Addendum à la déduction naturelle

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Feuille d'accompagnement pour le cours du 16 décembre 2003

Points à retenir pour la déduction naturelle

1. La caractéristique de la méthode de la déduction naturelle est l'usage des suppositions. La règle des suppositions nous permet d'introduire n'importe quelle supposition à n'importe quelle stade de la preuve ; les règles PC, RAA et $\vee\mathbf{E}$ nous permettent de nous en décharger.
2. Les règles de la déduction naturelle sont des règles d'introduction et d'élimination pour les connecteurs propositionnels et peuvent être conçues comme donnant leurs significations.
3. La méthode de la déduction naturelle consiste en les règles suivantes :
   (a) supposition : je peux supposer ce que je veux (si j'en tiens compte ensuite)
   (b) MP : si j'ai déjà "$p \rightarrow q$" et aussi "p", je peux écrire "q".
   (c) MT : si j'ai déjà "$p \rightarrow q$" et aussi "$\neg q$", je peux écrire "$\neg p$".
   (d) PC : si j'ai supposé "p" et montré ensuite"q", je peux écrire "$p \rightarrow q$".
   (e) DN : si j'ai déjà "$\neg\neg p$", je peux écrire "p" ; si j'ai déjà "p", je peux écrire "$\neg\neg p$".
   (f) RAA : si j'ai supposé "p" et montré qu'il s'ensuit "q" et aussi "$\neg q$", je peux écrire "$\neg p$".
   (g) $\wedge\mathbf{I}$: si j'ai déjà "p" et "q", je peux écrire "$p \wedge q$".
   (h) $\wedge\mathbf{E}$: si j'ai déjà "$p \wedge q$", je peux écrire "p" et aussi écrire "q".
   (i) $\vee\mathbf{I}$: si j'ai déjà "p", je peux écrire "$p \vee q$" ; si j'ai déjà "q", je peux écrire "$p \vee q$".
   (j) $\vee\mathbf{E}$: si j'ai montré "$p \vee q$" et que "r" s'ensuit de "p" et que "r" s'ensuit de "q", je peux écrire "r".
   (k) $\leftrightarrow \mathbf{I}$: si j'ai déjà "$p \rightarrow q$" et "$q \rightarrow p$", je peux écrire "$p \leftrightarrow q$".
   (l) $\leftrightarrow \mathbf{E}$: si j'ai déjà "$p \leftrightarrow q$", je peux écrire "$p \rightarrow q$" et aussi écrire "$q \rightarrow p$".
4. L'application de ces règles nous permet d'écrire des preuves des théorèmes ("$\vdash p$") et des séquents ("$p \vdash q$").
5. Pour avoir prouvé un théorème ou un séquent, il faut avoir déchargé toute supposition.
6. Pour établir une conclusion implicative, il convient d'utiliser PC.
7. Pour établir une conclusion négative ou une conclusion simple, il convient d'utiliser RAA.
8. Le théorème de déduction nous assure de la validité de la règle de preuve conditionnelle.
9. La méthode de la déduction naturelle nous permet d'utiliser des règles dérivées.
10. La déduction naturelle est une méthode syntaxique qui est correct et complète : toute séquent déductible correspond à une relation de conséquence sémantique et toute conséquence sémantique peut être déduite comme séquent.

Une heuristique pour la déduction naturelle

Voici une heuristique pour la déduction naturelle (d'après Lepage, p. 149) :

1. Y a-t-il des prémisses ou des propositions déjà démontrées de la forme $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$?
   $\Longrightarrow$ Utilisez ($\wedge$**E**).
2. Y a-t-il deux prémisses ou des propositions déjà démontrées de la forme $\phi, \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$?
   $\Longrightarrow$ Utilisez (MP).
3. Y a-t-il deux prémisses ou des propositions déjà démontrées de la forme $\ulcorner \neg\psi \urcorner, \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$?
   $\Longrightarrow$ Utilisez (MT).
4. La conclusion a-t-elle la forme $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$?
   $\Longrightarrow$ Supposez que ϕ, prouvez que ψ et utilisez (PC).
5. La conclusion a-t-elle la forme $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$?
   $\Longrightarrow$ Prouvez que ϕ, prouvez que ψ et utilisez ($\wedge$**I**).
6. La conclusion a-t-elle la forme $\ulcorner \neg\phi \urcorner$?
   $\Longrightarrow$ Supposez que ϕ, prouvez, sous cette supposition, que ψ et que $\ulcorner \neg\psi \urcorner$ et utilisez (RAA).
7. La conclusion est-elle une proposition simple "p" ?
   $\Longrightarrow$ Supposez "$\neg p$", prouvez, sous cette supposition, que ψ et que $\ulcorner \neg\psi \urcorner$ et utilisez (RAA).
8. La conclusion a-t-elle la forme $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$?
   $\Longrightarrow$ Il y a trois possibilités :
   (i) essayez de prouver ϕ,
   (ii) essayez de prouver ψ ou
   (iii) essayez de réduire $\ulcorner \neg(\phi \vee \psi) \urcorner$ à l'absurde.
9. Y a-t-il des prémisses ou des propositions déjà démontrées de la forme $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$?
   $\Longrightarrow$ Essayez de prouver la conclusion à partir de ϕ et à partir de ψ et utilisez ($\vee$**E**).
10. Y a-t-il des prémisses ou des propositions déjà démontrées de la forme $\ulcorner \neg(\phi \vee \psi) \urcorner$?
    $\Longrightarrow$ Essayez de prouver ϕ ou de prouver ψ et utilisez ($\vee$**I**) pour obtenir une contradiction.
11. Pour dériver une contradiction d'une prémisse de la forme $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ ou $\ulcorner \neg(\phi \wedge \psi) \urcorner$, cherchez à dériver $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ ou $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$.
12. Pour dériver une contradiction d'une prémisse de la forme $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$, dérivez ϕ, appliquez (MP) et cherchez une contradiction à ψ.