

Examen probatoire du 27 janvier 2004  
 Cours d'introduction à la logique, semestre d'hiver 2003-2004  
 Peut compter comme série pour ceux qui en ont une de moins  
 A rendre avant le vendredi, 30 janvier, 16 h

Nom(s) : \_\_\_\_\_

Points possibles (dans 5 questions avec un total de 20 points) : \_\_\_\_\_

1. (4 points) Montrer au moyen de tables de vérité que les formules suivantes sont des tautologies :
  - (a) " $p \rightarrow p$ "
  - (b) " $((p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r))$ "
  - (c) " $\neg(\neg p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$ "
  - (d) " $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ "
2. (4 points) Vérifiez, à l'aide de la méthode des arbres, si les propositions suivantes peuvent être prouvées :
  - (a) " $(\neg q \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow p))$ "
  - (b) " $\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$ "
  - (c) " $(p \vee q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$ "
  - (d) " $((p \leftrightarrow q) \wedge (q \wedge r) \wedge (q \rightarrow s)) \rightarrow (s \rightarrow p)$ "
3. (4 points) Prouvez, par la méthode de la déduction naturelle, les séquents suivants :
  - (a) " $\{p \rightarrow q, p \rightarrow r\} \vdash p \rightarrow (q \wedge r)$ "
  - (b) " $\{p \rightarrow q, r \rightarrow s\} \vdash (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)$ "
  - (c) " $\vdash p \rightarrow (q \vee \neg q)$ "
  - (d) " $p \wedge \neg p \vdash p$ "
4. (4 points) Prouvez, à l'aide de la méthode des arbres, les propositions suivantes :
  - (a) " $\forall x(Fx) \rightarrow \forall y(Fy)$ "
  - (b) " $(\forall x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \exists x(Fx \wedge Hx)) \rightarrow \exists x(Gx \wedge Hx)$ "
  - (c) " $\exists x \forall y \exists z (Sxyz) \rightarrow \forall y \exists x \exists z (Sxyz)$ "
  - (d) " $\exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow (\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx))$ "
5. (4 points) Prouvez, par la méthode de la déduction naturelle, les séquents suivants :
  - (a) " $\{\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Hx \rightarrow \neg Gx)\} \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$ "
  - (b) " $\{\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx), \forall x \neg(Hx)\} \vdash \forall x \neg(Fx)$ "
  - (c) " $\exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)$ "
  - (d) " $\forall x(Fx \rightarrow Fa) \vdash \exists x(Fx) \rightarrow Fa$ "