Faisons un diagramme de Venn pour « Une chose est flexible si et seulement si elle est ou bien granulée ou bien lourde. » :



Pour l'implication de gauche à droite, nous dessinons le premier « **O** » (« $\mathbf{O}_1$ »). Celle de gauche à droite est équivalente à la conjonction de « tout ce qui est lourd mais n'est pas granulé est flexible » (« $\mathbf{O}_2$ »), de « tout ce qui est granulé mais n'est pas lourd est flexible » (« $\mathbf{O}_3$ ») et de « tout ce qui est lourd est granulé est flexible » (« $\mathbf{O}_4$ »).

Question 10.8 (2 points) Formulons, dans le langage naturel, des phrases contradictoires aux phrases données :

(a)	« Tout ce qui brille n'est pas d'or. »	Il y a une ambiguité entre « Tout ce qui brille est d'or. » et : « Il y a de l'or qui brille. »
(b)	« Cette salle est à moitié vide. »	« Cette salle n'est pas à moitié vide. »
(c)	« Tous les chemins mènent à Rome. »	« Il y a au moins un chemin qui ne mène pas à R. »
(d)	« Certains Qu.s ont au moins 2 voitures. »	« Tous les Québécois ont moins de 2 voitures. » « Aucun Québécois n'a au moins 2 voitures. »
(e)	« Les chiens ont quatre pattes. »	« Il y a un chien qui n'a pas quatre pattes. »
(f)	« Le chien est un animal. »	Il y a une ambiguité entre :

PROOF

		« Le chien n'est pas un animal. » et : « Il y a au moins un chien qui n'est pas un animal. »
(g)	« Le pingouin est mon animal préféré. »	« Le pingouin n'est pas mon animal préféré. »

Pour (a), la réponse varie selon qu'on interprète la négation comme interne ou externe. Si on l'interprète comme externe, la phrase a la forme « $\neg\forall x(x$ brille $\rightarrow$ x est d'or) » et la phrase contradictoire est donc « Tout ce qui brille est d'or. ». Si l'on interprète comme interne, la phrase a la forme « $\forall x(x$ brille $\rightarrow$ $\neg x(x$ est d'or)) » et la phrase contradictoire est « Il y a quelque chose qui brille et qui est d'or ».

Il est possible d'argumenter que la phrase qui contredit (f) est plutôt « Il y a un chien qui n'est pas un animal ». (f), d'après cette interprétation, fait une assertion sur l'espèce – le fait que si un membre de l'espèce n'est pas un animal, alors l'espèce Chien ne peut pas être une sous-espèce de l'espèce Animal, n'est pas un fait logique, mais appartient à une autre domaine (la biologie, si elle nous dit que les espèces sont uniformes dans ce sens-là, la métaphysique si elle nous dit que les espèces ne déterminent que les propriétés essentielles de leurs membres). Une telle ambiguïté n'existe cependant pas pour (g).

Question 10.9 (3 points, l'exercise est emprunté à Quine (1959, 111)) Vérifions (de manière intuitive) si l'argument donné est valide, Supposant que l'univers de discours ne contient que des animaux :

(i) De (1) et (5), on conclut :
(11) Tous les animaux dans la maison tuent des souris.
(ii) De (8) et (11) on conclut :
(12) Tous les animaux dans la maison sont des carnivores.
(iii) De (4) et (12) on conclut :
(13) Tous les animaux dans la maison chassent la nuit.
(iv) De (6) et (13) on conclut :
(14) Tous les animaux qui s'habituent à moi chassent la nuit.
(v) De (10) et (14) on conclut :
(15) Tous les animaux qui s'habituent à moi adorent la lune.
(vi) De (2) et (15) on conclut :
(16) Tout animal qui s'habitue à moi est susceptible d'être mon ami.
(vii) De (7) et (16) on conclut :
(17) Les kangourous ne s'habituent pas à moi.
(viii) De (9) et (17) on conclut :
(18) Je déteste les kangourous.
(ix) De (3) et (18) on conclut :
(19) J'évite les kangourous.

Il existe des solutions plus courtes, mais elles présupposent la prémisse additionnelle (bien que évidente) que les kangourous ne sont pas des chats.

Question 10.10 (3 points) Étant donné les quelques abréviations, donnons des formalisations dans le langage du calcul des prédicats :

(a)	« Les philosophes sont sérieux. »	$\forall x(P(x) \rightarrow S(x))$
(b)	« Les philosophes ne sont pas tous sérieux. »	$\neg\forall x(P(x) \rightarrow S(x))$
(c)	« Quelques philosophes sont politiciens. »	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$

PROOF

(d)	« Tout politicien s'admire. »	$\forall x(P(x) \to A(x,x))$
(e)	« Tout philosophe respecte Aristote. »	$\forall x(P(x) \to R(x,a))$
(f)	« Certains philosophes respectent A. et S. »	$\exists x(P(x) \wedge R(x,a) \wedge R(x,s))$
(g_1)	« Tous les philosophes admirent un politicien. »	$\forall x(P(x) \to \exists y(Q(y) \wedge A(x,y))$
(g_2)		$\exists y(Q(y) \wedge \forall x(P(x) \to A(x,y)))$
(h)	« Les philosophes respectent les politiciens sérieux. »	$\forall x,y\,((P(x) \wedge Q(y) \wedge S(y)) \to R(x,y))$
(i)	« Aristote est admiré. »	$\exists x(A(x,a))$
(j)	« Quelqu'un est admiré par Aristote. »	$\exists x(A(a,x))$

(g) est ambiguë entre une interprétation selon laquelle le même politicien est admiré par tous les philosophes et une autre selon laquelle différents philosophes admirent différents politiciens.

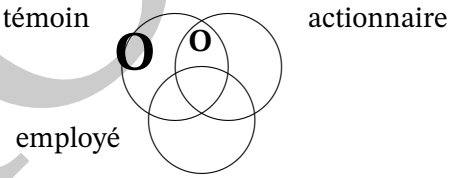
17.11 La logique des prédicats

Question 11.1 (5 points) Formalisons les arguments donnés dans le langage de la logique des prédicats et vérifions s'ils sont valides avec des diagrammes de Venn :

(a) L'inférence « Tous les témoins qui sont des actionnaires sont des employés. Tous les témoins sont soit des employés, soit des actionnaires. Donc, tous les témoins sont des employés. » est formalisée comme suit :

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\,((x \text{ est un témoin} \wedge\ x \text{ est un actionnaire}) \to\ x \text{ est un employé}\\ \forall x\,(x \text{ est un témoin} \to\ (x \text{ est un employé} \vee\ x \text{ est un actionnaire}))\end{array}}{\forall x\,(x \text{ est un témoin} \to\ x \text{ est un employé})}$$

La vérification de la validité se fait comme suit : si quelqu'un est un témoin, il est soit employé, soit actionnaire (deuxième prémisse). S'il est actionnaire, il est aussi employé (première prémisse). Qu'il soit actionnaire ou non, il sera donc certainement un employé.

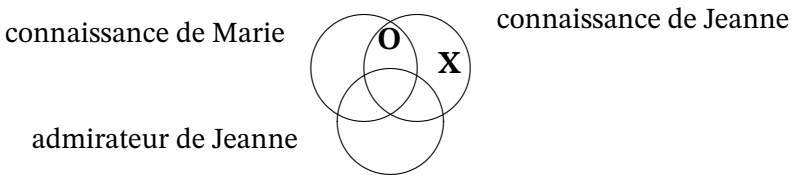


(b) L'inférence « Toute personne qui connaît Jeanne et Marie admire Jeanne. Quelques personnes qui connaissent Jeanne ne l'admirent pas. Donc, il existe quelqu'un qui connaît Jeanne mais pas Marie. » est formalisée comme suit :

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\,((x \text{ connaît Marie} \wedge\ x \text{ connaît Jeanne}) \to\ x \text{ admire Jeanne})\\ \exists x\,(x \text{ connaît Jeanne} \wedge\ \neg(x \text{ admire Jeanne}))\end{array}}{\exists x\,(x \text{ connaît Jeanne} \wedge\ \neg(x \text{ connaît Marie}))}$$

La vérification de la validité se fait comme suit. La première prémisse nous apprend que toute personne qui se trouve dans l'intersection des deux cercles en haut se trouve également dans l'intersection des deux avec le troisième et que donc l'intersection des deux seuls est vide. La deuxième prémisse dit qu'il y a quelqu'un dans le cercle des connaissances de Jeanne qui ne se trouve pas dans le cercle des admirateurs – comme une partie de ce complément est vide, le « X » doit être mis toute à droite. Ceci vérifie la conclusion, parce que cette personne se trouve également hors du cercle des connaissances de Marie.

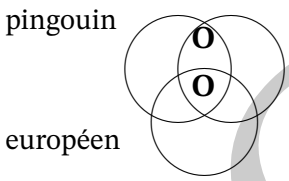
PROOF



(c) L'inférence « Aucun pingouin européen n'est noir ; tous les pingouins noirs sont européen. Donc, aucun pingouin n'est noir. » est formalisée comme suit :

$$\frac{\begin{array}{c}\neg\exists x\ (x \text{ est un pingouin} \wedge\ x \text{ est européen} \wedge\ x \text{ est noir})\\ \forall x\ ((x \text{ est un pingouin} \wedge\ x \text{ est noir}) \rightarrow\ x \text{ est européen})\end{array}}{\neg\exists x\ (x \text{ est un pingouin} \wedge\ x \text{ est noir})}$$

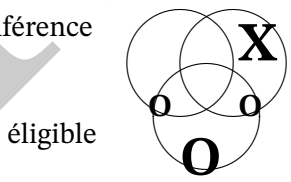
La vérification de la validité se fait comme suit : s'il y avait des pingouins noirs, alors ils seraient européens (deuxième prémisse). Mais ceci est exclu par la première prémisse.



(d) L'inférence « Seuls les maîtres de conférence parlant anglais sont éligibles ; certaines pesonnes parlent anglais mais ne sont pas des maîtres de conférence ; donc certaines pesonnes qui ne sont pas éligibles parlent anglais. » est formalisée comme suit :

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ (x \text{ est éligible} \rightarrow\ (x \text{ est un maître de conférence} \wedge\ x \text{ parle l'anglais}))\\ \exists x\ (x \text{ parle l'anglais} \wedge \neg(x \text{ est un maître de conférence}))\end{array}}{\exists x\ (x \text{ parle l'anglais} \wedge \neg(x \text{ est éligible}))}$$

La vérifions ainsi la validité : si tous ceux qui parlent anglais étaient éligibles, alors, par la deuxième prémisse, au moins une personne qui n'est pas maître de conférence serait éligible. Mais ceci est exclu par la première prémisse.

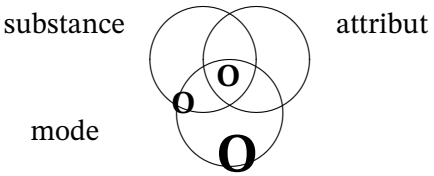


(e) L'inférence « Tout est soit une substance, soit un attribut ; les modes ne sont pas des substances. Donc, les modes sont des attributs. » est formalisée comme suit :

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ (x \text{ est une substance}\ \vee\ x \text{ est un attribut})\\ \forall x\ (x \text{ est un mode} \rightarrow\ \neg(x \text{ est une substance}))\end{array}}{\forall x\ (x \text{ est un mode} \rightarrow\ x \text{ est un attribut})}$$

La vérification de la validité se fait comme suit : tout ce qui est un mode doit, par la première prémisse, être soit une substance, soit un attribut. Or, un mode ne peut pas être une substance, par la deuxième prémisse. Donc les modes doivent être des attributs.

PROOF



Question 11.2 (2 points) Formalisons les phrases données dans le langage de la logique des prédicats :

(a)	Si tous les commandeurs doivent être renversés, alors aucun commandeur ne doit pas être renversé.	$\forall x$ (x est un commandeur $\rightarrow$ x doit être renversé) $\rightarrow \neg\exists x$ (x est un commandeur $\wedge$ $\neg$(x doit être renversé))
(b)	Tout oiseau qui n'est ni nuisible ni dangereux n'est pas un rapace.	$\forall x((x$ est un oiseau $\wedge \neg(x$ est nuisible) $\wedge$ $\neg(x$ est dangereux)) $\rightarrow \neg(x$ est un rapace))
(c)	Quelques champignons sont à la fois répandus et vénéneux.	$\exists x(x$ est un champignon $\wedge$ x est répandu $\wedge$ x est vénéneux)
(d)	Quelques champignons sont répandus et quelques champignons sont vénéneux.	$\exists x(x$ est un champignon $\wedge$ x est répandu) $\wedge$ $\exists x(x$ est un champignon $\wedge$ x est vénéneux)

Question 11.3 (2 points) Formulons en langage ordinaire les négations des phrases (c) et (d) de la dernière question. (c) et (d) ne sont pas logiquement équivalentes dans la mesure où l'un des deux implique l'autre, mais la converse (que la deuxième implique la première) n'est pas vraie. Dans quel sens va l'implication ? **Solution**. Les négations de (c) et de (d) sont les suivantes :

(¬c)	« Rien n'est à la fois un champignon, répandu et vénéneux »	« $\neg\exists x(x$ est un champignon $\wedge$ x est répandu $\wedge$ x est vénéneux) »
(¬d)	« Soit aucun champignon n'est répandu, soit aucun champignon n'est vénéneux »	« $\forall x(x$ est un champignon $\rightarrow$ $\neg(x$ est répandu)) $\vee$ $\forall x(x$ est un champignon $\rightarrow$ $\neg(x$ est vénéneux)) »

(¬c) est équivalent à « Tous les champignons répandus ne sont pas vénéneux, tous les champignons vénéneux ne sont pas répandus et tout ce qui est répandu et vénéneux n'est pas un champignon ». S'il y a des champignons qui sont répandus et vénéneux, alors il y a des champignons répandus et des champignons vénéneux. Donc (c) implique (d). Mais il est tout à fait possible qu'il y ait des champignons répandus mais non vénéneux, et aussi des champignons vénéneux mais rares. Donc (d) n'implique pas (c).

Parmi les négations, l'implication va dans le sens inverse (d'après le principe de conversion). (¬d) implique (¬c), mais la converse est fausse. Si tous les champignons sont rares, il n'y a pas de champignons répandus et vénéneux (puisqu'il n'y a pas de champignons répandus) ; si tous les champignons ne sont pas vénéneux, il n'y a pas non plus de champignons répandus et vénéneux (puisqu'il n'y a pas de champignons vénéneux).

Question 11.4 (3 points) Parmi les énoncés donnés, trouvons ceux qui sont équivalents et ceux qui sont la négation l'un de l'autre. Formalisons chacun des énoncés en langage de la logique des prédicats.

Solution : (b), (c), (e) et (f) sont tous équivalents. (a) et (d) sont aussi équivalents. Aucun des

PROOF

énoncés n'est la négation d'un autre. Abrégeant « x est une amour » par « Ax », « x est heureux » par « Hx » et « x est imaginaire » par « Ix »,

(a) « Les amours heureuses sont imaginaires. » est formalisé par « $\forall x((Ax \wedge Hx)) \rightarrow Ix)$ ».

(b) « Les amours imaginaires sont heureuses. » est formalisé par « $\forall x((Ax \wedge Ix)) \rightarrow Hx)$ ».

(c) « Les amours malheureuses ne sont pas imaginaires. » est formalisé par « $\forall x((Ax \wedge \neg Hx)) \rightarrow \neg Ix)$ ».

(d) « Il n'y a pas d'amours heureuses qui ne soient imaginaires. » est formalisé par « $\neg\exists x(Ax \wedge Hx \wedge \neg Ix)$ ».

(e) « Il n'y a que des choses autres que des amours et de l'imaginaire qui sont malheureuses. » est formalisé par « $\forall x(\neg Hx \rightarrow (\neg Ax \vee \neg Ix))$ ».

(f) « Il n'y a pas des amours imaginaires malheureuses » est formalisé par « $\neg\exists x(Ax \wedge Ix \wedge \neg Hx)$ ».

Question 11.5 (3 points) Supposons que l'univers de discours ne contient que trois individus : a, b et c, exprimons les phrases données sans des quantificateurs et disons lesquels sont équivalentes avec lesquels :

(a) « $\exists x(Fx \vee Gx)$ » $\iff$ « $(Fa \vee Ga) \vee (Fb \vee Gb) \vee (Fc \vee Gc)$ »

(b) « $\forall x(Fx \vee Gx)$ » $\iff$ « $(Fa \vee Ga) \wedge (Fb \vee Gb) \wedge (Fc \vee Gc)$ »

(c) « $\forall x(Fx \wedge Gx)$ » $\iff$ « $(Fa \wedge Ga) \wedge (Fb \wedge Gb) \wedge (Fc \wedge Gc)$ »

(d) « $\exists xFx \vee \exists xGx$ » $\iff$ « $(Fa \vee Fb \vee Fc) \vee (Ga \vee Gb \vee Gc)$ »

(e) « $\forall xFx \vee \forall xGx$ » $\iff$ « $(Fa \wedge Fb \wedge Fc) \vee (Ga \wedge Gb \wedge Gc)$ »

(f) « $\forall xFx \wedge \forall xGx$ » $\iff$ « $(Fa \wedge Fb \wedge Fc) \wedge (Ga \wedge Gb \wedge Gc)$ »

(a) et (d) sont équivalents, (c) et (f) sont équivalents, grâce à la commutativité de la disjonction et de la conjonction respectivement. (b) et (e) ne sont pas équivalents : si, par exemple, a et b sont F et c est G, (b) est vrai, mais (e) est faux. Nous montrons cela ainsi dans un univers avec seulement deux objets, a et b. (e) devient alors :

(e+) $(Fa \wedge Fb) \vee (Ga \wedge Gb)$

En appliquant les lois de Morgan, nous voyons que dans cette situation, (b) est équivalent à

(b+) $(Fa \wedge Fb) \vee (Fa \wedge Gb) \vee (Ga \wedge Fb) \vee (Ga \wedge Gb)$

Il est, en conséquent, évident que (e) implique logiquement (b), mais que (b) n'implique pas (e).

Question 11.6 (2 points) Formalisons les phrases données dans le langage de la logique des prédicats, en utilisant au moins deux quantificateurs pour chaque phrase.

Solution : Soit « Hx » une abréviation pour « x est un humain », « Dx » une pour « x est un défaut » et « Rxy » une pour « x possède y » (cf. Lucas et al., 2007, 68-69).

(a) « Tous les humains possèdent tous les défauts. » devient « $\forall x(Hx \rightarrow \forall y(Dy \rightarrow xRy))$ ». Alternativement, on peut mettre « $\forall x\forall y(Hx \rightarrow (Dy \rightarrow xRy))$ » ou « $\forall x\forall y((Hx \wedge Dy) \rightarrow xRy))$ ».

(b) « Certains humains possèdent certains défauts. » devient « $\exists x(Hx \wedge \exists y(Dy \wedge Rxy)$ ». « $\exists x\exists y(Hx \wedge Dy \wedge Rxy)$ » convient aussi.

(c) « Chaque humain possède au moins un défaut. » devient « $\forall x(Hx \rightarrow \exists y(Dy \wedge Rxy))$ » ou « $\forall x\exists y(Hx \rightarrow (Dy \wedge Rxy))$ ». Les défauts possédés peuvent varier d'homme à homme.

PROOF

(d) « Certains défauts sont possédés par tous les humains. » devient « $\exists y(Dy \wedge \forall x(Hx \rightarrow Rxy))$ » ou encore « $\exists y \forall x((Dy \wedge (Hx \rightarrow Rxy))$ ». C'est le même défaut pour tout le monde.

Question 11.7 (1 point) Formalisons les phrases données dans la langage de la logique des prédicats, en utilisant au moins trois quantificateurs pour chaque phrase.

Solution : Nous utilisons « Kxy » pour « x connaît y » et « $Cxyz$ » pour « x cache y à z ».

(a) « Chaque humain possède au moins un défaut qu'il cache à tous ceux qui le connaissent. » devient « $\forall x(Hx \rightarrow \exists y(Dy \wedge Rxy \wedge \forall z(Kxz \rightarrow Cxyz)))$ » ou, de manière équivalente, « $\forall x \exists y \forall z(Hx \rightarrow (Dy \wedge Rxy \wedge (Kxz \rightarrow Cxyz)))$ ». Il y a une autre formalisation possible, puisque la phrase est ambiguë : le pronom « le » pourrait désigner le défaut et non l'humain en question. Dans ce cas, la formalisation est : « $\forall x(Hx \rightarrow \exists y(Dy \wedge Rxy \wedge \forall z(Kyz \rightarrow Cxyz)))$ ».

(b) « Un défaut commun à tous les humains est caché à tout le monde. » est également ambiguë : soit nous parlons de tous les défauts universellement partagés, soit nous parlons d'un défaut commun en particulier. Dans le deuxième cas, la formalisation est : $\exists y(Dy \wedge \forall x(Hx \rightarrow Rxy) \wedge \exists x \forall z Cxyz)$ – « le défaut est caché » devient « il y a quelqu'un qui cache le défaut ». Dans le premier cas, la phrase devient « $\forall y((Dy \wedge \forall x(Hx \rightarrow Rxy)) \rightarrow \forall x(Rxy \rightarrow \forall z Cxyz)$ », s'il est implicite dans la phrase que ce sont ceux qui ont le défaut le cachent et autrement « $\forall y((Dy \wedge \forall x(Hx \rightarrow Rxy)) \rightarrow \exists x \forall z Cxyz)$ »,.

Question 11.8 (2 points) Formulons des phrases en français dont les formules données sont des formalisations :

(a) Voici un exemple d'une phrase dont « $\forall x(Dx \rightarrow \forall y((Cy \wedge Fy) \rightarrow Hxy))$ » est la formalisation : « tous mes amis adorent ce qui est cher et rare », avec « Dx » pour « x est mon ami », « Cx » pour « x est cher », « Fx » pour « x est rare » et « Hxy » pour « x adore y ». D'autres exemples : « Tout dalmatien hait tout croyant fou », « Tout bon argument ne possède que des formalisations logiques simples », « Tous les chats aiment tuer toutes les souris qui ont une queue et une peau grise », « Tous les professeurs apprécient les élèves engagés », « Tous les enfants aiment les parents intelligents », « Chaque étudiant réussit les examens faciles et courts. »

(b) Voici un exemple d'une phrase dont « $\exists x((Dx \wedge Fx) \rightarrow Pax)$ » est la formalisation : « il existe quelque chose que Sam achète si elle est jolie et rare », avec « Dx » pour « x est joli », « Fx » pour « x est rare », « a » pour « Sam » et « Pxy » pour « x achète y ». Un autre exemple est : « Il y a quelqu'un que Angelina adopte s'il est jeune et joli. »,

17.12 Syntaxe et sémantique de la logique des prédicats

Question 12.1 (3 points) Expliquons le termes.

(a) Un **terme singulier** est une expression qui est utilisée pour designer au plus une chose. Normalement, une phrase contenant un terme singulier fait une assertion à propos de l'objet dénoté par ce terme singulier.[6] On distingue entre des noms propres comme « Trump », des descriptions définies comme « l'actuelle reine d'Angleterre », des expressions démonstratives comme « ceci » ou « cette femme » et des indexicaux comme « moi », « ici » et « maintenant » (cf. p. 233 pour en savoir plus).

[6] Je dis « normalement » pour exclure le cas de « Socrate est soit mortel soit il ne l'est pas », ou il peut sembler douteux s'il s'agit d'une affirmation à propos de Socrate. Il y a d'autres cas problématiques comme « Socrate est une chose ».

PROOF

(b) Une **phrase ouverte** est une formule bien formée contenant au moins une occurrence libre d'une variable. Elle est le résultat de l'omission d'une ou de plusieurs occurrences d'un ou de plusieurs termes singuliers dans une phrase. Une phrase ouverte n'est ni vraie ni fausse, mais vraie de ou satisfaite par certains objets et pas d'autres (cf. p. 204 pour en savoir plus).

(c) La **distinction entre usage et mention** est la distinction entre deux usages de mots : d'une part, on **utilise** des mots pour parler des choses qu'ils désignent, d'autre part on **mentionne** les mots pour parler de ces mots mêmes (cf. p. 27 pour en savoir plus).

(d) Un **système formel axiomatique** est un ensemble de phrases d'un langage formel qui consiste en certains axiomes et en des théorèmes qui s'ensuivent de ces axiomes à l'aide des règles d'inférence (cf. p. 104 pour en savoir plus).

(e) L'**analyse russellienne d'une description définie** consiste à donner la forme logique suivante à une description définie comme elle se trouve dans la phrase « la reine d'Angleterre est F » :

$$\exists x(Ax \wedge Fx \wedge \forall y(Ay \rightarrow y \mathrel{=\!\!=} x))$$

Une description définie est donc analysée en termes d'une condition d'existence et d'une condition d'unicité (cf. p. 236 pour en savoir plus).

(f) L'**analyse fregéenne des énoncés d'identité** distingue entre les sens et les référents des termes singuliers utilisés. Dans le cas où les référents sont les mêmes, l'énoncé d'identité est vrai. Dans le cas où leurs sens sont différents, l'énoncé d'identité est informatif (cf. p. 223 pour en savoir plus).

Question 12.2 (2 points) Formalisons les phrases données :

(a) « Il n'y a que trois manières de cuisiner des pâtes. » est formalisé comme suit : « $\exists x \exists y \exists z(x$ est une manière de cuisiner des pâtes $\wedge\ y$ est une manière de cuisiner des pâtes $\wedge\ z$ est une manière de cuisiner des pâtes $\wedge\ x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \forall w(w$ est une manière de cuisiner des pâtes $\rightarrow (w \mathrel{=\!\!=} x \vee w \mathrel{=\!\!=} y \vee w \mathrel{=\!\!=} z))$ ».

(b) « Le Père Noël n'existe pas. » est formalisé comme suit : « $\neg\exists x(x \mathrel{=\!\!=} a)$ ».

(c) « Sam est le singe le plus intelligent du zoo. » est formalisé comme suit : « $\forall x((x$ est un singe du zoo $\wedge\ x$ est au moins aussi intelligent que $a) \rightarrow x \mathrel{=\!\!=} a)$ ».

(d) « À part moi, il n'y avait que Sam qui était là. » est formalisé comme suit : « a était là $\wedge\, b$ était là $\wedge$ $\forall x(x$ était là $\rightarrow (x \mathrel{=\!\!=} a \vee x \mathrel{=\!\!=} b))$ ».

Question 12.3 (3 points) À l'aide de la définition de validité, justifions la vérité des phrases données :

(a) Démontrons que $\{\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Gx \rightarrow \neg Hx)\} \vDash \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$:
Soit $\mathcal{A}$ une structure et supposons que « $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ » et « $\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx)$ » soient vrais dans cette structure. Nous devons montrer que la phrase ouverte « $Fx \rightarrow \neg Hx$ » est vraie quelle que soit la valeur assignée à « x ». Soit h une assignation arbitraire et supposons que « Fx » soit vrai (dans $\mathcal{A}$) sous cette assignation. Alors « Gx » doit également être vrai sous cette assignation, en raison de la vérité de « $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ » dans $\mathcal{A}$. Mais si « Gx » est vrai sous cette assignation, alors « $\neg Hx$ » l'est également, puisque nous avons supposé que « $\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx)$ » était vrai dans $\mathcal{A}$. Quelle que soit l'assignation h, si « Fx » est vrai sous cette assignation, « $\neg Hx$ » l'est aussi. Donc « $\forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$ » est vrai dans $\mathcal{A}$. Comme tout ce que nous avions présupposé sur $\mathcal{A}$ était que « $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ » et « $\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx)$ » soient vrais dans $\mathcal{A}$, nous avons démontré que « $\forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$ » est une conséquence sémantique de ces deux phrases.

(b) Démontrons que $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vDash \neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$:
Soit $\mathcal{A}$ une structure dans laquelle « $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ » est vrai. Par conséquent, toute assignation

PROOF

de valeurs dans l'univers de discours de cette structure à la variable « x » satisfait la phrase ouverte « $Fx \to Gx$ ». D'après notre condition de satisfaction **S6**, soit toute assignation satisfait « Gx », soit aucune assignation ne satisfait « Fx ». D'après la condition **S4**, aucune assignation ne peut alors satisfaire « $Fx \wedge \neg Gx$ ». D'après la condition **S9** et d'après **S3**, aucune assignation ne peut donc satisfaire « $\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$ ». Autrement dit, toute assignation doit satisfaire « $\neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$ ». Donc « $\neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$ » est vrai dans toute structure dans laquelle « $\forall x(Fx \to Gx)$ » est vrai et la première phrase est une conséquence logique de la deuxième.

(c) Démontrons que $\{\forall x(Fx \to Gx), \exists x(\neg Gx)\} \vDash \exists x(\neg Fx)$:

Soit $\mathcal{A}$ une structure dans laquelle « $\forall x(Fx \to Gx)$ » et « $\exists x(\neg Gx)$ » sont vrais. Nous devons montrer qu'il y a une assignation de valeurs qui satisfait « $\neg Fx$ ». Nous savons qu'il y a une assignation qui satisfait « $\neg Gx$ ». Or, cette assignation ne peut pas satisfaire « Fx », puisque dans ce cas, nous savons par la première prémisse qu'elle devrait également satisfaire « Gx », ce qui est impossible. Par la clause pour la négation **S3**, cette assignation doit donc satisfaire « $\neg Fx$ ».

Question 12.4 (1 point) Formalisons les phrases données :

Tous les Suisses peuvent entrer.	$\rightsquigarrow$	$\forall x(Sx \to Ex)$
Que des Suisses peuvent entrer.	$\rightsquigarrow$	$\forall x(Ex \to Sx)$

Beaucoup pensent que la deuxième phrase fait une présupposition existentielle et affirme qu'il existe des Suisses. Mais ceci n'est pas le cas : « il n'y a que des fous qui boivent de la bière avec le fondue » est parfaitement compatible avec « tout le monde ne boit que du vin ou du thé avec le fondue ». Une manière de faire de sorte qu'il n'y a que les coupables qui sont enfermés est de vider les prisons.

Question 12.5 (7 points) Formalisons (sous la supposition que le domaine de quantification est la totalité des êtres humains) :

(a)	Suzie est F.	F(Suzie)	Fa ou $\exists x(Fx \wedge x = \text{Suzie})$
(b)	Sam est F.	F(Sam)	Fb
(c)	Quelques D sont F.	$\exists x\,(Dx \wedge Fx)$	
(d)	Tout D est F.	$\forall x\,(Dx \to Fx)$	
(e)	Seuls les D sont F.	$\forall x\,(Fx \to Dx)$	$\neg\exists x\,(Fx \wedge \neg Dx)$
(f)	Les D ne sont pas les seuls à être F	$\neg\forall x\,(Fx \to Dx)$	$\exists x\,(Fx \wedge \neg Dx)$
(g)	Aucun H n'est F.	$\neg\exists x\,(Hx \wedge Fx)$	
(h)	Tous les F sont G sauf les H.	$\forall x\,((Fx \wedge \neg Hx) \to Gx)$ peut-être il faut rajouter :	$\cdots \wedge \forall x((Fx \wedge Hx) \to \neg Gx)$
(i)	Quelques H ne sont pas F.	$\exists x\,(Hx \wedge \neg Fx)$	
(j)	Sam n'est pas F.	$\neg F$(Sam)	$\neg Fa$
(k)	Suzie a tué Sam.	A-tué(Suzie, Sam)	Rba
(l)	Quelqu'un a tué Sam.	$\exists x$ (A-tué(x,Sam))	$\exists x\,(Rxa)$
(m)	Sam a tué quelqu'un.	$\exists x$ (A-tué(Sam, x))	$\exists x\,(Rax)$
(n)	Quelqu'un a tué quelqu'un.	$\exists x \exists y$ (A-tué(x, y))	$\exists x, y\,(Rxy)$
(o)	Quelqu'un s'est tué.	$\exists x$ (A-tué(x, x))	$\exists x\,(Rxx)$
(p)	Personne ne s'est tué.	$\neg\exists x$ (A-tué(x, x))	$\neg\exists x\,(Rxx)$
(q)	Quelqu'un a tué tout le monde.	$\exists x \forall y$ (A-tué(x, y))	$\exists x \forall y\,(Rxy)$
(r)	Quelqu'un a été tué par tout le monde.	$\exists x \forall y$ (A-tué(y, x))	$\exists y \forall y\,(Rxy)$
(s)	Il y a un S entre Sam et Suzie.	$\exists x$(entre(x,Sam,Suzie) $\wedge Sx$)	$\exists x(Exab \wedge Sx)$
(t)	Chaque douanier hait un coureur.	$\forall x \exists y$ (x est douanier → y est coureur $\wedge$ hait(x, y))	$\forall x \exists y\,(Dx \to (Cy \wedge Hxy))$

PROOF

(u)	Quelques coureurs aiment chaque douanier.	$\exists x\,(x \text{ est coureur} \wedge \forall y\,(y \text{ est douanier} \rightarrow x \text{ aime } y))$	$\exists x\,(Cx \wedge \forall y\,(Dy \rightarrow Axy))$
(v)	Il y a un coureur haï par tous les douaniers fous.	$\exists x\,\forall y\,((y \text{ est douanier} \wedge y \text{ est fou}) \rightarrow (x \text{ est coureur} \wedge y \text{ hait } x))$	$\exists x\,\forall y\,((Dy \wedge Fy) \rightarrow (Cx \wedge Hyx))$
(w)	Quelques C n'ont de relation P avec aucun FD.	$\exists x \neg \exists y\,(Cx \wedge Fy \wedge Dy \wedge Pxy)$	
(x)	Quelques C ont une relation P uniquement avec des D qui ne sont pas F.	$\exists x \forall y((Cx \wedge Pxy \wedge Dy) \rightarrow \neg Fy)$	

Question 12.6 (4 points) Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats avec $\mathbf{I} = \{0\}$, $\mathbf{J} = \{0, 1, 2\}$, $\mathbf{K} = \{0, 1\}$, $\lambda(0) = 2$, $\mu(0) = 1$, $\mu(1) = \mu(2) = 2$. Nous remplaçons les signes non logiques par les suivants :

$\dots R_0 \cdots$	$\rightsquigarrow$	$\dots \leq \cdots$
$f_0(\dots)$	$\rightsquigarrow$	$-\dots$
$f_1(\dots, \cdots)$	$\rightsquigarrow$	$\dots + \cdots$
$f_2(\dots, \cdots)$	$\rightsquigarrow$	$\dots \times \cdots$
c_0	$\rightsquigarrow$	0
c_1	$\rightsquigarrow$	1

(a) Les expressions suivantes sont-elles des termes de $\mathcal{L}^+$?

(i) « 0 » (« c_0 ») est un terme de $\mathcal{L}^+$.
(ii) « $x_1 + 1$ » (« $f_1(x_1, c_1)$ ») est un terme de $\mathcal{L}^+$.
(iii) « $+x_1$ » n'est pas un terme de $\mathcal{L}^+$.
(iv) « $x_1\times$ » n'est pas un terme de $\mathcal{L}^+$.
(v) « $x_1 \times (0 + 1)$ »(« $f_2(x_1, f_1(c_0, c_1))$ ») est un terme de $\mathcal{L}^+$.
(vi) « 2 » n'est pas un terme de $\mathcal{L}^+$.

(b) Les expressions suivantes sont-elles des formules atomiques de $\mathcal{L}^+$?

(i+) « $x_1 + 1$ » n'est pas une formule atomique de $\mathcal{L}^+$.
(ii+) « $0 + 0 = 1$ » (« $f_1(c_0, c_0) = c_1$ ») est une formule atomique de $\mathcal{L}^+$.
(iii+) « $(x_1 \leq 1)\neq 1$ » n 'est pas une formule atomique de $\mathcal{L}^+$.
(iv+) « $\forall x_1(x_1 \leq (0+1))$ » n'est pas une formule atomique de $\mathcal{L}^+$ (même si c'est une formule).
(v+) « $0 + 1\neq 0 \times 1$ » (« $f_1(c_0, c_1)\neq f_2(c_0, c_1)$ ») n'est pas une formule atomique de $\mathcal{L}^+$.
(vi+) « $x_1 \leq 1$ » (« $R_0(x_1, c_1)$ ») est une formule atomique de $\mathcal{L}^+$.

(c) Les expressions suivantes sont-elles des formules de $\mathcal{L}^+$?

(i∗) « 0 » n'est pas une formule de $\mathcal{L}^+$.
(ii∗) « $x_1 + 1 \leq x_1$ » (« $R_0(f_1(x_1, c_1), x_1)$ ») est une formule de $\mathcal{L}^+$ (même atomique).
(iii∗) « $\forall x_1(x_1 \times (0 + 1))$ » n'est pas une formule de $\mathcal{L}^+$.
(iv∗) « $1 + (x_1 \times (0 + 1))$ » n'est pas une formule de $\mathcal{L}^+$.
(v∗) « $(1 + 1) \wedge (0 \leq 1)$ » n'est pas une formule de $\mathcal{L}^+$.
(vi∗) « $\forall x_1(x_1 \leq (0 + 1))$ » (« $\forall x_1(R_0(x_1, f_0(c_0, c_1)))$ ») est une formule de $\mathcal{L}^+$.

PROOF

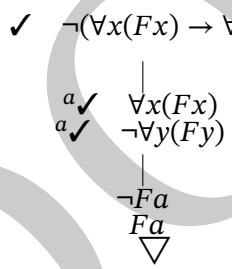
(d) Dans lesquelles des formules données $\mathcal{L}^+$ la variable « x_1 » a-t-elle une occurrence libre ?

(i∗∗) « x_1 » a une occurrence libre dans « $x_1 + 1 \leq 1$ ».
(ii∗∗) « x_1 » n'a pas d'occurrence libre dans « $\forall x_1 \neg(x_1 \neq (0 + 1))$ ».
(iii∗∗) « x_1 » a une occurrence libre dans « $\exists x_2(1 + (x_2 \times (0 + 1)) \leq x_1)$ ».
(iv∗∗) « x_1 » a une occurrence libre dans « $\forall x_1(0 \leq x_1) \wedge ((0 \leq 1) \vee 1 \neq x_1)$ » (la deuxième).
(v∗∗) « x_1 » n'a pas d'occurrence libre dans « $\forall x_1((0 \leq x_1) \rightarrow (1 \neq x_1))$ ».
(vi∗∗) « x_1 » n'a pas d'occurrence libre dans « $\forall x_2 \exists x_1 \neg(x_2 \leq x_1)$ ».

17.13 La méthode des arbres de la logique des prédicats

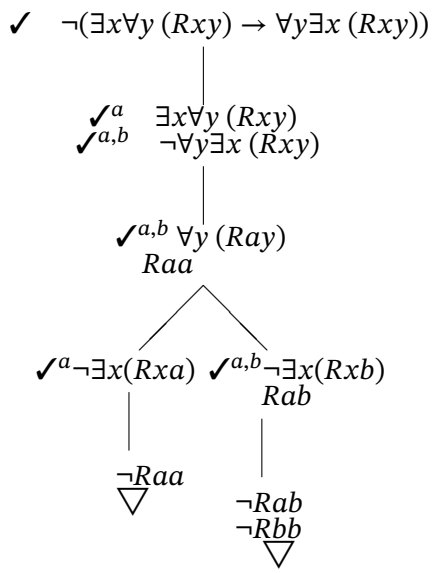
Question 13.1 (5 points) Déterminons si les phrases données sont valides à l'aide de la méthode des arbres :

(a) Comme pour la logique propositionnelle, nous vérifions la validité d'une phrase en prouvant que toutes les branches de l'arbre pour sa négation se ferment. Un arbre pour « $\forall x(Fx) \rightarrow \forall y(Fy)$ » qui montre que nous pouvons sans autre changer les variables qui se trouvent ‹ en isolation › :



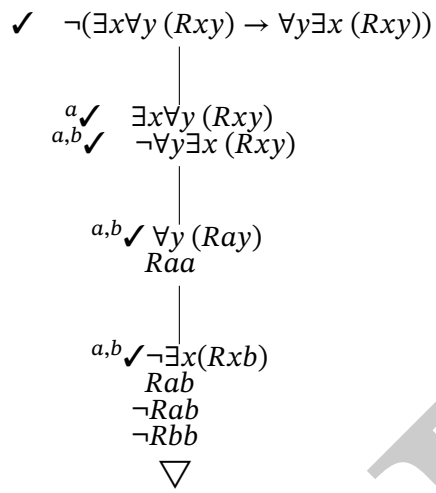
Nous utilisons ici le fait que nous avons exclu les domaines de discours vide. Il est alors toujours possible de spécialiser une quantification universelle pour une nouvelle constante, ici « a ».

(b) Voici l'arbre (à l'ancienne méthode) qui vérifie la validité de « $\exists x \forall y(Rxy) \rightarrow \forall y \exists x(Rxy)$ » :

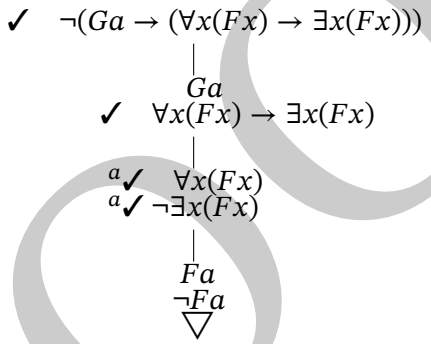


PROOF

En utilisant la nouvelle méthode,l'arbre sera le suivant :

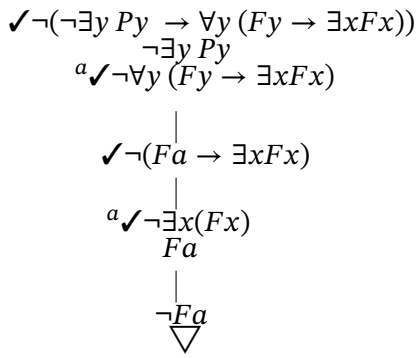


(c) Voici un arbre pour « $Ga \rightarrow (\forall x(Fx) \rightarrow \exists x(Fx))$ » :



Sémantiquement, l'introduction de la constante pour instancier la quantification universelle est légitime puisque nous excluons les univers de discours vides (cf. sct. **??** à la p. **??**).

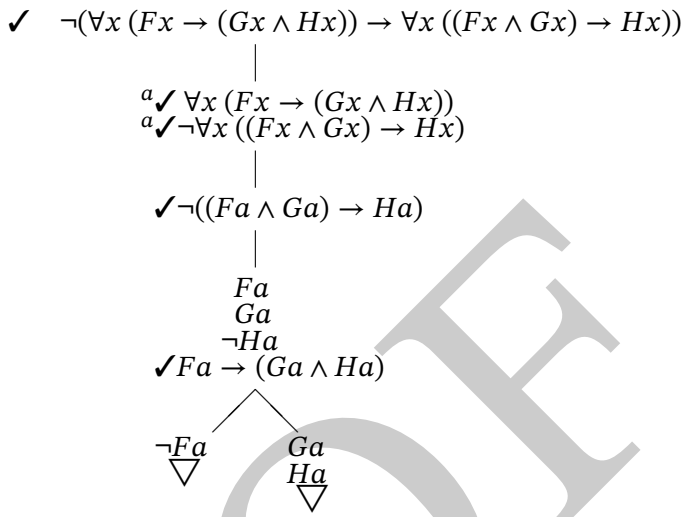
(d) Voici l'arbre pour « $\neg\exists y\,(Py) \rightarrow \forall y\,(Fy \rightarrow \exists xFx)$ » :



Il n'est pas étonnant que « $\neg\exists yPy$ » ne joue aucun rôle dans la preuve de validité : dans la logique des prédicats, comme dans logique propositionnelle, n'importe quelle implication est valide si son conséquent est lui-même valide.

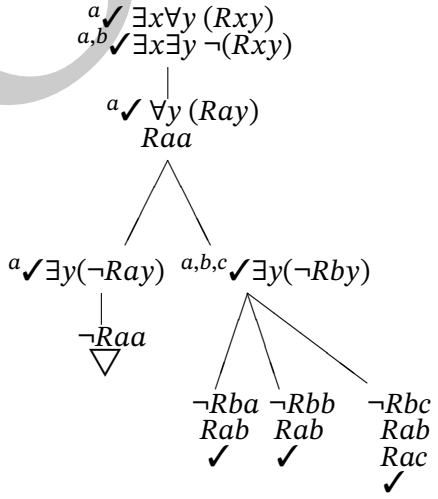
PROOF

(e) L'arbre pour « $\forall x(Fx \to (Gx \wedge Hx)) \to \forall x\,((Fx \wedge Gx) \to Hx)$ » :



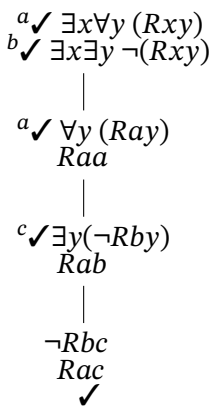
Question 13.2 (3 points) Par la méthode des arbres, trouvez des modèles pour les phrases données :

(a) D'après l'ancienne méthode, voici l'arbre pour « $\exists x\forall y\,(Rxy) \wedge \exists x\exists y\,(\neg Rxy)$ » :

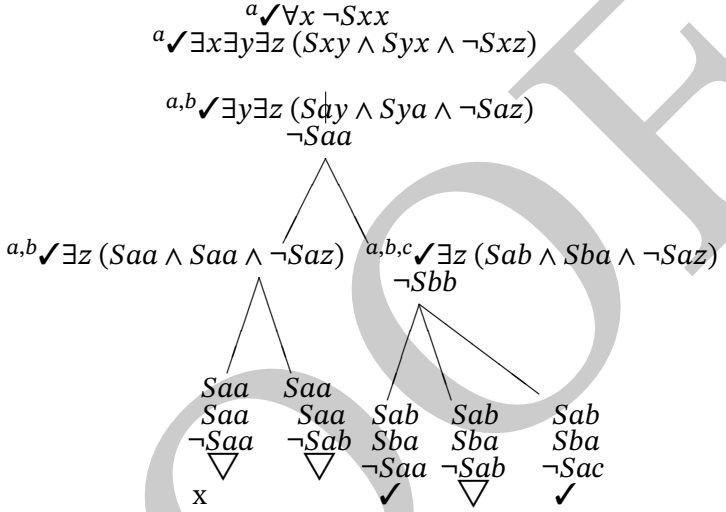


Les branches marquées par « ✓ » représentent des structures dans lesquelles la phrase initiale est vraie. Elle sera vraie, par exemple, dans une structure à deux individus, a et b, où la relation R obtient entre a et a, a et b et entre aucune autre paire. Dans cette structure, il est vrai qu'il existe un x (à savoir a) qui porte R à tout ce qui existe et qu'il existe deux individus (à savoir b et a dans cet ordre) qui ne sont pas reliés par R. Avec la nouvelle méthode, nous aurions pu nous contenter de l'arbre suivant :

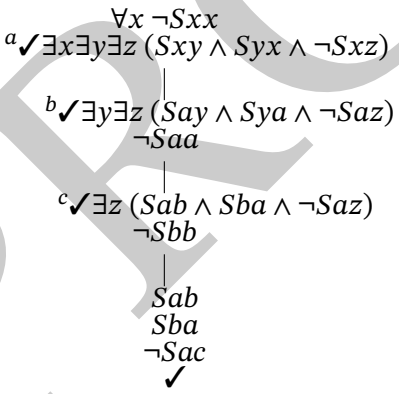
PROOF



(b) En utilisant l'ancienne méthode, voici l'arbre pour « $\forall x(\neg Sxx) \wedge \exists x\exists y\exists z(Sxy \wedge Syx \wedge \neg Sxz)$ » :

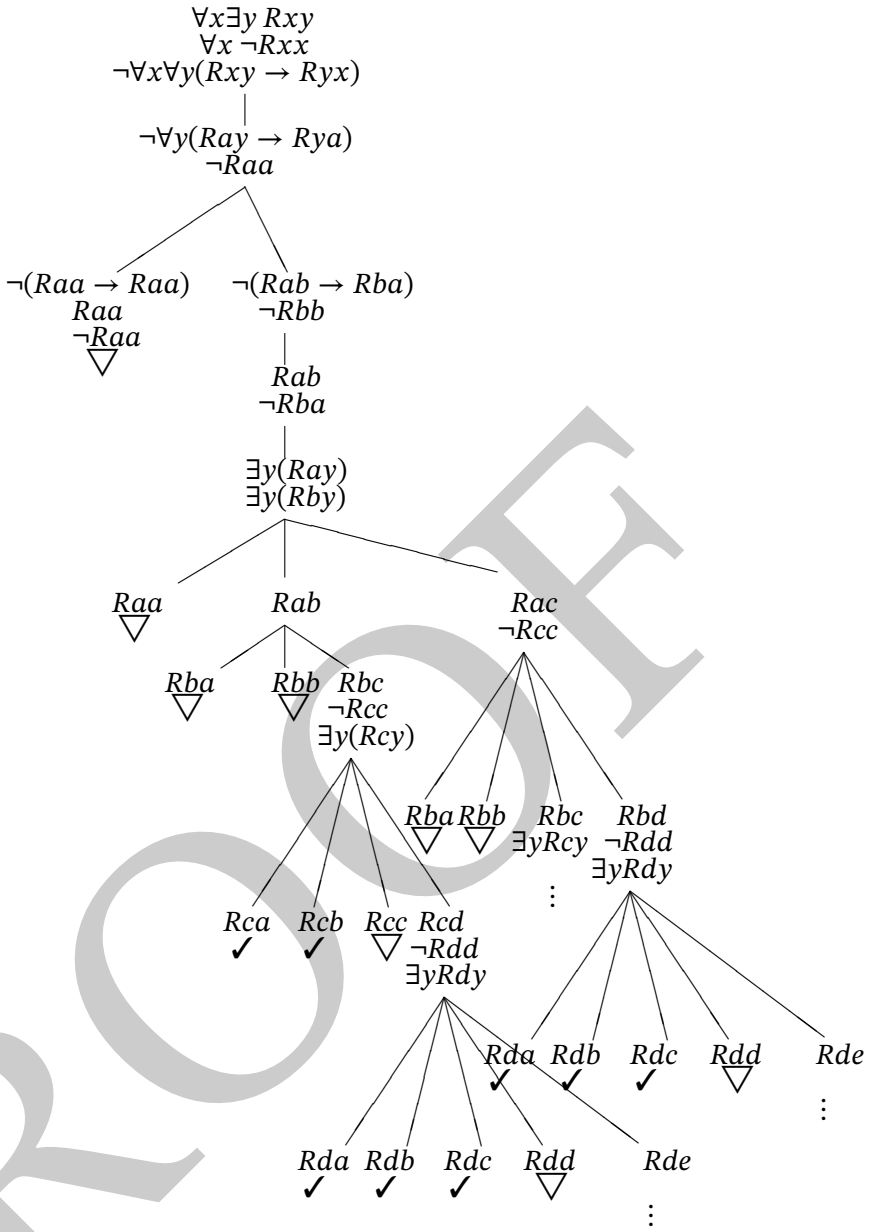


En utilisant la nouvelle méthode, l'arbre sera le suivant :



(c) L'arbre pour « $\forall x\exists y\,(Rxy) \wedge \forall x\,(\neg Rxx) \wedge \neg\forall x\forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$ » avec l'ancienne méthode :

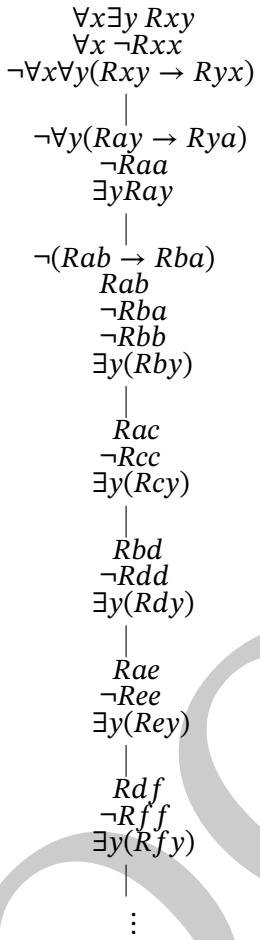
PROOF



Le fait que l'arbre contient des branches infinies ne signifie pas qu'il ne nous permet pas de trouver des modèles : il y a des branches entièrement développées (marquées par « ✓ ») qui représentent des structures dans lesquelles la phrase initiale est vraie.

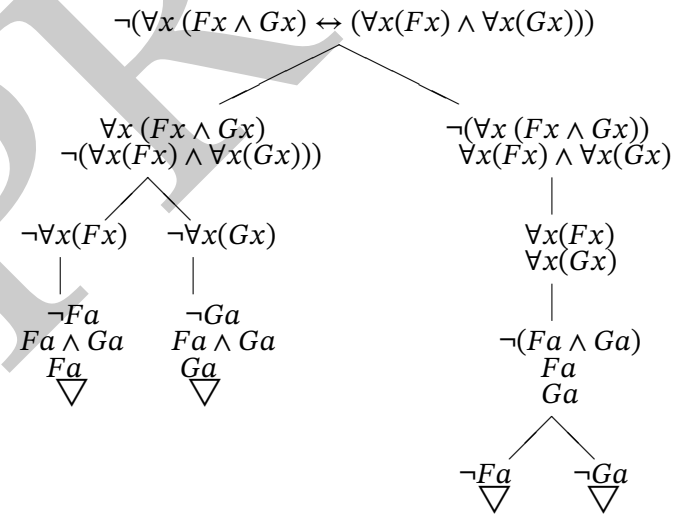
Nous n'aurions pas trouvé de modèle avec la nouvelle méthode :

PROOF



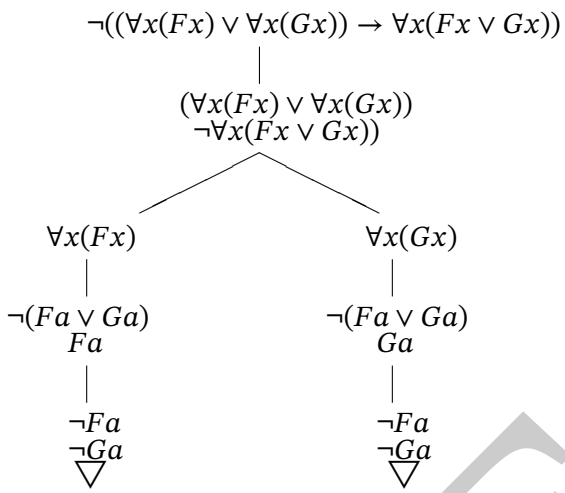
Question 13.3 (6 points) Par la méthode des arbres, vérifions la validité des phrases données :

1. Nous prouvons ainsi « $\forall x(Fx \wedge Gx) \leftrightarrow (\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx))$ » :



2. L'arbre pour « $(\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)) \rightarrow \forall x(Fx \vee Gx)$ » sera le suivant :

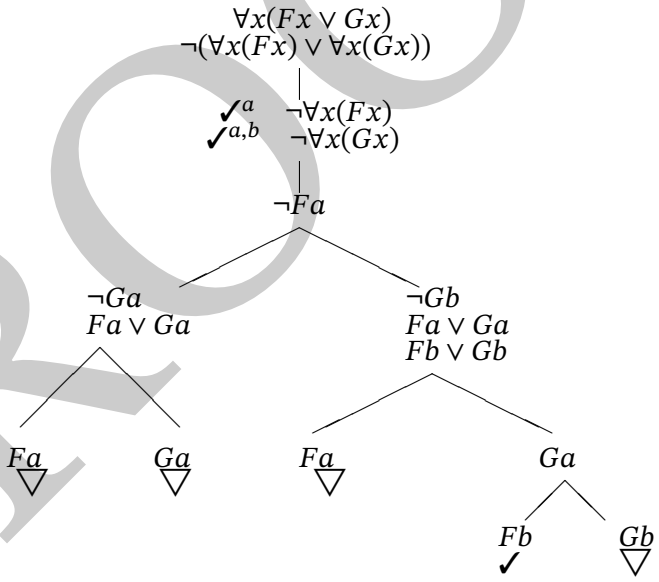
PROOF



La converse de « $(\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)) \rightarrow \forall x(Fx \vee Gx)$ », cependant, n'est pas valide. c'est-à-dire l'arbre pour la négation de cette phrase contiendra des branches ouvertes :

$$\forall x(Fx \vee Gx) \rightarrow (\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)) \qquad (\mathrm{NV}_1)$$

Nous pouvons le faire ainsi :



Pour voir que (NV_1) n'est pas valide, il suffit de considérer une structure où un prédicat « Fx » est satisfait par quelques objets, mais n'est pas satisfait par tous. « $\forall x(Fx \vee \neg Fx)$ » sera vrai dans cette structure (puisque cette phrase est vraie dans toutes les structures), mais « $\forall x(Fx) \vee \forall x(\neg Fx)$ » sera fausse dans cette structure, puisqu'elle contient des individus qui sont F et d'autres qui ne sont pas F.

En langue naturelle : Soit un univers de cinq personnes, trois femmes et deux hommes, soit « Fx » « x est un homme », « Gx » « x est une femme » et supposons qu'il n'y a que ces deux sexes parmi les humains. Dans cette structure, « $\forall x(Fx \vee Gx)$ » est alors vrai, mais il n'est ni le

PROOF

cas que tout le monde est masculin (« $\forall x(Fx)$ »), ni est-il le cas que tout le monde est féminin (« $\forall x(Hx)$ »).

Formellement : Définissions une structure $\mathcal{A}$ pour $\mathcal{L}^+$ comme suit :

a) $|\mathcal{A}| := \{a, b\}$

b) $F_1^{\mathcal{A}} := \{a\}, G_1^{\mathcal{A}} := \{b\}$

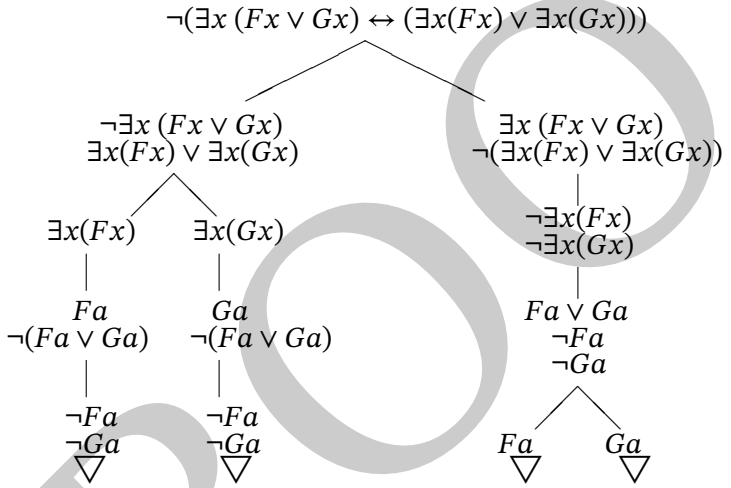
Nous avons alors :

$$\mathcal{A} \vDash \forall x(Fx \vee Gx) \quad \text{mais} \quad \mathcal{A} \nvDash \forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$$

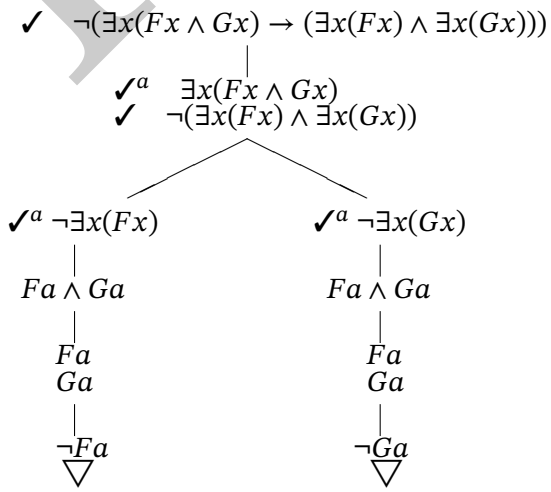
et donc, par le théorème de déduction :

$$\mathcal{A} \nvDash \forall x(Fx \vee Gx) \rightarrow (\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx))$$

3. Un arbre pour « $\exists x\,(Fx \vee Gx) \leftrightarrow (\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx))$ » sera le suivant :



4. Un arbre pour « $\exists x\,(Fx \wedge Gx) \rightarrow (\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx))$ » :

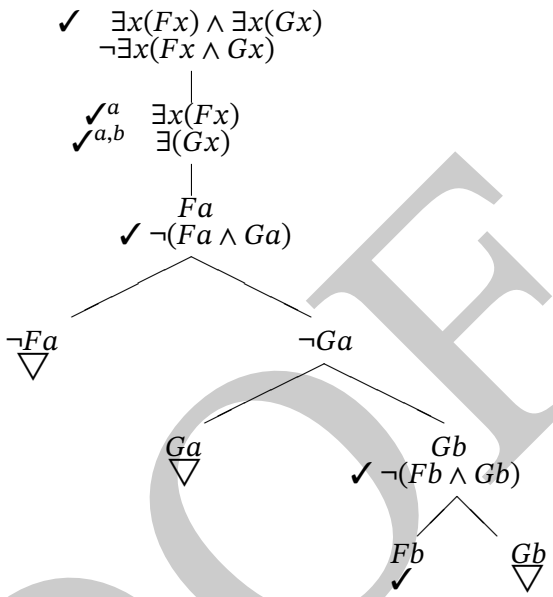


PROOF

La converse de « $\exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow (\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx))$ », cependant, est fausse. L'arbre pour la négation de la phrase suivante contiendra des branches ouvertes :

$$(\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)) \rightarrow \exists x(Fx \wedge Gx) \tag{NV$_2$}$$

Nous pouvons le faire ainsi :



Pour avoir un exemple d'une structure dans laquelle (NV$_2$) est fausse, il suffit de penser à la même structure que nous avons utilisée pour montrer la non-validité de (NV$_1$) : une structure dans laquelle quelques individus sont F et quelques autres ne le sont pas. Dans une telle structure il y a des F et aussi des $\neg F$, mais aucun individu n'est *à la fois* F et $\neg F$. Dans une telle structure, l'antécédent de (NV$_2$) sera vrai et son conséquent faux.

En langue naturelle : Comme avant, soit un univers de cinq personnes, trois femmes et deux hommes, soit « Fx » « x est un homme », « Gx » « x est une femme » et supposons qu'il n'y a que ces deux sexes parmi les humains. Dans cette structure, « $\exists x(Fx)$ » et « $\exists x(Gx)$ » sont les deux vrais (puisqu'il y a des hommes et des femmes), mais il n'est pas le cas (d'après notre supposition) qu'il y ait des hermaphrodites : personne n'est à la fois un homme et une femme (« $\neg\exists x(Fx \wedge Gx)$ »).

Formellement : Définissions une structure $\mathcal{A}$ pour $\mathcal{L}^+$ comme suit :

a) $|\mathcal{A}| := \{a, b\}$

b) $F_1^{\mathcal{A}} := \{a\}, G_1^{\mathcal{A}} := \{b\}$

Nous avons alors :

$$\mathcal{A} \vDash \exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)) \quad \text{mais} \quad \mathcal{A} \nvDash \exists x(Fx \wedge Gx)$$

et donc

$$\mathcal{A} \nvDash (\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)) \rightarrow \exists x(Fx \wedge Gx)$$

PROOF

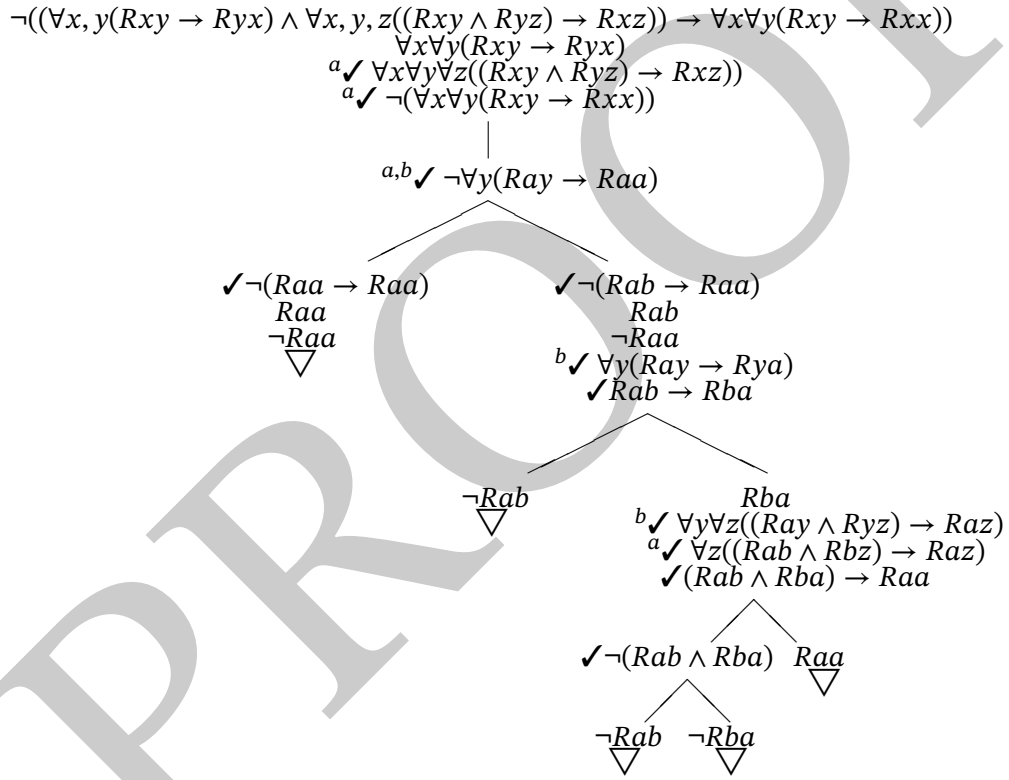
Question 13.4 (6 points) Soient les abréviations suivantes :

« p » pour	« $\forall x \forall y\,(Rxy \to Ryx)$ »	(« la relation R est symétrique »)
« q » pour	« $\forall x \forall y \forall z\,((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)$ »	(« la relation R est transitive »)
« r » pour	« $\forall x \forall y\,(Rxy \to Rxx)$ »	(« la relation R est réflexive »)
« s » pour	« $\forall x \exists y(Rxy)$ »	(« la relation R est ‹ ouverte › »)
« t » pour	« $\forall x \forall y\,(Rxy \to \neg Ryx)$ »	(« la relation R est anti-symétrique »)

(a) Prouvons, par la méthode des arbres, que toute relation symétrique et transitive est automatiquement réflexive :

$$(\forall x \forall y(Rxy \to Ryx) \wedge \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)) \to \forall x \forall y(Rxy \to Rxx) \tag{R1}$$

Voici l'arbre pour la négation de (R1) :



(b) Montrons que nous ne pouvons pas, par la méthode des arbres, trouver un modèle pour la phrase suivante :

$$\neg((\forall x \forall y \forall z\,((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz) \wedge \forall x \exists y(Rxy) \wedge \forall x \forall y\,(Rxy \to \neg Ryx)) \to\ \exists x \forall y(\neg Ryx)) \tag{R2}$$

En examinant les quatre phrases dont il faut tester la consistance (les trois antécedants et la négation de la conclusion), nous remarquons qu'elles nous donnent un arbre infini : Si nous instancions « $\forall x \exists y(Rxy)$ » par « a », « $\exists y(Ray)$ » nous force à introduire une nouvelle constante, « b » –

PROOF

pour laquelle « $\forall x \exists y(Rxy)$ » doit être instancié à nouveau. « $\exists y(Rby)$ », dans l'ancienne méthode, nous donne trois branches : nous fermons la première, « Rba », en instanciant « $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$ » pour « a » et ensuite pour « b » et nous fermons la deuxième, « Rbb » en l'instanciant deux fois par « b », mais nous ne pouvons pas fermer de cette manière la troisième, « Rbc » – qui nous donnera donc « $\exists y(Rcy)$ » et une nouvelle constante. Cette progression nous empêchera d'instancier « $\neg \exists x \forall y \neg(Ryx)$ » pour toutes les constantes, ce qui serait nécessaire pour utiliser la transitivité afin de fermer la branche par l'anti-symétrie. La phrase (R2) dit qu'une relation transitive, ouverte et anti-symétrique ne doit pas forcément avoir un élément minimal. Elle n'est vraie que dans des structures ayant un univers de discours infini.

(c) Un exemple d'une structure dans laquelle (R2) est vrai est le suivant : prenons comme univers de discours les nombres entiers $\mathbb{Z}$, et interprétons un seule signe de relation binaire « R » sur $\mathbb{Z}$ par la relation $\ldots < \cdots$. Il est clair que cette relation est anti-symétrique et qu'elle est transitive et ouverte (puisqu'il y a, pour tout nombre entier, un nombre entier qui est plus grand). Il est également évident, cependant, qu'il n'y a pas d'élément minimal par rapport à cette relation, à savoir qu'il n'y a pas de nombre entier le plus petit.
Cet exercice montre qu'il est possible, lorsqu'une phrase n'a que des modèles finis, que nous n'en trouvions aucun par la méthode des arbre, ancienne ou nouvelle.

17.14 La déduction naturelle de la logique des prédicats

Question 14.1 (12 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvons les séquents donnés :

(a) Voici une preuve de « $\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx), \forall x(Hx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$ » :

1	$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx), \forall x(Hx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$		prémisse
2	$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx), \forall x(Hx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Hx \rightarrow Gx)$		prémisse
3	$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx), \forall x(Hx \rightarrow Gx), Fa \vdash^* Fa$		supposition
4	$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx), \forall x(Hx \rightarrow Gx), Fa \vdash^* Fa \rightarrow \neg Ga$		de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx), \forall x(Hx \rightarrow Gx), Fa \vdash^* \neg Ga$		de (3) et (4) avec (MP)
6	$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx), \forall x(Hx \rightarrow Gx), Fa \vdash^* Ha \rightarrow Ga$		de (2) avec (SU)
7	$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx), \forall x(Hx \rightarrow Gx), Fa \vdash^* \neg Ha$		de (6) et (5) avec (MT)
8	$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx), \forall x(Hx \rightarrow Gx) \vdash Fa \rightarrow \neg Ha$		de (3) et (7) avec (PC)
9	$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx), \forall x(Hx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$		de (8) avec (GU)

(b) Voici une preuve de « $\forall x(Gx \rightarrow \neg Fx), \forall x(Hx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$ » :

1	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Fx), \forall x(Hx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Gx \rightarrow \neg Fx)$		prémisse
2	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Fx), \forall x(Hx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Hx \rightarrow Gx)$		prémisse
3	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Fx), \forall x(Hx \rightarrow Gx), Fa \vdash^* Fa$		supposition
4	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Fx), \forall x(Hx \rightarrow Gx), Fa \vdash^* Ga \rightarrow \neg Fa$		de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Fx), \forall x(Hx \rightarrow Gx), Fa \vdash^* \neg\neg Fa$		de (3) avec (DN)
6	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Fx), \forall x(Hx \rightarrow Gx), Fa \vdash^* \neg Ga$		de (5) et (4) avec (MT)
7	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Fx), \forall x(Hx \rightarrow Gx), Fa \vdash^* Ha \rightarrow Ga$		de (2) avec (SU)
8	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Fx), \forall x(Hx \rightarrow Gx), Fa \vdash^* \neg Ha$		de (6) et (7) avec (MT)
9	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Fx), \forall x(Hx \rightarrow Gx) \vdash Fa \rightarrow \neg Ha$		de (3) et (8) avec (PC)

PROOF

10	$\forall x(Gx \to \neg Fx), \forall x(Hx \to Gx) \vdash \forall x(Fx \to \neg Hx)$		de (9) avec (GU)

(c) Une preuve de « $\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx) \vdash \forall x(Fx \vee Gx)$ » :

1	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\vdash \forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$		prémisse
2	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* \forall x(Fx)$	supposition
3	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* Fa$	de (2) avec (SU)
4	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* Fa \vee Ga$	de (3) avec ($\vee$**I**)
5	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* \forall x(Fx \vee Gx)$	de (4) avec (GU)
6	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Gx)$	$\vdash^* \forall x(Gx)$	supposition
7	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Gx)$	$\vdash^* Ga$	de (6) avec (SU)
8	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Gx)$	$\vdash^* Fa \vee Ga$	de (7) avec ($\vee$**I**)
9	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Gx)$	$\vdash^* \forall x(Fx \vee Gx)$	de (8) avec (GU)
10	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\vdash \forall x(Fx \vee Gx)$		de (1,2,5,6,9) avec ($\vee$**E**)

(d) Voici une preuve de « $(\forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx)) \leftrightarrow \exists x(Fx) \vdash \neg\exists x\neg(Fx)$ », en abrégeant « $(\forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx)) \leftrightarrow \exists x(Fx)$ » par « **A** » et « $\exists x\neg(Fx)$ » par « **B** » :

1	**A**	$\vdash (\forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx)) \leftrightarrow \exists x(Fx)$	prémisse
2	**A**, **B**	$\vdash^* \exists x\neg(Fx)$	supposition
3	**A**, **B**, $\neg Fa$	$\vdash^* \neg Fa$	supposition
4	**A**, **B**, $\neg Fa, \forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx)$	$\vdash^* \forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx)$	supposition
5	**A**, **B**, $\neg Fa, \forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx)$	$\vdash^* (\forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx)) \to \exists x(Fx)$	de (1) par ($\leftrightarrow$E)
6	**A**, **B**, $\neg Fa, \forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx)$	$\vdash^* \exists x(Fx)$	de (4) et (5) par (MP)
7	**A**, **B**, $\forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx)$	$\vdash^* \exists x(Fx)$	de (3) et (6) par (SE)
8	**A**, **B**, $\forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx)$	$\vdash^* \exists x(Fx) \to \forall x(Fx)$	de (4) par ($\leftrightarrow$E)
9	**A**, **B**, $\forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx)$	$\vdash^* \forall x(Fx)$	de (7) et (8) par (MP)
10	**A**, **B**, $\forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx)$	$\vdash^* Fa$	de (9) par (SU)
11	**A**, **B**	$\vdash^* \neg(\forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx))$	de (4), (10) et (3) par (RAA)
12	**A**, **B**	$\vdash^* \exists x(Fx) \to (\forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx))$	de (1) par ($\leftrightarrow$E)
13	**A**, **B**	$\vdash^* \neg\exists x(Fx)$	de (11) et (12) par (MT)
14	**A**	$\vdash \neg\exists x\neg(Fx)$	de (2), (6) et (13) par (RAA)

(e) Voici une preuve de « $\forall x(Fx \to Gx) \vdash \forall x(Fx) \to \forall x(Gx)$ » :

1	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash \forall x(Fx \to Gx)$		prémisse
2	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* \forall x(Fx)$	supposition
3	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* Fa \to Ga$	de (1) avec (SU)
4	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* Fa$	de (2) avec (SU)
5	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* Ga$	de (3) et (4) avec (MP)
6	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* \forall x(Gx)$	de (5) avec (GU)
7	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash \forall x(Fx) \to \forall x(Gx)$		de (2) et (6) avec (PC)

(f) Voici une preuve de « $\forall x(Fx \to Gx) \vdash \exists x(Fx) \to \exists x(Gx)$ » :

PROOF

1	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash \forall x(Fx \to Gx)$		prémisse
2	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\exists x(Fx)$	$\vdash^* \exists x(Fx)$	supposition
3	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* Fa$	supposition
4	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* Fa \to Ga$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* Ga$	de (3) et (4) avec (MP)
6	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* \exists x(Gx)$	de (5) avec (GE)
7	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\exists x(Fx)$	$\vdash^* \exists x(Gx)$	de (2), (3) et (6) avec (SE)
8	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash \exists x(Fx) \to \exists x(Gx)$		de (2) et (7) avec (PC)

(g) Voici une preuve de « $\forall x(Fx \wedge Gx) \vdash \forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$ » :

1	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \forall x(Fx \wedge Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash Fa \wedge Ga$	de (1) avec (SU)
3	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash Fa$	de (2) avec ($\wedge$**E**)
4	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	de (3) avec (GU)
5	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash Ga$	de (2) avec ($\wedge$**E**)
6	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \forall x(Gx)$	de (5) avec (GU)
7	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	de (4) et (6) avec ($\wedge$**I**)

(h) Voici une preuve de « $\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx) \vdash \exists x(Fx \vee Gx)$ » :

1	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\vdash \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$		prémisse
2	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Fx)$	$\vdash^* \exists x(Fx)$	supposition
3	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* Fa$	supposition
4	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* Fa \vee Ga$	de (3) avec ($\vee$**I**)
5	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* \exists x(Fx \vee Gx)$	de (4) avec (GE)
6	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Fx)$	$\vdash^* \exists x(Fx \vee Gx)$	de (2), (3) et (5) avec (SE)
7	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Gx)$	$\vdash^* \exists x(Gx)$	supposition
8	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Gx), Ga$	$\vdash^* Ga$	supposition
9	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Gx), Ga$	$\vdash^* Fa \vee Ga$	de (8) avec ($\vee$**I**)
10	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Fx), Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx \vee Gx)$	de (9) avec (GE)
11	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Fx)$	$\vdash^* \exists x(Fx \vee Gx)$	de (7), (8) et (10) avec (SE)
12	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\vdash \exists x(Fx \vee Gx)$		de (1,2,6,7,11) avec ($\vee$**E**)

(i)

(j) Une preuve pour « $\exists x \forall y \exists z(Sxyz) \vdash \forall y \exists x \exists z(Sxyz)$ » :

1	$\exists x \forall y \exists z(Sxyz)$	$\vdash \exists x \forall y \exists z(Sxyz)$		prémisse
2	$\exists x \forall y \exists z(Sxyz)$	$\forall y \exists z(Sayz)$	$\vdash^* \forall y \exists z(Sayz)$	supposition
3	$\exists x \forall y \exists z(Sxyz)$	$\forall y \exists z(Sayz)$	$\vdash^* \exists z(Sabz)$	de (2) par (SU)
4	$\exists x \forall y \exists z(Sxyz)$	$\forall y \exists z(Sayz)$	$\vdash^* \exists x \exists z Sxbz$	de (3) par (GE)
5	$\exists x \forall y \exists z(Sxyz)$	$\vdash \exists x \exists z Sxbz$		de (2) et (4) par (SE)
6	$\exists x \forall y \exists z(Sxyz)$	$\vdash \forall y \exists x \exists z Sxyz$		de (5) par (GU)

(k) Voici une preuve de « $\exists x \forall y(Rxy) \vdash \forall y \exists x(Rxy)$ » :

PROOF

1	$\exists x\forall y(Rxy)$	$\vdash\ \exists x\forall y(Rxy)$		prémisse
2	$\exists x\forall y(Rxy)$	$\forall y(Ray)$	$\vdash^*\ \forall y(Ray)$	supposition
3	$\exists x\forall y(Rxy)$	$\forall y(Ray)$	$\vdash^*\ Rab$	de (2) avec (SU)
4	$\exists x\forall y(Rxy)$	$\forall y(Ray)$	$\vdash^*\ \exists x(Rxb)$	de (3) avec (GE)
5	$\exists x\forall y(Rxy)$	$\forall y(Ray)$	$\vdash^*\ \forall y\exists x(Rxb)$	de (4) avec (GU)
6	$\exists x\forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall y\exists x(Rxy)$		de (1), (2) et (5) avec (SE)

L'application de (SE) est légitime parce que la preuve de « $\forall y\exists x(Rxb)$ » ne dépend pas des suppositions ou prémisses, autre que le disjoint typique, dans lesquelles « a » a une occurrence.

(l) Voici une preuve de « $\forall x(Fx \to Gx) \vdash \forall x(\exists y(Fy \wedge Rxy) \to \exists y(Gy \wedge Rxy))$ » :

1	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash\ \forall x(Fx \to Gx)$		prémisse
2	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray)$	$\vdash^*\ \exists y(Fy \wedge Ray)$	supposition
3	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray), Fb \wedge Rab$	$\vdash^*\ Fb \wedge Rab$	supposition
4	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray), Fb \wedge Rab$	$\vdash^*\ Fb$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
5	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray), Fb \wedge Rab$	$\vdash^*\ Fb \to Gb$	de (1) avec (SU)
6	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray), Fb \wedge Rab$	$\vdash^*\ Gb$	de (4) et (5) avec (MP)
7	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray), Fb \wedge Rab$	$\vdash^*\ Rab$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
8	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray), Fb \wedge Rab$	$\vdash^*\ Gb \wedge Rab$	de (6) et (7) avec ($\wedge$**I**)
9	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray), Fb \wedge Rab$	$\vdash^*\ \exists y(Gy \wedge Ray)$	de (8) avec (GE)
10	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray)$	$\vdash^*\ \exists y(Fy \wedge Ray)$	de (2), (3) et (9) avec (SE)
11	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash\ \exists y(Fy \wedge Ray) \to \exists y(Gy \wedge Ray)$		de (2) et (10) avec (PC)
12	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash\ \forall x(\exists y(Fy \wedge Rxy) \to \exists y(Gy \wedge Rxy))$		de (11) avec (GU)

(m) Pour prouver « $\exists x(Fx \wedge Gx), \exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \to \neg Rxy)) \vdash \exists x(Fx \wedge \neg\forall y(Fy \to Rxy))$ », nous adoptons :

« **A** »	pour	« $\exists x(Fx \wedge Gx)$ »
« **B** »	pour	« $\exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \to \neg Rxy))$ »
« **C** »	pour	« $Fb \wedge \forall y(Gy \to \neg Rby)$ »
« **D** »	pour	« $Fa \wedge Ga$ »
« **E** »	pour	« $\forall y(Fy \to Rby)$ »

La preuve sera la suivante :

1	**A**, **B**	$\vdash\ \exists x(Fx \wedge Gx)$		prémisse
2	**A**, **B**	$\vdash\ \exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \to \neg Rxy))$		prémisse
3	**A**, **B**	**C**	$\vdash^*\ Fb \wedge \forall y(Gy \to \neg Rby)$	supposition
4	**A**, **B**	**C**	$\vdash^*\ \forall y(Gy \to \neg Rby)$	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	**A**, **B**	**C**, **D**	$\vdash^*\ Fa \wedge Ga$	supposition
6	**A**, **B**	**C**, **D**	$\vdash^*\ Ga \to \neg Rba$	de (4) avec (SU)
7	**A**, **B**	**C**, **D**	$\vdash^*\ Ga$	de (5) avec ($\wedge$**E**)
8	**A**, **B**	**C**, **D**	$\vdash^*\ \neg Rba$	de (6) et (7) avec (MP)
9	**A**, **B**	**C**, **D**, **E**	$\vdash^*\ \forall y(Fy \to Rby)$	supposition
10	**A**, **B**	**C**, **D**, **E**	$\vdash^*\ Fa \to Rba$	de (9) avec (SU)

PROOF

11	$\mathbf{A}, \mathbf{B}\ \ \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}\ \ \vdash^*\ Fa$		de (5) avec ($\wedge$**E**)
12	$\mathbf{A}, \mathbf{B}\ \ \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}\ \ \vdash^*\ Rba$		de (11) et (10) avec (MP)
13	$\mathbf{A}, \mathbf{B}\ \ \mathbf{C}, \mathbf{D}\ \ \vdash^*\ \neg\forall y(Fy \to Rby)$		de (9), (8) et (12) par (RAA)
14	$\mathbf{A}, \mathbf{B}\ \ \mathbf{C}, \mathbf{D}\ \ \vdash^*\ Fb$		de (3) avec ($\wedge$**E**)
15	$\mathbf{A}, \mathbf{B}\ \ \mathbf{C}, \mathbf{D}\ \ \vdash^*\ Fb \wedge \neg\forall y(Fy \to Rby)$		de (13) et (14) avec ($\wedge$**I**)
16	$\mathbf{A}, \mathbf{B}\ \ \mathbf{C}, \mathbf{D}\ \ \vdash^*\ \exists x(Fx \wedge \neg\forall y(Fy \to Rxy))$		de (15) avec (GE)
17	$\mathbf{A}, \mathbf{B}\ \ \mathbf{C}\ \ \vdash^*\ \exists x(Fx \wedge \neg\forall y(Fy \to Rxy))$		de (1), (5), (16) avec (SE)
18	$\mathbf{A}, \mathbf{B}\ \ \vdash\ \exists x(Fx \wedge \neg\forall y(Fy \to Rxy))$		de (2), (3), (17) avec (SE)

Question 14.2 (2 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvons les équivalences données :

(a1) « $\exists x(Fx) \vdash \neg\forall x\neg(Fx)$ » :

1	$\exists x(Fx)$	$\vdash\ \exists x(Fx)$	prémisse
2	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash^*\ Fa$	supposition
3	$\exists x(Fx), Fa, \forall x\neg(Fx)$	$\vdash^*\ \forall x\neg(Fx)$	supposition
4	$\exists x(Fx), Fa, \forall x\neg(Fx)$	$\vdash^*\ \neg Fa$	de (2) par (SU)
5	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash^*\ \neg\forall x\neg(Fx)$	de (2), (3) et (4) par (RAA)
6	$\exists x(Fx)$	$\vdash\ \neg\forall x\neg(Fx)$	de (1), (2) et (5) par (SE)

(a2) « $\neg\forall x\neg(Fx) \vdash \exists x(Fx)$ » :

1	$\neg\forall x\neg(Fx)$	$\vdash\ \neg\forall x\neg(Fx)$	prémisse
2	$\neg\forall x\neg(Fx), \neg\exists x(Fx)$	$\vdash^*\ \neg\exists x(Fx)$	supposition
3	$\neg\forall x\neg(Fx), \neg\exists x(Fx), Fa$	$\vdash^*\ Fa$	supposition
4	$\neg\forall x\neg(Fx), \neg\exists x(Fx), Fa$	$\vdash^*\ \exists x(Fx)$	de (3) par (GE)
5	$\neg\forall x\neg(Fx), \neg\exists x(Fx)$	$\vdash^*\ \neg Fa$	de (3), (2) et (4) par (RAA)
6	$\neg\forall x\neg(Fx), \neg\exists x(Fx)$	$\vdash^*\ \forall x\neg(Fx)$	de (5) par (GU)
7	$\neg\forall x\neg(Fx)$	$\vdash\ \neg\neg\exists x(Fx)$	de (2), (1) et (6) par (RAA)
8	$\neg\forall x\neg(Fx)$	$\vdash\ \exists x(Fx)$	de (7) par (DN)

(b1) « $\exists x\neg(Fx) \vdash \neg\forall x(Fx)$ » :

1	$\exists x\neg(Fx)$	$\vdash\ \exists x\neg(Fx)$	prémisse
2	$\exists x\neg(Fx), \neg Fa$	$\vdash^*\ \neg Fa$	supposition
3	$\exists x\neg(Fx), \neg Fa, \forall x(Fx)$	$\vdash^*\ \forall x(Fx)$	supposition
4	$\exists x\neg(Fx), \neg Fa, \forall x(Fx)$	$\vdash^*\ Fa$	de (2) par (SU)
5	$\exists x\neg(Fx), \neg Fa$	$\vdash^*\ \neg\forall x(Fx)$	de (2), (4) et (3) par (RAA)
6	$\exists x\neg(Fx)$	$\vdash\ \neg\forall x(Fx)$	de (2) et (6) par (SE)

(b2) « $\neg\forall x(Fx) \vdash \exists x\neg(Fx)$ » :

1	$\neg\forall x(Fx)$	$\vdash\ \neg\forall x(Fx)$	prémisse
2	$\neg\forall x(Fx), \neg\exists x\neg(Fx)$	$\vdash^*\ \neg\exists x\neg(Fx)$	supposition
3	$\neg\forall x(Fx), \neg\exists x\neg(Fx), \neg Fa$	$\vdash^*\ \neg Fa$	supposition

PROOF

4	$\neg\forall x(Fx), \neg\exists x\neg(Fx), \neg Fa$	$\vdash^* \exists x\neg(Fx)$	de (3) par (GE)
5	$\neg\forall x(Fx), \neg\exists x\neg(Fx)$	$\vdash^* \neg\neg Fa$	de (3), (2) et (4) par (RAA)
6	$\neg\forall x(Fx), \neg\exists x\neg(Fx)$	$\vdash^* Fa$	de (5) par (DN)
7	$\neg\forall x(Fx), \neg\exists x\neg(Fx)$	$\vdash^* \forall x(Fx)$	de (6) par (GU)
8	$\neg\forall x(Fx)$	$\vdash \neg\neg\exists x\neg(Fx)$	de (2), (1) et (7) par (RAA)
9	$\neg\forall x(Fx)$	$\vdash \exists x\neg(Fx)$	de (8) par (DN)

Question 14.3 (6 points) Vérifions si les applications des règles de déduction naturelle pour les quantificateurs sont correctes :

(a) Application de (SU) incorrecte :

1	$\forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	prémisse
2	$\forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \exists z(Faa \wedge Gaz)$	de (1) par (SU)

Des occurrences de deux variables différentes, « x » et « z », ont été substituées par « a ».

(b) Application de (SU) incorrecte :

1	$\forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	prémisse
2	$\forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \exists z(Faz \wedge Gbz)$	de (1) par (SU)

La substitution de « x » par « a » n'était pas uniforme (ni celle de « x » par « b ») : il faut remplacer *toutes* les occurrences de la même variable par la même constante.

(c) Application correcte de (GE) :

1	Fba	$\vdash Fba$	prémisse
2	Fba	$\vdash \exists y(Fby)$	de (1) par (GE)

La constante « a » est libre pour « y » dans « Fba », puisqu'elle ne contient aucune occurrence de « y ».

(d) Application incorrecte de (GE) :

1	$\exists x(Fxa)$	$\vdash \exists x(Fxa)$	prémisse
2	$\exists x(Fxa)$	$\vdash \exists y\exists x(Fxx)$	de (1) par (GE)

On substitue la constante individuelle « a » par une variable pour laquelle elle n'est pas libre dans la formule où elle se trouve (« $\exists x\exists x(Fxx)$ » aurait également été incorrecte). En outre, on substitue « a » par une variable qui n'est pas liée par le quantificateur introduit.

(e) Application incorrecte de (GU) :

1	$Fab \to \forall x(Gax)$	$\vdash Fab \to \forall x(Gax)$	prémisse
2	$Fab \to \forall x(Gax)$	$\vdash \forall y(Fay \to \forall x(Gax))$	de (1) par (GU)

PROOF

« a » a une occurrence dans la prémisse dont dépend la 'preuve' de « $Fab \to \forall x(Gax)$ ».

(f) Application incorrecte de (SE) :

1	$\exists x(Fxa \wedge Gbx)$	$\vdash \exists x(Fxa \wedge Gbx)$	prémisse
2	$\exists x(Fxa \wedge Gbx)$	$\vdash Fba \wedge Gbb$	de (1) par (SE)

(SE) doit éliminer une supposition, celle du disjoint typique. Et « b » a une occurrence dans une prémisse.

17.15 La logique des prédicats

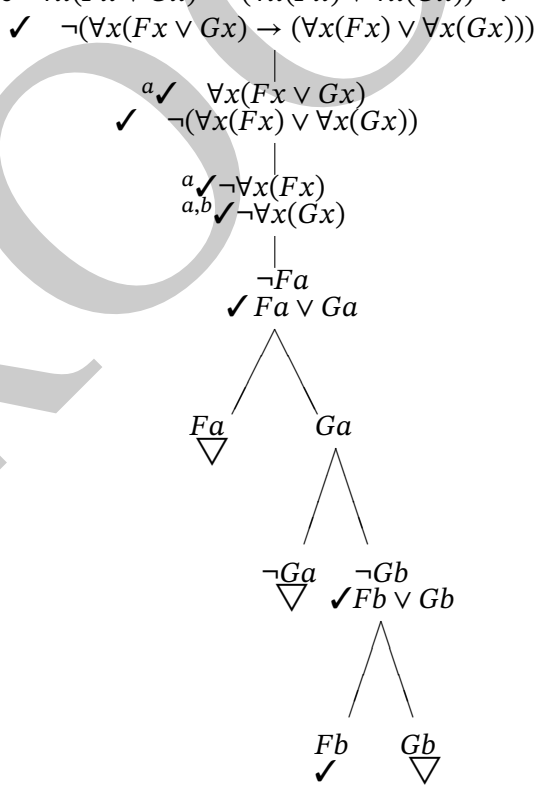
Question 15.1 (4 points) A VENIR. **Solution** :

Question 15.2 (4 points) A VENIR. **Solution** :

Question 15.3 (4 points) A VENIR. **Solution** :

Question 15.4 (4 points) Montrons par la méthode des arbres que les formules données ne sont **pas** des théorèmes de la logique des prédicats :

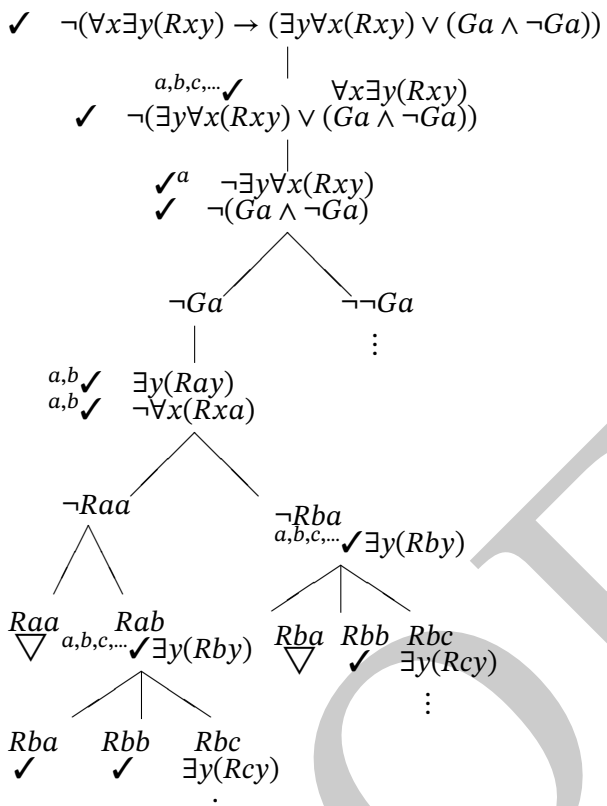
(a) Voici l'arbre pour la négation de « $\forall x(Fx \vee Gx) \to (\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx))$ » :



L'arbre reste ouvert, donc cette proposition a des modèles – sa négation, en conséquence, n'est pas une tautologie.

(b) L'arbre pour la négation de « $\forall x \exists y(Rxy) \to (\exists y \forall x(Rxy) \vee (Ga \wedge \neg Ga))$ » reste également ouvert :

PROOF



Même si cet arbre contient des branches infinies, il nous montre des modèles dans lesquelles la proposition initiale est vraie.

Question 15.5 (2 points) Une autre manière de montrer que les formules mentionnées dans la troisième question ne sont pas des théorèmes de la logique des prédicats est de décrire des modèles dans lesquelles leurs négations sont vraies :

(a) Une autre solution consiste à donner une structure dont laquelle la proposition n'est pas vraie : Soit $\mathcal{A}$ une structure avec un univers de discours de deux individus $\{a, b\}$ dont un seulement est F et un seulement est G ($F^{\mathcal{A}} = \{a\}$ et $G^{\mathcal{A}} = \{b\}$). Dans cette structure, « $Fx \vee Gx$ » est vrai sous n'importe quelle assignation (il y en a deux – une assigne « x » à a, l'autre l'assigne à b). Donc « $\forall x(Fx \vee Gx)$ » est vrai. « $\forall x(Fx)$ », par contre, n'est pas vrai, parce qu'il y a une assignation qui assigne « x » à b. « $\forall x(Gx)$ » est également faux, parce qu'une assignation assigne a à « x ». En conséquent, la disjonction « $\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$ » est fausse et l'implication l'est également. Cette structure correspond à la branche ouverte de l'arbre.

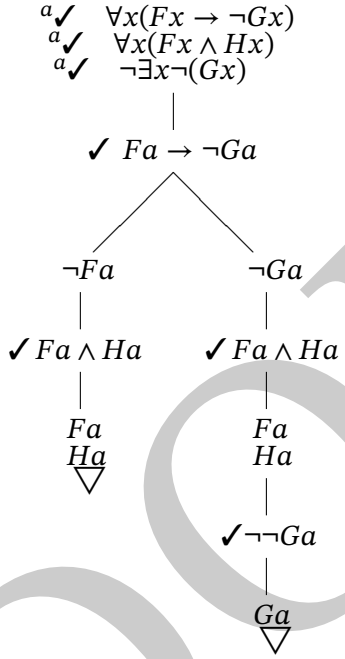
(b) Une autre solution consiste à donner une structure dont laquelle la proposition n'est pas vraie : Soit $\mathcal{A}$ une structure avec un univers de discours de deux individus $\{a, b\}$ dont qui sont réciprocément en relation R, mais n'ont pas R à eux-mêmes (« $R(x, y)$ » pourrait être « x n'est pas identique à y »). Nous avons donc $R^{\mathcal{A}} = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$). Dans cette structure, « $\exists y(Rxy)$ » est vrai sous n'importe quelle assignation (il y en a deux – une assigne « x » à a, l'autre l'assigne à b, et dans les deux cas je trouve une assignation pour « y » qui rend « Rxy » vrai). Donc « $\forall x\exists y(Rxy)$ » est vrai. Il n'y a pas d'assignation, par contre, sous laquelle « $\forall x(Rxy)$ » est vrai – si j'assigne « y » à a, l'assignation de « x » à a rend « Rxy » faux ; si j'assigne « y » à b, c'est l'assignation de « x » à b qui rend « Rxy » faux. Donc « $\exists y\forall x(Rxy)$ » est faux dans cette structure (qui correspond à la branche ouverte de gauche).

PROOF

17.16 La logique des prédicats

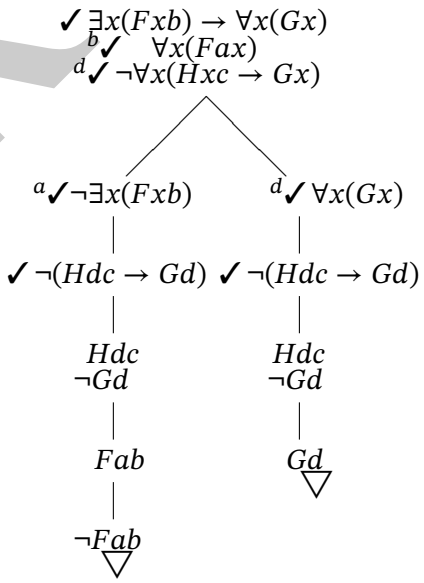
Question 16.1 (6 points) Démontrons la validité des arguments à l'aide de la méthode des arbres :

(a) « $\forall x(Fx \to \neg Gx), \forall x(Fx \wedge Hx) \vDash \exists x \neg(Gx)$ » est prouvé par l'arbre suivant :



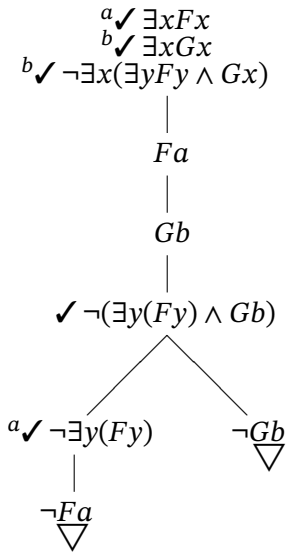
Nous devons faire, tout au début, la présupposition que notre domaine de discours contient au moins un individu, et instancier la quantification universelle avec une constante (« a ») qui ne figure pas dans les prémisses.

(b) « $\exists x(Fxb) \to \forall x(Gx), \forall x(Fax) \vDash \forall x(Hxc \to Gx)$ » a la preuve suivante par la méthode des arbres :

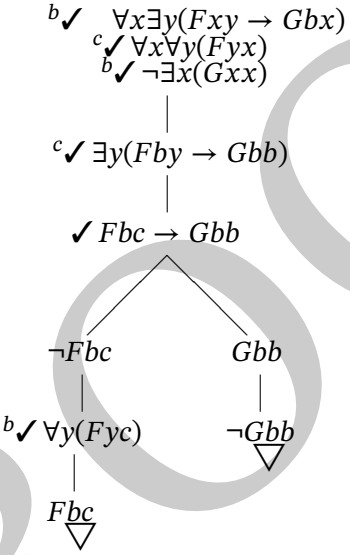


(c) « $\exists x(Fx), \exists x(Gx) \vDash \exists x(\exists y(Fy) \wedge Gx)$ » est prouvé par l'arbre suivant :

PROOF

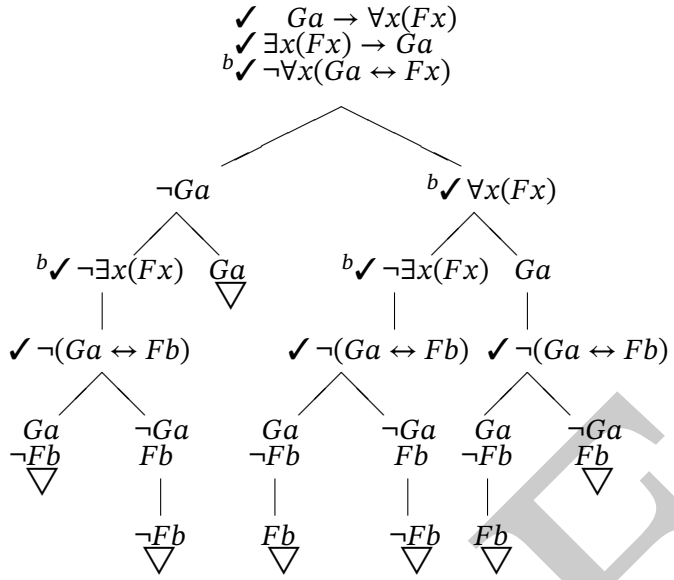


(d) « $\forall x\exists y(Fxy \rightarrow Gbx), \forall x\forall y(Fyx) \vDash \exists x(Gxx)$ » se prouve ainsi :



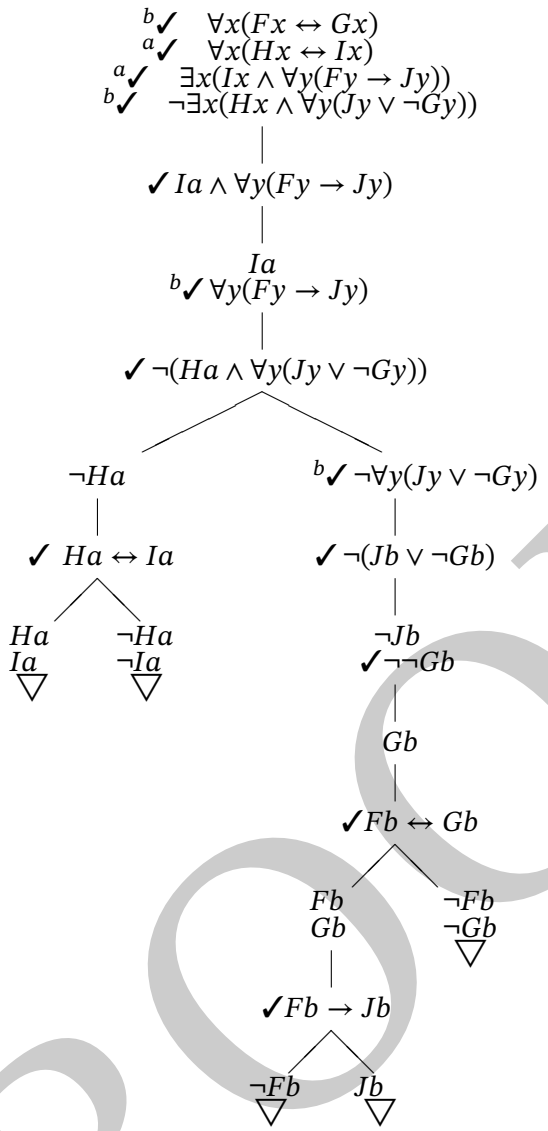
(e) « $Ga \rightarrow \forall x(Fx), \exists x(Fx) \rightarrow Ga \vDash \forall x(Ga \leftrightarrow Fx)$ » est prouvé par l'arbre suivant :

PROOF



(f) « $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx), \forall x(Hx \leftrightarrow Ix), \exists x(Ix \wedge \forall y(Fy \rightarrow Jy)) \vDash \exists x(Hx \wedge \forall y(Jy \vee \neg Gy))$ » admet la preuve suivante :

PROOF



Question 16.2 (2 points) Déterminons lesquelles des formules suivantes sont logiquement équivalentes à « $\neg\forall x(Fx \vee Gx)$ » :

(a) « $\exists x(\neg Fx \wedge \neg Gx)$ » **est équivalent** à « $\neg\forall x(Fx \vee Gx)$ » : il faut utiliser les dualités entre le quantificateur existentiel et universel (« $\neg\forall \equiv \exists\neg$ ») et entre la conjonction et la disjonction (loi de Morgan : « $\neg\bigvee \equiv \bigwedge\neg$ »).

(b) « $\exists x\neg(Fx \wedge Gx)$ » **n'est pas équivalent** à « $\neg\forall x(Fx \vee Gx)$ » : F et G peuvent être exclusifs (et « $\exists x\neg(Fx \wedge Gx)$ » donc vrai) et en même temps exhaustifs (et « $\neg\forall x(Fx \vee Gx)$ » donc faux).

(c) « $\neg\forall xFx \vee \neg\forall xGx$ » **n'est pas équivalent** à « $\neg\forall x(Fx \vee Gx)$ » : il se peut que soit F soit G n'est pas universel (et donc « $\neg\forall xFx \vee \neg\forall xGx$ » est vrai), mais qu'ils sont quand même exhaustifs (et « $\neg\forall x(Fx \vee Gx)$ » donc faux).

(d) « $\exists x(\neg Fx \vee \neg Gx)$ » **n'est pas équivalent** à « $\neg\forall x(Fx \vee Gx)$ » : qu'il ait une chose qui n'est pas à la fois F et G ne signifie pas encore qu'il n'y ait aucune chose qui n'est pas au moins un des deux.

(e) « $\forall x(\neg Fx \vee Gx)$ » **n'est pas équivalent** à « $\neg\forall x(Fx \vee Gx)$ » : elle est vrai si rien n'est F, d'où il ne s'ensuit pas qu'au moins une chose doit être G.

(f) « $\neg\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ » **n'est pas équivalent** à « $\neg\forall x(Fx \vee Gx)$ » : s'il y a quelque chose qui soit

PROOF

n'est pas F soit n'est pas G est tout à fait compatible avec le fait qu'il y ait une chose qui est ni l'un ni l'autre – en fait, il peut s'agir de la même chose !

(g) « $\neg\forall x(\neg Fx \to Gx)$ » **est équivalent** à « $\neg\forall x(Fx \vee Gx)$ », puisque « $\neg Fx \to Gx$ » est équivalent à « $\neg\neg Fx \vee Gx$ ».

(h) « $\exists x\neg(Fx \vee Gx)$ » **est équivalent** à « $\neg\forall x(Fx \vee Gx)$ » par la dualité des quantificateurs.

(i) « $\exists x\neg Fx \wedge \exists x\neg Gx$ » **n'est pas équivalent** à « $\neg\forall x(Fx \vee Gx)$ » parce que la vérité de la première formule ne requiert la vérité que d'un seul des conjoints de la deuxième.

(j) « $\exists x\neg(\neg Gx \to Fx)$ » **est équivalent** à « $\neg\forall x(Fx \vee Gx)$ » par la dualité des quantificateurs et l'interdéfinissabilité de l'implication avec la disjonction.

Question 16.3 (12 points) Prouvons les suivants par la méthode de la déduction naturelle :

(a) les relations vides sont symétriques et asymétriques :

$$\neg\exists x\exists y(Rxy) \vdash \forall x\forall y(Rxy \to Ryx) \wedge \forall x\forall y(Rxy \to \neg Ryx) \tag{R3}$$

Nous prouvons le premier conjoint comme suit :

1	$\neg\exists x\exists y(Rxy) =: \mathbf{A}$	$\vdash \neg\exists x\exists y(Rxy)$	prémisse
2	$\mathbf{A}, \neg\forall x\forall y(Rxy \to Ryx)$	$\vdash^* \neg\forall x\forall y(Rxy \to Ryx)$	supposition
3	$\mathbf{A}, \neg\forall x\forall y(Rxy \to Ryx)$	$\vdash^* \exists x\neg\forall y(Rxy \to Ryx)$	conversion ∃/∀ de (2)
4	$\mathbf{A}, \neg\forall x\forall y(Rxy \to Ryx)$	$\vdash^* \exists x\exists y\neg(Rxy \to Ryx)$	conversion ∃/∀ de (3)
5	$\mathbf{A}, \neg\forall x\forall y(Rxy \to Ryx)$	$\vdash^* \exists y\neg(Ray \to Rya)$	de (4) avec (SE)
6	$\mathbf{A}, \neg\forall x\forall y(Rxy \to Ryx)$	$\vdash^* \neg(Rab \to Rba)$	de (5) avec (SE)
7	$\mathbf{A}, \neg\forall x\forall y(Rxy \to Ryx), \neg Rba$	$\vdash^* \neg Rba$	supposition
8	$\mathbf{A}, \neg\forall x\forall y(Rxy \to Ryx), \neg Rba$	$\vdash^* \forall x\neg\exists y(Rxy)$	conversion ∃/∀ de (1)
9	$\mathbf{A}, \neg\forall x\forall y(Rxy \to Ryx), \neg Rba$	$\vdash^* \forall x\forall y\neg(Rxy)$	conversion ∃/∀ de (8)
10	$\mathbf{A}, \neg\forall x\forall y(Rxy \to Ryx), \neg Rba$	$\vdash^* \forall y\neg(Ray)$	de (9) avec (SU)
11	$\mathbf{A}, \neg\forall x\forall y(Rxy \to Ryx), \neg Rba$	$\vdash^* \neg Rab$	de (10) avec (SU)
12	$\mathbf{A}, \neg\forall x\forall y(Rxy \to Ryx)$	$\vdash^* \neg Rba \to \neg Rab$	de (11) avec (PC)
13	$\mathbf{A}, \neg\forall x\forall y(Rxy \to Ryx), Rab$	$\vdash^* Rab$	supposition
14	$\mathbf{A}, \neg\forall x\forall y(Rxy \to Ryx), Rab$	$\vdash^* Rba$	de (12) et (13) par (MT)
15	$\mathbf{A}, \neg\forall x\forall y(Rxy \to Ryx)$	$\vdash^* Rab \to Rba$	de (13) et (14) par (PC)
16	$\neg\exists x\exists y(Rxy)$	$\vdash \forall x\forall y(Rxy \to Ryx)$	de (2), (6) et (13) avec (RAA)

(b) toute relation asymétrique est anti-symétrique :

$$\forall x\forall y(Rxy \to \neg Ryx) \vdash \forall x\forall y((x{\neq}y \wedge Rxy) \to \neg Ryx) \tag{R4}$$

Nous le prouvons comme suit, simplement rajoutant la condition de non-identité à l'antécédent de l'implication :

1	$\forall x\forall y(Rxy \to \neg Ryx) =: \mathbf{A}$	$\vdash \forall x\forall y(Rxy \to \neg Ryx)$	prémisse
2	$\mathbf{A}$	$\vdash \forall y(Ray \to \neg Rya)$	de (1) avec (SU)
3	$\mathbf{A}$	$\vdash (Rab \to \neg Rba)$	de (3) avec (SU)
4	$\mathbf{A}, a{\neq}b \wedge Rab$	$\vdash^* a{\neq}b \wedge Rab$	supposition

PROOF

5	$\mathbf{A}, a \neq b \wedge Rab$	$\vdash^* Rab$	de (4) avec ($\wedge E$)
6	$\mathbf{A}, a \neq b \wedge Rab$	$\vdash^* \neg Rba$	de (5) et (3) avec (MP)
7	$\mathbf{A}$	$\vdash (a \neq b \wedge Rab) \rightarrow \neg Rba$	de (5) et (6) avec (PC)
8	$\mathbf{A}$	$\vdash \forall y((a \neq y \wedge Ray) \rightarrow \neg Rya)$	de (7) avec (GU)
9	$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	$\vdash \forall x \forall y((x \neq y \wedge Rxy) \rightarrow \neg Ryx)$	de (8) avec (GU)

(c) toute relation asymétrique est irréflexive :

$$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx) \vdash \forall x \neg Rxx \tag{R5}$$

Nous le prouvons comme suit :

1	$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	$\vdash \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	prémisse
2	$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	$\vdash \forall y(Ray \rightarrow \neg Rya)$	de (1) avec (SU)
3	$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	$\vdash Raa \rightarrow \neg Raa$	de (2) avec (SU)
4	$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx), Raa$	$\vdash^* Raa$	supposition
5	$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx), Raa$	$\vdash^* \neg Raa$	de (3) et (4) avec (MP)
6	$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	$\vdash \neg Raa$	de (4), (4) et (5) avec (RAA)
7	$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	$\vdash \forall x \neg Rxx$	de (6) avec (GU)

(d) toute relation irréflexive et transitive est asymétrique :

$$\forall x \neg Rxx, \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz) \vdash \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx) \tag{R6}$$

Nous le prouvons comme suit, avec $\forall x \neg Rxx =: \mathbf{A}$ et $\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz) =: \mathbf{B}$:

1	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \forall x \neg Rxx$	prémisse
2	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$	prémisse
3	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \forall y \forall z((Ray \wedge Ryz) \rightarrow Raz)$	de (2) avec (SU)
4	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \forall z((Rab \wedge Rbz) \rightarrow Raz)$	de (3) avec (SU)
5	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash (Rab \wedge Rba) \rightarrow Raa$	de (3) avec (SU)
6	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \neg Raa$	de (1) avec (SU)
7	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \neg(Rab \wedge Rba)$	de (6) et (5) avec (MT)
8	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Rab$	$\vdash^* Rab$	supposition
9	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Rab, Rba$	$\vdash^* Rba$	supposition
10	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Rab, Rba$	$\vdash^* Rab \wedge Rba$	de (8) et (9) par ($\wedge I$)
11	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Rab$	$\vdash^* \neg Rba$	de (9), (7) et (10) par (RAA)
12	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash Rab \rightarrow \neg Rba$	de (8) et (11) par (PC)
13	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \forall y(Ray \rightarrow \neg Rya)$	de (12) par (GU)
14	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	de (13) par (GU)

(e) toute relation intransitive est irréflexive :

$$\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow \neg Rxz) \vdash \forall x \neg Rxx \tag{R7}$$

PROOF

Nous le prouvons comme suit, avec $\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow \neg Rxz) =: \mathbf{A}$:

1	$\mathbf{A}$	$\vdash \forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow \neg Rxz)$	prémisse
2	$\mathbf{A}$	$\vdash \forall y\forall z((Ray \wedge Ryz) \rightarrow \neg Raz)$	de (1) par (SU)
3	$\mathbf{A}$	$\vdash \forall z((Raa \wedge Raz) \rightarrow \neg Raz)$	de (2) par (SU)
4	$\mathbf{A}$	$\vdash (Raa \wedge Raa) \rightarrow \neg Raa)$	de (3) par (SU)
5	$\mathbf{A}, Raa$	$\vdash^* Raa$	supposition
6	$\mathbf{A}, Raa$	$\vdash^* Raa \wedge Raa$	de (5) et (5) par ($\wedge I$)
7	$\mathbf{A}, Raa$	$\vdash^* \neg Raa$	de (5) et (4) par (MP)
8	$\mathbf{A}$	$\vdash \neg Raa$	de (5), (5) et (7) par (RAA)
9	$\mathbf{A}$	$\vdash \forall x\neg Rxx$	de (8) par (GU)

(f) toute relation sérielle, transitive et symétrique est réflexive :

$$\forall x\exists yRxy, \forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz), \forall x\forall y(Rxy \rightarrow Ryx) \vdash \forall xRxx \tag{R8}$$

Nous le prouvons comme suit, avec $\forall x\exists yRxy =: \mathbf{A}$, $\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz) =: \mathbf{B}$ et $\forall x\forall y(Rxy \rightarrow Ryx) =: \mathbf{C}$:

1	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$\vdash \forall x\exists yRxy$	prémisse
2	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$\vdash \forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$	prémisse
3	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$\vdash \forall x\forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$	prémisse
4	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$\vdash \exists yRay$	de (1) avec (SU)
5	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Rab$	$\vdash^* Rab$	supposition
6	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Rab$	$\vdash^* \forall y(Ray \rightarrow Rya)$	de (3) avec (SU)
7	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Rab$	$\vdash^* Rab \rightarrow Rba$	de (6) avec (SU)
8	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Rab$	$\vdash^* Rba$	de (5) et (7) avec (MP)
9	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Rab$	$\vdash^* Rab \wedge Rba$	de (6) et (8) avec ($\wedge I$)
10	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Rab$	$\vdash^* \forall y\forall z((Ray \wedge Ryz) \rightarrow Raz)$	de (2) avec (SU)
11	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Rab$	$\vdash^* \forall z((Rab \wedge Rbz) \rightarrow Raz)$	de (10) avec (SU)
12	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Rab$	$\vdash^* (Rab \wedge Rba) \rightarrow Raa$	de (11) avec (SU)
13	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Rab$	$\vdash^* Raa$	de (9) et (12) avec (MP)
14	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Rab$	$\vdash^* \forall xRxx$	de (13) avec (GU)
15	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$\vdash \forall xRxx$	de (14), (5) et (4) avec (SE)

(g) si une relation est transitive, elle est irréflexive ssi elle est asymétrique :

$$\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz) \vdash \forall x\neg Rxx \leftrightarrow \forall x\forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx) \tag{R9}$$

Nous prouvons la première partie comme suit, avec $\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz) =: \mathbf{A}$:

1	$\mathbf{A}$	$\vdash \forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$	prémisse
2	$\mathbf{A}, \forall x\neg Rxx$	$\vdash^* \forall x\neg Rxx$	supposition
3	$\mathbf{A}, \forall x\neg Rxx, Rab$	$\vdash^* Rab$	supposition
4	$\mathbf{A}, \forall x\neg Rxx, Rab, Rba$	$\vdash^* Rba$	supposition

PROOF

5	$\mathbf{A}, \forall x \neg Rxx, Rab, Rba$	$\vdash^* Rab \wedge Rba$	de (3) et (4) par ($\wedge I$)
6	$\mathbf{A}, \forall x \neg Rxx, Rab, Rba$	$\vdash^* \forall y \forall z((Ray \wedge Ryz) \rightarrow Raz)$	de (1) par (SU)
7	$\mathbf{A}, \forall x \neg Rxx, Rab, Rba$	$\vdash^* \forall z((Rab \wedge Rbz) \rightarrow Raz)$	de (6) par (SU)
8	$\mathbf{A}, \forall x \neg Rxx, Rab, Rba$	$\vdash^* (Rab \wedge Rba) \rightarrow Raa$	de (7) par (SU)
9	$\mathbf{A}, \forall x \neg Rxx, Rab, Rba$	$\vdash^* Raa$	de (5) et (8) par (MP)
10	$\mathbf{A}, \forall x \neg Rxx, Rab, Rba$	$\vdash^* \neg Raa$	de (2) par (SU)
11	$\mathbf{A}, \forall x \neg Rxx, Rab$	$\vdash^* \neg Rba$	de (4), (9) et (10) par (RAA)
12	$\mathbf{A}, \forall x \neg Rxx$	$\vdash^* Rab \rightarrow \neg Rba$	de (3) et (11) par (PC)
13	$\mathbf{A}, \forall x \neg Rxx$	$\vdash^* \forall y(Ray \rightarrow \neg Rya)$	de (12) par (GU)
14	$\mathbf{A}, \forall x \neg Rxx$	$\vdash^* \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	de (13) par (GU)
15	$\mathbf{A}$	$\vdash \forall x \neg Rxx \rightarrow \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	de (2) et (14) par (PC)

Nous prouvons la deuxième partie comme suit, avec le même $\mathbf{A}$ et $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx) =: \mathbf{B}$:

1	$\mathbf{A}$	$\vdash \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$	prémisse
2	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash^* \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	supposition
3	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \neg \forall x \neg Rxx$	$\vdash^* \neg \forall x \neg Rxx$	supposition
4	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \neg \forall x \neg Rxx$	$\vdash^* \exists Rxx$	$\exists$ / $\forall$ conversion de (3)
5	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \neg \forall x \neg Rxx, Raa$	$\vdash^* Raa$	supposition
6	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \neg \forall x \neg Rxx, Raa$	$\vdash^* \forall y(Ray \rightarrow \neg Rya)$	de (2) par (SU)
7	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \neg \forall x \neg Rxx, Raa$	$\vdash^* Raa \rightarrow \neg Raa$	de (6) par (SU)
8	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \neg \forall x \neg Rxx, Raa$	$\vdash^* \neg Raa$	de (5) et (7) par (MP)
9	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Raa$	$\vdash^* \neg \neg \forall x \neg Rxx$	de (3), (5) et (8) par (RAA)
10	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash^* \neg \neg \forall x \neg Rxx$	de (4), (5) et (9) par (SE)
11	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash^* \forall x \neg Rxx$	de (11) par (DN)
12	$\mathbf{A}$	$\vdash \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx) \rightarrow \forall x \neg Rxx$	de (2) et (11) par (PC)

(h) aucune relation intransitive est réflexive :

$$\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow \neg Rxz) \vdash \neg \forall x Rxx \qquad \text{(R10)}$$

Nous le prouvons comme suit, avec $\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow \neg Rxz) =: \mathbf{A}$:

1	$\mathbf{A}$	$\vdash \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow \neg Rxz)$	prémisse
2	$\mathbf{A}, \forall x Rxx$	$\vdash^* \forall x Rxx$	supposition
3	$\mathbf{A}, \forall x Rxx$	$\vdash^* Raa$	de (2) par (SU)
4	$\mathbf{A}, \forall x Rxx$	$\vdash^* \forall y \forall z((Ray \wedge Ryz) \rightarrow \neg Raz)$	de (1) par (SU)
5	$\mathbf{A}, \forall x Rxx$	$\vdash^* \forall z((Raa \wedge Raz) \rightarrow \neg Raz)$	de (4) par (SU)
6	$\mathbf{A}, \forall x Rxx$	$\vdash^* (Raa \wedge Raa) \rightarrow \neg Raa$	de (5) par (SU)
7	$\mathbf{A}, \forall x Rxx$	$\vdash^* Raa \wedge Raa$	de (3) et (3) par ($\wedge I$)
8	$\mathbf{A}, \forall x Rxx$	$\vdash^* \neg Raa$	de (7) et (6) par (MP)
9	$\mathbf{A}$	$\vdash \neg \forall x Rxx$	de (2), (3) et (8) par (RAA)

PROOF

(i) aucune relation asymétrique est non réflexive :

$$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx) \vdash \neg(\exists x Rxx \wedge \exists x \neg Rxx) \tag{R11}$$

Ceci s'ensuit de (c) et est prouvé de la même manière : si toute relation asymétrique est irréflexive, elle ne peut pas être non réflexive, parce que pour être non réflexive elle devrait être ni réflexive ni irréflexive.

(j) aucune relation est transitive, réflexive et asymétrique :

$$\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz), \forall x Rxx \vdash \neg \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx) \tag{R12}$$

La réflexivité exclut déjà l'asymétrie :

1	$\forall x Rxx$	$\vdash \forall x Rxx$	prémisse
2	$\forall x Rxx, \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	$\vdash^* \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	supposition
3	$\forall x Rxx, \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	$\vdash^* Raa$	de (1) par (SU)
4	$\forall x Rxx, \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	$\vdash^* \forall y(Ray \rightarrow \neg Rya)$	de (2) par (SU)
5	$\forall x Rxx, \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	$\vdash^* Raa \rightarrow \neg Raa$	de (4) par (SU)
6	$\forall x Rxx, \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	$\vdash^* \neg Raa$	de (3) et (5) par (MP)
7	$\forall x Rxx$	$\vdash \neg \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	de (2), (3) et (6) par (RAA)

(k) aucune relation est transitive, non symétrique et irréflexive :

$$\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz), \neg \forall x \forall y(Rxy \rightarrow Ryx), \neg \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx) \vdash \neg \forall x \neg Rxx \tag{R13}$$

Par (g), une relation transitive et irréflexive doit être asymétrique ; elle ne peut donc pas être non symétrique (ni symétrique ni asymétrique).

(l) si une relation est transitive et intransitive, alors elle est asymétrique :

$$\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz), \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow \neg Rxz) \vdash \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx) \tag{R14}$$

Nous le prouvons comme suit, avec $\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz) =: \mathbf{A}$ et $\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow \neg Rxz) =: \mathbf{B}$:

1	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$	prémisse
2	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow \neg Rxz)$	prémisse
3	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \neg \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx) =: \mathbf{C}$	$\vdash^* \neg \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	supposition
4	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$\vdash^* \exists x \neg \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	conversion ∀ / ∃ de (3)
5	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$\vdash^* \exists x \exists y \neg(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	conversion ∀ / ∃ de (4)
6	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \exists y \neg(Ray \rightarrow \neg Rya) =: \mathbf{D}$	$\vdash^* \exists y \neg(Ray \rightarrow \neg Rya)$	supposition
7	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \neg(Rab \rightarrow \neg Rba) =: \mathbf{E}$	$\vdash^* \neg(Rab \rightarrow \neg Rba)$	supposition

PROOF

8	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$	$\vdash^* \forall y \forall z((Ray \wedge Ryz) \rightarrow Raz)$	de (1) avec (SU)
9	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$	$\vdash^* \forall z((Rab \wedge Rbz) \rightarrow Raz)$	de (8) avec (SU)
10	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$	$\vdash^* (Rab \wedge Rba) \rightarrow Raa$	de (9) avec (SU)
11	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$	$\vdash^* \forall y \forall z((Ray \wedge Ryz) \rightarrow \neg Raz)$	de (2) avec (SU)
12	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$	$\vdash^* \forall z((Rab \wedge Rbz) \rightarrow \neg Raz)$	de (11) avec (SU)
13	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$	$\vdash^* (Rab \wedge Rba) \rightarrow \neg Raa$	de (12) avec (SU)
14	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, Rab \wedge Rba$	$\vdash^* Rab \wedge Rba$	supposition
15	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, Rab \wedge Rba$	$\vdash^* Raa$	de (10) et (14) avec (MP)
16	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, Rab \wedge Rba$	$\vdash^* \neg Raa$	de (13) et (14) avec (MP)
17	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$	$\vdash^* \neg(Rab \wedge Rba)$	de (14), (15) et (16) avec (RAA)
18	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, Rab$	$\vdash^* Rab$	supposition
19	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, Rab, \neg\neg Rba$	$\vdash^* \neg\neg Rba$	supposition
20	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, Rab, \neg\neg Rba$	$\vdash^* Rba$	de (19) avec (DN)
21	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, Rab, \neg\neg Rba$	$\vdash^* Rab \wedge Rba$	de (18) et (20) avec ($\wedge I$)
22	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, Rab$	$\vdash^* \neg Rba$	de (19), (17) et (21) avec (RAA)
23	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$	$\vdash^* Rab \rightarrow \neg Rba$	de (18) et (22) par (PC)
24	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E}$	$\vdash^* \neg\exists y \neg(Ray \rightarrow \neg Rya)$	de (6), (7) et (23) par (RAA)
25	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$\vdash^* \neg\exists y \neg(Ray \rightarrow \neg Rya)$	de (6), (7) et (24) par (SE)
26	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$	de (3), (6) et (24) par (RAA)

17.17 La logique modale

Question 17.1 (7 points) Prouvons, par la méthode axiomatique, les affirmations suivantes (vous avez le droit d'utiliser n'importe quel théorème de la logique propositionnelle comme axiome) :

(a) « $\mathbf{K} \vdash (\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$ » :

(b) « $\mathbf{K} \vdash (\Diamond p \vee \Diamond q) \leftrightarrow \Diamond(p \vee q)$ » :

(c) « $\mathbf{K} \vdash \Diamond(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond q)$ » :

(d) « $\mathbf{D} \vdash \Diamond(p \rightarrow p)$ » :

(e) « $\mathbf{T} \vdash \Diamond(p \rightarrow \Box p)$ » :

(f) « $\mathbf{S4} \vdash \Box p \leftrightarrow \Box\Box p$ » :

(g) « $\mathbf{S5} \vdash \Box(p \vee \Box q) \leftrightarrow (\Box p \vee \Box q)$ » :

Question 17.2 (4 points) Démontrez les affirmations suivantes à l'aide de sémantique de la logique modale propositionnelle :

(a) « $\mathbf{K} \not\vDash \Box\phi \rightarrow \Diamond\phi$ » :

(b) « $\mathbf{D} \not\vDash \Box\phi \rightarrow \phi$ » :

(c) « $\mathbf{S4} \not\vDash \phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$ » :

(d) « $\mathbf{S4} \not\vDash \Diamond\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$: »

17.18 Troisième examen probatoire

Question 18.1 (6 points) Formalisation des arguments données et prouvons de leur validité :

(a) « Tous les vieux hommes bavent. M Leroux est un vieil homme et un collectionneur de timbres. Donc, il y a des collectionneurs de timbres qui bavent. » est formalisé comme suit :

PROOF

(a)	Tous les vieux hommes bavent.	$\forall x$ (x est un vieil homme $\rightarrow$ x bave)
(b)	M Leroux est un v.h. et un c.de t.	a est un vieil homme $\wedge$ a est un c. de t.
(c)	Il y a des collectionneurs de timbres qui bavent.	$\exists x$(x est un c. de t. $\wedge$ x bave)

Nous prouvons la validité de cette inférence comme suit :

1	$\forall x(Hx \rightarrow Bx), Ha \wedge Ca$	$\vdash \forall x(Hx \rightarrow Bx)$	prémisse
2	$\forall x(Hx \rightarrow Bx), Ha \wedge Ca$	$\vdash Ha \wedge Ca$	prémisse
3	$\forall x(Hx \rightarrow Bx), Ha \wedge Ca$	$\vdash Ha \rightarrow Ba$	de (1) par (SU)
4	$\forall x(Hx \rightarrow Bx), Ha \wedge Ca$	$\vdash Ha$	de (2) par ($\wedge$E)
5	$\forall x(Hx \rightarrow Bx), Ha \wedge Ca$	$\vdash Ba$	de (3) et (4) par (MP)
6	$\forall x(Hx \rightarrow Bx), Ha \wedge Ca$	$\vdash Ca$	de (2) par ($\wedge$E)
7	$\forall x(Hx \rightarrow Bx), Ha \wedge Ca$	$\vdash Ca \wedge Ba$	de (5) et (6) par ($\wedge$I)
8	$\forall x(Hx \rightarrow Bx), Ha \wedge Ca$	$\vdash \exists x(Cx \wedge Bx)$	de (7) par (GE)

(b) « Aucun canard ne danse le tango. Aucun officier ne s'abstient de danser le tango. Tous les habitants de ma grange sont des canards. Donc aucun habitant de ma grange n'est un officier. » est formalisée comme suit :

(a)	Aucun canard ne danse le tango.	$\neg\exists x$ (x est un canard $\wedge$ x danse le tango)
(b)	Aucun officier ne s'abstient de danser le tango.	$\neg\exists x$(x est un officier $\wedge \neg$(x danse le tango))
(c)	Tous les habitants de ma grange sont des canards.	$\forall x$(x habite ma grange $\rightarrow$ x est un canard)
(d)	Aucun habitant de ma grange est un officier.	$\neg\exists x$(x habite ma grange $\wedge$ x est un officier)

Nous prouvons la validité de cette inférence comme suit (on abrégeant « $\neg\exists x(Cx \wedge Tx), \neg\exists x(Ox \wedge \neg Tx), \forall x(Gx \rightarrow Cx)$ » par « $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ » respectivement) :

1	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$\vdash \neg\exists x(Cx \wedge Tx)$	prémisse
2	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$\vdash \neg\exists x(Ox \wedge \neg Tx)$	prémisse
3	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$\vdash \forall x(Gx \rightarrow Cx)$	prémisse
4	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \exists x(Gx \wedge Ox)$	$\vdash^* \exists x(Gx \wedge Ox)$	supposition
5	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \exists x(Gx \wedge Ox), Ga \wedge Oa$	$\vdash^* Ga \wedge Oa$	supposition
6	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \exists x(Gx \wedge Ox), Ga \wedge Oa$	$\vdash^* Ga$	de (5) par ($\wedge$E)
7	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \exists x(Gx \wedge Ox), Ga \wedge Oa$	$\vdash^* Ga \rightarrow Ca$	de (3) par (SU)
8	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \exists x(Gx \wedge Ox), Ga \wedge Oa$	$\vdash^* Ca$	de (6) et (7) par (MP)
9	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \exists x(Gx \wedge Ox), Ga \wedge Oa, Ta$	$\vdash^* Ta$	supposition
10	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \exists x(Gx \wedge Ox), Ga \wedge Oa, Ta$	$\vdash^* Ca \wedge Ta$	de (8) et (9) par ($\wedge$I)
11	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \exists x(Gx \wedge Ox), Ga \wedge Oa, Ta$	$\vdash^* \exists x(Cx \wedge Tx)$	de (10) par (GE)
12	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \exists x(Gx \wedge Ox), Ga \wedge Oa$	$\vdash^* \neg Ta$	de (9), (1) et (11) par (RAA)
13	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \exists x(Gx \wedge Ox), Ga \wedge Oa$	$\vdash^* Oa$	de (5) par ($\wedge$E)
14	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \exists x(Gx \wedge Ox), Ga \wedge Oa$	$\vdash^* Oa \wedge \neg Ta$	de (12) et (13) par ($\wedge$I)
15	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \exists x(Gx \wedge Ox), Ga \wedge Oa$	$\vdash^* \exists x(Ox \wedge \neg Tx)$	de (14) par (GE)
16	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \exists x(Gx \wedge Ox)$	$\vdash^* \exists x(Ox \wedge \neg Tx)$	de (4), (5) et (15) par (SE)
17	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$\vdash \neg\exists x(Gx \wedge Ox)$	de (4), (15) et (2) par (RAA)

PROOF

(c) « Quelques femmes adorent Léo. Tous les hommes adorent toute femme. Puisque Léo est un homme, il y a quelqu'un qui adore et qui est adoré par Léo. » se formalise comme suit :

(a)	Quelques femmes adorent Léo.	$\exists x$ (x est une femme $\wedge$ x adore a)
(b)	Tous les hommes adorent toute femme.	$\forall x \forall y((x$ est un homme $\wedge$ y est une femme$) \rightarrow x$ adore $y)$
(c)	Léo est un homme.	a est un homme.
(d)	Quelqu'un adore et est adoré par Léo.	$\exists x(x$ adore $a \wedge a$ adore $x)$

Nous prouvons la validité de cette inférence comme suit (on abrégeant « $\exists x(Fx \wedge Axa), \forall x \forall y((Hx \wedge Fy) \rightarrow Axy), Ha$ » par « **A**, **B**, **C** » respectivement) :

1	**A**, **B**, **C**	$\vdash \exists x(Fx \wedge Axa)$	prémisse
2	**A**, **B**, **C**	$\vdash \forall x \forall y((Hx \wedge Fy) \rightarrow Axy)$	prémisse
3	**A**, **B**, **C**	$\vdash Ha$	prémisse
4	**A**, **B**, **C**, $Fb \wedge Aba$	$\vdash^* Fb \wedge Aba$	supposition
5	**A**, **B**, **C**, $Fb \wedge Aba$	$\vdash^* \forall y((Ha \wedge Fy) \rightarrow Aay)$	de (2) avec (SU)
6	**A**, **B**, **C**, $Fb \wedge Aba$	$\vdash^* (Ha \wedge Fb) \rightarrow Aab$	de (5) avec (SU)
7	**A**, **B**, **C**, $Fb \wedge Aba$	$\vdash^* Fb$	de (4) avec ($\wedge$E)
8	**A**, **B**, **C**, $Fb \wedge Aba$	$\vdash^* Ha \wedge Fb$	de (3) et (7) avec ($\wedge$I)
9	**A**, **B**, **C**, $Fb \wedge Aba$	$\vdash^* Aab$	de (6) et (8) avec (MP)
10	**A**, **B**, **C**, $Fb \wedge Aba$	$\vdash^* Aba$	de (4) avec ($\wedge$E)
11	**A**, **B**, **C**, $Fb \wedge Aba$	$\vdash^* Aba \wedge Aab$	de (9) et (10) avec ($\wedge$I)
12	**A**, **B**, **C**, $Fb \wedge Aba$	$\vdash^* \exists x(Axa \wedge Aax)$	de (11) avec (GE)
13	**A**, **B**, **C**	$\vdash \exists x(Axa \wedge Aax)$	de (1), (4) et (12) avec (SE)

(d) « Certains n'aiment personne, et personne n'aime quelqu'un qui ne s'aime pas lui-même. Donc il y a quelques-uns que personne n'aime. » se formalise comme suit :

(a)	Certains n'aiment personne.	$\exists x \neg \exists y(x$ aime $y)$
(b)	Personne n'aime quelqu'un qui ne s'aime pas lui-même.	$\neg \exists x \exists y(x$ aime $y \wedge \neg(y$ aime $y))$
(c)	Il y a quelques-uns que personne n'aime.	$\exists y \neg \exists x(x$ aime $y)$

Nous prouvons la validité de cette inférence comme suit (on abrégeant « $\exists x \neg \exists y(Rxy)$ », « $\neg \exists x \exists y(Rxy \wedge \neg Ryy)$ » et « $\neg \exists y \neg \exists x(Rxy)$ » par « **A** », « **B** » et « **C** » respectivement) :

1	**A**, **B**	$\vdash \exists x \neg \exists y(Rxy)$	prémisse
2	**A**, **B**	$\vdash \neg \exists x \exists y(Rxy \wedge \neg Ryy)$	prémisse
3	**A**, **B**, **C**	$\vdash^* \neg \exists y \neg \exists x(Rxy)$	supposition
4	**A**, **B**, **C**, $\neg \exists y(Ray)$	$\vdash^* \neg \exists y(Ray)$	supposition
5	**A**, **B**, **C**, $\neg \exists y(Ray), \neg \exists x(Rxa)$	$\vdash^* \neg \exists x(Rxa)$	supposition
6	**A**, **B**, **C**, $\neg \exists y(Ray), \neg \exists x(Rxa)$	$\vdash^* \exists y \neg \exists x(Rxy)$	de (5) par (GE)
7	**A**, **B**, **C**, $\neg \exists y(Ray)$	$\vdash^* \neg \neg \exists x(Rxa)$	de (5), (6) et (3) par (RAA)
8	**A**, **B**, **C**, $\neg \exists y(Ray)$	$\vdash^* \exists x(Rxa)$	de (7) par (DN)
9	**A**, **B**, **C**, $\neg \exists y(Ray), Rba$	$\vdash^* Rba$	supposition
10	**A**, **B**, **C**, $\neg \exists y(Ray), Rba, Raa$	$\vdash^* Raa$	supposition
11	**A**, **B**, **C**, $\neg \exists y(Ray), Rba, Raa$	$\vdash^* \exists y(Ray)$	de (10) par (GE)

PROOF

12	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \neg\exists y(Ray), Rba$	$\vdash^* \neg Raa$	de (10), (11) et (4) par (RAA)
13	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \neg\exists y(Ray), Rba$	$\vdash^* Rba \wedge \neg Raa$	de (9) et (12) par ($\wedge$I)
14	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \neg\exists y(Ray), Rba$	$\vdash^* \exists y(Rby \wedge \neg Ryy)$	de (13) par (GE)
15	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \neg\exists y(Ray), Rba$	$\vdash^* \exists x\exists y(Rxy \wedge \neg Ryy)$	de (14) par (GE)
16	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \neg\exists y(Ray)$	$\vdash^* \exists x\exists y(Rxy \wedge \neg Ryy)$	de (8), (9) et (15) par (SE)
17	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$\vdash^* \exists x\exists y(Rxy \wedge \neg Ryy)$	de (8), (9) et (16) par (SE)
18	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \neg\neg\exists y\neg\exists x(Rxy)$	de (3), (17) et (2) par (RAA)
19	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \exists y\neg\exists x(Rxy)$	de (18) par (DN)

(e) « Laura a visité tous les pays de l'Union Européenne sauf les pays méditerranéens. L'Italie est un pays de l'Union Européenne, mais n'a encore jamais été visité par Laura. Donc l'Italie doit être un pays méditerranéen. » se formalise comme suit :

(a)	L. a visité tt les pays de l'U.E. sauf les pays M.	$\forall x$ (x est UE $\wedge\neg$(x est M)) $\rightarrow$ a a visité x)
(b)	L'I. est un p. de l'U.E. jamais visité par L.	b est un pays UE $\wedge\neg$(b est un pays M)
(c)	L'Italie doit être un pays méditerranéen.	b est un pays M.

Nous prouvons la validité de cette inférence comme suit, abrégeant « $\forall x((Ux \wedge \neg Mx) \rightarrow Vax)$ » par « **A** » :

1	$\mathbf{A}, Ub \wedge \neg Vab$	$\vdash \forall x((Ux \wedge \neg Mx) \rightarrow Vax)$	prémisse
2	$\mathbf{A}, Ub \wedge \neg Vab$	$\vdash Ub \wedge \neg Vab$	prémisse
3	$\mathbf{A}, Ub \wedge \neg Vab, \neg Mb$	$\vdash^* \neg Mb$	supposition
4	$\mathbf{A}, Ub \wedge \neg Vab, \neg Mb$	$\vdash^* Ub$	de (2) avec ($\wedge$E)
5	$\mathbf{A}, Ub \wedge \neg Vab, \neg Mb$	$\vdash^* \neg Vab$	de (2) avec ($\wedge$E)
6	$\mathbf{A}, Ub \wedge \neg Vab, \neg Mb$	$\vdash^* Ub \wedge \neg Mb$	de (3) et (4) avec ($\wedge$I)
7	$\mathbf{A}, Ub \wedge \neg Vab, \neg Mb$	$\vdash^* (Ub \wedge \neg Mb) \rightarrow Vab$	de (1) avec (SU)
8	$\mathbf{A}, Ub \wedge \neg Vab, \neg Mb$	$\vdash^* Vab$	de (6) et (7) avec (MP)
9	$\mathbf{A}, Ub \wedge \neg Vab$	$\vdash \neg\neg Mb$	de (3), (5) et (8) avec (RAA)
10	$\mathbf{A}, Ub \wedge \neg Vab$	$\vdash Mb$	de (9) avec (DN)

(f) « Certains critiquent tout argument invalide. Personne ne critique un argument convaincant. Donc aucun argument invalide est convaincant. » se formalise comme suit :

(a)	Certains critiquent tout argument invalide.	$\exists x\forall y$(y invalide $\rightarrow$ x critique y)
(b)	Personne ne critique un argument convaincant.	$\neg\exists x\exists y$(y convaincant $\wedge x$ critique y)
(c)	Aucun argument invalide est convaincant.	$\neg\exists x$(x est convaincant $\wedge x$ est invalide)

Nous prouvons la validité de cette inférence comme suit (on abrégeant « $\exists x\forall y(Iy \rightarrow Cxy)$ » par « **A** », « $\neg\exists x\exists y(Ky \wedge Cxy)$ » par « **B** » et « $\exists x(Ix \wedge Kx)$ » par « **C** ») :

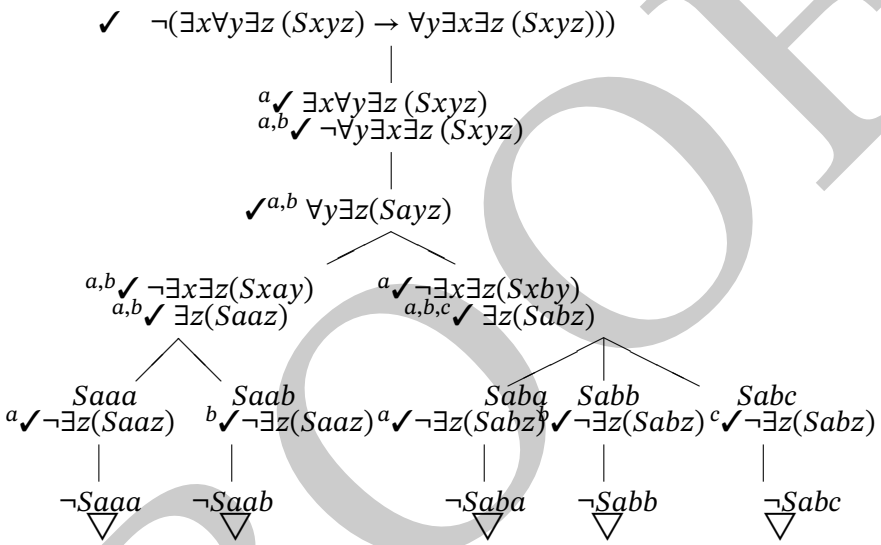
1	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \exists x\forall y(Iy \rightarrow Cxy)$	prémisse
2	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \neg\exists x\exists y(Ky \wedge Cxy)$	prémisse
3	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$\vdash^* \exists x(Ix \wedge Kx)$	supposition
4	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Ia \wedge Ka$	$\vdash^* Ia \wedge Ka$	supposition
5	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Ia \wedge Ka, \forall y(Iy \rightarrow Cby)$	$\vdash^* \forall y(Iy \rightarrow Cby)$	supposition

PROOF

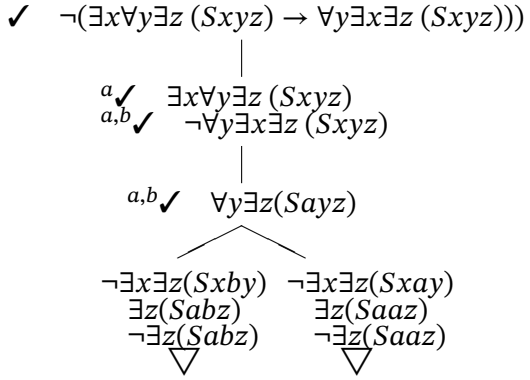
6	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Ia \wedge Ka, \forall y(Iy \to Cby)$	$\vdash^* Ia \to Cba$	de (5) par (SU)
7	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Ia \wedge Ka, \forall y(Iy \to Cby)$	$\vdash^* Ia$	de (4) avec ($\wedge$E)
8	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Ia \wedge Ka, \forall y(Iy \to Cby)$	$\vdash^* Ka$	de (4) avec ($\wedge$E)
9	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Ia \wedge Ka, \forall y(Iy \to Cby)$	$\vdash^* Cba$	de (6) et (7) avec (MP)
10	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Ia \wedge Ka, \forall y(Iy \to Cby)$	$\vdash^* Ka \wedge Cba$	de (8) et (9) avec ($\wedge$I)
11	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Ia \wedge Ka, \forall y(Iy \to Cby)$	$\vdash^* \exists x(Kx \wedge Cbx)$	de (10) avec (GE)
12	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Ia \wedge Ka, \forall y(Iy \to Cby)$	$\vdash^* \exists y \exists x(Kx \wedge Cyx)$	de (11) avec (GE)
13	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, Ia \wedge Ka$	$\vdash^* \exists y \exists x(Kx \wedge Cyx)$	de (1), (5) et (12) et avec (SE)
14	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	$\vdash^* \exists y \exists x(Kx \wedge Cyx)$	de (3), (4) et (13) et avec (SE)
15	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \neg \exists x(Ix \wedge Kx)$	de (3), (2) et (14) et avec (RAA)

Question 18.2 (6 points) À l'aide de la méthode des arbres, prouvons les phrases données :

(a) Un arbre pour « $\exists x \forall y \exists z\,(Sxyz) \to \forall y \exists x \exists z\,(Sxyz)$ » :

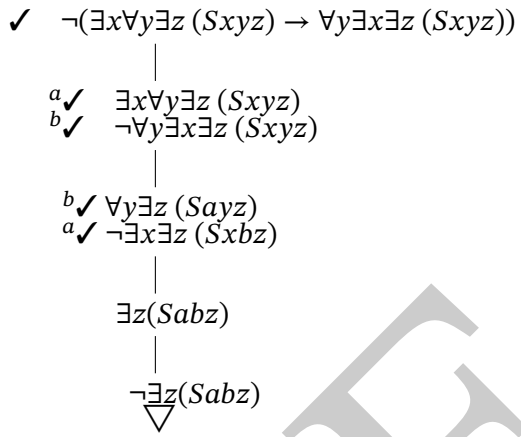


La difficulté avec cet arbre est qu'il faut trouver les instanciations 'justes', c'est-à-dire des instanciations qui mènent à des contradictions. Sans cela, il serait nécessaire de dessiner un arbre extrêment grand. Pour cet exercice, il est utile de se rappeler qu'une branche d'un arbre se ferme si elle contient n'importe quelle paire d'une proposition et de sa négation. On aurait donc aussi pu se contenter de l'arbre suivant :



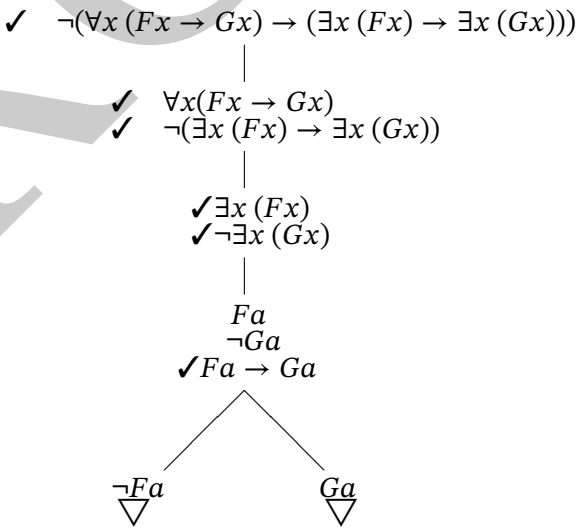
PROOF

Avec la nouvelle méthode, l'arbre aurait été le suivant :



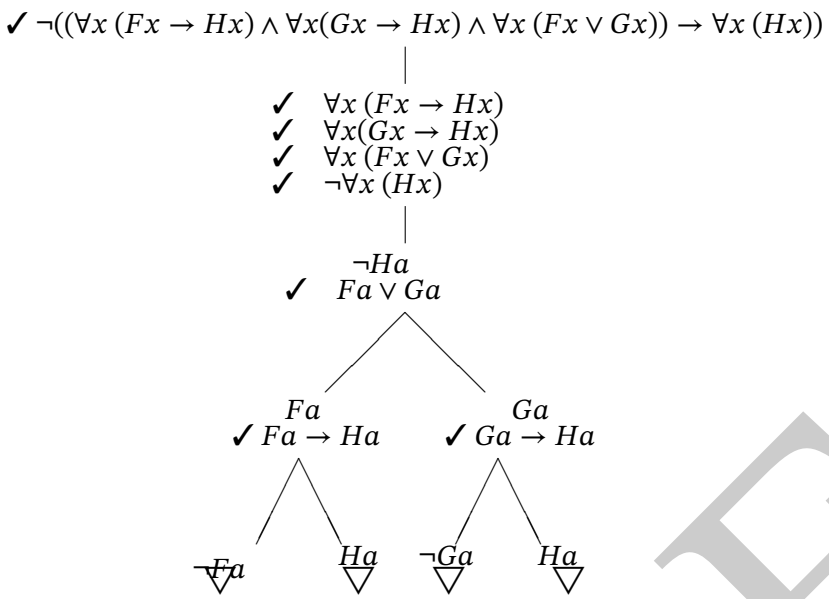
« $\forall y \exists z\,(Sayz)$ » est l'instanciation de la quantification existentielle et « $\neg \exists x \exists z\,(Sxbz)$ » celle de la négation de la quantification universelle. La nouvelle constante « b » est ensuite utilisée pour instancier « $\forall y \exists z(Sayz)$ », ce qui nous donne « $\exists z(Sabz)$ ». Mais « a », nous donne également « $\neg \exists z(Sabz)$ », comme instanciation de « $\neg \exists x \exists z(Sxby)$ ». Nous avons donc une contradiction et fermons la (seule) branche.

(b) Un arbre pour « $\forall x\,(Fx \to Gx) \to (\exists x\,(Fx) \to \exists x\,(Gx))$ » :

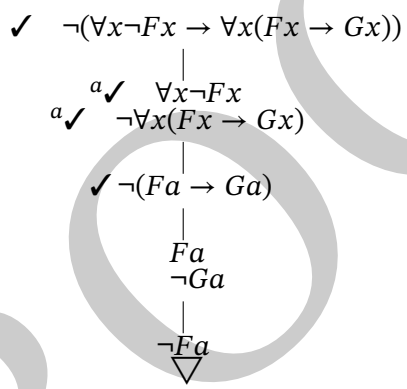


(c) Un arbre pour « $(\forall x\,(Fx \to Hx) \wedge \forall x(Gx \to Hx) \wedge \forall x\,(Fx \vee Gx)) \to \forall x\,(Hx)$ » :

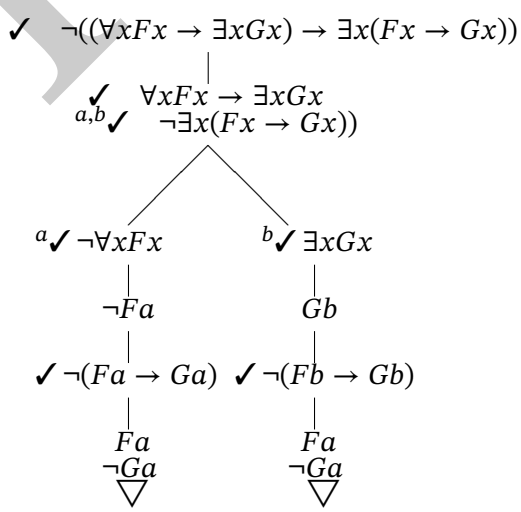
PROOF



(d) L'arbre pour : « $\forall x \neg Fx \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow Gx)$ » :



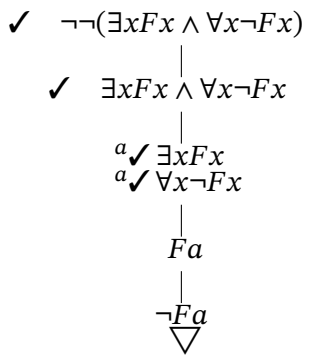
(e) L'arbre pour « $(\forall xFx \rightarrow \exists xGx) \rightarrow \exists x(Fx \rightarrow Gx)$ » :



PROOF

Comme le choix de « b » sur la deuxième branche est indépendent du choix de « a » sur la première, nous aurions pu choisir « a » deux fois.

(f) L'arbre pour « $\neg(\exists xFx \wedge \forall x\neg Fx)$ » :

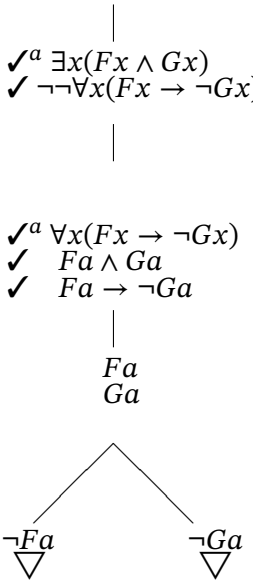


Question 18.3 (8 points) Nous prouvons les équivalences comme suit :

(a1) Une preuve de « $\exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \neg\forall x(Fx \to \neg Gx)$ » par la déduction naturelle :

1	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash$	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	prémisse
2	$\exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^*$	$Fa \wedge Ga$	supposition
3	$\exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga, \forall x(Fx \to \neg Gx)$	$\vdash^*$	$\forall x(Fx \to \neg Gx)$	supposition
4	$\exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga, \forall x(Fx \to \neg Gx)$	$\vdash^*$	$Fa \to \neg Ga$	de (2) par (SU)
5	$\exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga, \forall x(Fx \to \neg Gx)$	$\vdash^*$	Fa	de (3) par ($\wedge$**E**)
6	$\exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga, \forall x(Fx \to \neg Gx)$	$\vdash^*$	$\neg Ga$	de (4) et (5) par (MP)
7	$\exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga, \forall x(Fx \to \neg Gx)$	$\vdash^*$	Ga	de (3) par ($\wedge$**E**)
8	$\exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^*$	$\neg\forall x(Fx \to \neg Gx)$	de (3), (6) et (7) par (RAA)
9	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash$	$\neg\forall x(Fx \to \neg Gx)$	de (2) et (8) par (SU)

(a1) Une preuve de « $\exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \neg\forall x(Fx \to \neg Gx)$ » par la méthode des arbres :

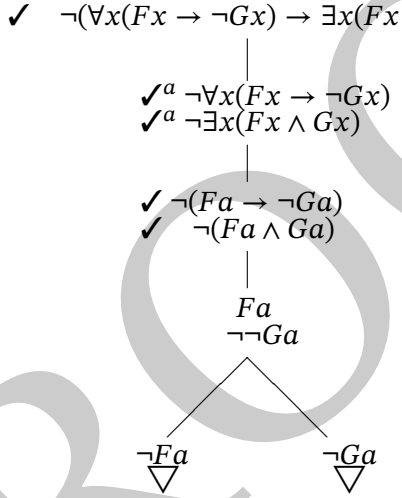


PROOF

(a2) Une preuve de « $\neg\forall x(Fx \to \neg Gx) \vdash \exists x(Fx \wedge Gx)$ » par la déduction naturelle :

1	$\neg\forall x(Fx \to \neg Gx) =: \mathbf{A}$	$\vdash \neg\forall x(Fx \to \neg Gx)$	prémisse
2	$\mathbf{A}, \neg\exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash^* \neg\exists x(Fx \wedge Gx)$	supposition
3	$\mathbf{A}, \neg\exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa \wedge Ga$	supposition
4	$\mathbf{A}, \neg\exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx \wedge Gx)$	de (3) par (GE)
5	$\mathbf{A}, \neg\exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash^* \neg(Fa \wedge Ga)$	de (3) et (4) par (RAA)
6	$\mathbf{A}, , \neg\exists x(Fx \wedge Gx), Fa$	$\vdash^* Fa$	supposition
7	$\mathbf{A}, , \neg\exists x(Fx \wedge Gx), Fa, Ga$	$\vdash^* Ga$	supposition
8	$\mathbf{A}, \neg\exists x(Fx \wedge Gx), Fa, Ga$	$\vdash^* Fa \wedge Ga$	de (6) et (7) par ($\wedge\mathbf{I}$)
9	$\mathbf{A}, \neg\exists x(Fx \wedge Gx), Fa$	$\vdash^* \neg Ga$	de (7), (3) et (8) par (RAA)
10	$\mathbf{A}, \neg\exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash^* Fa \to \neg Ga$	de (6) et (9) par (PC)
11	$\mathbf{A}, \neg\exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash^* \forall x(Fx \to \neg Gx)$	de (10) par (GU)
12	$\mathbf{A},$	$\vdash \neg\neg\exists x(Fx \wedge Gx)$	de (2), (1) et (11) par (RAA)
13	$\mathbf{A},$	$\vdash \exists x(Fx \wedge Gx)$	de (13) par (DN)

(a2) Une preuve de « $\neg\forall x(Fx \to \neg Gx) \vdash \exists x(Fx \wedge Gx)$ » par la méthode des arbres :

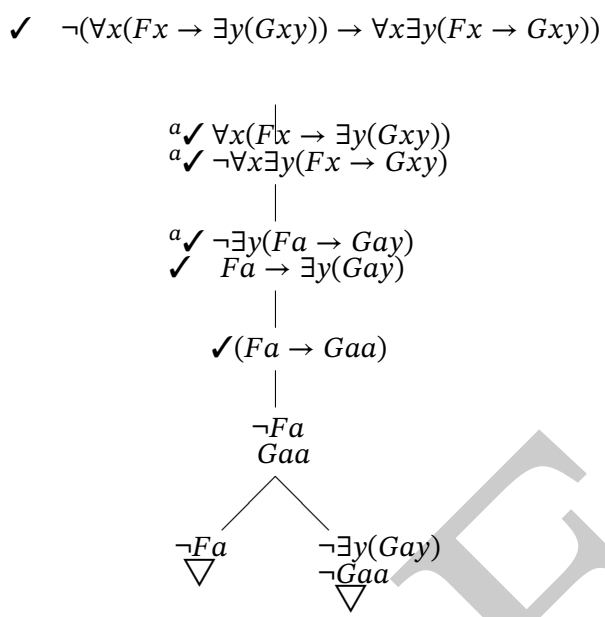


(b1) Une preuve de « $\forall x(Fx \to \exists y(Gxy)) \vdash \forall x\exists y(Fx \to Gxy)$ » par la déduction naturelle :

1	$\forall x(Fx \to \exists y(Gxy)) =: \mathbf{A}$	$\vdash \forall x(Fx \to \exists y(Gxy))$	prémisse
2	$\mathbf{A}$	$\vdash Fa \to \exists y(Gay)$	de (1) par (SU)
3	$\mathbf{A}, \neg\exists y(Fa \to Gay)$	$\vdash^* \neg\exists y(Fa \to Gay)$	supposition
4	$\mathbf{A}, \neg\exists y(Fa \to Gay), Fa \to Gab$	$\vdash^* Fa \to Gab$	supposition
5	$\mathbf{A}, \neg\exists y(Fa \to Gay), Fa \to Gab$	$\vdash^* \exists y(Fa \to Gay)$	de (4) par (GE)
6	$\mathbf{A}, \neg\exists y(Fa \to Gay)$	$\vdash^* \neg(Fa \to Gab)$	de (4), (3) et (5) par (RAA)
7	$\mathbf{A}$	$\vdash \neg\neg\exists y(Fa \to Gay)$	de (4), (6) et (3) par (RAA)
8	$\mathbf{A}$	$\vdash \exists y(Fa \to Gay)$	de (7) par (DN)
9	$\mathbf{A}$	$\vdash \forall x\exists y(Fx \to Gxy)$	de (8) par (GU)

(b1) Une preuve de « $\forall x(Fx \to \exists y(Gxy)) \vdash \forall x\exists y(Fx \to Gxy)$ » par la méthode des arbres :

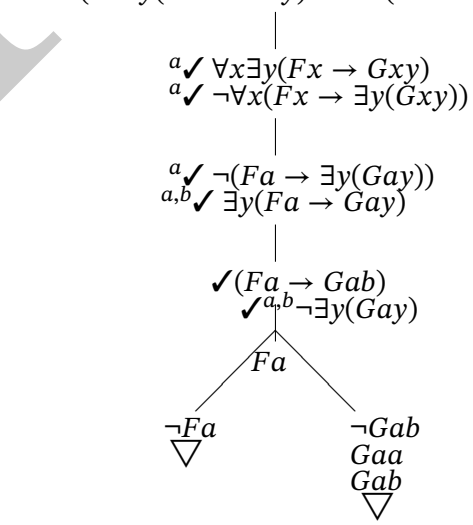
PROOF



(b2) Une preuve de « $\forall x\exists y(Fx \to Gxy) \vdash \forall x(Fx \to \exists y(Gxy))$ » par la déduction naturelle :

1	$\forall x\exists y(Fx \to Gxy) =: \mathbf{A}$	$\vdash \forall x\exists y(Fx \to Gxy)$	prémisse
2	$\mathbf{A}$	$\vdash \exists y(Fa \to Gay)$	de (1) par (SU)
3	$\mathbf{A}, Fa \to Gab$	$\vdash^* Fa \to Gab$	supposition
4	$\mathbf{A}, Fa \to Gab, Fa$	$\vdash^* Fa$	supposition
5	$\mathbf{A}, Fa \to Gab, Fa$	$\vdash^* Gab$	de (3) et (4) par (MP)
6	$\mathbf{A}, Fa \to Gab, Fa$	$\vdash^* \exists y(Gay)$	de (5) par (GE)
7	$\mathbf{A}, Fa \to Gab$	$\vdash^* Fa \to \exists y(Gay)$	de (4) et (6) par (PC)
8	$\mathbf{A}$	$\vdash Fa \to \exists y(Gay)$	de (3) et (7) par (SE)
9	$\mathbf{A}$	$\vdash \forall x(Fx \to \exists y(Gxy))$	de (8) par (GU)

(b2) Une preuve de « $\forall x\exists y(Fx \to Gxy) \vdash \forall x(Fx \to \exists y(Gxy))$ » par la méthode des arbres :



PROOF

17.19 Quatrième examen probatoire

Question 19.1 (2 points) Considérons les deux affirmations suivantes,

1 Chaque philosophie admire un philosophe.
2 Il y a un philosophe admiré par tous les philosophes.

Solution : Un point pour la question d'ambiguïté ; un point pour la relation de conséquence logique.

(a) **1** est ambigüe entre les deux formes logiques suivantes :

1$*$ $\forall x$ (x est un philosophe $\rightarrow \exists y$ (y est un philosophe $\wedge$ x admire y))
1$'*$ $\exists y$ (y est un philosophe $\wedge$ $\forall x$ (x est un philosophe $\rightarrow$ x admire y))

La différence réside dans l'ordre des quantificateur : le quantificateur universel précède le quantificateur existentiel dans la phrase **1**$*$, mais le suit dans la phrase **1**$'*$ – le 'choix' d'individu qu'effectue le quantificateur existentiel dépend des quantificateurs universels qui le précèdent, mais est indépendant de ceux qui le suivent. Nous pouvons marquer cette ambiguïte par des emphases différentes :

1$*$ Chaque philosophe admire un *philosophe.*
1$'*$ Chaque philosophe admire *un* philosophe.

(b) **2** implique **1**, dans ces deux sens : si on formalise le dernier comme **1**$*$, c'est grâce au caractère tautologique de « $\exists y \forall x(Rxy) \rightarrow \forall x \exists y(Rxy)$ » ; dans l'autre cas, où on formalise **1** comme **1**$'*$, c'est une inférence du type « $p \rightarrow p$ ».

(c) Une situation où **1**$*$ est vraie, mais **1**$'*$ et **2** ne le sont pas, est la suivante : différents philosophes admirent différents philosophes, mais pour chaque philosophe existe un philosophe qu'il admire. Supposons que tous les philosophes s'admirent eux-mêmes, mais n'admirent personne d'autre. Dans cette situation, **1**$*$ est vrai, mais **1**$'*$ et **2** ne le sont pas. Une autre situation, plus contrefactuelle, où seulement **1**$*$ est vrai est s'il n'y a pas de philosophes du tout.

Question 19.2 (3 points) Expliquons les distinctions.

(i) la distinction entre variables et constantes individuelles : une **constante individuelle** est interprétée dans une structure par l'assignation d'un référent choisi du domaine du discours, défini par la structure ; une **variable** est interprétée par une assignation de valeurs ; sa référence peut varier à l'intérieur d'une structure.

(ii) la distinction entre noms propres, indexicaux et descriptions définies : un **nom propre** est une expression qui a un référent quel que soit le contexte de son occurrence ; sa référence est modalement stable (désignation rigide) ; une **expression indéxicale** a une référence qui varie avec le contexte de son énonciation ; une **description définie** a une référence qui ne varie pas avec le contexte de son énonciation, mais qui varie avec le contexte de son évaluation.

Question 19.3 (9 points) À l'aide de la méthode de la déduction naturelle, prouvons les formules données :

(a) Voici une preuve de « $\forall x \neg(Fx \wedge Gx), Ga \vdash \neg Fa$ » :

PROOF

1	$\forall x\neg(Fx \wedge Gx), Ga$	$\vdash\ \forall x\neg(Fx \wedge Gx)$	prémisse
2	$\forall x\neg(Fx \wedge Gx), Ga$	$\vdash\ Ga$	prémisse
3	$\forall x\neg(Fx \wedge Gx), Ga, Fa$	$\vdash^*\ Fa$	supposition
4	$\forall x\neg(Fx \wedge Gx), Ga, Fa$	$\vdash^*\ Fa \wedge Ga$	de (2) et (3) par ($\wedge$I)
5	$\forall x\neg(Fx \wedge Gx), Ga, Fa$	$\vdash^*\ \neg(Fa \wedge Ga)$	de (1) par (SU)
5	$\forall x\neg(Fx \wedge Gx), Ga$	$\vdash\ \neg Fa$	de (3), (4) et (5) par (RAA)

(b) Voici une preuve de « $\forall x(Fx \to Gx) \vdash \neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$ » :

1	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash\ \forall x(Fx \to Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$\vdash^*\ \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	supposition
3	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx), Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^*\ Fa \wedge \neg Ga$	supposition
4	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx), Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^*\ Fa$	de (3) par ($\wedge$E)
5	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx), Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^*\ Fa \to Ga$	de (1) par (SU)
6	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx), Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^*\ Ga$	de (4) et (5) par (MP)
7	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx), Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^*\ \neg Ga$	de (3) par ($\wedge$E)
8	$\forall x(Fx \to Gx), Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^*\ \neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	de (2), (6), (7) par (RAA)
9	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash\ \neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	de (2), (3) et (8) par (SE)

(c) Voici une preuve de « $\forall x(Hx \to Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx) \vdash \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$ » :

1	$\forall x(Hx \to Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$\vdash\ \forall x(Hx \to Gx)$		prémisse
2	$\forall x(Hx \to Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$\vdash\ \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$		prémisse
3	$\forall x(Hx \to Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^*\ Fa \wedge \neg Ga$	supposition
4	$\forall x(Hx \to Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^*\ Ha \to Ga$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Hx \to Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^*\ \neg Ga$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
6	$\forall x(Hx \to Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^*\ \neg Ha$	de (5) et (4) avec (MT)
7	$\forall x(Hx \to Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^*\ Fa$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
8	$\forall x(Hx \to Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^*\ Fa \wedge \neg Ha$	de (6) et (7) avec ($\wedge$**I**)
9	$\forall x(Hx \to Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^*\ \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$	de (8) avec (GE)
10	$\forall x(Hx \to Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$\vdash\ \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$		de (1), (3) et (9) avec (SE)

(d) La preuve de « $\exists x(Fx) \to Fa \vdash \forall x(Fx \to Fa)$ » :

1	$\exists x(Fx) \to Fa$	$\vdash\ \exists x(Fx) \to Fa$		prémisse
2	$\exists x(Fx) \to Fa$	Fb	$\vdash^*\ Fb$	supposition
3	$\exists x(Fx) \to Fa$	Fb	$\vdash^*\ \exists x(Fx)$	de (2) avec (GE)
4	$\exists x(Fx) \to Fa$	Fb	$\vdash^*\ Fa$	de (2) et (3) avec (MP)
5	$\exists x(Fx) \to Fa$	$\vdash\ Fb \to Fa$		de (2) et (4) avec (PC)
6	$\exists x(Fx) \to Fa$	$\vdash\ \forall x(Fx \to Fa)$		de (5) avec (GU)

Cette preuve est plus compliquée que nécessaire : il est possible de prouver « $\forall x(Fx \to Fa)$ »sans aucune prémisse, c'est-à -dire que « $\forall x(Fx \to Fa)$ »est valide et s'ensuit de n'importe quel prémisse, comme suit :

PROOF

1	$Fa \vdash^* Fa$		supposition
2	$Fa \vdash^* \exists x(Fx)$		de (2) avec (GE)
3	$\vdash Fa \to \exists x(Fx)$		de (1) et (3) avec (PC)

(e) Voici une preuve de « $\exists x \exists y(Rxy) \vdash \exists y \exists x(Rxy)$ » :

1	$\exists x \exists y(Rxy)$	$\vdash \exists x \exists y(Rxy)$		prémisse
2	$\exists x \exists y(Rxy)$	$\exists y(Ray)$	$\vdash^* \exists y(Ray)$	supposition
3	$\exists x \exists y(Rxy)$	$\exists y(Ray), Rab$	$\vdash^* Rab$	supposition
4	$\exists x \exists y(Rxy)$	$\exists y(Ray), Rab$	$\vdash^* \exists x(Rxb)$	de (3) avec (GE)
5	$\exists x \exists y(Rxy)$	$\exists y(Ray), Rab$	$\vdash^* \exists y \exists x(Rxb)$	de (4) avec (GE)
6	$\exists x \exists y(Rxy)$	$\exists y(Ray)$	$\vdash^* \exists y \exists x(Rxb)$	de (2), (3) et (5) avec (SE)
7	$\exists x \exists y(Rxy)$	$\vdash \exists y \exists x(Rxy)$		de (1), (2) et (6) avec (SE)

(f) Voici une preuve de « $\forall x(Gx \to \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$ » :

1	$\forall x(Gx \to \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \forall x(Gx \to \neg Hx)$		prémisse
2	$\forall x(Gx \to \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \exists x(Fx \wedge Gx)$		prémisse
3	$\forall x(Gx \to \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa \wedge Ga$	supposition
4	$\forall x(Gx \to \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Ga \to \neg Ha$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Gx \to \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Ga$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
6	$\forall x(Gx \to \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \neg Ha$	de (5) et (4) avec (MP)
7	$\forall x(Gx \to \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
8	$\forall x(Gx \to \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa \wedge \neg Ha$	de (6) et (7) avec ($\wedge$**I**)
9	$\forall x(Gx \to \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$	de (8) avec (GE)
10	$\forall x(Gx \to \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$		de (1), (3) et (9) avec (SE)

L'application de (SE) est légitime parce que ni la conclusion obtenue de la supposition du disjoint typique ni les suppositions faites lors de sa dérivation ne contiennent « a ».

(g) Une preuve de « $\forall x((Fx \vee Gx) \to Hx), \forall x \neg(Hx) \vdash \forall x \neg(Fx)$ » :

1	$\forall x((Fx \vee Gx) \to Hx), \forall x \neg(Hx)$	$\vdash \forall x((Fx \vee Gx) \to Hx)$		prémisse
2	$\forall x((Fx \vee Gx) \to Hx), \forall x \neg(Hx)$	$\vdash \forall x \neg(Hx)$		prémisse
3	$\forall x((Fx \vee Gx) \to Hx), \forall x \neg(Hx)$	$\vdash (Fa \vee Ga) \to Ha$		de (1) avec (SU)
4	$\forall x((Fx \vee Gx) \to Hx), \forall x \neg(Hx)$	$\vdash \neg Ha$		de (2) avec (SU)
5	$\forall x((Fx \vee Gx) \to Hx), \forall x \neg(Hx)$	$\vdash \neg(Fa \vee Ga)$		de (4) et (5) avec (MT)
6	$\forall x((Fx \vee Gx) \to Hx), \forall x \neg(Hx)$	Fa	$\vdash^* Fa$	supposition
7	$\forall x((Fx \vee Gx) \to Hx), \forall x \neg(Hx)$	Fa	$\vdash^* Fa \vee Ga$	de (6) avec ($\vee$**I**)
8	$\forall x((Fx \vee Gx) \to Hx), \forall x \neg(Hx)$	$\vdash \neg Fa$		de (6), (5) et (7) avec (RAA)
9	$\forall x((Fx \vee Gx) \to Hx), \forall x \neg(Hx)$	$\vdash \forall x \neg(Fx)$		de (8) avec (GU)

(h) Une preuve de « $\exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)$ » serait la suivante :

1	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \exists x(Fx \wedge Gx))$		prémisse
2	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa \wedge Ga$	supposition

PROOF

3	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa$	de (2) avec ($\wedge$**E**)
4	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx)$	de (3) avec (GE)
5	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Ga$	de (2) avec ($\wedge$**E**)
6	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \exists x(Gx)$	de (5) avec (GE)
7	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)$	de (4) et (6) avec ($\wedge$**I**)
8	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)$		de (1), (2) et (7) avec (SE)

(i) Une preuve de « $\forall x(Fx \to Fa) \vdash \exists x(Fx) \to Fa$ » serait la suivante :

1	$\forall x(Fx \to Fa)$	$\vdash \forall x(Fx \to Fa)$		prémisse
2	$\forall x(Fx \to Fa)$	$\exists x(Fx)$	$\vdash^* \exists x(Fx)$	supposition
3	$\forall x(Fx \to Fa)$	$\exists x(Fx), Fb$	$\vdash^* Fb$	supposition
4	$\forall x(Fx \to Fa)$	$\exists x(Fx), Fb$	$\vdash^* Fb \to Fa$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Fx \to Fa)$	$\exists x(Fx), Fb$	$\vdash^* Fa$	de (3) et (4) avec (MP)
6	$\forall x(Fx \to Fa)$	$\exists x(Fx)$	$\vdash^* Fa$	de (2), (3) et (5) avec (SE)
7	$\forall x(Fx \to Fa)$	$\vdash \exists x(Fx) \to Fa$		de (2) et (6) avec (PC)

17.20 Cinquième examen probatoire

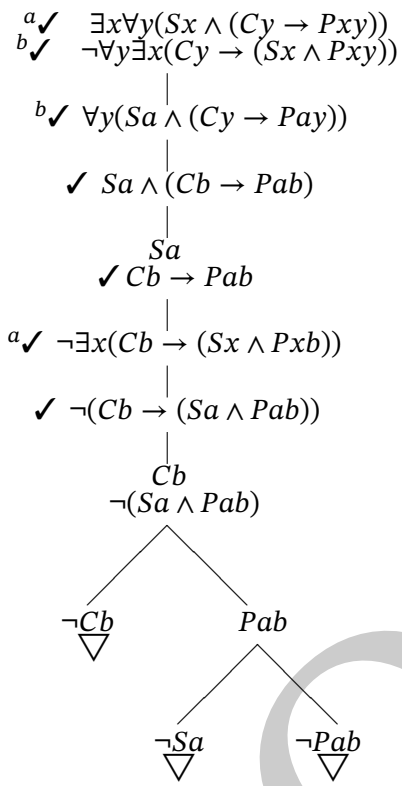
Question 20.1 (9 points) Formalisons les arguments donnés et démontrons leur validité à l'aide de la méthode des arbres :

(a) Formalisons « Il y a quelqu'un de sympa qui payera pour tout ce qui est cassé. Donc, tout ce qui est cassé sera payé pour par quelqu'un de sympa. » comme suit (cf. Hodges, 2001, 196–197) :

Il y a quelqu'un de sympa qui payera pour tout ce qui est cassé.	$\rightsquigarrow$	$\exists x \forall y(Sx \wedge (Cy \to Pxy))$
Tout ce qui est cassé sera payé pour par quelqu'un de sympa.	$\rightsquigarrow$	$\forall y \exists x(Cy \to (Sx \wedge Pxy))$

Notre arbre est le suivant :

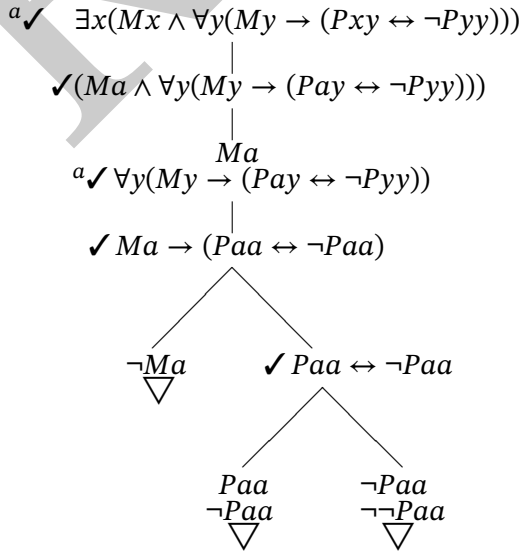
PROOF



(b) La formalisation de « Il n'est pas le cas qu'il y ait quelqu'un qui est devenu membre du club sympa et qui a payé pour toutes les vacances de exactement tous les membres qui ne les ont pas payé eux-mêmes. » est comme suit (cf. Hodges, 2001, 270) :

> Il n'est pas le cas qu'il y ait quelqu'un qui est devenu membre du club et qui a payé les vacances de exactement tous les membres qui ne les ont pas payé eux-mêmes. $\rightsquigarrow$ $\neg\exists x(Mx \wedge \forall y(My \to (Pxy \leftrightarrow \neg Pyy)))$

Notre arbre est le suivant :

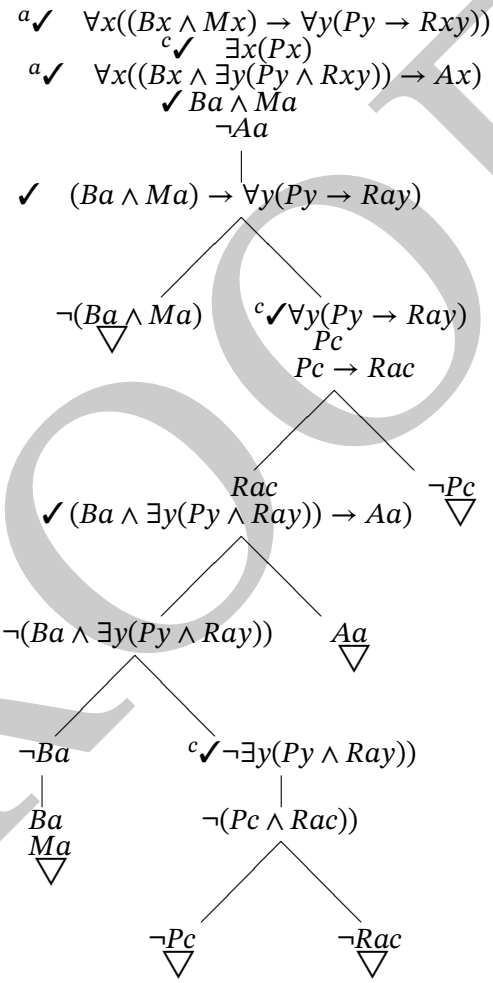


PROOF

(c) Une formalisation de « Tous les bonobos mâles savent résoudre tout problème. Il y a au moins un problème. Tout bonobo qui sait résoudre un problème recevra une banane. Sultan est un bonobo mâle. Alors, il recevra une banane. » : (cf. Hodges, 2001, 273 et seq.) :

Tous les bonobos mâles savent résoudre tout problème.	$\rightsquigarrow$	$\forall x((Bx \wedge Mx) \rightarrow \forall y(Py \rightarrow Rxy))$
Il y a au moins un problème.	$\rightsquigarrow$	$\exists x(Px)$
Tout bonobo qui sait résoudre un problème recevra une banane.	$\rightsquigarrow$	$\forall x((Bx \wedge \exists y(Py \wedge Rxy)) \rightarrow Ax)$
Sultan est un bonobo mâle.	$\rightsquigarrow$	$Ba \wedge Ma$
Sultan recevra une banane.	$\rightsquigarrow$	Aa

L'arbre :

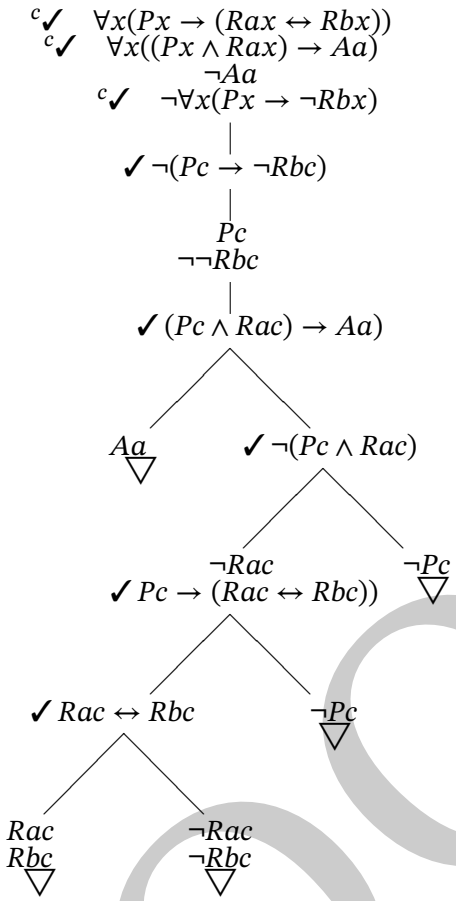


(d) Une formalisation de « Sultan et Chica savent résoudre les mêmes problèmes. Si Sultan sait résoudre n'importe quel problème, il recevra une banane. Sultan ne recevra aucune banane. Donc, Chica ne sait résoudre aucun des problèmes. » :

Sultan et Chica savent résoudre les mêmes problèmes.	$\rightsquigarrow$	$\forall x(Px \rightarrow (Rax \leftrightarrow Rbx))$
Si Sultan sait résoudre n'importe quel problème, il recevra une banane.	$\rightsquigarrow$	$\forall x((Px \wedge Rax) \rightarrow Aa)$
Sultan ne recevra aucune banane.	$\rightsquigarrow$	$\neg Aa$
Chica ne sait résoudre aucun des problèmes.	$\rightsquigarrow$	$\forall x(Px \rightarrow \neg Rbx)$

PROOF

L'arbre :

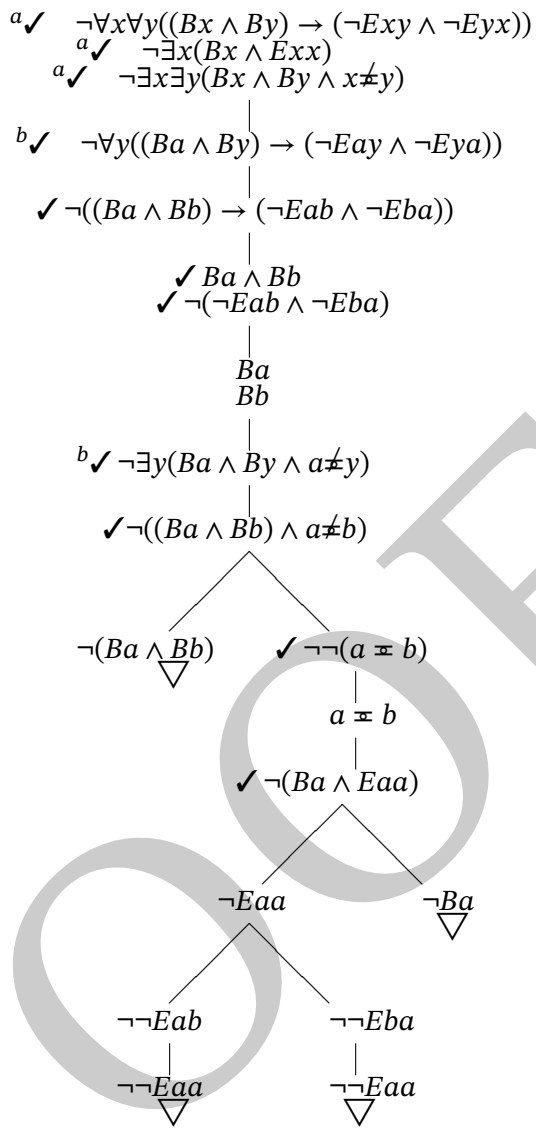


(e) Une formalisation de « Pas tous les bonobos s'efforcent autant. Aucun bonobo s'efforce plus que lui-même. En conséquence, il y a au moins deux bonobos. » :

Pas tous les bonobos s'efforcent autant.	$\rightsquigarrow$	$\neg\forall x\forall y((Bx \wedge By) \to (\neg Exy \wedge \neg Eyx))$
Aucun bonobo s'efforce plus que lui-même.	$\rightsquigarrow$	$\neg\exists x(Bx \wedge Exx)$
Il y a au moins deux bonobos	$\rightsquigarrow$	$\exists x\exists y(Bx \wedge By \wedge x \neq y)$

L'arbre :

PROOF

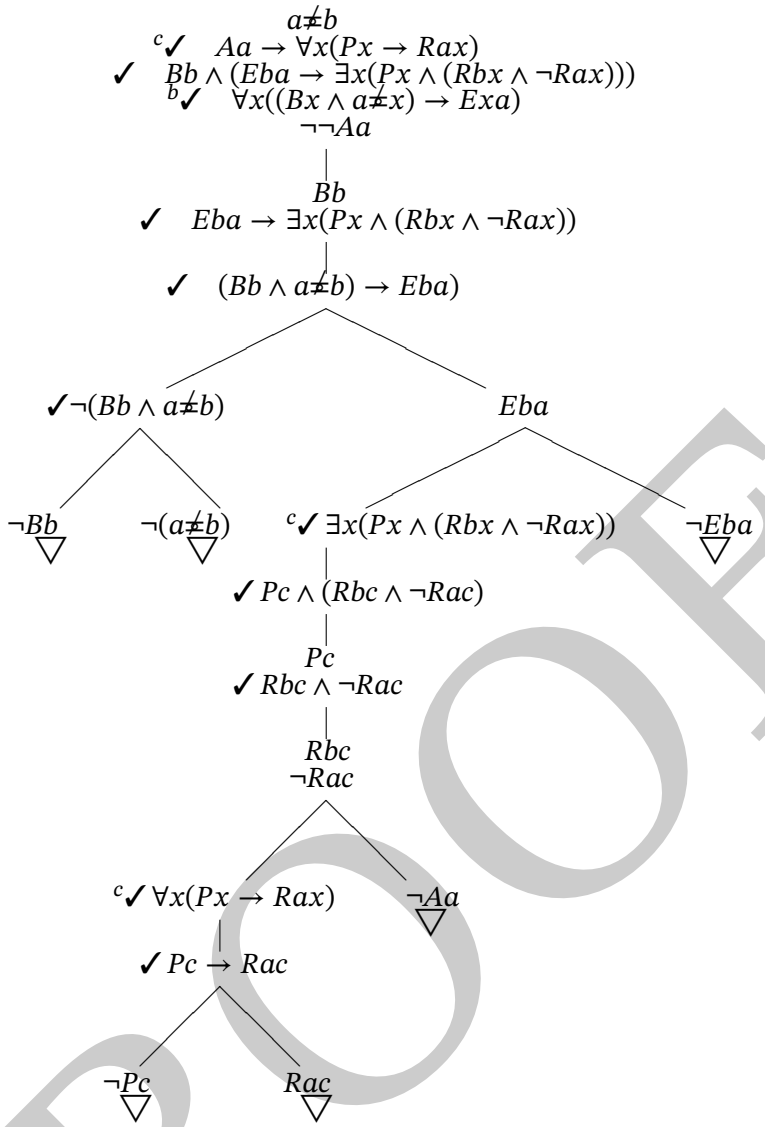


(f) Une formalisation de « Sultan n'est pas Chica. Sultan ne recevra pas de banane sauf s'il sait résoudre tous les problèmes. Si la bonobo Chica s'efforce plus que Sultan, alors Chica sait résoudre un problème que Sultan ne sait pas résoudre. Tous les bonobos autres que Sultan s'efforcent plus que lui. Il s'ensuit que Sultan ne recevra pas de banane. » :

Sultan n'est pas Chica.	$\rightsquigarrow$	$a\neq b$
Sultan ne recevra pas de banane sauf s'il sait résoudre tous les problèmes.	$\rightsquigarrow$	$Aa \rightarrow \forall x(Px \rightarrow Rax)$
Si la bonobo Chica s'efforce plus que Sultan, alors Chica sait résoudre un problème que Sultan ne sait pas résoudre.	$\rightsquigarrow$	$Bb \wedge (Eba \rightarrow \exists x(Px \wedge Rbx \wedge \neg Rax)$
Tous les bonobos autres que Sultan s'efforcent plus que lui.	$\rightsquigarrow$	$\forall x((Bx \wedge a\neq x) \rightarrow Exa)$
Sultan ne recevra pas de banane	$\rightsquigarrow$	$\neg Aa$

L'arbre :

PROOF

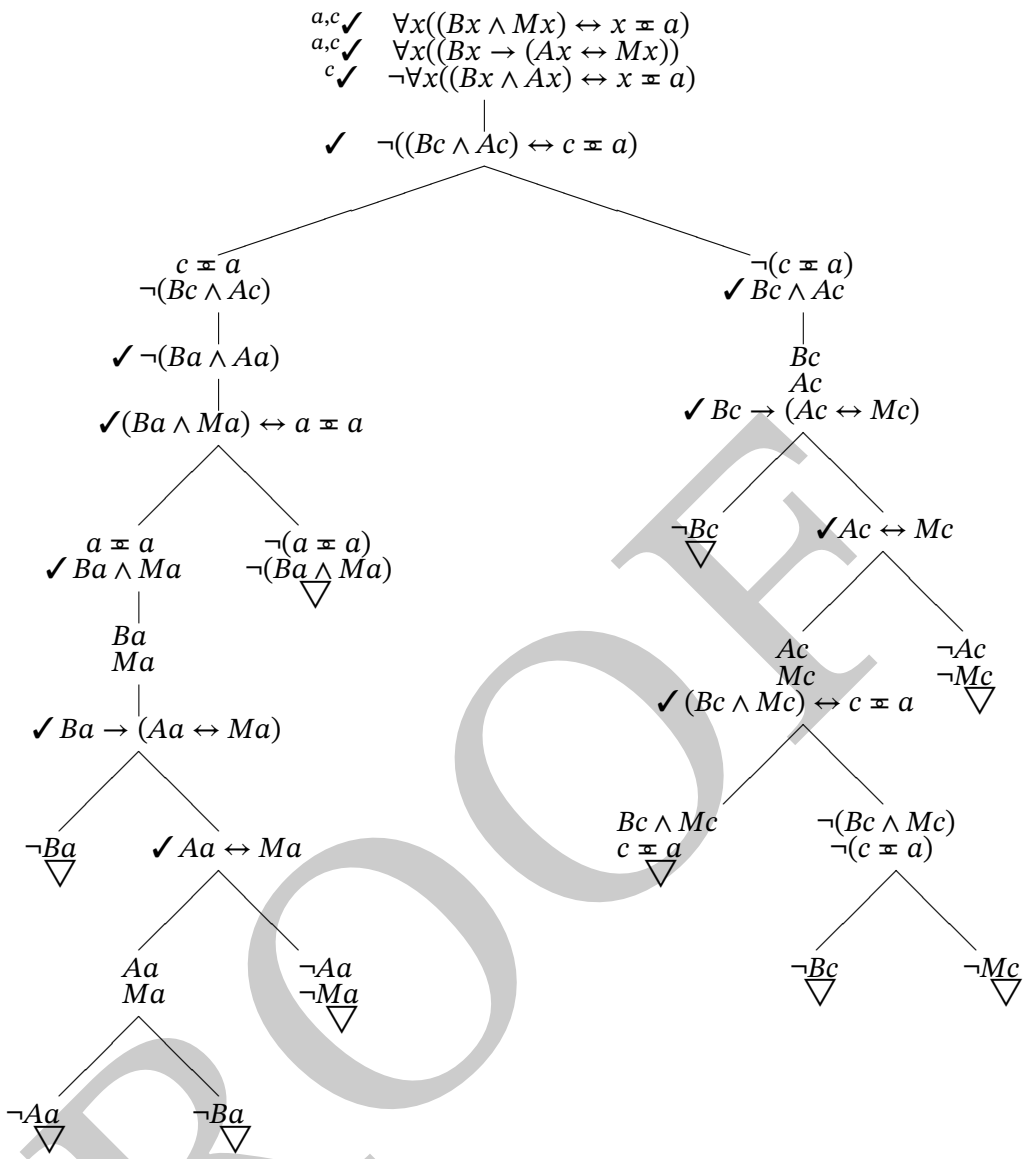


(g) Une formalisation de « Parmi tous les bonobos, il n'y a que Sultan qui est mâle. Les bonobos qui recevront une banane sont les mâles. De suite, Sultan est le bonobo qui recevra la banane. » :

Parmi tous les bonobos, il n'y a que Sultan qui est mâle.	$\rightsquigarrow$	$\forall x((Bx \wedge Mx) \leftrightarrow x = a)$
Les bonobos qui recevront une banane sont les mâles.	$\rightsquigarrow$	$\forall x((Bx \to (Ax \leftrightarrow Mx))$
Sultan est le bonobo qui recevra la banane.	$\rightsquigarrow$	$\forall x((Bx \wedge Ax) \leftrightarrow x = a)$

L'arbre :

PROOF



Question 20.2 (4 points) Formalisons les arguments donnés dans le langage de la logique des prédicats et démontrez leur validité à l'aide de la méthode de la déduction naturelle. **Solutions** :

(a) « Quelques femmes aiment Leonardo. Tous les hommes aiment chaque femme. Puisque Leonardo est un homme, il y a quelqu'un qui aime Leonardo et est aimé par Leonardo. »

(b) « Certains n'aiment personne et personne n'aime quelqu'un qui ne s'aime pas lui-même. Il y a donc certains qui ne sont aimé par personne. »

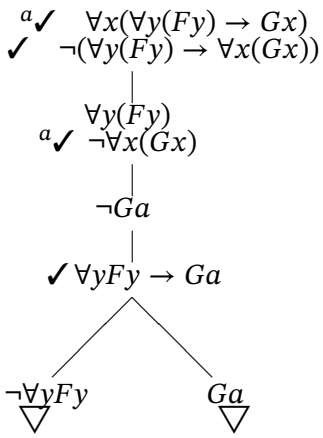
(c) « Personne n'est obligé de faire ce qu'il ne peut pas faire. Il y a des choses que Macron promets qu'il ne peut pas faire. Il y a donc des choses que Macron promets mais qu'il n'est pas obligé de faire. »

(d) « Quelques-uns critiquent tout argument non valide. Personne ne critique un argument convaincant. Il s'ensuit qu'aucun argument non valide est convaincant. »

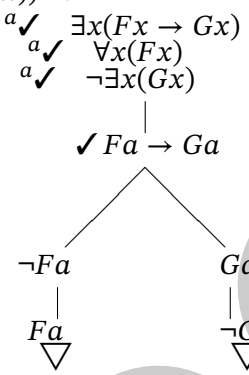
Question 20.3 (2 points) Méthode des arbres :

(a) « $\forall x(\forall y(Fy) \to Gx) \to (\forall y(Fy) \to \forall x(Gx))$ » :

PROOF



(b) « $\exists x(Fx \to Gx) \to (\forall x(Fx) \to \exists x(Gx))$ » :



Question 19.5 (5 points) Encore les Lausannois et les Genevois (cf. Smullyan (1978, 103–104)). **Solution**. Il est remarquable que si quelqu'un, Lausannois ou Genevois, fait l'assertion suivante

3 Si je suis Lausannois, alors p.

alors l'assertion **3** est vraie *et* celui qui l'asserte est un Lausannois (= quelqu'un qui ne ment jamais).[7] Je vous donne deux arguments pour cette conclusion :

1. Voici un premier argument : Appelons l'énonciateur de **3** « A » et supposons qu'A est Lausannois. Alors **3** est vrai et il s'ensuit que p.
   Nous avons démontré qu'il s'ensuit, de la supposition que A est Lausannois, que « p » doit être vrai. Nous avons donc démontré que : si A est Lausannois, alors p. C'est ce que dit **3**, et alors nous avons démontré **3**, c'est-à-dire nous avons montré que **3** est vrai. Mais alors A, son énonciateur, doit être Lausannois, et alors il s'ensuit que p.

2. Nous savons qu'une phrase fausse n'implique n'importe quelle autre phrase. Si alors A n'est pas un Lausannois, la phrase « Si A est Lausannois, alors p » est vraie. Mais alors cette phrase – **3** – ne pourrait pas être dite par un Genevois (puisque les Genevois ne disent que des fausses-tés). Comme nous savons que **3** a été dit par A, alors A ne peut pas être Genevois et doit être Lausannois. Alors l'antécédent de **3** est vrai et il s'ensuit que p.

Appliquant la leçon aux exemples, ceci nous donne :

[7] Encore une stratégie invulnerable de drague : si vous arrivez à convaincre quelqu'un que soit vous mentez toujours soit jamais, alors la vérité de n'importe quelle phrase « p » *s'ensuit logiquement* de **3** (par MP).

PROOF

(a) « Si je suis un Lausannois, alors Florence est Lausannoise. » doit être vrai et Georges-André doit être Lausannois, alors Georges-André et Florence sont de Lausanne.

(b) « Si je suis un Lausannois, alors je mangerai mon chapeau. » est vrai et Jean-Pascal est Lausannois, alors il mangera son chapeau.

(c) « Si Yvette est Lausannoise, alors Paul-René est Genevois. » : Paul-René est Lausannois, mais Yvette est Genevoise. Seulement un···e Lausannois···e peut faire une assertion du type : « Si p, alors je suis Genevois. »La raison est la suivante : si la personne qui l'énonce est Genevoise, alors l'assertion serait vraie (parce qu'une phrase du type « Si p, alors q » est vraie si « q » est vraie). Mais alors elle ne pourrait pas être faite par quelqu'un de Genève. Alors Paul-René est Genevois et son assertion est vraie. Alors il s'ensuit par MT qu'Yvette est Genevoise.

(d) Timea dit qu'il n'est pas le cas que Sandrine est coupable et Rémy innocent, c'est-à-dire que soit Sandrine est innocente soit Remy est coupable – exactement la même chose que dit Stanislas. Alors ils doivent être de la même ville.

(e) Supposons que Georges est Lausannois. Alors Charlotte est Lausannoise, puisque Georges le dit, et ce qu'elle dit est vrai. Elle dit que si Georges est Lausannois, Hélène l'est aussi. Il s'ensuit, sous la supposition que Georges est Lausannois, que Hélène est Lausannoise.
C'est exactement ce que dit Charlotte et elle a donc raison *tout court* (indépendemment de la supposition faite). Alors l'assertion de Georges est vraie et il doit aussi être Lausannois. Mais alors il s'ensuit de ce que dit Charlotte que Hélène est Lausannoise. Tous les trois viennent donc de Lausanne.

PROOF

PROOF

PROOF

dialectica *series of anthologies*

Index des sujets philosophiques

PROOF

PROOF

dialectica *series of anthologies*

Index des principes logiques

PROOF

PROOF

dialectica *series of anthologies*

Index des exemples

Formalisations

1.1 discours politique (question : p. 325 ; réponse : p. 353)
4.2 Aristote sur l'intelligence divine (question : p. 331 ; réponse : p. 375)
7.1a l'avortement (question : p. 335 ; réponse : p. 393)
7.1b contre la probabilité de Dieu (Ayer, question : p. 335 ; réponse : p. 394)
7.1c le pari de Pascal (question : p. 335 ; réponse : p. 394)
9.1 les trois suspects (question : p. 337 ; réponse : p. 407)
9.2 retraduire en français (question : p. 337 ; réponse : p. 408)
9.3 conversions (question : p. 338 ; réponse : p. 408)
10.1 classification **SaP**/**SiP**/**SeP**/**SoP** (question : p. 339 ; réponse : p. 413)
10.5 Oiseaux (question : p. 340 ; réponse : p. 415)
10.6 tous / seuls (question : p. 340 ; réponse : p. 416, question : p. 343 ; réponse : p. 424)
10.8 contradictions (question : p. 340 ; réponse : p. 416)
10.10 phrases quantifiées (question : p. 341 ; réponse : p. 417)
11.1 phrases quantifiées, montrées valides avec les diagrammes de Venn (question : p. 341 ;
11.2 quantificateurs (question : p. 342 ; réponse : p. 420)
11.3 négations (question : p. 342 ; réponse : p. 420)
11.4 amours imaginaires (question : p. 342 ; réponse : p. 420)
11.7 défauts humains (question : p. 342 ; réponse : p. 422)
11.8 retraduction en français (question : p. 343 ; réponse : p. 422)
12.2 prédicats numériques, comparaisons (question : p. 343 ; réponse : p. 423)
12.5 prédicats relationnels (question : p. 343 ; réponse : p. 424)
16.2 équivalences à $\neg\forall x(Fx \vee Gx)$ (question : p. 347 ; réponse : p. 447)
18.1 arguments quantificationnels (question : p. 348 ; réponse : p. 453)

Concepts

1.2 validité vs vérité (question : p. 325 ; réponse : p. 353)
1.8 sémantique vs pragmatique (question : p. 326 ; réponse : p. 356)
1.9 langues formelles vs naturelles (question : p. 326 ; réponse : p. 357)
3.5 tautologies vs contradictions (question : p. 330 ; réponse : p. 371)
3.7 | (question : p. 330 ; réponse : p. 373)
4.1 sémantique vs pragmatique (question : p. 330 ; réponse : p. 374)
4.5 validité (question : p. 331 ; réponse : p. 377)
4.6 ↓ (question : p. 332 ; réponse : p. 377)
5.1 satisfaisabilité (question : p. 332 ; réponse : p. 381)
5.3 validité (question : p. 333 ; réponse : p. 383)

PROOF

7.5 tautologie (question : p. 336 ; réponse : p. 399)
12.1 terme singulier, phrase ouverte, usage/mention, système formel (question : p. 343 ; réponse : p. 422)
15.3 A FAIRE : identité (question : p. 347 ; réponse : p. 442)
19.1 ∀∃ / ∃∀ (question : p. 349 ; réponse : p. 463)
19.2a noms propres, indexicaux et descriptions définies (question : p. 349 ; réponse : p. 463)
19.2b noms propres, indexicaux et descriptions définies (question : p. 349 ; réponse : p. 463)

Raisonnements

1.3 la déception de Maria (question : p. 325 ; réponse : p. 353)
1.4 validité des arguments (question : p. 325 ; réponse : p. 354)
1.5 guillemets : vrais ou faux ? (question : p. 325 ; réponse : p. 355)
1.6 mettre les guillemets (question : p. 326 ; réponse : p. 355)
1.7 un seul politicien honnête (Smullyan, *The Lady and the Tiger*, question : p. 326 ; réponse : p. 356)
1.10 validité des arguments (question : p. 326 ; réponse : p. 358)
2.4 réduction à l'absurde (question : p. 327 ; réponse : p. 361)
2.8 contradiction (trois accusés, deux mentent, Smullyan, *The Riddle of Scheherazade*, question : p. 328 ; réponse : p. 362)
2.9 contradictoire du discours politique (question : p. 328 ; réponse : p. 363)
3.1 mettre les guillemets ou des demi-crochets (Cartwright ; question : p. 328 ; réponse : p. 365)
3.2 le limerick qu'attribue Boolos à Cartwright (question : p. 329 ; réponse : p. 366)
3.3 incorrigibilité (Boolos, question : p. 329 ; réponse : p. 367)
3.8 Lausannois & Genevois – qui est d'où ? (Smullyan, *What is the Name of this Book ?*, question : p. 330 ; réponse : p. 373)
4.3 le bisou forcé (Smullyan, *The Riddle of Scheherazade*, question : p. 331 ; réponse : p. 376)
4.3 noms de phrases (question : p. 331 ; réponse : p. 376)
4.7 les moniteurs de ski (Smullyan, *The Riddle of Scheherazade*, question : p. 332 ; réponse : p. 378)
5.5 Lausannois et Genevois : qui des deux est qui ? (et méta-puzzle) (Smullyan, *The Riddle of Scheherazade*, question : p. 334 ; réponse : p. 386)
5.5 Monty Hall (émission de jeu) : pourquoi il est rationnel de changer (Smullyan, *The Riddle of Scheherazade*, question : p. 334 ; réponse : p. 387)
7.3 probabilité conditionnelle (Smullyan, *The Riddle of Scheherazade*, question : p. 335 ; réponse : p. 396)
9.9 Lausannois et Genevois : assertions déterminantes de lieu (Smullyan, *The Riddle of Scheherazade*, question : p. 338 ; réponse : p. 413)
10.3 conversion (voyelles, chiffres) (question : p. 339 ; réponse : p. 414)
10.4 différence entre ∀∃ et ∃∀ (question : p. 339 ; réponse : p. 414)
10.9 pourquoi éviter les kangourous (Quine, question : p. 340 ; réponse : p. 417)
20.4 Lausannois et Genevois – assertions toujours vraies (Smullyan, *The Riddle of Scheherazade*, question : p. 351 ; réponse : p. 473)

PROOF

Syntaxe et sémantique

12.3a que $\{\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Gx \to \neg Hx)\} \models \forall x(Fx \to \neg Hx)$ est valide (question : p. 343 ; réponse : p. 423)
12.3b que $\{\forall x(Fx \to Gx), \exists x(\neg Gx)\} \models \exists x(\neg Fx)$ est valide (question : p. 343 ; réponse : p. 423)
12.6 formules bien formées de $\mathcal{L}^+$ (question : p. 344 ; réponse : p. 425)
15.5a que $\forall x(Fx \vee Gx) \to (\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)))$ n'est pas un théorème (question : p. 347 ; réponse : p. 443)
15.5b que $\forall x \exists y(Rxy) \to \exists y \forall x(Rxy)$ n'est pas un théorème (question : p. 347 ; réponse : p. 443)

Logique des relations

logique des relations : toute relation symétrique et transitive est réflexive (série 11)
logique des relations : dans les structures infinies, une relation transitive, ouverte et anti-symétrique ne doit pas forcément avoir un élément minimal (série 11)
logique des relation : série 13 from Lemmon

Tables de vérité

$\neg(\neg p \vee \neg q)$ (leçon 2)
$(p \wedge q) \to p$ (leçon 2)
2.1 $q \to \neg p$ (question : p. 327 ; réponse : p. 358)
2.1 $(\neg p \wedge q) \vee r$ (question : p. 327 ; réponse : p. 358)
2.2 $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ (question : p. 327 ; réponse : p. **??**)
2.2 $((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (question : p. 327 ; réponse : p. **??**)
2.3 $\neg(p \wedge \neg q)$ et $(p \wedge \neg(q \wedge \neg r)) \wedge (\neg(p \wedge \neg q))$ (question : p. 327 ; réponse : p. 360)
2.4 $(p \to q) \wedge (p \to \neg q)$ (question : p. 327 ; réponse : p. 361)
2.6 $((p \wedge q) \vee r) \leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$ (question : p. 328 ; réponse : p. 362)
2.7 $\neg(p \to \neg q)$ (question : p. 328 ; réponse : p. 362)
$(p \to \neg p) \to \neg p$ (leçon 3)
3.4a $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ (question : p. 329 ; réponse : p. 368)
3.4b $((p \to r) \wedge (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r)$ et $(p \to r) \to ((p \wedge q) \to r)$ (question : p. 329 ; réponse : p. 368)
3.4c $(p \to \neg p) \to \neg p$ et $(p \to q) \wedge (p \to \neg q)) \to \neg p$ ((question : p. 329 ; réponse : p. 369)
3.4d $(p \wedge q) \to p$ (question : p. 329 ; réponse : p. 369)
3.4e $\neg p \to (p \to q)$ (question : p. 329 ; réponse : p. 370)
3.4f $q \to (p \to q)$ (question : p. 329 ; réponse : p. 370)
3.4g $((p \to q) \wedge p) \to q$ (question : p. 329 ; réponse : p. 370)
3.4h $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$ (question : p. 330 ; réponse : p. 371)
3.4i $((p \vee q) \wedge \neg q) \to p$ (question : p. 330 ; réponse : p. 371)
3.4j $((p \mid q) \wedge p) \to \neg q$ (question : p. 330 ; réponse : p. 371)
3.6 $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$, $p \wedge q$, $p \wedge r$, $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ et $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (question : p. 330 ; réponse : p. 372) CHECK – SO MANY ?
3.7 $\neg p \to q$ (question : p. 330 ; réponse : p. 373)

PROOF

4.2 $((\neg p \to q) \wedge \neg q) \to (p \wedge r)$ (question : p. 331 ; réponse : p. 375)
4.8 que $\{\neg p \wedge q, p \wedge \neg q, p \to q, q \to p\}$ forment un carré d'opposition (question : p. 332 ; réponse : p. 378)
$(p \to q) \wedge (p \vee r) \wedge (s \wedge \neg q)$ (leçon 5)
7.2a $p \to \neg\neg p$ (question : p. 335 ; réponse : p. 395)
7.2b $(p \to (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (p \to r))$ (question : p. 335 ; réponse : p. 395)
7.2c $\neg(\neg p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ (question : p. 335 ; réponse : p. 396)
7.2d $(p \to \neg p) \leftrightarrow \neg p$ (question : p. 335 ; réponse : p. 396)
9.4a $(p \wedge \neg q) \wedge r$ et $p \wedge (\neg q \wedge r)$ (question : p. 338 ; réponse : p. 409)
9.4b $\neg(p \vee q)$ et $\neg p \vee \neg q$ (question : p. 338 ; réponse : p. 409)
9.7 comment définir les connecteurs en termes de $\vee$ et de $\neg$ (question : p. 338 ; réponse : p. 411)
9.8a $((p_1 \to q_1) \wedge (p_2 \to q_2) \wedge \neg(q_1 \wedge q_2) \wedge (p_1 \vee p_2)) \to ((q_1 \to p_1) \wedge (q_2 \to p_2))$ (question : p. 338 ; réponse : p. 411)
9.8b $((p_1 \to q_1) \wedge (p_2 \to q_2) \wedge (p_3 \to q_3) \wedge \neg(q_1 \wedge q_2) \wedge \neg(q_2 \wedge q_3) \wedge \neg(q_1 \wedge q_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3)) \to ((q_1 \to p_1) \wedge (q_2 \to p_2) \wedge (q_3 \to p_3))$ (question : p. 338 ; réponse : p. 411)

Dérivations

$\mathsf{HC} \vdash (p \vee q) \to (q \vee p)$ (leçon 4)
$\mathsf{HC} \vdash (p \to q) \to (\neg p \vee q)$ (leçon 4)
$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \vee q) \to (p \to q)$ (leçon 4)
4.9a $\mathsf{HC} \vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$ (question : p. 332 ; réponse : p. 380)
4.9b $\mathsf{HC} \vdash p \to (q \to p)$ (question : p. 332 ; réponse : p. 380)
4.9c $\mathsf{HC} \vdash (p \vee q) \to (\neg p \to q)$ (question : p. 332 ; réponse : p. 380)
4.9d $\mathsf{HC} \vdash p \to (q \to (p \vee r))$ (question : p. 332 ; réponse : p. 380)
prédicats ?
$\mathbf{K} \vdash (\Box p \vee \Box q) \to \Box(p \vee q)$ (leçon 15)
$\mathbf{K} \vdash \Diamond(p \wedge q) \to (\Diamond p \wedge \Diamond q)$ (leçon 15)
$\mathbf{S4} \vdash \Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$ (leçon 15)
$\mathbf{S5} \vdash \Box(p \vee \Diamond q) \leftrightarrow (\Box p \vee \Diamond q)$ (leçon 15)
17.1a $\mathbf{K} \vdash (\Box p \wedge \Box q) \to \Box(p \wedge q)$ (question : p. 348 ; réponse : p. 453)
17.1b $\mathbf{K} \vdash \Diamond(p \to q) \leftrightarrow (\Box p \to \Diamond q)$ (question : p. 348 ; réponse : p. 453)
17.1c $\mathbf{K} \vdash (\Diamond p \vee \Diamond q) \leftrightarrow \Diamond(p \vee q)$ (question : p. 348 ; réponse : p. 453)
17.1d $\mathbf{D} \vdash \Diamond(p \to p)$ (question : p. 348 ; réponse : p. 453)
17.1e $\mathbf{T} \vdash \Diamond(p \to \Box p)$ (question : p. 348 ; réponse : p. 453)
17.1f $\mathbf{S4} \vdash \Box p \leftrightarrow \Box\Box p$ (question : p. 348 ; réponse : p. 453)
17.1g $\mathbf{S5} \vdash \Box(p \vee \Box q) \leftrightarrow (\Box p \vee \Box q)$ (question : p. 348 ; réponse : p. 453)

Arbres

$(p \to q) \wedge (p \vee r) \wedge (s \wedge \neg q)$ (leçon 5)
$\neg(p \vee (q \wedge \neg r))$ (leçon 5)
$\neg(\neg(p \wedge q) \vee (p \wedge q))$ (leçon 5)
$p \wedge (q \leftrightarrow r)$ (leçon 5)

PROOF

5.2a $p \to \neg\neg p$ (question : p. 333 ; réponse : p. 381)
5.2b $(p \to q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ (question : p. 333 ; réponse : p. 382)
5.2c $(p \to \neg p) \to \neg p$ (question : p. 333 ; réponse : p. 382)
5.2d $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$ (question : p. 333 ; réponse : p. 382)
5.4a $\{(p \to q) \to r, \neg q \to \neg p\} \vDash r$ (question : p. 333 ; réponse : p. 384)
5.4b $\{(p \vee \neg q) \wedge q, (p \vee ((r \to p) \wedge r)) \to r\} \vDash q \to r$ (question : p. 333 ; réponse : p. 385)
5.4c $\{p \to q, p \to \neg q\} \vDash \neg p$ (question : p. 333 ; réponse : p. 385)
5.4d $\{p \wedge (r \vee q), \neg q \to \neg p\} \vDash p \wedge r$ (question : p. 333 ; réponse : p. 386)
6.2a $(p \wedge q \wedge ((q \wedge p) \to r)) \to (q \to r)$ (question : p. 335 ; réponse : p. 392)
6.2b $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ (question : p. 335 ; réponse : p. 392)
6.2c $((p \to (p \wedge q)) \wedge p) \to q$ (question : p. 335 ; réponse : p. 393)
6.2d $((p \vee r) \wedge (q \to r) \wedge (p \to q)) \to (p \leftrightarrow q)$ (question : p. 335 ; réponse : p. 393)
7.4a $«(p \to \neg r) \wedge q, q \to ((p \wedge r) \vee ((r \to \neg p) \to r)) \vdash r$ (question : p. 336 ; réponse : p. 397)
7.4b $\vdash \neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$ (question : p. 336 ; réponse : p. 398)
8.1a $p \to \neg p \vdash \neg p$ (question : p. 336 ; réponse : p. 400)
8.1b $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge q, (q \vee ((r \to p) \wedge r)) \to \neg p \vdash q \to \neg p$ (question : p. 336 ; réponse : p. 401)
8.1c $p \to (q \to r), \neg r \vdash \neg(p \wedge q)$ (question : p. 336 ; réponse : p. 401)
8.1d $p \wedge (q \leftrightarrow r), \neg p \vee (q \to \neg r) \vdash p \to \neg r$ (question : p. 336 ; réponse : p. 402)
8.1e $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge q, (\neg q \vee ((r \leftrightarrow p) \wedge r)) \to \neg p \vdash r \to \neg p$ (question : p. 336 ; réponse : p. 402)
8.1f $p \to (q \to p)$ (question : p. 336 ; réponse : p. 403)
8.1g $((q \leftrightarrow \neg r) \wedge (p \leftrightarrow \neg q)) \to (r \leftrightarrow p)$ (question : p. 336 ; réponse : p. 403)
8.1h $(\neg q \to p) \to (\neg p \to (\neg q \to p))$ (question : p. 336 ; réponse : p. 404)
8.1i $(p \vee q) \leftrightarrow ((p \to q) \to q)$ (question : p. 336 ; réponse : p. 404)
8.1j $((p \leftrightarrow q) \wedge (q \wedge r) \wedge (q \to s)) \to (s \to p)$ (question : p. 336 ; réponse : p. 404)
9.5 $p \wedge (q \leftrightarrow r), \neg p \vee (q \to \neg r) \vdash p \to \neg r$ (question : p. 338 ; réponse : p. 409)
9.6 règles de construction d'arbre pour | (question : p. 338 ; réponse : p. 410)
$\exists x \forall y\,(Rxy) \wedge \exists x \forall y\,\neg(Rxy)$ (leçon 11)
$\forall x\,(Rxx \to \exists y Rxy)$ (leçon 11)
$(\forall x\,(Fx \to Gx) \wedge \neg\exists x(Gx)) \to \neg\exists x\,(Fx)$ (leçon 11)
$\forall x\,(Fx \to Gx) \vdash (\forall x\,(Fx) \to \forall x\,(Gx))$ (leçon 11)
$(\forall x(Fx \to Gx) \wedge \exists x(Fx \wedge Hx)) \to \exists x(Gx \wedge Hx)$ (leçon 11)
$\forall x \exists y(Rxy) \wedge Ga$ (leçon 11)
$\forall x(Fx \to Ga) \to (\exists x(Fx) \to Ga))$ (leçon 11)
13.1a $\forall x(Fx) \to \forall y(Fy)$ (question : p. 345 ; réponse : p. 426)
13.1b $\exists x \forall y\,(Rxy) \to \forall y \exists x\,(Rxy)$ (question : p. 345 ; réponse : p. 426)
13.1c $Ga \to (\forall x\,(Fx) \to \exists x\,(Fx))$ (question : p. 345 ; réponse : p. 427)
13.1d $\neg\exists y\,(Py) \to \forall y\,(Fy \to \exists x Fx)$ (question : p. 345 ; réponse : p. 427)
13.1e $\forall x\,(Fx \to (Gx \wedge Hx)) \to \forall x\,((Fx \wedge Gx) \to Hx)$ (question : p. 345 ; réponse : p. 428)
13.2a $\exists x \forall y\,(Rxy) \wedge \exists x \exists y\,(\neg Rxy)$ (avec l'ancienne et la nouvelle méthode, question : p. 345 ; réponse : p. 428)
13.2b $\forall x\,(\neg Sxx) \wedge \exists x \exists y \exists z\,(Sxy \wedge Syx \wedge \neg Sxz)$ (avec l'ancienne et la nouvelle méthode, question : p. 345 ; réponse : p. 428)
13.2c $\forall x \exists y\,(Rxy) \wedge \forall x\,(\neg Rxx) \wedge \neg\forall x \forall y(Rxy \to Ryx)$ (avec l'ancienne et la nouvelle méthode, ques-

PROOF

tion : p. 345 ; réponse : p. 428)

13.3a $\forall x(Fx \wedge Gx) \leftrightarrow (\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx))$ (question : p. 345 ; réponse : p. 431)

13.3b $(\forall xFx \vee \forall xGx) \rightarrow \forall x(Fx \vee Gx)$ (question : p. 345 ; réponse : p. 431)

13.3c $\exists x\,(Fx \vee Gx) \leftrightarrow (\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx))$ (question : p. 345 ; réponse : p. 433)

13.3d $\exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow (\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx))$ (question : p. 345 ; réponse : p. 433)

13.4 $(\forall x\forall y(Rxy \rightarrow Ryx) \wedge \forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)) \rightarrow \forall x\forall y(Rxy \rightarrow Rxx)$ (question : p. 345 ; réponse : p. **??**)

15.4a que $\forall x(Fx \vee Gx) \rightarrow (\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)))$ n'est pas un théorème (question : p. 347 ; réponse : p. 442)

15.4b que $\forall x\exists y(Rxy) \rightarrow \exists y\forall x(Rxy)$ n'est pas un théorème (question : p. 347 ; réponse : p. 442)

16.1a $\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx), \forall x(Fx \wedge Hx) \vDash \exists x\neg(Gx)$ (question : p. 347 ; réponse : p. 444)

16.1b $\exists x(Fxb) \rightarrow \forall x(Gx), \forall x(Fax) \vDash \forall x(Hxc \rightarrow Gx)$ (question : p. 347 ; réponse : p. 444)

16.1c $\exists x(Fx), \exists x(Gx) \vDash \exists x(\exists y(Fy) \wedge Gx)$ (question : p. 347 ; réponse : p. 444)

16.1d $\forall x\exists y(Fxy \rightarrow Gbx), \forall x\forall y(Fyx) \vDash \exists x(Gxx)$ (question : p. 347 ; réponse : p. 445)

16.1e $Ga \rightarrow \forall x(Fx), \exists x(Fx) \rightarrow Ga \vDash \forall x(Ga \leftrightarrow Fx)$ (question : p. 347 ; réponse : p. 445)

16.1f $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx), \forall x(Hx \leftrightarrow Ix), \exists x(Ix \wedge \forall y(Fy \rightarrow Jy)) \vDash \exists x(Hx \wedge \forall y(Jy \vee \neg Gy))$ (question : p. 347 ; réponse : p. 446)

18.2a $\exists x\forall y\exists z\,(Sxyz) \rightarrow \forall y\exists x\exists z\,(Sxyz)$ (question p. 349 ; réponse : p. 457)

18.2b $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\exists x\,(Fx) \rightarrow \exists x\,(Gx))$ (question p. 349 ; réponse : p. 458)

18.2c $(\forall x(Fx \rightarrow Hx) \wedge \forall x(Gx \rightarrow Hx) \wedge \forall x\,(Fx \vee Gx)) \rightarrow \forall x\,(Hx)$ (question p. 349 ; réponse : p. 458)

18.2d $\forall x\neg Fx \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow Gx)$ (question p. 349 ; réponse : p. 459)

18.2e $(\forall xFx \rightarrow \exists xGx) \rightarrow \exists x(Fx \rightarrow Gx)$ (question p. 349 ; réponse : p. 459)

18.2f $\neg(\exists xFx \wedge \forall x\neg Fx)$ (question p. 349 ; réponse : p. 460)

18.3a $\exists x(Fx \wedge Gx) \dashv\vdash \neg\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ (question p. 349 ; réponses : p. 460 et p. 461)

18.3b $\forall x(Fx \rightarrow \exists y(Gxy)) \dashv\vdash \forall x\exists y(Fx \rightarrow Gxy)$ (question p. 349 ; réponses : p. 461 et p. 462)

20.1a $\exists x\forall y(Sx \wedge (Cy \rightarrow Pxy)) \vdash \forall y\exists x(Cy \rightarrow (Sx \wedge Pxy))$ (question p. 350 ; réponse : p. 466)

20.1b $\vdash \exists x(Mx \wedge \forall y(My \rightarrow (Pxy \leftrightarrow \neg Pyy)))$ (question p. 350 ; réponse : p. 467)

20.1c $\forall x((Bx \wedge Mx) \rightarrow \forall y(Py \rightarrow Rxy)), \exists x(Px), \forall x((Bx \wedge \exists y(Py \wedge Rxy)) \rightarrow Ax), Ba \wedge Ma \vdash Aa$ (question p. 350 ; réponse : p. 468)

20.1d $\forall x(Px \rightarrow (Rax \leftrightarrow Rbx)), \forall x((Px \wedge Rax) \rightarrow Aa), \neg Aa \vdash \forall x(Px \rightarrow \neg Rbx)$ (question p. 350 ; réponse : p. 468)

20.1e $\neg\forall x\forall y((Bx \wedge By) \rightarrow (\neg Exy \wedge \neg Eyx)), \neg\exists x(Bx \wedge Exx) \vdash \exists x\exists y(Bx \wedge By \wedge x \neq y)$ (question p. 350 ; réponse : p. 469)

20.1f $a \neq b, Aa \rightarrow \forall x(Px \rightarrow Rax), Bb \wedge (Eba \rightarrow \exists x(Px \wedge Rbx \wedge \neg Rax)), \forall x((Bx \wedge a \neq x) \rightarrow Exa) \vdash \neg Aa$ (question p. 350 ; réponse : p. 470)

20.1g $\forall x((Bx \wedge Mx) \leftrightarrow x = a), \forall x((Bx \rightarrow (Ax \leftrightarrow Mx)) \vdash \forall x((Bx \wedge Ax) \leftrightarrow x = a)$ (question p. 350 ; réponse : p. 471)

20.3a $\forall x(\forall y(Fy) \rightarrow Gx) \rightarrow (\forall y(Fy) \rightarrow \forall x(Gx))$ (question p. 351 ; réponse : p. 472)

20.3b $\exists x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\forall x(Fx) \rightarrow \exists x(Gx))$ (question p. 351 ; réponse : p. 473)

Déductions naturelles

$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r \vdash \neg p$ (leçon 6)

$p \rightarrow q, q \rightarrow \neg p \vdash \neg p$ (leçon 6)

PROOF

$p \wedge q \vdash q \wedge p$ (leçon 6)
$p \to q, q \to r \vdash p \to r$ (leçon 6)
$p \to \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$ (leçon 6)
$\vdash \neg(p \wedge \neg p)$ (leçon 6)
$q \vdash p \to (p \to q)$ (leçon 6)
$\neg p \leftrightarrow \neg q \vdash p \leftrightarrow q$ (leçon 6)
$p \vee q \vdash q \vee p$ (leçon 6)
$p \wedge \neg p \vdash p$ (leçon 6)
$\neg(\neg p \wedge \neg q) \vdash p \vee q$ (leçon 6)
$\neg p, p \vee q \vdash q$ (leçon 6)
$\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$ (leçon 6)
$\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$ (leçon 6)

6.1a $(p \vee \neg q) \to p, \neg p \vdash \neg p \wedge q$ (question : p. 334 ; réponse : p. 388)
6.1b $p \to (q \to r) \vdash (p \wedge q) \to r$ (question : p. 334 ; réponse : p. 388)
6.1c $\vdash p \vee \neg p$ (question : p. 334 ; réponse : p. 388)
6.1d $p \vee q, p \to r, q \to r \vdash r \vee s$ (question : p. 334 ; réponse : p. 389)
6.1e $p \to (q \to r) \vdash (p \to q) \to (p \to r)$ (question : p. 334 ; réponse : p. 389)
6.1f $p \vdash (\neg(q \to r) \to \neg p) \to (\neg r \to \neg q)$ (question : p. 334 ; réponse : p. 389)
6.1g $(p \to q) \wedge (p \to r) \vdash p \to (q \wedge r)$ (question : p. 334 ; réponse : p. 389)
6.1h $(p \to r) \wedge (q \to r) \vdash (p \vee q) \to r$ (question : p. 334 ; réponse : p. 390)
6.1i $\neg p \to p \vdash p$ (question : p. 334 ; réponse : p. 390)
6.1j $p \vee q \vdash q \vee p$ (question : p. 334 ; réponse : p. 390)
6.1k $p \to q, \neg p \to q \vdash q$ (question : p. 334 ; réponse : p. 390)
6.1l $p \wedge q, q \to r \vdash r \vee s$ (question : p. 334 ; réponse : p. 391)
6.1m $\neg\neg p, p \to q \vdash q$ (question : p. 334 ; réponse : p. 391)
6.1n $\neg(p \to q) \vdash p \to \neg q$ (question : p. 334 ; réponse : p. 391)
6.1o $q \to r \vdash (p \vee q) \to (p \vee r)$ (question : p. 334 ; réponse : p. 391)
6.1p $p \vee q \vdash (p \to q) \to q$ (question : p. 334 ; réponse : p. 392)
7.1a $p \to q, q \to \neg r, s \to r \vdash p \to \neg s$(question : p. 335 ; réponse : p. 393)
7.1b $p \to q, q \to r, \neg r \vdash \neg p$ (question : p. 335 ; réponse : p. 394)
7.1c $p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)) \vdash p \to (r \vee \neg s)$ (question : p. 335 ; réponse : p. 394)
7.6a $p, p \to q, p \to r \vdash q \wedge r$ (question : p. 336 ; réponse : p. 399)
7.6b $\neg p \wedge q \vdash p \to r$ (question : p. 336 ; réponse : p. 399)
7.6c $p \vee p \vdash p$ (question : p. 336 ; réponse : p. 400)
7.6d $\vdash (p \to q) \to (p \to (q \vee r))$ (question : p. 336 ; réponse : p. 400)
7.6e $p \to (\neg\neg p \to q), \neg q \vdash \neg p$ (question : p. 336 ; réponse : p. 400)
7.6f $p \to \neg p \vdash \neg p$ (question : p. 336 ; réponse : p. 400)
8.2a $p \wedge q \vdash p \vee q$ (question : p. 337 ; réponse : p. 405)
8.2b $p \wedge (q \leftrightarrow s), (q \leftrightarrow s) \to r \vdash r \vee t$ (question : p. 337 ; réponse : p. 405)
8.2c $\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg p \vdash q$ (question : p. 337 ; réponse : p. 405)
8.2d $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r) \vdash p \leftrightarrow r$ (question : p. 337 ; réponse : p. 405)
8.2e $p \vee q, p \to r, q \to r \vdash r \vee s$ (question : p. 337 ; réponse : p. 406)
8.2f $p \to q, r \to s \vdash (p \wedge r) \to (q \wedge s)$ (question : p. 337 ; réponse : p. 406)

PROOF

8.2g $\vdash p \to (q \vee \neg q)$ (question : p. 337 ; réponse : p. 406)
8.2h $p \to (p \to q), p \vdash q$ (question : p. 337 ; réponse : p. 407)
8.2i $\neg\neg q \to p, \neg p \vdash \neg q$ (question : p. 337 ; réponse : p. 407)
8.2j $\neg p \to q \vdash \neg q \to p$ (question : p. 337 ; réponse : p. 407)
$Ha, \forall x(Hx \to Mx) \vdash Ma$ (leçon 12)
$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Fx \to Gx) \vdash \forall x(Gx)$ (leçon 12)
$\forall x(Fx) \vdash \exists x(Fx)$ (leçon 12)
$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx) \vdash \exists x(Gx)$ (leçon 12)
$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \exists x(Fx \wedge Hx)$ (leçon 12)
$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx) \vdash \forall x(Fx \wedge Gx)$ (leçon 12)
$\exists x(Fx \vee Gx) \vdash \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$ (leçon 12)
$\vdash \exists x(Fx \wedge Gx) \to (\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx))$ (leçon 12)
$\exists x(Fa \to Fx) \vdash Fa \to \exists x(Fx)$ (leçon 12)
$\forall x \forall y(Rxy) \vdash \forall y \forall x(Rxy)$ (leçon 12)
$\exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \to Rxy)), \forall x(Fx \to \forall y(By \to \neg Rxy)) \vdash \forall x(Gx \to \neg Bx)$ (leçon 12)
14.1a $\forall x(Fx \to \neg Gx), \forall x(Hx \to Gx) \vdash \forall x(Fx \to \neg Hx)$ (question : p. 346 ; réponse : p. 436)
14.1b $\forall x(Gx \to \neg Fx), \forall x(Hx \to Gx) \vdash \forall x(Fx \to \neg Hx)$ (question : p. 346 ; réponse : p. 436)
14.1c $\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx) \vdash \forall x(Fx \vee Gx)$ (question : p. 346 ; réponse : p. 437)
14.1d $(\forall x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx)) \leftrightarrow \exists x(Fx) \vdash \neg\exists x\neg(Fx)$ (question : p. 346 ; réponse : p. 437)
14.1e $\forall x(Fx \to Gx) \vdash \forall x(Fx) \to \forall x(Gx)$ (question : p. 346 ; réponse : p. 437)
14.1f $\forall x(Fx \to Gx) \vdash \exists x(Fx) \to \exists x(Gx)$ (question : p. 346 ; réponse : p. 437)
14.1g $\forall x(Fx \wedge Gx) \vdash \forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$ (question : p. 346 ; réponse : p. 438)
14.1h $\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx) \vdash \exists x(Fx \vee Gx)$ (question : p. 346 ; réponse : p. 438)
14.1i $\exists x \forall y \exists z(Sxyz) \vdash \forall y \exists x \exists z(Sxyz)$ (question : p. 346 ; réponse : p. 438)
14.1j $\exists x \forall y(Rxy) \vdash \forall y \exists x(Rxy)$ (question : p. 346 ; réponse : p. 438)
14.1k $\forall x(Fx \to Gx) \vdash \forall x(\exists y(Fy \wedge Rxy) \to \exists y(Gy \wedge Rxy))$ (question : p. 346 ; réponse : p. 439)
14.1l $\exists x(Fx \wedge Gx), \exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \to \neg Rxy)) \vdash \exists x(Fx \wedge \neg\forall y(Fy \to Rxy))$ (question : p. 346 ; réponse : p. 439)
14.2a $\exists x(Fx) \dashv\vdash \neg\forall x\neg(Fx)$ (question : p. 346 ; réponse : p. 440)
14.2b $\exists x\neg(Fx) \dashv\vdash \neg\forall x(Fx)$ (question : p. 346 ; réponse : p. 440)
14.3 application correcte des règles (question : p. 346 ; réponse : p. 441)
16.3a $\neg\exists x\exists y(Rxy) \vdash \forall x\forall y(Rxy \to Ryx) \wedge \forall x\forall y(Rxy \to \neg Ryx)$ (question : p. 348 ; réponse : p. 448)
16.3b $\forall x\forall y(Rxy \to \neg Ryx) \vdash \forall x\forall y((x \neq y \wedge Rxy) \to \neg Ryx)$ (question : p. 348 ; réponse : p. 448)
16.3c $\forall x\forall y(Rxy \to \neg Ryx) \vdash \forall x\neg Rxx$ (question : p. 348 ; réponse : p. 449)
16.3d $\forall x\neg Rxx, \forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz) \vdash \forall x\forall y(Rxy \to \neg Ryx)$ (question : p. 348 ; réponse : p. 449)
16.3e $\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to \neg Rxz) \vdash \forall x\neg Rxx$ (question : p. 348 ; réponse : p. 450)
16.3f $\forall x\exists y Rxy, \forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz), \forall x\forall y(Rxy \to Ryx) \vdash \forall x Rxx$ (question : p. 348 ; réponse : p. 450)
16.3g $\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz) \vdash \forall x\neg Rxx \leftrightarrow \forall x\forall y(Rxy \to \neg Ryx)$ (question : p. 348 ; réponse : p. 450)
16.3h $\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to \neg Rxz) \vdash \neg\forall x Rxx$ (question : p. 348 ; réponse : p. 451)
16.3j $\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz), \forall x Rxx \vdash \neg\forall x\forall y(Rxy \to \neg Ryx)$ (question : p. 348 ; réponse :

PROOF

p. 452)
16.3l $\forall x\forall y\forall z((Rxy\wedge Ryz)\rightarrow Rxz), \forall x\forall y\forall z((Rxy\wedge Ryz)\rightarrow \neg Rxz)\vdash \forall x\forall y(Rxy\rightarrow \neg Ryx)$ (question : p. 348 ; réponse : p. 452)
18.1a $\forall x(Hx\rightarrow Bx), Ha\wedge Ca\vdash \exists x(Cx\wedge Bx)$ (question : p. 348 ; réponse : p. 453)
18.1b $\neg\exists x(Cx\wedge Tx), \neg\exists x(Ox\wedge\neg Tx), \forall x(Gx\rightarrow Cx)\vdash \neg\exists x(Gx\wedge Ox)$ (question : p. 348 ; réponse : p. 454)
18.1c $\exists x(Fx\wedge Axa), \forall x\forall y((Hx\wedge Fy)\rightarrow Axy), Ha\vdash \exists x(Axa\wedge Aax)$ (question : p. 348 ; réponse : p. 455)
18.1d $\exists x\neg\exists y(Rxy), \neg\exists x\exists y(Rxy\wedge\neg Ryy), \neg\exists y\neg\exists x(Rxy)\vdash \exists y\neg\exists x(Rxy)$ (question : p. 348 ; réponse : p. 455)
18.1e $\forall x((Ux\wedge\neg Mx)\rightarrow Vax), Ub\wedge\neg Vab\vdash Mb$ (question : p. 348 ; réponse : p. 456)
18.1f $\exists x\forall y(Iy\rightarrow Cxy), \neg\exists x\exists y(Ky\wedge Cxy)\vdash \neg\exists x(Ix\wedge Kx)$ (question : p. 348 ; réponse : p. 456)
18.3a $\exists x(Fx\wedge Gx)\dashv\vdash \neg\forall x(Fx\rightarrow\neg Gx)$ (question : p. 349 ; réponses : p. 460 et p. 461)
18.3b $\forall x(Fx\rightarrow\exists y(Gxy))\dashv\vdash \forall x\exists y(Fx\rightarrow Gxy)$ (question : p. 349 ; réponses : p. 461 et p. 462)
19.3a $\forall x\neg(Fx\wedge Gx), Ga\vdash \neg Fa$ (question : p. 349 ; réponse : p. 463)
19.3b $\forall x(Fx\rightarrow Gx)\vdash \neg\exists x(Fx\wedge\neg Gx)$ (question : p. 349 ; réponse : p. 464)
19.3c $\forall x(Hx\rightarrow Gx), \exists x(Fx\wedge\neg Gx)\vdash \exists x(Fx\wedge\neg Hx))$ (question : p. 349 ; réponse : p. 464)
19.3d $\exists x(Fx)\rightarrow Fa\vdash \forall x(Fx\rightarrow Fa)$(question : p. 349 ; réponse : p. 464)
19.3e $\exists x\exists y(Rxy)\vdash \exists y\exists x(Rxy)$ (question : p. 349 ; réponse : p. 465)
19.3f $\forall x(Gx\rightarrow\neg Hx), \exists x(Fx\wedge Gx)\vdash \exists x(Fx\wedge\neg Hx)$ (question : p. 349 ; réponse : p. 465)
19.3g $\forall x((Fx\vee Gx)\rightarrow Hx), \forall x\neg(Hx)\vdash \forall x\neg(Fx)$ (question : p. 349 ; réponse : p. 465)
19.3h $\exists x(Fx\wedge Gx)\vdash \exists x(Fx)\wedge\exists x(Gx)$ (question : p. 349 ; réponse : p. 465)
19.3i $\forall x(Fx\rightarrow Fa)\vdash \exists x(Fx)\rightarrow Fa$ (question : p. 349 ; réponse : p. 466)

PROOF

PROOF

dialectica *series of anthologies*

Bibliographie

Ackermann, Wilhelm (1950), "Widerspruchsfreier Aufbau der Logik I", *The Journal of Symbolic Logic*, 15, pp. 33–57.

Adams, Ernest W. (1975), *The Logic of Conditionals. An Application of Probability to Deductive Logic*, number 86 in Synthese Library, Dordrecht : D. Reidel Publishing Co.

Aristote (1995a), *Organon, t. 4 : Les Seconds Analytiques*, Bibliothèque des textes philosophiques, Paris : Librairie philosophique Jean Vrin, traduction et notes de Jules Tricot.

Aristote (1995b), *Réfutations Sophistiques*, number 18 in Histoire des doctrines de l'Antiquité classique, Paris : Librairie philosophique Jean Vrin, traduction et commentaire par Louis-André Dorion, préface par Jacques Brunschwig.

Aristote (2001), *Catégories*, number 415 in Collection des universités de France. Série grecque, Paris : Les Belles Lettres, texte établi et traduit par Richard Bodéüs. Texte grec avec traduction française en regard.

Aristote (2002), *Catégories*, Points ; Essais, Paris : Éditions du Seuil, présentation, traduction du grec et commentaires par Frédérique Ildefonse et Jean Lallot.

Aristote (2004a), *Organon, t. 1 et 2 : Catégories et De l'Interprétation*, Bibliothèque des textes philosophiques, Paris : Librairie philosophique Jean Vrin, traduction et notes de Jules Tricot.

Aristote (2004b), *Organon, t. 5 : Les Topiques*, Bibliothèque des textes philosophiques, Paris : Librairie philosophique Jean Vrin, traduction et notes de Jules Tricot.

Aristote (2005), *Seconds Analytiques (Organon IV)*, GF Philosophes, Paris : Flammarion, présentation et traduction par Pierre Pellegrin.

Aristote (2007), *Catégories. Sur l'interprétation (Organon I-II)*, GF Philosophes, Paris : Flammarion, traduit et présenté par Michel Crubellier, Catherine Dalimier et Pierre Pellegrin.

Aristote (2014), *Premiers analytiques (Organon III)*, GF Philosophes, Paris : Flammarion, traduction et présentation par Michel Crubellier.

Aristote (2015), *Topiques. Réfutations sophistiques (Organon V-VI)*, GF Philosophes, Paris : Flammarion, traduction par Jacques Brunschwig et Myriam Hecquet.

Aristotle (2001), *On the Parts of Animals*, Clarendon Aristotle Series, ed. J.L. Ackrill and Lindsay Judson, Oxford : Oxford University Press, translated with an introduction and commentary by G. Lennox.

Arnauld, Antoine and Nicole, Pierre (1662), *La Logique ou l'Art de Penser*, Paris : Chez Charles Savreux, au pied de la Tour de Nostre Dame, reprinted as Arnauld and Nicole (1992).

Arnauld, Antoine and Nicole, Pierre (1992), *La Logique ou l'Art de Penser*, Paris : Gallimard, avec des notes et un postface de Charles Jourdain.

Austin, John Langshaw (1961), *Philosophical Papers*, Oxford : Oxford University Press, edited by J.O. Urmson and G.J. Warnock.

PROOF

Barnes, Jonathan (2002), "What is a Begriffsschrift?", *dialectica*, 56(1), pp. 65–80.

Barwise, Jon K. and Seligman, Jerry (1997), *Information Flow : The Logic of Distributed Systems*, number 44 in Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Cambridge : Cambridge University Press.

Benacerraf, Paul and Putnam, Hilary, eds. (1964), *Philosophy of Mathematics : Selected Readings*, Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall, Inc., second edition : Benacerraf and Putnam (1983).

Benacerraf, Paul and Putnam, Hilary, eds. (1983), *Philosophy of Mathematics : Selected Readings*, Cambridge : Cambridge University Press, 2 edition, first edition : Benacerraf and Putnam (1964).

Beth, Evert Willem (1950), *Les fondements logiques des mathématiques*, Paris : Gauthier Villars Éditeur.

Beth, Evert Willem (1955a), *Les fondements logiques des mathématiques*, Paris : Gauthier Villars Éditeur, deuxième édition de (Beth, 1950) revue et augmentée.

Beth, Evert Willem (1955b), "Semantic Entailment and Formal Derivability", *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van wetenschappen, afd. lettterkunde, new series*, 18(13), pp. 309–342, amsterdam, Holland : N. V. Noord-Hollansche Uitgevers maatschappij.

Beth, Evert Willem (1959), *The Foundations of Mathematics. A Study in the Philosophy of Science*, Amsterdam : North-Holland Publishing Co.

Blanché, Robert (1957), *Introduction à la logique contemporaine*, Paris : Armand Colin.

Blanché, Robert (1969), "Sur le système des connecteurs interpropositionnels", *Cahiers pour l'analyse*, 10, pp. 131–149.

Blanché, Robert (1996), *Introduction à la logique contemporaine*, Collection Cursus, série "Philosophie" , Paris : Armand Colin, première édition : Blanché (1957).

Bocheński, Józef Martin (1951), *Ancient Formal Logic*, number 2 in Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam : North-Holland Publishing Co.

Bocheński, Józef Martin (1956), *Formale Logik*, Freiburg i.Br. : Karl Alber.

Boolos, George (1984), "To Be is to Be Value of a Variable (or to Be Some Values of Some Variables)", *The Journal of Philosophy*, 81(8), pp. 430–449, reprinted in Boolos (1998, 54–72).

Boolos, George (1995), "Quotational Ambiguity", in Leonardi, Paolo and Santambrogio, Marco, eds., *On Quine – New Essays*, pp. 283–296, Cambridge : Cambridge University Press, reprinted in Boolos (1998, 392–405).

Boolos, George (1998), *Logic, Logic, and Logic*, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press, introductions and afterword by John P. Burgess ; edited by Richard Jeffrey.

Borchert, Donald M., ed. (2005), *The Encyclopedia of Philosophy*, Basingstoke, Hampshire : Palgrave Macmillan, 2 edition.

Brentano, Franz (1874), *Psychologie vom Empirischen Standpunkte*, Leipzig : Duncker & Humblot, reissued as Brentano (1924).

Brentano, Franz (1924), *Psychologie vom Empirischen Standpunkt. Erster Band*, Leipzig : Felix Meiner Verlag, edition of Brentano (1874) by Oskar Kraus.

PROOF

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan (1918), "Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten : Erster Teil : Allgemeine Mengenlehre", *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van wetenschappen te Amsterdam, 1st section*, 12(5).

Cantor, Georg (1883), *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Eine mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*, Leipzig : B.G. Teubner, translation by William Ewald in Ewald (1996, 878–920).

Cappelen, Herman and LePore, Ernest (1997), "The Varieties of Quotation", *Mind*, 106(424), pp. 429–450.

Cappelen, Herman and LePore, Ernest (2005), *Insensitive Semantics : A Defense of Semantic Minimalism and Speech Act Pluralism*, Oxford : Basil Blackwell Publishers.

Carnap, Rudolf (1928a), *Der logische Aufbau der Welt*, Berlin-Schlachtensee : Weltkreis Verlag, english trans. in George (1967).

Carnap, Rudolf (1928b), *Scheinprobleme in der Philosophie : Das Fremdpsychische und der Realismusstreit*, Berlin-Schlachtensee : Weltkreis Verlag, english trans. in George (1967).

Carnap, Rudolf (1931), "Die logizistische Grundlegung der Metaphysik", *Erkenntnis*, 2, pp. 91–105, translated as "The Logicist Foundations of Mathematics" in Benacerraf and Putnam (1964), in Klemke (1970, 341–354) and in Pears (1972, 175–191).

Carnap, Rudolf (1947), *Meaning and Necessity : A Study in Semantics and Modal Logic*, Chicago, Illinois : University of Chicago Press, 1 edition, second edition : Carnap (1956).

Carnap, Rudolf (1956), *Meaning and Necessity : A Study in Semantics and Modal Logic*, Chicago, Illinois : University of Chicago Press, 2 edition, enlarged edition of Carnap (1947).

Carnap, Rudolf (1985), "Le dépassement de la métaphysique par l'analyse du langage", in Soulez, Antonia, ed., *Manifeste du Cercle de Vienne et autres écrits*, pp. 155–179, Paris : Presses Universitaires de France, traduction de Carnap (1931) par Barbara Cassin et al.

Carnap, Rudolf (1997), *Signification et nécessité*, Paris : Gallimard, trad. de Carnap (1956) par F. Rivenc & Ph. de Rouilhan.

Carnap, Rudolf (2002), *La construction logique du monde*, Paris : Librairie philosophique Jean Vrin, traduction de Carnap (1928a) par E. Schwartz et T. Rivain.

Carroll, Lewis (1895), "What the Tortoise Said to Achilles", *Mind*, 4(14), pp. 278–280.

Cartwright, Richard L. (1987), "Appendix : Two Problem Sets", in *Philosophical Essays*, pp. 257–258, Cambridge, Massachusetts : The MIT Press.

Caton, Charles E., ed. (1963), *Philosophy and Ordinary Language*, Urbana, Illinois : University of Illinois Press.

Church, Alonzo (1951), "The Need for Abstract Entities in Semantic Analysis", *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 80, pp. 100–112, reprinted in Copi and Gould (1978, 166–176).

Church, Alonzo (1973), "Outline of a Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation – Part I", *Noûs*, 7(1), pp. 24–33.

Church, Alonzo (1974), "Outline of a Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation – Part II", *Noûs*, 8, pp. 135–136.

PROOF

Cole, Peter and Morgan, Jerry L., eds. (1975), *Syntax and Semantics 3 : Speech Acts*, New York : Academic Press.

Copi, Irving M. and Gould, James A. (1978), *Contemporary Philosophical Logic*, New York : St. Martin's Press.

Corazza, Eros (2002), "Description-Names", *The Journal of Philosophical Logic*, 31(4), pp. 313–326.

Cori, René and Lascar, Daniel (2003), *Logique Mathématique : 1. Calcul Propositionnel, Algèbre de Boole, Calcul des Prédicats*, Sciences Sup, Paris : Dunod.

Correia, Fabrice (2002), *Existential Dependence and Cognate Notions*, Thèse de doctorat, Département de philosophie, Université de Genève, Genève, book publication : Correia (2005).

Correia, Fabrice (2005), *Existential Dependence and Cognate Notions*, Analytica : Investigations in Logic, Ontology, and the Philosophy of Language, München : Philosophia Verlag, book publication of Correia (2002).

Davidson, Donald (1967), "Truth and Meaning", *Synthese*, 17(1), pp. 304–323, reprinted in Davis et al. (1969, 1–20), Davidson (1984), Moore (1993, 92–110) and Jacquette (2002).

Davidson, Donald (1979), "Quotation", *Theory and Decision*, 11(1), pp. 27–40, reprinted in Davidson (1984, 479–488).

Davidson, Donald (1980), *Essays on Actions and Events*, Oxford : Oxford University Press, 2nd, enl. edition : Davidson (2001).

Davidson, Donald (1984), *Inquiries into Truth and Interpretation*, Oxford : Oxford University Press.

Davidson, Donald (2001), *Essays on Actions and Events. Philosophical Essays Volume 1*, Oxford : Oxford University Press, 2 edition, enlarged.

Davidson, Donald and Harman, Gilbert H., eds. (1972), *Semantics of Natural Language*, number 40 in Synthese Library, Dordrecht : D. Reidel Publishing Co.

Davidson, Donald and Harman, Gilbert H., eds. (1975), *The Logic of Grammar*, Encino and Belmont, California : Dickenson Publishing Co.

Davis, J.W., Hockney, D.T. and Wilson, W. Kent, eds. (1969), *Philosophical Logic*, number 20 in Synthese Library, Dordrecht : D. Reidel Publishing Co.

Dedekind, Richard (1888), *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig / Wiesbaden : Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, english translation by Wooster W. Beman in Dedekind (1901); reprinted, with corrections, in Ewald (1996, 787–833).

Dedekind, Richard (1901), *Essays on the Theory of Numbers*, LaSalle, Illinois : Open Court Publishing Co., translation by Wooster W. Beman ; reissue : Dedekind (1963).

Dedekind, Richard (1963), *Essays on the Theory of Numbers*, Mineola, New York : Dover Publications, reissue of Dedekind (1901).

Devitt, Michael (1981), "Donnellan's Distinction", in French, Peter A., Uehling, Jr., Theodore E. and Wettstein, Howard K., eds., *Midwest Studies in Philosophy 6 : Foundations of Analytic Philosophy*, pp. 511–536, Minneapolis, Minnesota : University of Minnesota Press.

Devitt, Michael and Sterelny, Kim (1987), *Language And Reality : An Introduction to the Philosophy of Language*, Oxford : Basil Blackwell Publishers, republication : Devitt and Sterelny (1999).

PROOF

Devitt, Michael and Sterelny, Kim (1999), *Language and Reality : An Introduction to the Philosophy of Language*, Cambridge, Massachusetts : The MIT Press, 2 edition.

Donnellan, Keith S. (1966), "Reference and Definite Descriptions", *The Philosophical Review*, 75, pp. 281–304, reprinted in Steinberg and Jacobovits (1971, 100–114), in Schwartz (1977, 42–65) and in Donnellan (2012, 3–30).

Donnellan, Keith S. (1968), "Putting Humpty Dumpty Together Again", *The Philosophical Review*, 77, pp. 203–215, reprinted in Donnellan (2012, 31–48).

Donnellan, Keith S. (1978), "Speaker Reference, Descriptions and Anaphora", in Cole, Peter, ed., *Syntax and Semantics 9 : Pragmatics*, pp. 47–68, New York : Academic Press, reprinted in French et al. (1979, 28–44) and in Donnellan (2012, 115–146).

Donnellan, Keith S. (2012), *Essays on Reference, Language, and Mind*, New York : Oxford University Press, edited by Joseph Almog and Paolo Leonardi.

Dummett, Michael A.E. (1977), *Elements of Intuitionism*, number 2 in Oxford Logic Guides, Oxford : Oxford University Press.

Dummett, Michael A.E. (2000), *Elements of Intuitionism*, number 39 in Oxford Logic Guides, Oxford : Oxford University Press, 2 edition, first edition : Dummett (1977).

Ewald, William Bragg, ed. (1996), *From Kant to Hilbert : A Source Book in the Foundations of Mathematics*, *Oxford Science Publications*, volume II, Oxford : Oxford University Press.

Feigl, Herbert and Sellars, Wilfrid, eds. (1949), *Readings in Philosophical Analysis*, New York : Appleton-Century-Crofts.

Fine, Kit (1995), "The Logic of Essence", *The Journal of Philosophical Logic*, 24(3), pp. 241–273.

Fitch, Frederic B. (1952), *Symbolic Logic : An Introduction*, New York : Ronald Press Co.

Flew, Antony Garrard Newton, ed. (1956), *Essays in Conceptual Analysis*, London : MacMillan Publishing Co.

Frankfurt, Harry G. (1988a), *The Importance of what we care about*, Cambridge : Cambridge University Press.

Frankfurt, Harry G. (1988b), *La Importancia de Lo Que Nos Preocupa*, Cambridge : Cambridge University Press, traduccion de Frankfurt (1988a) por Verónica Inés Weinstabl y Servanda María de Hagen.

Frankfurt, Harry G. (2005), *On Bullshit*, Princeton, New Jersey : Princeton University Press.

Frankfurt, Harry G. (2008), *De l'Art de Dire des Conneries*, Faits et Cause, Paris : Éditions 10/18, traduction française de Frankfurt (2005) par Didier Sénécal.

Frege, Gottlob (1879), *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle a.S. : Louis Nebert.

Frege, Gottlob (1882), "Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik NF*, 81, pp. 48–56, reprinted in Frege (2008, 70–76).

Frege, Gottlob (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik : eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau : Wilhelm Koebner, reissued as Frege (1961).

Frege, Gottlob (1891), *Function und Begriff. Vortrag, gehalten in der Sitzung vom 9. Januar 1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft*, Jena : Hermann Pohle, reprinted in Frege (2008, 1–22).

PROOF

Frege, Gottlob (1892a), "Über Begriff und Gegenstand", *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, 16, pp. 192–205, reprinted in Frege (2008, 47–60).

Frege, Gottlob (1892b), "Über Sinn und Bedeutung", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik NF*, 100, pp. 25–50, reprinted in Frege (2008, 23–46).

Frege, Gottlob (1893), *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, volume I, Jena : Hermann Pohle, reissued as Frege (1966a).

Frege, Gottlob (1903), *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, volume II, Jena : Hermann Pohle, reissued as Frege (1966b).

Frege, Gottlob (1918a), "Der Gedanke. Eine logische Untersuchung.", *Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus*, 1, pp. 58–77, ed. by Arthur Hoffmann and Horst Engert ; Erfurt : Verlag der Keyserschen Buchhandlung, reprinted in Frege (1993).

Frege, Gottlob (1918b), "Die Verneinung. Eine logische Untersuchung.", *Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus*, 1, pp. 143–157, ed. by Arthur Hoffmann and Horst Engert ; Erfurt : Verlag der Keyserschen Buchhandlung, reprinted in Frege (1993) and Frege (1990, 362–378).

Frege, Gottlob (1923), "Logische Untersuchungen. Dritter Teil : Gedankengefüge.", *Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus*, 3, pp. 36–51, erfurt : Verlag Kurt Stenger, reprinted in Frege (1993) and Frege (1990, 379–384).

Frege, Gottlob (1950), *The Foundations of Arithmetic*, Oxford : Basil Blackwell Publishers, translation of Frege (1884) by J.L. Austin.

Frege, Gottlob (1961), *Die Grundlagen der Arithmetik*, Hildesheim : Georg Olms Verlagsbuchhandlung.

Frege, Gottlob (1964), *The Basic Laws of Arithmetic*, Berkeley, California : University of California Press, translated by M. Furth.

Frege, Gottlob (1966a), *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, volume I, Hildesheim : Georg Olms Verlagsbuchhandlung, reprografischer Nachdruck der Ausgabe Frege (1893).

Frege, Gottlob (1966b), *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, volume II, Hildesheim : Georg Olms Verlagsbuchhandlung, reprografischer Nachdruck der Ausgabe Frege (1903).

Frege, Gottlob (1969), *Les fondements de l'arithmétique. Recherche Logico-Mathématique sur le concept de nombre*, Paris : Éditions du Seuil, traduction de Frege (1884) et introduction de Claude Imbert.

Frege, Gottlob (1971a), *Écrits logiques et philosophiques*, Paris : Éditions du Seuil, traduction et introduction de Claude Imbert ; contient des traductions de Frege (1882, 1891, 1892b,a, 1918a, 1923, 1918b).

Frege, Gottlob (1971b), "La pensée", in Frege (1971a), pp. 170–194, traduction et introduction de Claude Imbert ; contient des traductions de Frege (1882, 1891, 1892b,a, 1918a, 1923, 1918b).

Frege, Gottlob (1971c), "Que la science justifie le recours à une idéographie", in Frege (1971a), pp. 63–69, traduction et introduction de Claude Imbert ; contient des traductions de Frege (1882, 1891, 1892b,a, 1918a, 1923, 1918b).

Frege, Gottlob (1971d), "Sens et dénotation", in Frege (1971a), pp. 102–126, traduction et introduction de Claude Imbert ; contient des traductions de Frege (1882, 1891, 1892b,a, 1918a, 1923, 1918b).

PROOF

Frege, Gottlob (1976), *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Hamburg : Felix Meiner Verlag, edited by Gottfried Gabriel, Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Christian Thiel and Albert Veraart.

Frege, Gottlob (1980), *The Foundations of Arithmetic*, Evanston, Illinois : Northwestern University Press, 2 edition, translation of Frege (1884) by J.L. Austin ; first edition : Frege (1950).

Frege, Gottlob (1990), *Kleine Schriften*, Hildesheim : Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 2 edition, edited by Ignacio Angelelli.

Frege, Gottlob (1993), *Logische Untersuchungen*, Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht, edited by Patzig, Günther.

Frege, Gottlob (1998), *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet I/II*, Hildesheim : Georg Olms Verlagsbuchhandlung, reprografischer Nachdruck der Ausgabe Frege (1893), mit Ergänzungen zum Nachdruck von Christian Thiel.

Frege, Gottlob (1999), *Idéographie*, Paris : Librairie philosophique Jean Vrin, traduction de Frege (1879) par Corine Besson, avec une postface de Jonathan Barnes.

Frege, Gottlob (2007), *The Foundations of Arithmetic : A Logical-Mathematical Investigation into the Concept of Number*, London : Longman Library of Primary Sources in Philosophy, introduction & translation by Dale Jacquette of Frege (1884) ; before using this translation, cf. the review by Michael Kremer (2008) in the NDPR.

Frege, Gottlob (2008), *Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien*, Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht, edited and introduced by Günther Patzig.

Frege, Gottlob (2013), *Basic Laws of Arithmetic*, Oxford : Oxford University Press, translated and edited by Philip A. Ebert and Marcus Rossberg, with Crispin Wright.

French, Peter A., Uehling, Jr., Theodore E. and Wettstein, Howard K., eds. (1977), *Midwest Studies in Philosophy 2 : Contemporary Perspectives in the Philosophy of Language*, Minneapolis, Minnesota : University of Minnesota Press, second, enlarged edition : French et al. (1979).

French, Peter A., Uehling, Jr., Theodore E. and Wettstein, Howard K., eds. (1979), *Midwest Studies in Philosophy 2 : Contemporary Perspectives in the Philosophy of Language*, Minneapolis, Minnesota : University of Minnesota Press, 2 edition, first edition : French et al. (1977).

Gardies, Jean-Louis (1975), *Esquisse d'une grammaire pure*, Paris : Librairie philosophique Jean Vrin.

Gardner, Martin (1969), *Perplexing Puzzles and Tantalizing Teasers*, New York : Simon & Schuster.

Gardner, Martin (1977), *More Perplexing Puzzles and Tantalizing Teasers*, New York : Simon & Schuster.

Gardner, Martin (1984), *Puzzles From Other Worlds*, New York : Viking Press.

Gardner, Martin (1988), *Perplexing Puzzles and Tantalizing Teasers*, Mineola, New York : Dover Publications, republication, in one volume, of Gardner (1969) and Gardner (1977).

Gardner, Martin (1994), *My Best Mathematical and Logic Puzzles*, Mineola, New York : Dover Publications.

Geach, Peter Thomas (1957), *Mental Acts. Their Content and Their Objects*, London : Routledge & Kegan Paul.

Gentzen, Gerhard (1935), "Untersuchungen über das logische Schliessen", *Mathematische Zeitschrift*, 39(2 and 3), pp. 176–210, 405–431, republished as Gentzen (1969).

PROOF

Gentzen, Gerhard (1955), *Recherches sur la déduction logique*, Paris : Presses Universitaires de France, traduction de **?** par Robert Feys et Jean Ladrière.

Gentzen, Gerhard (1969), *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Darmstadt : Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

George, Rolf (1967), *The Logical Structure of the World ; Pseudo-Problems in Philosophy*, Berkeley, California : University of California Press.

Gödel, Kurt (1931), "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, pp. 173–198, english translation in van Heijenoort (1967, 596–616) ; reprinted in Gödel (1986).

Gödel, Kurt (1986), *Collected Works. Volume I : Publications 1929–1936*, Oxford : Oxford University Press, edited by Feferman, Solomon and Dawson, Jr, John W. and Stephen C. Kleene and Gregory H. Moore and Robert M. Solovay and Jean van Heijenoort.

Goodman, Nelson (1972), *Problems and Projects*, Indianapolis, Indiana : Bobbs-Merrill Company Inc.

Grelling, Kurt and Nelson, Leonard (1908), "Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti", *Abhandlungen der Fries'schen Schule, neue Folge*, 2, pp. 301–334.

Grice, H. Paul (1975), "Logic and Conversation", in Cole and Morgan (1975), pp. 41–58, the William James Lectures, delivered at Harvard University in 1967, and thereafter distributed in unpublished form for many years. Portions published in Davidson and Harman (1975, 64–75) and Cole and Morgan (1975, 41–58). The whole published, with new material, in Grice (1989, 1–144).

Grice, H. Paul (1979), "Logique et conversation", *Communications*, 30, pp. 57–72, traduction de Grice (1975).

Grice, H. Paul (1989), *Studies in the Way of Words*, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press.

Hale, Bob and Wright, Crispin (2001), *The Reasons Proper Study. Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*, Oxford : Oxford University Press.

Harper, William L., Stalnaker, Robert C. and Pearce, Glenn, eds. (1981), *Ifs : Conditionals, Belief, Decision, Chance, and Time*, number 15 in The University of Western Ontario Series in Philosophy of Science, Dordrecht : D. Reidel Publishing Co.

van Heijenoort, Jan, ed. (1967), *From Frege to Gödel : A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press.

Heyting, Arend (1956), *Intuitionism : An Introduction*, number 17 in Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam : North-Holland Publishing Co., second edition : Heyting (1966).

Heyting, Arend (1966), *Intuitionism : An Introduction*, number 41 in Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 2 edition, first edition : Heyting (1956).

Hilbert, David R. (1899), *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig : B.G. Teubner, originally published in "Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen". Later editions published in 1903, 1909, 1911, 1922 and 1930. Translation by Leo Unger of the 10th German Edition : Hilbert (1971).

Hilbert, David R. (1971), *Foundations of Geometry*, LaSalle, Illinois : Open Court Publishing Co., translation by Leo Unger of the 10th German Edition of Hilbert (1899).

Hilbert, David R. and Ackermann, Wilhelm (1928), *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin : Springer Verlag.

PROOF

Hintikka, Jaakko (1955), *Form and Content in Quantification Theory*, number 8 in Acta Philosophica Fennica, Helsinki : Societas Philosophica Fennica, Akateeminen Kirjakauppa.

Hintikka, Jaakko (1962), *Knowledge and Belief*, Ithaca, New York : Cornell University Press.

Hintikka, Jaakko (1997), *Lingua Universalis Vs. Calculus Ratiocinator : An Ultimate Presupposition of Twentieth-Century Philosophy*, number 2 in Selected Papers, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Hodges, Wilfrid (1977), *Logic*, London : Penguin Books, second edition : Hodges (2001).

Hodges, Wilfrid (2001), *Logic. An Introduction to Elementary Logic*, London : Penguin Books, first edition : Hodges (1977).

Horn, Lawrence R. (1989), *A Natural History of Negation*, Chicago, Illinois : University of Chicago Press, republished by CSLI Publications in 2001.

Horwich, Paul (1990), *Truth*, Oxford : Basil Blackwell Publishers, second edition : Horwich (1998b).

Horwich, Paul (1998a), *Meaning*, Oxford : Oxford University Press.

Horwich, Paul (1998b), *Truth*, Oxford : Basil Blackwell Publishers, 2 edition, first edition : Horwich (1990).

Iacona, Andrea (2016), "On the Puzzle of the Changing Past", *Philosophia : Philosophical Quarterly of Israel*, 44(1), pp. 137–142.

Jacquette, Dale, ed. (2002), *Philosophy of Logic : An Anthology*, Blackwell Philosophy Anthologies, Oxford : Basil Blackwell Publishers.

Jaśkowski, Stanisław (1934), "On the Rules of Suppositions in Formal Logic", *Studia Logica (Poznan Panstwowe Wydawnictowo Naukowe)*, 1, pp. 5–32, reprinted in McCall (1967, 232–258), with considerable change in notation.

Johnson, Alexander Bryan (1947), *A Treatise on Language*, Berkeley, California : University of California Press, 1 edition, edited, with a critical essay on Johnson's Philosophy of Language, by David Rynin ; reprinted, with a new preface, as Johnson (1968).

Johnson, Alexander Bryan (1968), *A Treatise on Language*, Mineola, New York : Dover Publications, reprint of Johnson (1947).

Kant, Immanuel (1781), *Kritik der reinen Vernunft*, Riga : Johann Friedrich Hartknoch.

Kant, Immanuel (1787), *Kritik der reinen Vernunft*, Riga : Johann Friedrich Hartknoch, 2 edition.

Kant, Immanuel (2001), *Critique de la Raison Pure*, Paris : Flammarion, 2 edition, traduit par Alain Renaut.

Kaplan, David (1978), "On the Logic of Demonstratives", *The Journal of Philosophical Logic*, 7(1), pp. 81–98, also published in French et al. (1979, 401–412).

Kaplan, David (1989), "Demonstratives", in Almog, Joseph, Perry, John R. and Wettstein, Howard K., eds., *Themes from Kaplan*, pp. 481–563, Oxford : Oxford University Press, widely circulated from 1977 on.

Kleene, Stephen Cole (1967), *Mathematical Logic*, New York : John Wiley and Sons, Inc.

Kleene, Stephen Cole (1971), *Logique mathématique*, Paris : Armand Colin, traduction de Kleene (1967) par Jean Largeault.

PROOF

Klemke, Elmer Daniel, ed. (1968), *Essays on Frege*, Urbana, Illinois : University of Illinois Press.

Klemke, Elmer Daniel, ed. (1970), *Essays on Russell*, Urbana, Illinois : University of Illinois Press.

Kneale, William C. (1936), "Is Existence a Predicate?", *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volume*, 15, pp. 154–174, reprinted in Feigl and Sellars (1949, 29–43).

Kneale, William C. (1957), "Aristotle and the *Consequentia Mirabilis*", *The Journal of Hellenic Studies*, 77(1), pp. 62–66.

Kneale, William C. and Kneale, Martha (1962), *The Development of Logic*, Oxford : Oxford University Press.

Kolodny, Niko and MacFarlane, John (2010), "Ifs and Oughts", *The Journal of Philosophy*, 107(3), pp. 115–143.

Kremer, Michael (2008), "Review of Frege (2007)", *Notre Dame Philosophical Reviews*, 1(7), URL https://ndpr.nd.edu/news/the--foundations--of--arithmetic/.

Kripke, Saul A. (1959), "A Completeness Theorem in Modal Logic", *The Journal of Symbolic Logic*, 24(1), pp. 1–14.

Kripke, Saul A. (1963a), "Semantical Analysis of Modal Logic I : Normal Modal Propositional Calculi", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9, pp. 67–96.

Kripke, Saul A. (1963b), "Semantical Considerations on Modal Logic", in Societas Philosophica Fennica, ed., *Proceedings of a Colloquium on Modal and Many-Valued Logics, Helsinki, 23-26 August, 1962*, number 16 in Acta Philosophica Fennica, pp. 83–94, Helsinki : Societas Philosophica Fennica, Akateeminen Kirjakauppa.

Kripke, Saul A. (1965), "A Semantical Analysis of Modal Logic II : Non-Normal Propositional Calculi", in Addison, John West, Henkin, Leon and Tarski, Alfred, eds., *The Theory of Models*, pp. 206–220, Amsterdam : North-Holland Publishing Co., proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley.

Kripke, Saul A. (1972), "Naming and Necessity", in Davidson and Harman (1972), pp. 253–355, 763–769, reprinted as Kripke (1980).

Kripke, Saul A. (1980), *Naming and Necessity*, Oxford : Basil Blackwell Publishers.

Kripke, Saul A. (1982), *La logique des noms propres*, Propositions, Paris : Éditions de Minuit, traduction de Kripke (1972) dans la version Kripke (1980) par Pierre Jacob et François Récanati.

Landini, Gregory (2012), *Frege's Notations. What They Are and How They Mean*, History of Analytic Philosophy, Basingstoke, Hampshire : Palgrave Macmillan.

Lemmon, Edward John (1965a), *Beginning Logic*, London : Thomas Nelson and Sons Ltd.

Lemmon, Edward John (1965b), "Some Results on Finite Axiomatizability in Modal Logic", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 6(4), pp. 301–308.

Lepage, François (1991), *Eléments de Logique Contemporaine*, Montréal : Presses de l'Université de Montréal.

Lepage, François (1995), *Eléments de Logique Contemporaine*, Paramètres, Montréal : Presses de l'Université de Montréal, 1 edition, deuxième édition : Lepage (2001).

Lepage, François (2001), *Eléments de Logique Contemporaine*, Paramètres, Montréal : Presses de l'Université de Montréal, 2 edition, première édition : Lepage (1995).

Lewis, Clarence Irving (1918), *Survey of Symbolic Logic*, Berkeley, California : University of California Press.

PROOF

Lewis, David (1976), "Probabilities of Conditionals and Conditional Probabilities", *The Philosophical Review*, 85(3), pp. 297–315, reprinted in Harper et al. (1981, 129–149) and, with a postscript (Lewis, 1986b), in (Lewis, 1986a, 133–151).

Lewis, David (1986a), *Philosophical Papers*, volume 2, Oxford : Oxford University Press.

Lewis, David (1986b), "Postscript to Lewis (1976)", in Lewis (1986a), pp. 152–155.

Londey, David and Johanson, Carmen (1984), "Apuleius and the Square of Opposition", *Phronesis*, 29(2), pp. 165–173.

Loux, Michael J., ed. (1970), *Universals and Particulars : Readings in Ontology*, Notre Dame, Indiana : University of Notre Dame Press, second edition : Loux (1976).

Loux, Michael J., ed. (1976), *Universals and Particulars : Readings in Ontology*, Notre Dame, Indiana : University of Notre Dame Press, 2 edition, first edition : Loux (1970).

Löwenheim, Leopold (1915), "Über Möglichkeiten im Relativkalkül", *Mathematische Annalen*, 76, pp. 447–470.

Lucas, Thierry, Berlanger, Isabelle and de Greef, Isabelle (2007), *Initiation à la logique formelle*, Bruxelles : De Boeck, 3^{t}*exte* édition revue et corrigée edition.

Ludwig, Kirk A. and Ray, Gregory (1998), "Semantics for Opaque Contexts", in Tomberlin, James E., ed., *Philosophical Perspectives 12 : Language, Mind, and Ontology*, pp. 141–166, Oxford : Basil Blackwell Publishers.

Łukasiewicz, Jan (1904), "O stosunkach logicznych [On Logical Relations]", *Przegląd Filozoficzny*, 7, p. 245.

Łukasiewicz, Jan (1929), *Elementy logiki matematycznej [Elements of Mathematical Logic]*, Warszawa : Państwow Wydawnictwo Naukowe (PWN), edited by Ludwik Borowski.

Łukasiewicz, Jan (1934a), "Z historii logiki zdań [On the history of the logic of propositions]", *Przegląd Filozoficzny*, 37, pp. 417–437, german translation : Łukasiewicz (1935); English translation in Łukasiewicz (1970, 197–217).

Łukasiewicz, Jan (1934b), "Znaczenie analizy logicznej dla poznania [The importance of logical analysis for cognition]", *Przegląd Filozoficzny*, 37, pp. 369–377.

Łukasiewicz, Jan (1935), "Zur Geschichte der Aussagenlogik", *Erkenntnis*, 5, pp. 111–131, german translation of Łukasiewicz (1934a).

Łukasiewicz, Jan (1957), *Aristotle's Syllogistic, from the Standpoint of Modern Formal Logic*, Oxford : Oxford University Press, 2 edition, edited by Ludwik Borowski.

Łukasiewicz, Jan (1970), *Selected Works*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam : North-Holland Publishing Co., edited by L. Borkowski.

Łukasiewicz, Jan and Tarski, Alfred (1930), "Untersuchungen über den Aussagenkalkül", *Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, cl. iii*, 23, pp. 30–50, translated as "Investigations into the Sentential Calculus" in Tarski (1956b, 38–59) and in Łukasiewicz (1970, 131-152).

Magidor, Ofra (2013), *Category Mistakes*, Oxford : Oxford University Press.

Marconi, Diego (1999), *La filosofia del linguaggio. Da Frege ai giorni nostri*, Torino : UTET Libreria.

Mates, Benson (1965), *Elementary Logic*, Oxford : Oxford University Press.

PROOF

Mates, Benson (1972), *Elementary Logic*, Oxford : Oxford University Press, 2 edition, first edition : Mates (1965).

McCall, Storrs, ed. (1967), *Polish Logic 1920–1939*, Oxford : Oxford University Press.

McGee, Vann (1985), "A Counterexample to Modus Ponens", *The Journal of Philosophy*, 82(9), pp. 462–471.

McKay, Thomas J. (2006), *Plural Predication*, Oxford : Oxford University Press.

Mill, John Stuart (1895), *A System of Logic, ratiocinative and inductive*, London : Longmans, Green & Co., 2 edition.

Moore, Adrian W., ed. (1993), *Meaning and Reference*, Oxford Readings in Philosophy, Oxford : Oxford University Press.

Moravcsik, Julius M.E., ed. (1967), *Aristotle : A Collection of Critical Essays*, Modern Studies in Philosophy, Garden City, New York : Doubleday & Co.

de Morgan, Augustus (1847), *Formal Logic*, London : Taylor, Walton and Maberly.

Nicod, Jean (1917–1920), "A Reduction in the Number of Primitive Propositions of Logic", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 19, pp. 32–44.

Parfit, Derek (1988), "What We Together Do", Unpublished manuscript, dated 29 March 1988, available at http://individual.utoronto.ca/stafforini/parfit/parfit_-_what_we_together_do.pdf.

Parsons, Terence D. (2017), "The Traditional Square of Opposition", in Zalta, Edward N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Stanford, California : The Metaphysics Research Lab, Center for the Study of Language and Information, revision, April 12, 2017, of the version of August 8, 1997.

Pears, David F., ed. (1972), *Bertrand Russell : A Collection of Critical Essays*, Garden City, New York : Anchor Books.

Peirce, Charles Sanders (1932), *Collected Papers of Charles Sanders Peirce : Elements of Logic*, volume 2, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press, edited by Charles Hartshorne and Paul Weiss.

Peirce, Charles Sanders (1933), *Collected Papers of Charles Sanders Peirce : Exact Logic*, volume 3, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press, edited by Charles Hartshorne and Paul Weiss.

Petrus Hispanus (1947), *Summulae Logicales [Tractatus]*, Torino : Domus Editorialis Marietti.

Prantl, Carl (1855), *Geschichte der Logik im Abendlande*, volume I, Leipzig : S. Hirzel Verlag.

Priest, Graham (1993), "Can Contradictions Be True?", *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volume*, 67, pp. 35–54.

Prior, Arthur Norman (1955), *Formal Logic*, Oxford : Oxford University Press.

Prior, Arthur Norman (1967), "Negation", in Edwards, Paul, ed., *The Encyclopedia of Philosophy*, volume V, pp. 458–463, New York : Macmillan and the Free Press, reprinted in the second edition (Borchert, 2005).

Putnam, Hilary (1975a), *Mathematics, Matter and Method. Philosophical Papers, Volume 1*, Cambridge : Cambridge University Press, second edition : Putnam (1979).

Putnam, Hilary (1975b), *Mind, Language and Reality : Philosophical Papers, Volume 2*, Cambridge : Cambridge University Press.

PROOF

Putnam, Hilary (1979), *Mathematics, Matter and Method. Philosophical Papers, Volume 1*, Cambridge : Cambridge University Press, 2 edition, first edition : Putnam (1975a).

Quine, Willard van Orman (1940), *Mathematical Logic*, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press, third edition : Quine (1981).

Quine, Willard van Orman (1941), *Elementary Logic*, Waltham, Massachussetts : Ginn and Co.

Quine, Willard van Orman (1948), "On What There Is", *The Review of Metaphysics*, 2(5), pp. 21–38, republished as Quine (1951), reprinted in Quine (1953, 1–19) and in Loux (1970, 33–43).

Quine, Willard van Orman (1950), *Methods of Logic*, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press, fourth edition : Quine (1982).

Quine, Willard van Orman (1951), "On What There Is", *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volume*, 25, pp. 217–234.

Quine, Willard van Orman (1953), *From a Logical Point of View : 9 Logico-Philosophical Essays*, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press, cited after the revised edition : Quine (1961).

Quine, Willard van Orman (1955), "On Frege's Way Out", *Mind*, 64(254), pp. 145–159, reprinted in Quine (1966a, 146–158) and in Klemke (1968, 485–501).

Quine, Willard van Orman (1959), *Methods of Logic*, New York : Henry Holt, Rhinehart and Winston, Inc., 2 edition, first edition : Quine (1950).

Quine, Willard van Orman (1960), *Word and Object*, Cambridge, Massachusetts : The MIT Press, new edition : Quine (2013).

Quine, Willard van Orman (1961), *From a Logical Point of View : 9 Logico-Philosophical Essays*, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press, 2 edition, revised edition of Quine (1953), reprinted 1980.

Quine, Willard van Orman (1965), *Elementary Logic*, New York : Harper & Row Publishers, 3 edition, first edition : Quine (1941).

Quine, Willard van Orman (1966a), *Selected Logic Papers*, New York : Random House, second edition : Quine (1995).

Quine, Willard van Orman (1966b), *The Ways of Paradox and other essays*, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press, second, enlarged, edition : Quine (1976).

Quine, Willard van Orman (1970), *Philosophy of Logic*, Cambridge : Cambridge University Press, second edition : Quine (1986).

Quine, Willard van Orman (1972a), "Algebraic Logic and Predicate Functors", in Rudner, Richard and Scheffler, Israel, eds., *Logic and Art : Essays in Honor of Nelson Goodman*, pp. 214–238, Indianapolis, Indiana : Bobbs-Merrill Company Inc., reprinted in Quine (1976, 283–307).

Quine, Willard van Orman (1972b), *Logique élémentaire*, number 193 in U2, Paris : Armand Colin, traduction de Quine (1965) par Jean Largeault et Bertrant Saint-Sernin.

Quine, Willard van Orman (1972c), *Methods of Logic*, New York : Henry Holt, Rhinehart and Winston, Inc., 3 edition, first edition : Quine (1950).

Quine, Willard van Orman (1973), *Méthodes de logique*, Paris : Armand Colin, traduction de Quine (1972a) par Maurice Clavelin.

PROOF

Quine, Willard van Orman (1976), *The Ways of Paradox and other essays*, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press, 2 edition, first edition : Quine (1966b).

Quine, Willard van Orman (1981), *Mathematical Logic*, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press, 3 edition, first edition : Quine (1940).

Quine, Willard van Orman (1982), *Methods of Logic*, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press, 4 edition, first edition : Quine (1950).

Quine, Willard van Orman (1986), *Philosophy of Logic*, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press, 2 edition.

Quine, Willard van Orman (1995), *Selected Logic Papers*, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press, 2 edition, first edition : Quine (1966a).

Quine, Willard van Orman (2004), *Du point de vue logique : neuf essais logico-philosophiques*, Bibliothèque des textes philosophiques, Paris : Librairie philosophique Jean Vrin, traduction française de Quine (1953) par Sandra Laugier.

Quine, Willard van Orman (2013), *Word and Object*, Cambridge, Massachusetts : The MIT Press, first edition : Quine (1960).

Quine, Willard van Orman and Goodman, Nelson (1947), "Steps Toward a Constructive Nominalism", *The Journal of Symbolic Logic*, 12, pp. 105–122, reprinted in Goodman (1972, 173–198).

Récanati, François (2000), *Oratio Obliqua, Oratio Recta : An Essay on Metarepresentation*, Cambridge, Massachusetts : The MIT Press.

Récanati, François (2001), "Open Quotation", *Mind*, 110(439), pp. 637–687.

Récanati, François (2004), *Literal Meaning*, Cambridge : Cambridge University Press.

Regan, Donald H. (1980), *Utilitarianism and Co-operation*, Oxford : Oxford University Press.

Reimer, Marga (1996), "Quotation Marks : Demonstratives or Demonstrations ?", *Analysis*, 56, pp. 131–142.

Richard, Mark (1986), "Quotation, Grammar, and Opacity", *Linguistics and Philosophy*, 9(3), pp. 383–403.

Rivenc, François (1989), *Introduction à la logique*, Petite Bibliothèque Payot, Paris : Payot & Rivages.

Rivenc, François and de Rouilhan, Philippe, eds. (1992), *Logique et fondements des mathématiques, Anthologie (1850–1914)*, Paris : Payot.

Rorty, Richard, ed. (1967), *The Linguistic Turn*, Chicago, Illinois : University of Chicago Press, second edition : Rorty (1992).

Rorty, Richard, ed. (1992), *The Linguistic Turn*, Chicago, Illinois : University of Chicago Press, first edition : Rorty (1967).

Russell, Bertrand Arthur William (1903), *The Principles of Mathematics*, Cambridge : Cambridge University Press, 2nd edition : Russell (1937).

Russell, Bertrand Arthur William (1905), "On Denoting", *Mind*, 14(56), pp. 479–493, reprinted in Feigl and Sellars (1949, 103–115), in Russell (1956), Russell (1973, 103–119) and in Russell (1994, 414–428).

PROOF

Russell, Bertrand Arthur William (1906), "The Theory of Implication", *American Journal of Mathematics*, 28, pp. 159–202.

Russell, Bertrand Arthur William (1925), *The ABC of Relativity*, London : Kegan Paul, Trench, Trubner & Co., Ltd., fourth edition : Russell (1985b).

Russell, Bertrand Arthur William (1937), *The Principles of Mathematics*, London : George Allen & Unwin, 2 edition, second edition of Russell (1903), with a new introduction.

Russell, Bertrand Arthur William (1956), *Logic and Knowledge : Essays, 1901–1950*, London : George Allen & Unwin, edited by Robert Charles Marsh.

Russell, Bertrand Arthur William (1973), *Essays in Analysis*, London : George Allen & Unwin, edited by Douglas Lackey.

Russell, Bertrand Arthur William (1985a), *The ABC of Relativity*, London : Unwin Paperbacks, 4 edition, revised by Felix Pirani ; first edition : Russell (1925).

Russell, Bertrand Arthur William (1985b), *Contemplation and Action, 1902–1914*, number 12 in The Collected Papers of Bertrand Russell, The McMaster University Edition, London : George Allen & Unwin, edited by Richard A. Rempel, Andrew Brink and Margaret Moran.

Russell, Bertrand Arthur William (1989), "De la dénotation", in *Écrits de Logique Philosophique*, pp. 203–218, Paris : Presses Universitaires de France, traduction de Russell (1905) par J.-M. Roy.

Russell, Bertrand Arthur William (1994), *Foundations of Logic, 1903–1905*, number 4 in The Collected Papers of Bertrand Russell, The McMaster University Edition, London : Routledge, edited by Alasdair Urquhart, with the assistance of Albert C. Lewis.

Ryle, Gilbert (1949), *The Concept of Mind*, London : Hutchinson University Library, 60th anniversary edition : Ryle (2009b).

Ryle, Gilbert (1950), " 'If', 'So' and 'Because' ", in Black, Max, ed., *Philosophical Analysis : A Collection of Essays*, pp. 303–318, Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall, Inc., reprinted in Ryle (1971, 234–249) and in Ryle (2009a, 244–260).

Ryle, Gilbert (1971), *Collected Papers*, volume 2, Bristol : Thoemmes Press, new edition : Ryle (2009a).

Ryle, Gilbert (2009a), *Collected Papers, Volume 2 : Collected Essays 1929–1968*, volume 2, London : Routledge, first edition : Ryle (1971).

Ryle, Gilbert (2009b), *The Concept of Mind*, London : Routledge.

Saka, Paul (1998), "Quotation and the Use-Mention Distinction", *Mind*, 107(425), pp. 113–135.

Salmon, Nathan (1982), *Reference and Essence*, Oxford : Basil Blackwell Publishers.

Salmon, Nathan (1986), *Frege's Puzzle*, Cambridge, Massachusetts : The MIT Press.

Salmon, Nathan (1993), "A Problem in the Frege-Church Theory of Sense and Denotation", *Noûs*, 27(2), pp. 158–166, reprinted in Salmon (2005, 335–343).

Salmon, Nathan (2005), *Metaphysics, Mathematics, and Meaning. Philosophical Papers Volume 1*, Oxford : Oxford University Press.

PROOF

Schlick, Moritz (1918), *Allgemeine Erkenntnislehre*, number 1 in Naturwissenschaftliche Monographien und Lehrbücher, Berlin : Julius Springer, 1 edition, second edition : Schlick (1925).

Schlick, Moritz (1925), *Allgemeine Erkenntnislehre*, number 1 in Naturwissenschaftliche Monographien und Lehrbücher, Berlin : Julius Springer, 2 edition, first edition : Schlick (1918).

Schlick, Moritz (2009), *Théorie générale de la connaissance*, Bibliothèque de philosophie, Paris : Gallimard, traduction de Schlick (1925) par Christian Bonnet.

Schwartz, Stephen P., ed. (1977), *Naming, Necessity, and Natural Kinds*, Ithaca, New York : Cornell University Press.

Searle, John R. (1969), *Speech Acts : An Essay in the Philosophy of Language*, Cambridge : Cambridge University Press.

Searle, John R. (1972), *Les Actes de langage*, Paris : Hermann & cie, traduction de Searle (1969).

Searle, John R. (1975), "Indirect Speech Acts", in Cole and Morgan (1975), pp. 59–82.

Sheffer, Henry M. (1913), "A Set of Five Independent Postulates for Boolean Algebras, with Application to Logical Constants", *Transactions of the American Mathematical Society*, 14(4), pp. 481–488.

Shorter, Michael (1956), "Meaning and Grammar", *Australasian Journal of Philosophy*, 34(2), pp. 73–91.

Sider, Theodore (2011), *Writing the Book of the World*, Oxford : Oxford University Press.

Smith, Robin (2017), "Aristotle's Logic", in Zalta, Edward N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Stanford, California : The Metaphysics Research Lab, Center for the Study of Language and Information, revision, February 17, 2017, of the version of March 18, 2000.

Smullyan, Raymond M. (1957), "Languages in which self-reference is possible", *The Journal of Symbolic Logic*, 22, pp. 55–67.

Smullyan, Raymond M. (1968), *First-Order Logic*, number 43 in Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin : Springer Verlag.

Smullyan, Raymond M. (1978), *What is the Name of this Book ? The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*, Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall, Inc.

Smullyan, Raymond M. (1980), *This Book Needs No Title. A Budget of Living Paradoxes*, Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall, Inc.

Smullyan, Raymond M. (1981), *Quel est le titre de ce livre ? Des énigmes mathématiques drôles et déroutantes*, Paris : Dunod, traduction de Smullyan (1978) par Jérôme Marthon.

Smullyan, Raymond M. (1982a), *Alice in Puzzle-Land. A Carrollian Tale for Children Under Eighty*, London : Penguin Books.

Smullyan, Raymond M. (1982b), *Lady or the Tiger ? And Other Logic Puzzles Including a Mathematical Novel That Features Gödel's Great Discovery*, New York : Times Books.

Smullyan, Raymond M. (1983), *5000 B.C. and other Philosophical Fantasies*, New York : St. Martin's Press.

Smullyan, Raymond M. (1984), *Le livre qui rend fou !*, Paris : Dunod, traduction de Smullyan (1982b) par Jérôme Marthon.

PROOF

Smullyan, Raymond M. (1992), *Satan, Cantor, and Infinity and Other Mind-Boggling Puzzles*, New York : Alfred A. Knopf.

Smullyan, Raymond M. (1993), *Recursion Theory for Metamathematics*, number 22 in Oxford Logic Guides, Oxford : Oxford University Press.

Smullyan, Raymond M. (1997), *The Riddle of Scheherazade : And Other Amazing Puzzles, Ancient & Modern*, San Diego, California : Harvest.

Smullyan, Raymond M. (1998), *Les énigmes de Shéhérazade ou Comment une malicieuse princesse vient au bout de 200 questions de logique et de mathématique*, Paris : Flammarion, traduction de Smullyan (1997) par Willem van den Brul.

Smullyan, Raymond M. (2007), *The Magic Garden of George B. and Other Logic Puzzles*, Monza : Polimetrica, reissued as Smullyan (2015).

Smullyan, Raymond M. (2010), *King Arthur in Search of His Dog and Other Curious Puzzles*, Mineola, New York : Dover Publications.

Smullyan, Raymond M. (2015), *The Magic Garden of George B. and Other Logic Puzzles*, Singapore : World Scientific Publishing Co., reissue of Smullyan (2007).

Steinberg, Danny D. and Jacobovits, Leon A., eds. (1971), *Semantics : An Interdisciplinary Reader in Philosophy, Linguistics, and Psychology*, Cambridge : Cambridge University Press.

Stone, Marshall H. (1936), "The Theory of Representations for Boolean Algebras", *Transactions of the American Mathematical Society*, 40(1), pp. 37–111.

Strawson, Peter Frederick (1949), "Truth", *Analysis*, 9(6), pp. 83–93.

Strawson, Peter Frederick (1950), "On Referring", *Mind*, 59(235), pp. 320–344, reprinted, with some added footnotes, in Flew (1956, 21–52), Caton (1963, 162–193), Klemke (1970, 147–172), Strawson (1971, 1–27), Moore (1993, 56–79) and in Strawson (2004, 1–20).

Strawson, Peter Frederick (1961), "Social Morality and the Individual Ideal", *Philosophy*, 36(136), pp. 1–17.

Strawson, Peter Frederick (1971), *Logico-Linguistic Papers*, London : Methuen & Co., reprinted as Strawson (2004).

Strawson, Peter Frederick, ed. (2004), *Logico-Linguistic Papers*, Aldershot, Hampshire : Ashgate Publishing Limited, 2 edition.

Suppes, Patrick (1957), *Introduction to Logic*, Princeton, New Jersey : Van Nostrand.

Tarski, Alfred (1930), "O pojęciu prawdy w odniesieniu do sformalizowanych nauk dedukcyjnych", *Ruch Filozoficzny*, 12, pp. 210–211.

Tarski, Alfred (1933), "Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych", *Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, nauk matematyccznofizycznych (Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, Sciences Mathématiques et Physiques)*, 26, lectures given at the Logic Section of the Philosophical Society in Warsaw on October 8, 1930 and at the Polish Philosophical Society in Lwów on December 5, 1930; reprinted in Zygmunt (1995, 13–172); a summary of the chief results was published as Tarski (1930) and a revised German translation was published as Tarski (1935a); English translation Tarski (1956b, 152–278).

PROOF

Tarski, Alfred (1935a), "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen", *Studia Philosophica (Commentarii Societatis Philosophicae Polonorum)*, 1, pp. 261–405, translation of Tarski (1933).

Tarski, Alfred (1935b), "Grundzüge des Systemkalkül, Erster Teil", *Fundamenta Mathematicae*, 25, pp. 503–526, translated, together with Tarski (1935c), as Tarski (1956a).

Tarski, Alfred (1935c), "Grundzüge des Systemkalkül, Zweiter Teil", *Fundamenta Mathematicae*, 26, pp. 283–301, translated, together with Tarski (1935b), as Tarski (1956a).

Tarski, Alfred (1936), *O logice matematycznej i melodzie dedukcyjnej*, Lwów : Ksiaznica-Atlas, translated into German : Tarski (1937).

Tarski, Alfred (1937), *Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik*, Wien : Springer Verlag, translation of Tarski (1936).

Tarski, Alfred (1941), *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, New York : Oxford University Press, revised and enlarged edition of Tarski (1936).

Tarski, Alfred (1946), *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, New York : Oxford University Press, 2 edition, first edition : Tarski (1941); reprint : Tarski (1995).

Tarski, Alfred (1956a), "Foundations of the Calculus of Systems", in Tarski (1956b), pp. 342–383, trans. J.H. Woodger, 2nd edition : Tarski (1983).

Tarski, Alfred (1956b), *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*, Oxford : Oxford University Press, 1 edition, trans. J.H. Woodger, 2nd edition : Tarski (1983).

Tarski, Alfred (1971), *Introduction à la logique*, number 16 in Collection de Logique Mathématique, Paris : Gauthier Villars Éditeur, traduction de Tarski (1946) par Jaques Tremblay.

Tarski, Alfred (1972), "Le concept de vérité dans les langages formalisés", in *Logique, sémantique, métamathématique. 1923–1944. Tome premier*, pp. 157–269, Paris : Armand Colin, traduction de Tarski (1956b).

Tarski, Alfred (1983), *Logic, Semantics, Metamathematics*, Indianapolis, Indiana : Hackett Publishing Co., 2 edition, trans. J.H. Woodger, edited and introduced by John Corcoran, 1st edition : Tarski (1956b).

Tarski, Alfred (1995), *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, Mineola, New York : Dover Publications, 2 edition, reprint of Tarski (1946).

Thompson, Jr., Manley H. (1953), "On Aristotle's Square of Opposition", *The Philosophical Review*, 62(2), pp. 251–265, reprinted in Moravcsik (1967, 51–72).

Travis, Charles (2008), *Occasion-Sensitivity. Selected Essays*, Oxford : Oxford University Press.

Venn, John (1880), "On the Forms of Logical Proposition", *Mind*, 5(19), pp. 336–349.

Vernant, Denis (2001), *Introduction à la logique standard – calcul des propositions, des prédicats & des relations*, number 3027 in Champs Université ; Sciences, Paris : Flammarion.

Wallace, John R. (1970), "On the Frame of Reference", *Synthese*, 22(1–2), pp. 117–150, reprinted in Davidson and Harman (1972, 219–252).

Washington, Corey (1992), "The Identity Theory of Quotation", *The Journal of Philosophy*, 89(11), pp. 582–605.

PROOF

Whitehead, Alfred North and Russell, Bertrand Arthur William (1910), *Principia Mathematica*, volume 1, Cambridge : Cambridge University Press, 2nd ed. : Whitehead and Russell (1925), abriged as Whitehead and Russell (1956).

Whitehead, Alfred North and Russell, Bertrand Arthur William (1912), *Principia Mathematica*, volume 2, Cambridge : Cambridge University Press, 2nd ed. : Whitehead and Russell (1927a), abriged as Whitehead and Russell (1956).

Whitehead, Alfred North and Russell, Bertrand Arthur William (1913), *Principia Mathematica*, volume 3, Cambridge : Cambridge University Press, 2nd ed. : Whitehead and Russell (1927b), abriged as Whitehead and Russell (1956).

Whitehead, Alfred North and Russell, Bertrand Arthur William (1925), *Principia Mathematica*, volume 1, Cambridge : Cambridge University Press, 2 edition, 1st ed. : Whitehead and Russell (1910), abridged as Whitehead and Russell (1956).

Whitehead, Alfred North and Russell, Bertrand Arthur William (1927a), *Principia Mathematica*, volume 2, Cambridge : Cambridge University Press, 2 edition, 1st ed. : Whitehead and Russell (1912).

Whitehead, Alfred North and Russell, Bertrand Arthur William (1927b), *Principia Mathematica*, volume 3, Cambridge : Cambridge University Press, 2 edition, 1st ed. : Whitehead and Russell (1913).

Whitehead, Alfred North and Russell, Bertrand Arthur William (1956), *Principia Mathematica to *56*, Cambridge : Cambridge University Press, abriged second edition (Whitehead and Russell, 1925, 1927a,b); first edition : Whitehead and Russell (1910, 1912, 1913).

Williamson, Timothy (2003), "Everything", in Zimmerman, Dean W. and Hawthorne, John, eds., *Philosophical Perspectives 17 : Language and Philosophical Linguistics*, pp. 415–465, Oxford : Basil Blackwell Publishers.

Williamson, Timothy (2013), *Modal Logic as Metaphysics*, Oxford : Oxford University Press.

Wittgenstein, Ludwig (1921), "Logisch-philosophische Abhandlung", *Annalen der Natur- und Kunstphilosophie*, 14, pp. 184–261, cited after Wittgenstein (1998).

Wittgenstein, Ludwig (1969), *On Certainty*, Oxford : Basil Blackwell Publishers, edited by G.E.M. Anscombe and R. Rhees, translation from the German by Denis Paul and G.E.M. Anscombe.

Wittgenstein, Ludwig (1976), *Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge, 1939*, Chicago, Illinois : University of Chicago Press, from the notes of R.G. Bosanquet, Norman Malcolm, Rush Rhees and Yorick Smythies edited by Cora Diamond.

Wittgenstein, Ludwig (1987), *De la certitude*, number 121 in Tel, Paris : Gallimard, traduction de Wittgenstein (1969) par J. Fauve, avec une notice biographique établie par Georg Henrik von Wright et traduite de l'anglais par Guy Durand.

Wittgenstein, Ludwig (1993), *Tractatus logico-philosophicus*, Bibliothèque de Philosophie, Paris : Gallimard, traduction, préambule et notes de Gilles-Gaston Granger.

Wittgenstein, Ludwig (1998), *Logisch-philosophische Abhandlung / Tractatus logico-philosophicus*, Frankfurt a.M. : Suhrkamp Verlag, critical ed. by Brian McGuiness and Joachim Schulte.

Wittgenstein, Ludwig (2006), *De la certitude*, Bibliothèque de Philosophie, Paris : Gallimard, traduction de Wittgenstein (1969) par Danièle Moyal-Sharrock.

Wright, Crispin (1983), *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen : Aberdeen University Press.

PROOF

Zermelo, Ernst (1908), "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I", *Mathematische Annalen*, 65, pp. 261–181, translated by Stefan Bauer-Mengelberg in van Heijenoort (1967, 199–215).

Zygmunt, Jan, ed. (1995), *Alfred Tarski, Pisma Logiczno-Filozoficzne*, volume I, Warszawa : Państwow Wydawnictwo Naukowe (PWN).

PROOF